EVCLIDES ADAVCTVS ET METHODICVS MATHEMATICAQ; VNIVERSALIS

CAROLO EMANVELI II.

SABAVDIAE DVCI PEDEMONTIVM PRINCIPI
REGI CYPRI, &c.

DICATA,

Quæ ne dum propositionum dependentiam, sed & rerum ordinem obseruat. Et complectitur ea omnia, quæ de quantitate tum discreta, tum continua abstracta speculari queunt. Resectis superfluis demonstrationibus, & requisitis omnibus profusè coadunatis.

Singuli quoque Tractatus nouis propositionibus adaucti sunt, & aliqui etiam ex integro adornati. Omnesque tùm figuris, tùm verbis clarè, dillucidèque propositi.

AVCTORE
D. GVARINO GVARINO
MVTINENSI C.R. THEATINO,
Philosofo, Theologo & eiusdem R. C. Mathematico.

Ex Majori Carmelo Lugdunensi

AVGVSTÆ TAVRINORVM, M DC. LXXI.

Typis Bartholomæi Zapatæ Bibliopolæ S. R. C.

Superiorum permissu.

REGALIS CELSITVDO.

FOLIA hæc, quæ Vniuersalis Mathematicæ limpidissimas demonstrationes candidis sinubus concepere, insolubili obligatione deuincta, & mole officiorum coacta, sub augustissimo nomine R. C. V. in scenam literariam prodire gliscunt. Illi enim gloriosissimo suæ magnitudinis iubare obscura huius voluminis incunabula irradiare iuuabit, quòd ab ea facultate deriuet, quæ nobilis inter alias Magnorum Principum limina familiari terit incessu, & modo ad pedes R. C. V. se obsequiosa prouoluit in tributum profusa illius maiestatis, quæ omnigenæ virtutis, & ingenuæ, ne dum in solidissimum columen, & liberalissimum Mæcenatem se se magnanimo offert subsidio: sed insuper Thaumaturga Mathematicorum miraculorum insigni, vereque Regali architectura coruscat: Talem etenim illam plaudenti conclamant aspectu Venaria amœnis instructa viridarijs, substructionibusque superbis turrita regius voluptatum, deliciarumque thronus, augustissima Palatia, Ædes sumptuosissimæ, aditus triumphales magnarum vrbium, aliaque permulta sua admirabili protoplastice excogitata, & ad artem vltimam solis nutibus, aspectuque directa.

Excipiat itaque R. V. C. pacato vultu, serenaque clementia illam; quam toties in concipiendis sublimibus ideis vasto ingenij sui sinu fouit mathesim, & in ea adornanda exanthlatos laboris mei conatus; qui simul opportunitatem mihi aperiunt, & me, & totius voluntatis meæ dicatissimas vires in hostiam obsequij, deuotique cultus consecrandi. Dum ad terram demisso vultu profundissimum in flexum deciduus regales vestros poplites humillimus adoro.

V. R. C.

Humillimus, Obsequentiss.^mus & Oblig.^mus Seruus

D. Guarinus Guarinus C. R.

BENEVOLO LECTORI.

CVM inter illos, qui in elementa Euclidis desudarunt, nullum intuear, vnico consarcinare volumine, quæ ad quantitatem sub genere inuestigandam faciunt, secutus sæculi genium, quod centuriat, vt plurimùm, & florilegia condit, putaui nequaquam me frugem perdere; si huic muneri vniuersaliùs inseruirem, & Mathematica rerum exordia ex omni parte rotunda, & contornata exiberem. Siquidem ex meo labore didici, cuius pretij, cuius vtilitatis id operis emergat; quod ea omnia, quæ Mathematicas luces, & euidentias in vnicum lucis fontem, adeoq; solem ne dum tumultuaria collectione aglomeret: sed etiam ordinato agmine disponat, in seriesq; suas naturali consecutione distinguat præcipué illis, qui nullo Mercurio tramitis indice, aut duce audent se huic studio consignare, & admodùm dificilem prouinciam in suam sarcinam traducere. Pone enim me tibi offerre pulcherrimam, eamq; vtilissimam demonstrationem, quæ tamen, aut Pergæi, aut Archimedis, aut Pappi rarissimos libros ad sui euidentiam exposcat, quos, aut nunquam perlustraueris, aut ne quidem consequi te posse fidas: quam hauries lucem, aut quam scientiam adipisceris? aut potiùs quibus tenebris, qua caligine non confuderis? Ideoq; cum tota Mathematica sit alligata in vnumq; corpus naturali lege deuincta: quod diuidi non patiatur sine totius detrimento, si quis totum non colligat, nihil colligit, & frugiperda nixu monstrum nulla euidentia animatum in malè destinatos trahit amplexus.

Scio quidem Herigonium Parisijs, & Schotum in Belgio cursus Mathematicos eruditissimos cudisse: sed hic ostensiones sæpius solis operibus occupatus ex industria præterit, ille multis libris diuersoq; tempore editis, vt rarus sit ille, qui in suum commodum congerere possit, institutum prosequutus est. Quamobrem cum nullus in Italia huic locubrationi se dederit, & exteri, aut nullatenùs obtineri; aut non sine magno pretio negotioq; à suo cęlo in nostras regiones peregrinari cogantur; non ingratum reipublicę literarię fore suspicatus sum; si illud laboris, quod meis priuatis profectibus desudaram, publici iuris facerem: Maximè quia in illud, quod omnes huius rei scriptores posthabuerunt, pręcipuè animum fixi; vt propositiones nedum in seriem, quoad earum, vt assolet, deriuationem, sed etiam quoad doctrinæ dignitatem, rerumq; naturalem sedem digererem: & à superfluis, & quæ nullius vtilitatis erant expiarem: nullas aduenas rogarem assertiones in veritatis vadimonium; doctrinam in se se redeuntem, sibiq; ipsi famulam ab omni alieno iure absoluerem, vt qui legit nihil aliud ad perfectum captum desideret, quæ omnia non sine eluctamento obtinui. Odopęium me præstiti; nullisq; parcens verbis, aut figuris, amfractus, alioquin senticosos, petricososq; ab omni offendiculo immunes in vias veluti consulares aperui: Et ne aliquis subrostrarius mihi obmurmuret, in fastidiumq; versus torcularibus incassùm defatigatis misereatur; non omnia ex penu rurido antiquitatis prolata; lapidem, & nos protulimus, & antiquos Mathesis limites aliquantùm submouimus. Herculeos enim terminos præterlabenti ingenio nouæ doctrinarum regiones, illæq; feraces, & vtiles detectę. Multę ostensiones, aut quod nullę extabant, aut quòd proniores exoptarentur instructę; quidam tractatus denuò magna ex parte adornati, aliqui exintegro conditi, paucis non additum. Quæ omnia asterismis prenotaui, aut saltem plurima (in paucis enim ex incuria pretermissum) Scilicet ne videar alienis pennis

amici-

amiciri malè ominata cornix, & de cęterò, vt nostra cautiùs excipiantur, tanquam nulla auctoritate suffulta, & si aliquid erratum fuerit, aut in meliùs fęliciori ingenio restituatur, aut saltem ab humanitate lectorum meę imbecillitati condonetur. Noui hominum non vnam esse indolem; cuicunq; necesse est suos ante se cernere antistomos, suos audire antisthrofos. Vatesq; mihi sum eos, qui omne encęnismum stomacantur vindices annositatis quęsituros in scirpo nodum, vt quid culpent, nanciscantur. Sed faciant per me; licet. Talibus infortunijs assueui. Meus, etenim liber, quem inscripsi *Placita Philosofica*, & Parisijs cusioni dedi anno 1665. iam pridem in hoc detrimentum, & quidem à limine incespitauit. Anno enim 1667. Ioannes Bonifacius Bagatta, quondam meus auditor Cursum Philosoficum edidit, qui ne dum philosofantium more multa in quęstionem protrait: sed videtur maiori nixu me persequi. Omnia veterat. Auctores plurimi saltem aliqui anonymi iam sententias omnes meas proposuere, dicant, vel saltem accinant, vel etiam pænitùs non alludant, verum semper est idem iam protulisse. In meas aliquas rationes inuehitur non tamen in omnes ferocescit: sed nec quidem earum meminit, vt scilicet credatur funditùs omnia prostrauisse. Sententias non semel meas amplectitur; Sed quasi in occulto eas diuersis verbis personatas proponens, quasi piaculum foret, me aperto vultu sequi, & aliquando in verba Magistri iurasse. Sed quod dissimulare nequeo, me vocat in memetipsum, & cogit contra fas in me, & iniustè quidem, pugnare. Et ne videar in ventos fari; hoc siue aliud exemplum in spectaculum producam. Ipse enim Sec. 2. de præd. p. 77. n. 14. in resp. vbi tantùm aliqua mea argumenta ostendentia Modum prędicamenti dignitate non potiri subuertere nititur, dicit. *Deinde secundùm communem sententiam, quam, ~~& ipse Guarinus sustinet actio~~, & passio sunt diuersa prædicamenta, & tamen*. ~~& con~~tuere an actionem, & pas~~sionem in diuersa prædica~~menta secerni, ~~iuxta~~ communi fatear, & lege meam dispút. 12. Exp. 2. lit. B. pag. 105. probat. 2. vbi ex eo quod *aliqua ex prædicamentis non distinguantur inuicem, vt actio, & passio* arguo. *Diuisionem entis in decem prædicamemta potiùs per modum exempli ab Aristotele fuisse traditam; quam quod existimauerit eam esse bonam, & adæquatam*. Et ibidem conc. 2. assero. *Quæ verè, & certè prædicamenta appellantur sunt substantia, & accidens*. Si itaq. duo tantùm prædicamenta statuo substantiam, & accidens, quì sustineo actionem, & passionem prædicamenta quoq; multiplicare? Vidisti ne: vt sua confirmet, quàm me versatilem efficiat? Sed & patere aliud huius rei specimen adhuc proponi. Conclusionem statuit dis. 2. sec. 2. in 1 L. phisic. pag. 54. conc. 2. n. 11. *Formam materialem substantialem non esse entitatem distinctam à materia (sed esse actualem terminum substantialem intrinsecum eiusdem materiæ, à quo materia taliter modificata, & affecta, & terminata constituitur in determinata phisica specie.) Fitq; potens ad conseruanda ea omnia, quæ ad totalem conseruationem compositi spectant*. Deinde subinfert. *eam etiam aliquo pacto defendit Guarinus asserendo eam esse puram potentiam*. Sed heus sequere; ne quęso mancha proferas effata, quid pono dis. 3. phisicæ conc. 1. pag. 119? Non ne hic affirmo; formam de se non habere vllam entitatem: sed esse puram potentiam? quod deinde declaro pag. 200. l. D, conc. 2. *Dicimus*, inquiens, *formam esse puram potentiam; quia agens naturale per suas operationes nihil aliud facit; nisi imprimere quandam potentiam in materia per quam efficitur sibi principium suorum accidentium conseruatiuum, & reparatiuum, & etiam omnium aliarum operationum*. Tolle ergo à tua Thesi verba quæ parenthesi clauduntur, veluti ea, quæ ex eo quod forma dicatur. naturali lege sequantur, & ipsissimam defendam opinionem: non aliquo pacto imitabor; Sed quid deinde in mea argumenta buccinas? ad

quid

quid immeritò me cogis? vt tibi videaris efficacissimum in me vibrasse argumentum inquis. *Si agens naturale non haberet virtutem producendi ex nihilo*. Hoc enim ad confirmandam propositionem assumpsi. *neque formas accidentales posset producere, quod tamen nec ipse Guarinus asserere potest*. Sed cur accidentia ab agente non produci affirmare nequeo? Non ne disp. 14. logicæ exp. 5. pag. 117. accidens ab alijs accidentibus edi per modificationem diuersam probaui? Non ne eadem disp. exp. 4. & disp. 6. phisicæ exp. 10. conc. 1. pag. 124. affirmaui accidentia de subiecto in subiectum peregrinari, & per communicationem produci. Non ne disp. 5. de gener. & corrupt. exp. 4. conc. 2. effectum formalem ab efficiente distinxi, & posse accidens in subiecto commorari absque eo, quod vllum sui inditium præberet in mouendo subiecto. Igitur, & si aliqua causa denudata accidente videatur. V G. aqua feruida frigore; frigus tamen latens in se, vel in minimo gradu tuetur quoad entitatem, quamuis non prodeat in frigefactionem; quod remota causa efficatiori calorem extraneum de se euanescentem vt dico disp. eadem exp. 2. in resp. ad arg. 2. facilè desijcit, & in pristina se restituit. Semper itaq; exeret accidens, ex aliquo gradu sui; cum nunquam à materia elliminetur. Vbi est ergo ex meis principijs formarum accidentalium ex nihilo prolatio siue in compositi proprios sinus, siue in alienos?

Hæc autem non dixerim; quod virum in crimen vocem, quasi ex instituto, & arte subdola hæc mihi inusserit; neq; enim candidos eius mores ea suspicione fædare fas, & honestum permittit: Sed quod aut tædio victus, vel agendorum machina pressus, non potuerit totum volumen perlustrare. vel quod scriptorum meorum, quos extemporaneos, & sublestos eccepit aliqua fortè positione delusus iudicauit eamet typis mandasse. Quid quid causę id fuerit non potuit in adeo religioso viro; quod in me actum est, non nisi ab honestatis amore, studioq; veritatis excludi.

Debui *tamen meis* non deesse; beneuoloq; lectori dementum, improuidamq; allucinationem aperire, ne quis putaret mea tela mihi inimica; & in mea præcipitia ædificasse. Contineat ergo fidem suam quis quis æquus iudex in illum Cursum Philosoficum inci derit; donec, & nostra euoluat, & quod mihi tribuitur, meum esse dignoscat: auritus vtrinq; sit, nec reum damnet, donec in ius compellat, & denunciatos lapsus ipsa re intueatur.

Interim hunc Librum eccipe, in quo non multæ opiniones: omnia solidissimis demonstrationibus illustrata, ex quò facilè dignosces an in Placitis Philosophicis adeo inconstanti voce vibrissare potuerim, & alternatione tam continuata ludere, interim dum rerum mensuras, & Symbolizationes stupendas eccipis Diuinam artem admirari non intermittas: qui omnia trutina examinauit, lanceq; suæ omnipotentiæ, vt semper admirabilis dignosceretur appendit.

LIBRVM hunc, cui titulus Euclides adauctus, & methodicus à doctissimo Patre D. Guarino Guarino conscriptum vidi iussu Reuerendissimi P. Magistri Thomæ Camotti Generalis Inquisitoris Taurinen. in eoq; nihil, quod orthodoxæ religioni, vel bonis moribus aduersetur, deprehendi: quinimo preclarum hoc opus omnibus matheseos studiosis vtilissimum, & publica luce dignissimum censeo. Datum in Colleggio Societatis Iesu die 31. Martij 1671.

Franciscus de Malines Societatis Iesu
in Collegio Taurinensi studiorum Præfectus.

EGO infrascriptus Sacræ Theologiæ Lector de mandato Reuerendissimi Patris F. Thomæ Camotti Inquisitoris Taurini diligenter perlegi opus, cui titulus est, Euclides adauctus, & methodicus ab Adm. Reuerendo Patre D. Guarino Guarinio Ordinis Clericorum Regularium conscriptum, & elaboratum, & nihil in eo animaduerti Sanctæ fidei, aut bonis moribus aduersum; imo omnia in eo contenta perutilia fore Reipublicæ literariæ, & Mathematicarum artium professoribus. In quorum fidem, &c. Datum in Conuentu S. Dominici de Taurino die 20. Martij. 1671.

F. Petrus Martyr Rubeus Ord. Præd.

Imprimatur.
F. THOMAS CAMOTTVS Ord. Predicatorum Inquisitor Taurini.

EVclidem Methodicum Adm. Reu. P. Guarini Guarini sedulò euolui. Euclides ipse est si apodexion puritatem, acumen, neruos estimauero; nec ipse tamen, si doctrinæ ordinem, copiam, iucunditatem. Tam multa, noua, pulcherrima accessere, vt sibi admodùm blandiri queat Euclides Iconem suum, hactenus rudem, ac salebrosum, iam tandem acuratissimà viri, verè viri industrià absolutissimè, reformatum. Promus condus ipse est Mathematicę vniuersæ, totaq; exhauritur Geometria: de numeris numerosissimè, deq; dimensionibus supra humani mensuram ingenij. Nec modò latet in eo quicquam Patrijs legibus onerosum: Quin totum tantum opus est: vnde maximum sint habituræ, & literaria, & Politica Respublica incrementum. Ergò ne quæso publica fraudetur luce purgatissimis luminibus volumen micans. Ita sentio. Taurini 4. Aprilis. 1671.

Bartholomæus Torinus vidi de mandato Illustriss.
& Excellentiss. D. Magni Cancellarij.

Per[illegible] imprimi.
[illegible]SCHETTVS.

IVssu A. R. P. D. Petri Pauli Nobilioni Præp. Generalis nostræ Religionis Euclidem Adauctum, & Methodicum à R. P. D. Guarino Guarino compositum diligenter perspeximus, & cum nihil in eo deprehenderimus. quod catholicę Religioni, aut bonis moribus aduersetur: imò potiùs tanta diligentia, ac ingenio elaboratum vt nihil ad perfectionem sumpti argumenti dessiderari videatur. Ideo vt typis excussus in publicam lucem prodeat non solum dignissimum putamus, verùm, & necessarium, tam pro Mathematicarum artium professorum vtilitate, quàm vt ab ijsdem collatus cum eiusdem auctoris Philosofia iam impressa ipsius ingenij fæcunditas acumen, & profunditas agnoscatur. Datum Taurini in domo S. Laurentij die 3. Aprilis 1671.

D. Amedeus Romagnanus C. R.

D. Carolus Saluaticus C. R.

D. Gaetanus Garimbertus Præpositus Generalis Clericorum Regularium.

HOc opus, cui inscriptio Euclides adauctus à D. Guarino Guarino nostræ Religionis Theologo Sacerdote compositum, & iuxta præfixam assertionem patrum, quibus id commisimus approbatum, vt typis mandetur, quoad nos spectat, facultatem concedimus. Datum Romæ die 30. Iunij 1671.

D. Gaetanus Garimbertus Præpositus Generalis Cl. Reg.

Locus † Sigilli.

D. Antonius Maria Riuanus Secret.

INDEX

Tractatuum & Expensionum totius operis

Vt id, in quo erratum sit singulis tractatibus, expensionibusque pateret, faciliorque euaderet correctio; hic errores aliquos, quos in relegendo potui aduertere, emendaui: alios, qui fortè me prætericrunt, tuæ humanitati, & beneuolentiæ relinquo.

✠✠ 4 De

TRACTATVS IX.

Pars 1. in 5. Euc. lib. de proportionum notione.

Pars 2. De proportionib. in genere.

TRACTATVS X.

In 6. lib. Euc. De proportione quantitatis continuæ.

TRACTATVS XI.

In 7. lib. Euc. Pars 1. De proportionibus numerorum in genere.

Pars 2. De spetiali numerorum proportione.

TRACTATVS XII.

TRACTATVS XIII.

De numeris proportionalibus Pars 1.

Pars 2. De numeris proportionalibus inueniendis.

TRACTATVS XIV.

De proportionibus numericis continuis.

Pars 2. De proportione Arithmetica continua.

Pars 3.

3 De

TRAC

TRACTATVS XXVIII.

De progressione superficierum.

1 EXpensio. De serie proportionalis geometricę superficierum (in exor. l. 6. Ambrosius lege Gregorius, & vbicunque repereris.
2 De planorum progressione musica.
3 De progressione spatiorũ arithmetica. Prop. 19. Coroll. adde hanc considerationem Seriem rectangulorum deficientium quoad vnum latus vsque ad vltimum, pro alio non vsque ad vltimum vt series P A esse æqualem dimidio rectangulo P A, & trienti rectanguli I O.

TRACTATVS XXIX.

Geodæsia rectilineorum planorum.

1 EXpensio. De planarum figurarum transformatione in æquales superficies.
2 De casu normalis in rectilineis figuris, & eius quantitate.
3 De areis triangulorum, aliarumque figurarum mensurandis.
4 De augmento & partitione trianguli.
5 De quocunque rectilineo augendo, vel partiendo in plana rectilinea similia.
6 De rectilineo partiendo etiam in partes non similes per parallelas vni lateri.
7 De figuris planis rectilineis in partes dissimiles secandis à dato puncto in ipsis.
8 De rectilineis per lineas vtcunque ductas partiendis.
9 De planis à *puncto extrinseco* partiendis.
10 De *planitiebus* musicis.
11 De proprietatibus figurarum Isoperimetrarum (pr. 55. figura debet esse prop. 50. & p. 57. l. 12. Exagoni lege pentagoni.

TRACTATVS XXX.

De transformatione Curuilineorum.

1 EXpensio. De quadratione circuli (pr. 5. l. 8. æqualis adde duplo & l. vlt. circuli adde dupla.
2 De quadratione circuli geometrica.
3 De ellipsium tum inuicem, tum in alias figuras transmutatione.
4 De areis parabolarum quadrandis (pr. 33. l. 41. adde in fine I N.
5 De partitione Hyperbolę. Pr. 5. lin. 6. EA lege EB & lin. 11. AF dele F.
6 De spiralibus spatijs (pr. 54. l. 7. minus lege maius pr. 55. l. 5. vt lege plusquam & l. 5. corol. rectangula circumscripta lege sectores circumscripti pr. 56. l. 36. vbi est 12. lege circulum. Et Prop. 60. l. 5. cum quadrato lege cum trienre quadrati,

TRACTATVS XXXI.

De transformatione superficierum corpora circundantium.

1 EXpensio. De transformatione superficierum corporum planis contentorum (def. 1. lege 2. terminantia l. terminantibus.
2 De superficie Cylindrica (prop. 4. & 5. intelligenda est ne dum de cylindris pro basi circulum habentibus; sed etiam de cylindris, quæ pro basi habent ellipsim vel quamcunque aliam figuram curuam; seu etiam semicuruam, vt contat ex demonstratione, qui appellantur postea à nobis cylindracei (pr. 8. l. 26. cuius adde dimidia.
3 De quadratione superficiei vngulæ cylindricę.
4 De superficiebus conuexis, quę conum ambiunt. Prop. 30. l. 3. IE lege CO.
5 De superficie sphęroidis Elliptici.
6 De superficie cuiuscunque corporis ad axem suum recti Prop. 30. falsa est vel ad summum intelligitur de superficie conica quacunque vt Trac. 35. Prop. 2.
7 De superficie sphęrę mensuranda (pr. 40. l. 41. bus dele. Prop. 4. l. 4. & 14. & 26. DB

TRACTATVS XXXII.

De superficiebus corporum in planum redigendis.

1 EXpensio. De superficiebus cylindricis variè sectis plano consignandis.
2 De superficiebus conorum diuersimodè sectorum in planum extendendis.
3 De superficie sphærica multimodè secta in planum extendenda.
4 De superficie conoidis hyperbolici, parabolici, & sphęroidis elliptici, annulique solidi in planas superficies extendenda.

TRACTATVS XXXIII.

De inscriptione, et circumscriptione solidorum.

1 EXpensio. De principijs.
2 De solido angulo.
3 De descriptione Tetaedri in sphęra & proportione laterum eius ad diametrum.
4 De descriptione octaedri in sphęra, & eius laterum ad diametrum proportione.
5 De cubi in sphęra inscriptione, & eius lateris ad diametrum ratione.
6 De descriptione Dodecaedri in sphæra, & eius laterum ad diametrum ratione.
7 Icosaedrũ sphęra inscribere, simulque omnium corporum regularium proportiones exponere & numerum eorum demonstrare (pr. 12. l. 42. rectum lege solidum.
8 De corpore multarum facierum in sphęra inscribendo.
9 De desctiptione, & circumscriptione Cylindorum, vel quorumcunque aliorum corporum, donec relinquant quantitatem omni data minorem.

TRACTATVS XXXIV.

Pars 1. De solidis planis superficiebus Contentis.

1 EXpensio. De parallepipedis. Prop. 9. in figura vbi est T pone H & vbi H repone T & vbicunque reperies L lege I.
2 De Prismatibus Propos. 19. est intelligenda

Pars. 2. De solidis curuis superficiebus contentis.

TRACTATVS XXXV.

De corporum comparatione.

Corrige, & hos errores, qui postea occurrerunt. Pagin. 30. Principio 3. lin. 6. minori lege maiori, & lin. 7. minori lege maiori. Pag. 38. Pr. 14. lin. 5. DCA; lege A B F. Pag. 70. Prop. 16. in figura appone R; vt fiat triangulum POR. Pag. 205. Prop. 45. & sequen. lin. 2. ipsius propositionis, quorum lege quarum, & Pr. 47. ~~in~~ figura sub H. pone P. Pag. 161. Pr. 21. l. 42. vt 3. ad 8. lege vt 6. ad 12. rursus vbi est 6. lege 8, & l. 44. vbi est 3. 8. 12. lege 3. 6. ~~121 Pag. 240~~. Pr. 9. lin. 27. & 28. vbi est 9. lege 11. Pag. ~~231~~. Prop. 11. l. 7. A C. lege AH, & Prop. 9. lin. 28. A B. lege A L, lin. 29. G D. lege G B. Pag. 252. lin. vltima ad A O. lege EO. Pag. 292. Prop. 11. in figura ad finem lineę O F. Scribe T. Pag. 297. Pr. 25. lin. 15. est lege est O. Pag. 304. in fig. propos. 14. Scribe E. inter C, & F. Pag. 310. Prop. 7. l. 12. A E. lege A B, lin. 14. A C. lege AB. Pag. 340. Pr. 26. coroll. aliqui numeri errant in tabula; sed corriges addendo ex ordine num. 4. Pag. 386. Prop. 31. in figura ducito lineam A X. Pag. 492. Pr. 75. l. 9. 10. 11. quod dicitur de arcubus B D, & D F. intellige de complementis. Pag. 440. l. 14. pro num. 68. repone 48. Pag. 542. Prop. 48. in fig. ducito lineam C H.

TRACTATVS I. PRÆLIMINARIS.

De essentia Quantitatis continuæ.

ANTEQVAM agamus cùm Euclide de proportionibus Mathematicis quantitatis, necessarium videtur, essentiam quantitatis ipsius, proprietatesque Metaphysicas cognouisse. Definitiones enim primas vix independenter ab essentiâ quantitatis potest haurire cognitio: Quarum notitiâ obscuriùs perceptâ, cætera omnia, quæ ab ipsis dependent in apertum prodire nequaquam possunt. Verum quidem est; quòd nec ipsa quantitatis essentia probè dignoscitur; nisi dependenter à multis propositionibus, quæ deinde sunt ostendendæ: Vnde nos tanquam Philosophos gerentes, quibus anticipare non insuetum, & præsuponere non indecens, earum probationibus, aut principijs ad oportuna loca seruatis, quæ ad quantitatis notionem faciunt Theoremata hîc vsurpabimus, tanquam nota, & ostensa, vt solùm, quantùm necessitas reposcit, percipi possit ipsius quanti constitutio.

EXPENSIO I.

In quo consistat conceptus quantitatis in genere, & in quot species secernatur.

HAnc quęstionem diffusiùs agitaui in nostris placitis philosophicis dis. 15. pag. 119. ex qua disputatione liceat aliqua, quæ magis ad Mathematicam faciunt, hîc delibare; vt deinde euidentiùs ipsa quantitatis essentia sese in apertum prodat.

PRÆASSVMPTVM.

COmmunis hominum conceptus in id conspirat; vt quantitatis nomine notet, tum continuam quandam rerum successionem, aut multitudinem, tum vnius rei extensam molem. Et quamuis Virtutum, potentiarum, accidentiumque intensionem, & vim operatiuam quantitatis mensuris subigant: an tamen verè sub quantitatis definitione veniant, incertum, & apud Philosophos controuersum. Motus quoque & temporis incerta, & anceps quantitatiua denominatio, & licet mensurentur, non propterea certum est, quantitatis sub genere contineri. Quamobrem, vt omnino pateat, quænam inter quantitates enumeranda sint, priùs Quantitatis, quæ apud nullos est controuersa, vt est successiua, continua, & discreta, conceptus, & definitio est inquirenda.

CONCLVS. I. PROPOS. I.

Essentia quantitatis in genere eo consistit; vt sit capacitas quædam entitatis ad partes habendas, vel actu, vel potentiâ, vel saltem per intellectus designationem.

1 PRobatur. Quia hæc definitio omnibus quantis etiam spiritualibus aptatur. Nam, & quantitas molis, & intensionis, & successionis, & numeri, & temporis, & loci, & extensionis, & omne aliud genus quantitatis sine partibus concipi nequit, siue illæ actu sint, siue potentiâ, siue designatione concipiantur. Sic in numero adsunt partes actu, in quantitate molis fieri queunt, in Cœlo, si esset incorruptibile, saltem concipi.

2 Probatur. Quia hæc capacitas ad obtinendas partes, omnium aliarum proprietatum; quæ de quacumque quantitate dicantur, fons est, & origo. Prima est apud Vasq. T. 3. in 3. par. dis. 90. c. 3. n. 15.; Quòd det aliquam distinctionem materiæ: Nam si partes sint reales, dat distinctionem realem, si factibiles, vel conceptibiles dat distinctionem, aut virtualem, aut per intellectum. Secunda, quod mensuret, aut mensuretur: Nam si capacitate ad partes consequendas potitur; ergo erit inter partes, quæ excedat, quæ exæquet, aut ab alia quantitate deficiat. Tertia est numerari; nam partes, vel actu factę, vel dessignatæ plures sunt: Quamobrem numerationi obnoxiæ erunt. Quarta est proportio.

Etenim, vbi sunt partes datur maius, minusque, & vbi datur maius, aut minus, datur maior quoque, vel minor continentia, vel totius, vel aliquarum partium eius, & ideo maior, aut minor proportio, quæ in hac continentia consistit: Quinta est vis quædam occupatiua loci. Quoniam, quod partes habet extensas, secundùm eam extensionem loco correspondere potest. Sexta. Quòd obtineat partes in semetipsa ordinatas, & se inuicem excludentes; Nam vbi diuisio est, vel conceptibilis, vel actualis, vel possibilis; ibi necesse est, vnam partem excludere aliam; alioquin si hæc aliam suâ ipsâ entitate inuolueret, non posset, nec quidem intellectus concipere cum fundamento partes; quia rei conceptus formalis earum excluderet multiplicitatem.

Dicet fortè aliquis ex Metaphysicis. Ratio, per quam essentia alicuius rei secernitur, debet esse omnibus alijs prædicatis essentialibus prior; sed extensio est prior capacitate partium; ergo extensio erit ratio constitutiua quantitatis.

Sed respond. Id optimè se habere, cùm plures proprietates adsunt eadem vniuersalitate pollentes, quæ rem aliquam constituant. Tunc enim inter multas rationes eodem modo distinctiuas, cùm eadem, & æquâ spetie se diffundant, illa debet seligi, quæ radix aliarum fit, & alijs prior, & præeminens habeatur. At in contrarium res est. Si quidem extensio licet in quantitate molis sit ratio prior, & per quam illa partibus fruatur, vt aduersarijs morem geramus, non tamen adeo latè patet; cùm nec quantitas discreta, nec virtutis, nec temporis extensione patescat. Verùm, nec equidem concedo, Extensionem in quantitate cõtinua esse partium habitudine priorem, cùm ipsa entitas partium existẽs sit illa, quæ extensionem causat; cùm vna extra aliam est: Quoniam si penetrentur extensio non manet, & tamen essentia quantitatis adhuc est, & corpora diuinâ virtute penetrata quantitatis essentia non expoliantur.

2 Dices. Diuidere aliam quantitatem, essentia quantitatis nõ est; ergo neque diuidi. Verùm, nec diuidere, nec diuidi esse quantitatis constituit: Neque enim in hac sententia sumus. Sed id asserimus; ex eo quantitatem constitui: quòd sit entitas talis, cuius vna pars nõ sit omnis pars, & toti adæquetur. Si detur itaque aliquod ens, cuius hæc entitas designata non sit alia simpliciter, & sine reduplicatione intellectiuâ; hoc erit ens quantum, & hoc est consequi capacitatem partium saltem dessignabilem.

CONCLVS. II. PROPOS. II.

Species quantitatis sex sunt. Quantitas Molis, Numeri, Temporis, Motus, Virtutis, Ponderis.

PRob. Nam quantum, aut est substantiale, aut accidentale. Si substantiale est, aut consideratur, vt extensum loco, vel vt habens plures partes in eodem loco. Si consideratur, vt loco substantia extensa, iam quantitas molis est, quæ trinam dimensionem consequitur altitudinis, longitudinis, latitudinis. Si verò eius partes vna intra aliam latent, & eundem locum occupent; tunc est quantitas ponderis. At si quantum est accidentale; tunc, aut consideratur accidens in subiecto extensum, & tunc cum se accommodet subiecto eandem constituit cum eo molis quantitatem: licet propriè extensionis vocetur. Si verò in eadem parte subiecti se colligat; tunc est quantitas virtutis, seu intensionis. Quòd si substantia, seu accidens intelligantur moueri, tunc quantitas motus enascitur, & si perseueret in motu, quantitas durationis, seu temporis emergit. Tandem si substantia, aut accidens motus, & duratio intelligantur diuisa, & in plures partes seiuncta, discreta quantitas est, & vocatur, quantitas numeri.

COROLLARIVM.

HInc euenit, quòd, cùm quantitas molis, & numeri sint, tum substantiæ, tum accidentium, in substantia extensorum, quòd etiam ab illa dependeat quantitas, & ponderis, & motus, & temporis, & virtutis. Et hinc quod de illis primo discurrendum sit, vtpotè, quòd vniuersale præbeat fundamentum ad alias quantitates penitiùs considerandas.

Constat autem hoc de quantitate ponderis; nam à magnitudine rei pondus dependet; cùm pro sui quantitate leue pondus in specie possit æquare maius, ratione superadditæ molis. Et ita quantitas motus, & temporis à multitudine, magnitudineque partium pertranseuntium depẽdet: Sic quantitas virtutis à mole, seu magnitudine agentis, seu à numero mouentium, seu à magnitudine figuraque rerum motarum exerit. Quapropter in hoc libro agendum de *Quantitate Discreta, & Continua*; vtpote in quo res mathematicæ vniuersalitèr tractantur; ideoque de illis tanquam vniuersalissimis quantis agendum, ~~quorum cognitio omnem~~ aliarum quantitatum cognitionem subalternat, & ab illâ euidentia principia mercantur. Subest & insuper alia ratio. Nempe omnia alia genera quantitatum sub ratione quantitatis discretæ, seu continuæ considerari, vt patebit (si Deo dante) ad illarum attingendos tractatus deueniamus.

EXPENSIO II.

An aliquod argumentum mathematicum euidenter ostendat quantitatem, ex punctis non constare.

QVamuis hæc quæstio requireret legentem mathematicâ imbutum: Cùm tamen sit quoque philosophica, & Philosophi, licet Mathesi non exornati illam percurrant, & ventilent præsupponendo ea, quæ à Mathematica dependent, vel lumine naturæ cognita, vel ab eâ demonstrata: hinc est, quòd hîc eam collocandam duxerimus, tanquam ad cætera, quæ deinde considerantur pernecessariam.

CONCLVS. I. PROPOS. III.

Nullum mathematicum argumentum, ex punctis indiuisibilibus quantitatem molis *constare, ostendit.*

HÆc conclusio est negatiuè ostendenda; nempe argumentorum eam impugnantium euidenti solutione. Primò itaque aliqui credunt, ex punctis constare quantitatem ex illa

propos.

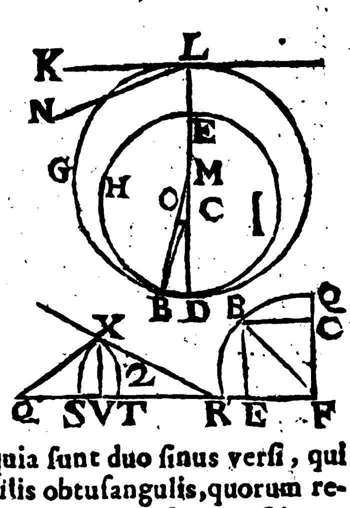
propos. Eucl. l. 3. p. 13. in qua probat circulū aliū circulū non tangere in pluribus punctis, quam vno, & hoc adducit Bagata in 6. lib. sec. 3. d. 4. de quantitate, tanquam vnicum, & ineuitabile argumentum ad puncta indiuisibilia in quantitate ostendēda, & citat fallaciter Euc. lib. 1. propos. 16.

Sed Respond. 1. Euclidem probare circulum non tangere planum, vel (quod specialiter ipse probat) circulum intrinsecùs in pluribus punctis, quam vno sensibiliter distitis; non autem immediatis. 2. Ostendere, non tangere in pluribus punctis, quam vno; sed diuisibili; siquidem non ostendit illud punctum contactus, aut esse diuisibile, aut indiuisibile.

Verùm dices. Licet id ipse non ostendat ex eius tamen demonstratione colligitur: Nam si tangunt se in duobus punctis; tangant se in B & D; ita vt hæc duo puncta sint in vtriusque peripheria, tum maioris, tum minoris circuli. Certum est quod in omni triangulo duo latera simul sunt tertio maiora ex propos. 20. lib. 1. Element. At si B punctum in circumferentia vtriusque circuli est; trianguli M B C duo latera B C, & C M essent tertio æqualia; quod est absurdum, & contra citatam propos. 20. Id autem patet; nam B M, vtpote radius maioris circuli æquatur lineæ M D; cui etiam æquantur duo crura M C, & C B: Quoniam M C est eius pars, reliquæ verò parti C D crus B C est æquale, vtpote radius minoris à centro C ad eius peripheriam pertingens.

* Hæc est demonstratio euidens illa quidem, si agamus de duobus punctis distantibus: non tamen immediatis. Nam primò, vel agimus de lineis, quæ sint indiuisibiles, vel quæ sint diuisibiles. Si sint indiuisibiles. Certum est, quòd maior est latitudo B D, quam O C: Si ergo B D sint duo puncta immediatè se tangentia, multò magis se tangent duo puncta C, & O; vel ergo etiam ipsa erunt duo puncta immediata, & sic maius spatium non erit B D, quam O C; vel erunt minùs immediata, & se penetrabunt puncta O, & C: quapropter B M C non erit triangulum; quia nulla distantia intericietur inter C, & O puncta inuicem penetrata. Si verò lineæ sint diuisibiles; iam latitudo vnius occupabit aliam in O, & C, licet in B, & D differant spatio: Vnde rursùs B M C non erit triangulum.

* 2 Certum est. Lineolam O C esse maiorem illa portione, qua excrescunt latera B C, & M C supra tertium crus B M. Quoniam, vt potes videre in triangulo Q R X linea S V, & V T, qua excrescunt latera Q X, & R X super basim Q R; vt vna est minor perpendiculari V X; quia sunt duo sinus versi, qui numquam in triangulis obtusangulis, quorum reliqui anguli sint minores G. 45. sinus recti meditatē æquare possunt. Quia, vt Th. 2. exp. 2. de sin. Quadratū sinus recti est quadruplū rectāguli ex semiradio, & sinu verso: Sed in 3. fig. semiradius superat dimidiū sinus recti G. 45. E B. Quòd eius quadratū sit quadrato sui dimidij quadruplū ex p. 6. l. 2. semiradij verò duplū; cùm ex pr. 11. l. 2.



sit subduplū quadrato radij R F, cui semiradij est subquadruplū ex 6. l. 2. Ergo sinus versus E R minor erit dimidio sinus recti E B. Alioquin cum semiradio maiori faceret quadratum maius, quam subquadruplum quadrato sinus recti, cui quadratum sui dimidij subquadruplum est; Cum ergo sinus versi angulorum minorum, quam Gr. 45. vt sunt anguli Q, R nō æquent semiradium erunt minores; qua V X. Quod licet ex defectu principiorum modò sit obscurum, & incompertum; præsuponendum tamen est, vt certissimum, & euidens apud eos, qui Mathesi instructi sunt.

Quamobrem O C in Fig. I. maior erit ea portione, quâ excrescunt latera B C, & C M super basim; cum anguli ad M, & B sint acutissimi; eò quod angulus apud C semicirculo (excepto vnico puncto inter B D) mensuretur. Ponamus itaque illam perpendicularem C O lineam esse vnius puncti: Ergo latera, nec quidem vnico puncto super basim excrescent: Quare basi eo in casu, nec puncto quidem indiuisibili erunt maiora. Sed minor est O C, quam D B: Ergo non excrescentibus lateribus, nec quidem vnico puncto indiuisibili super basim, & ideo æqualibus ipsi basi; erunt tamen latera apud verticem C distantia, a basi in C, & distabunt saltem puncto, & tantò magis distabunt in B, & D; quare D, & B erunt duo puncta, & B M C triangulum, & latera B C, & C M basi B M maiora non erunt.

* 3 Sint duo circuli E D, & D L, eorumque centra non magis, quàm puncto distent in C, & M; illique sint perfecti, vt ab aduersarijs conceduntur. Ambitus itaque eorum in E, & L non distabunt magis, quàm duobus punctis: In G H vnico puncto: Ergo in reliquo spatio vsque ad D minus, quàm puncto distarent; sicque punctum in multas, multasque partes diuideretur.

4 Aut contactus est physicus, & realis; aut non. Si physicus: certum est, quòd quilibet circulus in duo potest secari per imaginationem saltem; ita vt nihil integritati semicirculi deficiat. Diuidatur itaque, & diuisio in punctum contactus cadat, vel punctum illud absumet, & tunc aliquid, semicirculi partibus, vel vtrisque, vel alteri deficiet: vel non; & sic in duo secabit illud punctum.

Respondere verò (vt respondet quidam) circulum in duas æquales partes nequaquam posse secari, aut quòd non possit diuidi mente: nisi aliquod ex eo deperditum imaginemur, est contra mathematicos, pugnare, qui id euidenter probant, & euidens probatio fortiùs euincit de diuisione mente conceptâ, quàm de diuisione applicata materiæ.

Obijcies 2. ex Pelletario apud Clauium. Omnis quantitas si augeatur in infinitū potest quācumque datam superare, sed angulus contactus circuli cum plano, licet auctus in infinitum, nunquam potest angulum rectilineum K L N, etsi minimum superare; Ergo angulus acutus contactus K L G quantitas non est, & sic multò minùs ipse contactus quantitas erit.

Huic argum. Fusè respondet Clauius. Nos illi respondemus, quatenus nititur probare punctū contactus indiuisibile esse. Rep. itaque. Quòd, vel angulus contactus sumitur, vt inclinatio duarum linearum, prout Eucl. defin. 8. lib. 1. vel pro spatio inter lineas inclinatas cōtento. Si primo modo accipiatur verum est, quòd angulus contactus non est quantitas: sed nec angulus rectus,

ctus. Verùm potiùs quidam modus quantitatis; vnde in genere quantitatis non est facienda comparatio, sed inclinationis. Cùm autem lineæ rectæ à curua differant genere, hinc est, quod inclinatio curuæ ad rectam inclinatione rectę semper euadat maior, & curua magis inclinet ad planum, quàm recta. Licet deinde factâ comparatione inter lineas inclinatas eiusdem generis, puta peripheriarum possit dari minor, minorque in infinitum, prout se circuli augebunt. Si verò Angulus accipiatur prout dicit spatium comprehensum inter lineas, tunc quidem quantitas est; sed cuius ignota mensura sit. Nam angulus quidem rectus arcu circulari mensuratur inter crura comprehensi: sed, quæ nam sit mensura anguli curuilinei, incompertum est; quare omni acuto rectilineo minor quidem est in principio sui, ex demonstratione Euclidis. Sed cùm non seruet semper eandem inclinationem, & cũ accedens ad quadrantem versus G maior fiat, an absolutè dicendus sit minor; res in dubio est, & quo sensu minor dicendus sit, magis anceps.

* Et hæc quidem de angulo. Verùm vltima consequentia nullo pacto colligitur; nempe quòd contactus ipse non sit quantitas; quia angulus contingentiæ omni acuto rectilineo maior sit; imò è contra potiùs videtur deduci: Quia cùm curua omni rectâ inclinante alteri rectæ magis inclinet, magis etiam se illi adaptat: Vnde contactus ipse lineæ rectæ cum curuâ maior erit, cùm maior sit inclinatio, quàm rectæ cum rectâ. Datis enim duabus lineis materialibus, & aliquali latitudine pollentibus, *contactus* earum maior est, si *inclinatio maior* sit; & ideo etiam curua, & recta sensibilis se inuicem tangent magis, quàm qualibet recta tangat rectam omnimodâ inclinatione datâ; sed puncta licet indiuisibilia in contingendo, partes habent etiam iuxta aduersarios (siquidem tangitur vnicum punctum à pluribus punctis) Quare punctum contactus poterit esse secundum plures partes, & pauciores, & contactus poterit esse maior, aut minor. Quamobrem, cùm non sit indiuisibilis nullus, licet punctorum indiuisibilium, contactus, ex eo non poterit deduci quantitatis ipsius indiuisibilitas. Quandoquidem dato etiam; quòd punctum plani à circulo tangeretur; nihilominus secundum plura puncta peripheriæ illud punctum plani posset contingere.

EXPENSIO III.

An aliquod argumentum mathematicũ ostẽdat quantitatem ex punctis non constare.

Vidimus puncta indiuisibilia in quantitate nullâ efficaci ratione mathematicâ constare: Modò videndum est; an sit aliqua ratio mathematica, quæ illa explodat.

CONCLVS. I. PROPOS. IV.

Argumenta plurima mathematica ostendunt puncta indiuisibilia in quantitate non reperiri.

Argumentum est vsitatum, quòd non posset secari linea nouem punctorum in duas partes æquales; quia scilicet punctum medium in duo esset secandum.

2 Quòd datis duobus punctis concentricis tot reperirentur puncta in maiori, quot in minori; cùm ductis à centro lineis ad omnia puncta circonferentiæ circuli maioris, illa necessariò transirent per tot alia puncta circuli minoris: Quare in vtroque par numerus punctorum lateret.

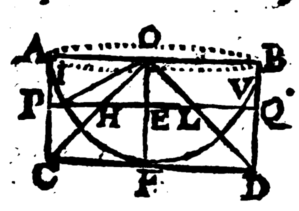
3 Quod Diagonalis in quadrato esset tot punctorum quot latus; cùm ductis à punctis omnibus laterum parallelis, per omnia diagonalis puncta transirent.

Quibus argumentis geminam opponunt aduersarij responsionem. Prima est negando lineam illam in duo secari, vel duci lineas per omnia puncta, vel laterum, vel circulorum. Sed hoc gratis negatur, cum inter concessiones de puncto ad punctum lineam posse duci, vt omnino concedibile exposcat Euclides, & sine, quo Mathematica non constaret. Et quoad sectionem lineæ bifariam, demonstratio Eucl. propos. 10. conuincit saltem de sectione mentali, & Methaphysicâ, vt euidens est, nec valet cuiusdam resp. omnino futilis, quod lineam demonstrauerit Euclides omnino in duo partibilem, ex suppositione Aristotelicæ sententiæ, Quasi quòd demonstrationes mathematicæ solam probabilitatem consequerentur, & præcipuè illa ex suppositione probabili procederet, quæ toti Mathematicæ euidentia fundamenta præbet.

Secunda est Galilei dialog. p. 21. qui existimat puncta indiuisibilia in quantitate esse infinita; & ideo non posse punctum in duo secari, vel de puncto ad punctum, per alia puncta certa, & determinata, linea duci: Cùm nec duo, nec decem, nec aliquis numerus determinatus punctorum in quantitate reperiatur; sed indeterminatus. At huic sua erit responsio; cùm ostendemus non posse infinita puncta, seu indeterminata in quantitate reperiri.

* 2 Sic probo spetialiùs positam sententiam. Sit Cylindrus A B C D excauatus concauitate sphærica A B F Sitque in illo descriptus conus O C D. Dico; quòd si punctum illud extremum O indiuisibile est, Quod etiam tota circumferentia A B indiuisibilis est.

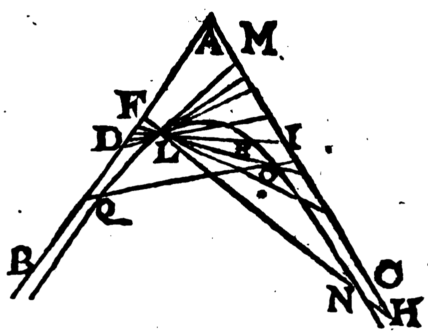
Et si illa circumferentia diuisibilis est; quòd etiam punctum O extremum, quodcũque illud sit, diuisibile est. Id verò constabit, quia circumferentia A B punctata, & punctum O probabuntur æqualia ex Luca Vallerio lib. 2. propos. 12. de cent. grauit. Quadratum O I ob angulum rectum E ex 47. elemen. Et nobis p. II. lib. 2. est æquale duobus quadratis ex linea O E, & ex linea I E Lineæ verò O I, est æqualis linea E P, & O E linea E H: Quare quadratum, ex linea P E est æquale duobus quadratis ex I E, & E H lineis, & quadruulum eius quadruplo. Quadratum



verò ex P Q est quadruplum quadrato ex P E, & I V quadruplum quadrati I E: Et H L quadruplum quadrati H E, & ita etiam erunt circuli quadratis inscripti. Quare circulus, cuius diameter P Q est æqualis duobus circulis I V, & H L; Ablato itaque à circulo P Q, circulo I V, residuus annulus, cuius latitudo P I, & V Q, erit æqualis circulo H L. Et si lineam P Q eleues vsque ad vltimum punctum O, semper valebit idem

Idem argumentum. Quare punctum o erit æquale circulo A B: Sed circulus A B diuisibilis est; Ergo etiam punctum o, quodcumque minimum accipiatur. Hæc autem demonstratio deseruiat pro ijs; qui iam Mathematica sunt instructi, sicut & sequentes.

* 3 Sic ostenditur ex propos. 2. Expens. 4. Conic. Agentes de Asymptoto demonstrabimus, Quòd hyperbole semper ad asymptotos accedit, & numquam illos tangit, vel secat, & si ponatur quælibet minima quantitas inter ipsos, & hyperbolem, distantia tandem etiam illâ minimâ quantitate datâ minor euadet. Sint Asyptoti B A & A C, sectio hyperbola Q E N, Ostensum est, hanc semper, quousque prolungantur latera Q L, & N B, accedere propiùs ad Asymptotos A B & A C; sed numquam illos tangere. Detur itaque punctum aliquod.



Cum omni data quantitate tandem spatium interceptum inter Asymptotos A C & hyperbolam Q E N, euasurum sit minus; euadet minus dato puncto; cùm tamen aduersarij nolint minus puncto in quantitate posse dari.

* Et idem erit argumentũ ex inscriptione Hyperbolarum deductũ: Nam ostendit Vincen. Viuianus insignis Geometra de maxim. & minim. lib. 1. pag. 45. Hyperbolas per diuersos vertices simul descriptas, verùm, quarum eadem sit regula, semper inuicem accedere; nunquam tangere: Quare idem quoque argumentum adornari poterit.

* 4 Prob. Quoniam omnia rectangula, vt docuimus de superfitie conicâ agentes inter Asymptotos, & Hyperbolem facta, inter se sunt æqualia; Sic rectangulum factum ex lineis L F & M L, est æquale parallelogrammis interceptis, & quibuscumque alijs quorum vnum latus L M sit vni Aymtoto parallelũ, alterum F L ad idem pũctum Hyperbolæ incipiens sit alteri Asymptoto parallelum, & in primum asymptotorum A C desinat. Sit ergo punctum quantitas aliqua proposita, ad quam hyperbola semper accedendo ad alteram asymptotos, iam peruenerit. Quare rectanguli huius pũcti interpositi inter hyperbolam, & asymptotos latitudo erit linea, vtpote ab eo puncto deducta, quo distat hiperbola ab asymptoto; quod est absurdum, & linea æquabitur parallelogrammis omnibus alijs interpositis V.g. parallelogrammo F L M A, quod item absurdum est, cùm linea solùm longitudine sit diuisibilis, & parallelogrammum etiam latitudine.

Contra verò hoc argumentũ ea responsio valeret, quòd puncta sunt infinita, & ideo, quòd nec in cono vltimum punctum assignari potest, nec in hyperbolâ ea distantia, quæ punctum æquare queat. Quamobrem vt euidentiam hæc argumenta sortiantur, hæc quæstio est resoluenda.

EXPENSIO IV.

Puncta infinita in quantitate, an admitti debeant.

POsset hæc quæstio agitari de punctis, quæ actu sint in quantitate distinctis secundùm suum esse, atque numerabilibus. Posset etiam intelligi de punctis, quæ in quantitate actu non distinguantur; sed mentaliter, vel per diuisionem successiuam separabilia. Si hoc secundo modo intelligatur, coincidit cùm opinione Aristotelicâ, quod partes sint in infinitum multiplicabiles absque eo, quòd earum vltima possit attingi. Nam, neque hoc pacto punctum vltimum, nec quidem intellectu assequi possemus; cùm infinitum exhauribile non sit, & si vltimum assignaretur, iam infinitum esset exaustum. De punctis itaque actu distinctis, & actu numerabilibus sermo est: de quibus sic assero.

CONCLVS. I. PROPOS. V.

Puncta infinita in quantitate actu distincta nequeunt admitti.

1 PRob. Quoniam mumerus infinitus dari nequit, ergo neque in quantitate puncta infinita. Nam numerus numeratus, subiectumque numeri est multitudo ipsa. Quare si multitudo infinita punctorum daretur, etiam infinitus numerus daretur. Infinitus autem numerus dari nequit; quia innumerabilis esset. Quare infinitus numericus per exclusionem essentiæ numeri constitueretur.

2 Vel puncta illa simul addita constituunt maius, vel non, si non; ergo quantitatem non extendunt, vel maius constituunt, & sic cùm eorum multitudo sit infinita, & eorum quodlibet maius quid addat, magnitudinem infinitam constituent. Sunt enim infinita simul addita, quorum quodlibet extensionis aliquid facit: Ergo istud quid extensionis multiplicatur in infinitum; Ergo extensio erit infinita.

* 3 Omne infinitum æquale est; alioquin vbi conciperetur alterum maius, ibi minus esset exhaustum, & finitum. Ergo, cùm in qualibet quantitate puncta sint infinita, quælibet quantitas assignata maior A, minor B puncta infinita in se concludet, & ideo æqualia multitudine. Sed indiuisibilia magnitudine sunt etiã omnia æqualia; quia indiuisibilia sunt: Ergo exibebunt extensionem æqualem. Propterea quantitas maior A extensione æquali pateret, ac quantitas minor B; quod esse nequit, & omnes quantitates essent æquales, quod item absurdum est.

Dices ex Galilæo Dialog. pag. 23. Quòd neque sint infinita, nec finita; sed tot, vt cuilibet assignato numero respondeant.

Nam, vel hæc assignatio potest fieri finita in infinitum, & sic idem est, ac admittere puncta finita in infinitum in quantitate; quod ipse non vult, vel finita tantùm, & sic iam, nec puncta in quantitate sunt infinita, vtpote correspondentia finitis numeris. Deinde quæro de omnibus punctis. An omnia finito alicui numero correspondeant; & hoc negat. Igitur alicui infinito; sed hoc non datur; Ergo alicui incerto, & in determi-

determinato. Quare collectio punctorum incerta est, & indeterminata; & ideo actu non erit distincta: Siquidem omne, quod est actu, determinatum etiam est, & certum; vnitateque gaudet, & singularitate; quâ possit vnitatibus numericis correspondere.

4 De omni, quod assignatur quantitatis, illud licet minimum, quæritur an correspondeat cuicumque numero assignato, siue non: si correspondet, cùm omnis quantitas maior aliquatenùs illâ, eandem prorsus correspondentiam consequatur, erit æqualis minori. Et si dicas correspondere quidem in multitudine punctorum non autem in extensione.

Contra est. Nam omne punctum, cùm non sit cùm alio penetratum, & per aduersarios omnia sint eiusdem rationis, & substantiæ omnia æquo modo substantiam extendunt. Ergo cùm, & quantitatis magnæ puncta, & quantitatis paruæ omni assignato numero correspondeant; æqualiter extensionem præstabunt.

5 Cùm omni numero indeterminato correspondeant, iam, & ipsa puncta erunt multitudine indeterminata: Sed multitudo eorum extensionem dat: Ergo est etiam indeterminata extensio; quod est absurdum.

6 Deus videt omnia illa puncta; imò & secernere, & separe potest. Separet itaque, vel re, vel cognitione. Tunc, aut illa pũcta sunt infinita vel finita. Si infinita; nulli numero correspondent; cùm numerus infinitus dari nequeat. Si finita; ergo non omni assignato numero; sed alicui finito correspondere debent.

EXPENSIO V.

In quantitate partes infinitæ capacitatis virtualis, seu mentalis capaces sunt.

LIcet exclusêrimus puncta infinita in quantitate, & indeterminata, quæ actu sint; non tamen quandam infinitam capacitatem partium exclusimus, quam hac, & sequenti expensione in animo est declarare.

CONCLVS. I. PROPOS. VI.

In quantitate partes in infinitum concipi possunt, dummodo quantitas concipiatur.

PRobatur. Nam essentia quantitatis in partium capacitate consistit: Ergo si quantitas concipiatur, capacitas partium concipienda est.

* 1 Mathematicè. Docet Euclides lib. 10. elemen. propos. 12. reperire lineas longitudine alteri lineæ incommensurabiles, quarum natura talis est; vt facta qualibet in eis diuisione, quamuis minimâ, & quacunque adhibitâ partium multiplicatione, nulla tamen pars possit deseruire pro communi mensurâ illarum; sed semper inuicem pars vnius, parti alterius comparata inæqualis inueniatur. V.g. hæc diuidatur in 10, vel 100, vel 200, partes, illa in 7, aut 25, aut 138, aut quoquo modo in partes aliquotas: numquam tamen vna, alteri commensurabitur; semperque partes dissidebunt, quousque erunt partes. Hinc autem deducitur, quòd erunt in infinitum diuisibiles. Alioquin, si tandem ad minimas deuentum esset; iam, cùm omnes minimæ sint æquales, partes factę æquarentur, contra euidentiam demonstrationis.

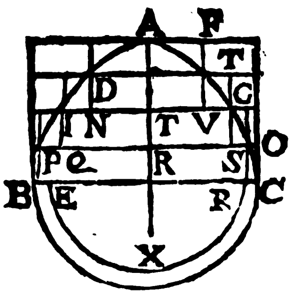
* 2 Docet Euclides propos. 49. lib. 10. elem. à mediâ, quæ est irrationalis linea, infinitas irrationales facere; quæ nulli antecedentium irrationalium parti sint in aliqua sui parte æquales, idest omnibus irrationales; Ergo eadem quantitas poterit habere partes infinitas saltem conceptas intellectu; cùm nequeat inueniri pars adeo minima, quæ alteram exęquet. Alioquin tandem aliqua reperiretur eadem cum aliqua ex antecedentibus, vel tota, vel in aliqua sui parte; Si enim punctis constaret, in numeris ea puncta numerantibus proportiones illarum exprimi possent; & ita sicut omnis numerus alicui numerò est proportionatus; sic reperiretur irrationalis alicui irrationali consentiens, cuius proportio in numeris exprimi posset. Quare irrationalis non esset: Ea enim est irrationalium incommensurabilitas; quæ nullis numeris effari possit.

* 3 Probatur. Ductis parallelis AH, & BC, & perpendicularibus BA, & CL, &c. Ducantur ab A puncto rectæ AD, & AE, & AF, & AG, &c. in infinitum. Dico quod CL diuiditur in partes minores, & minores in infinitum: & tamen numquam finiri potest.

Nam primo in K bifariam; deinde per B in tres partes: deinde per AF in quatuor, in quinque per AG, in sex per AOX, ita vt OL sit sexta pars totius CL: & semper lineæ inferiùs, & inferiùs diuident in partem minorem, iterumque minorem, & nũquam ad punctum L peruenient, quia AX, aut quælibet alia longiùs in infinitum ducta, semper magis distabit in O; quam in A à linea AH; cùm faciat angulum AOL. Alioquin si conueniret in O, non esset recta; vt præsuponitur. Sic lineæ CK, & MD, & IE semper breuiores erunt in infinitum: Quia MD minor erit KC, & IE minor, quàm MD, & VF, quàm EI, vt ostendemus dante Deo in tractatu perspec. & quilibet ex se potest concipere. Quapropter illæ lineæ poterunt diminui in infinitum; & semper supererit, quid auferatur.

Probatur 4. Trac. de annulis solidis demonstramus. Annulos solidos, per quorum soliditatem conoidis parabolici superficies transit, esse inter se æquales; & eorum superficies horizontales inuicem quoque æquales. Sic crassitudo PB in annulum BXR solidum circa conoidem BAC flexa, & per cuius soliditatem per B, & P conoidis superficies transit; iste inquam annulus est æqualis annulo PI grassitiei maioris; sed minoris ambitus, & etiam annulo ID, & tandem DF Cylindro. Hi verò annuli, & superficies eorum orizontales; dum dillatantur gyro, restringuntur soliditate, superficieque in infinitum. Vel ergo semper reperitur soliditas, & soliditas: superficies, & superficies; quæ minor sit in infinitum, & in infinitum, vel non: Si non; ergo deueniemus ad vltimum indiuisibile in superficie annulari; quæ erit circumferentia, & in annulo solido ad vltimum indiuisibile soliditatis, quod erit superficies vltima, in quam desijt soliditas, quæ soliditati Cylindricę DF æqualis erit;

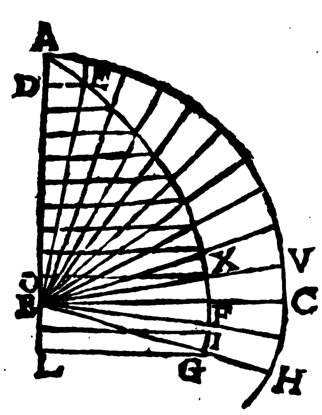
erit; quod est absurdum, cùm superficiei ad corpus, & lineæ ad superficiem nulla sit proportio; quia sunt in diuerso genere, & primo quātitatis. Deinde tunc parabola A P B do P angulo ad alterum angulum B more diagonalis non transiret; cum nulla esset grassities: sed parallelæ P F congrueret; quod contra naturam parabolę est: cum nunquam parallela diametro linea parabolica esse possit. Quod si grassities P B numquam ad vltimum sui esse perueniet. Ergo soliditas est diuisibilis in infinitum. Eademque ratione si superficies B E numquam ad vltimum sui esse peruenit. Ergo diuiditur in infinitum.



* 5 Docet Archimedes, & nos de solidis, & de sphæra, & sphæræ superficie. Corpus segmentis conorum sphæræ inscriptum esse sua soliditate minus, quam quadruplum superficiei circuli maximi sphæra inscripti. Et semper crescentibus, & multiplicatis lateribus quocumque numero quadruplo, accedere quidem semper magis ad æqualitatem, tum soliditate quadrupli coni inscripti, tum superficie quadrupli circuli maximi: sed nūquam ad eam peruenire cressente semper figurâ conica in soliditate, & superficie; sed semper minoribus, minoribusque incrementis in infinitum. Ergo quantitas illa, quâ deficit figura conicis segmentis constans sphæræ inscripta, tum superficie accedendo ad quadruplum maximi circuli, tum soliditate ad quadruplum coni inscripti, recipiet infinita augmenta in infinitum absque eo, quod æquet ipsum quadruplum: quare quantitas illa per quam fit accessus ad quadruplū circuli, vel coni erit diuisibilis in infinitum; cùm additione minoris, & minoris, quanti, numquam ad quadruplum deuenire possit.

6 Probatur. Nam licet angulus contactus sit minor omni acuto angulo. Iste tamen angulus potest diuidi in finitas quidem partes; sed in infinitum. Possunt enim fieri circuli centris à linea, quam tangit, perpetuò remotioribus: Sic poterit fieri circulus semidiametro digiti vnius, semidigiti, & sic in infinitum. Sed illi circuli semper faciunt angulum contactus in infinitum minorem. Ergo angulus ille in infinitum diuidi potest.

* Probatur vltimò ex linea quadratrice G A. Equidem; etiā si vltima pars quadrantis C V diuidatur, & subdiuidatur in infinitum; sicut, & vltima pars proportionalis semidiametri O B; & à partibus subdiuisis circumferentiæ, ad centrum rectæ, vt B V ducantur. Sicut & à partibus eiusdem rationis semidiametri, perpendiculares, vt O X; In



mutuis occursibus, & intersectionibus X puncta quadratricis semper, semperque approximantia magis ipsius basi exibebunt; sed numquam ad ipsam basim B F peruenientia. Quare Quadratrix per ea puncta continuata, numquam consequetur suam basim, aut ad eam coniungetur, vt ostendemus coroll. 2. ex pen. 3. trac. de lineis flexis in fine. Vnde partes, quæ inter basim, & datam partem vltimā quadratricis reperiuntur, vt F X, erunt in infinitum diuisibiles. Multa sunt in idem conspirantia argumenta philosophica, sed, quæ, vt extera consultò relinquimus, cum satis superque hæc conuincere videantur.

EXPENSIO VI.

An partes quantitatis phisicam diuisionem in infinitum subire possint.

HÆc quæstio philosophicè soluenda est, cùm hoc, non ab ipsa quantitatę dependeat; sed à rerum natura: Licet enim res donec concipiantur quantę semper vlteriùs diuisibiles concipi debeant. Nihilominus potest esse; quod res determinatam quantitatem ad sui existentiam reposcant, sic ipsâ earum naturâ poscente: & ideo quòd licet vlteriùs, vt quantæ diuisibiles sint, si tamen diuidantur, pereant, cùm iam eâ quantitate non potiantur, quæ ad ipsarum constitutionem requiritur.

CONCLVS. I. PROPOS. VII.

Probabile est in diuisione quanti tandem esse necessariò quiescendum.

1 PRobatur. Qualitatis per gradus augmentabilis primus gradus à Deo, vel produci potest; vel non. Si potest: Ergo ille est indiuisibilis: Neque enim sub minori quantitate intensionis, qualitas illa producibilis est ex supposito, alioquin assignatus ille gradus primus non esset. Si verò dicas. Nequaquam id posse facere Deum. Illa igitur qualitas primum gradum non habet, à quo produci incipiat, & quomodo habebit secundum, & tertium?

2 Efficiat Deus primam partem rei, quam potest facere. Sed non repugnat, quod faciat Deus id, quod potest. Et ideo non repugnabit consequenter, quod primam partem rei producat. Quare neque repugnabit, quod vltimam relinquat.

3 Multa sunt, quæ videntur per solam diuisionem proprias formas deperdere, & alias consequi. Ergo etiam erunt aliqua, quæ diuisa se subducent, & in nihilum abibunt. Nam difficulter potest ostendi in adustione ligni, quòd forma noua cinerum ab igne introducatur. Cùm ignis formam cinerum, vaporum, carbonum, spumarum, scoriarum, & tam diuersarum rerum, in quæ lignum, & alia similia in se adurendo conuertuntur, non contineat. Quod si noua forma non est ab igne; à quo erit? nisi à solâ segregatione, quam præstat ignis, tanquam à causa destruente connexionem sub quâ in esse perfectiori, & sub forma altioris ordinis detinebantur. Quâ destructâ subiectum ad aliud, ad quod erat in potentia, facessit. Si ergo res per solam diuisio-

uisione possunt mutari; ergo etiã in nihilũ redigi.

4 Viuentia determinatos limites paruitatis, & magnitudinis recognoscunt ita, vt datâ vniuscuiusque specie, sub minore quantitate produci nequeant. Ita ergo non improbabiliter poterit de quacumque re inanimatâ concludi, licet tamen repugnantiam; cur sub minori quantitate esse nequeant, euidenter non cognoscamus.

5 Deus videt omnes partes factibiles in quanto, & quæ simul, & quæ successiuè fieri queunt. Ergo pręter illas diuisiones, quas videt, Deus nullas alias agnoscit. Ergo partes sunt ad vltimum sui esse redactæ: Alioquin, si adhuc esset capacitas partium, non essent omnes partes acceptæ; quas videret Deus.

6 Deus quoque agnoscit extremo signato A, quæ pars immediata succedat; Quæ erit indiuisibilis; Siquidem, si multas partes concluderet, iam non esset pars immediata.

Objicies si in quanto partes in infinitum concipi possunt. Ergo etiam fieri.

Respondetur diuersam esse rationem. Nam concipi quidem possunt; quia supponitur id quod partes essentialiter recipit: At si per ablationem subiecti tollatur, & quantitas; tunc sicut quantitas non est, sic nec diuisibilitas ampliùs concipi potest. Nos autem dicimus, quòd substantia determinatos limites paruitatis obtineat, ita quòd, cùm ad illud vltimum deuentum fuerit, pereat, & deficiat. Vnde neque per diuinam potentiam possit in minutiores partes discindi: nisi pereat: Eo quòd essentialiter ita poscat esse, nec sub minori paruitate coarctari possit.

Dices nulla est ratio assignabilis; cur dato quolibet minimo quanto, minus etiam dari non possit; Ergo quantum est diuisibile in infinitum.

Respondetur eandem rationem esse de multis alijs in natura existentibus, in quibus, licet nullam possimus reddere rationem; cur non potuerint aliter esse; adhuc tamen ita necessariò sunt. Scimus enim repugnare mundum non existere in aliqua capedine; & scimus item in spatijs imaginarijs infinitas capedines reperiri. Sed non possumus cognoscere. Quare Deus potiùs elegerit hanc capedinem, quàm illam. Sic non est maior ratio, quod motus diurnus tendat in Occidentem potiùs, quàm in Orientem; & tamen illa tendentia, siue in hanc, siue in aliam partem necessaria est. Itaque sic philosophandum de quanto: Quamuis enim non repugnet vlteriùs diuidi; non tamen inde asserendum; quòd possit semper diuidi. Licet enim repugnantia ex parte quantitatis non esset: posset tamen à substantia, seu qualibet rerum corporearum specie, repugnantia suboriri.

Dices inter ens, & nihil est infinita distantia: Ergo, antequam deueniatur ad nihil, infinita diminutio fieri poterit.

Respon. Semper facta qualibet diuisione, esse eamdem distantiam rei à nihilo. Vnde, cùm per diuisionem non procedamus ad nihil, distantia infinita non erit in causa; cur infinitus processus in diuidendo fieri queat. Quare concludimus generaliter non esse partes in infinitum factibiles in re quanta; nec quidem in ipsa quantitate; nisi ex suppositione, quòd maneat quantitas: Sed quia diuidendo in infinitum perit omne subiectum corporeum; perit etiam quantitas ipsa. Vnde infinitæ diuisibilitatis, seu in infinitum tendentis capax non est.

7 Probatur etiam conclusio. Agens naturale V. g. Ignis attingit omnes partes subiecti disgregando, cùm in omnibus sit calor. Vel ergo omnes partes factibiles disgregat, & iam partes in infinitum distinguibiles non habemus; sed quæ, omnes tandem disgregari, & seiungi possint. Quod si aliquas. Tunc non est maior ratio de vna, quam de alia: cùm calor sit in quacumque parte subiecti, æqualiter intensus; & sic subiectum secundùm omnes suas partes adustum, non esset dilatatum, cùm aliquæ transirent immunes ab efficacia caloris.

EXPENSIO VII.

Quid sit punctum phisicum, & reale.

CONCLVS. I. PROPOS. VIII.

Punctum phisicum partes habet non possibiles, vel factibiles, sed dessignabiles tantùm; dessignabiles quidem essentiâ suâ sic poscente; non factibiles autem per accidens.

EX dictis hæc conclusio, quæ puncti phisici essentiam explicat eruta est. Si quidem, cùm probauerimus puncta per se indiuisibilia nõ reperiri in quantitate; restat, dùm etiam excludimus progressum in infinitum; quòd tandem ad aliquod punctum per accidens saltem indiuisibile deueniendum sit; quod quidem partes consequatur, quæ tamen diuidi nequeant; non quia illa entitas ratione quantitatis capax non sit maioris, & vlterioris diuisionis: Sed quia non est capax ratione substantiæ, & speciei; quæ sub minori quantitate conseruari nequit.

Dices. Si ergo partes in puncto conceptibiles sunt; ergo etiam; cùm subsit quantitas ipsa huius dessignabilitatis capax; in illa, vt correspondeat nostris conceptibus in infinitum progredientibus, partes minores, & minores in infinitum inuenientur.

Respondetur. Non consequi partes dessignabiles: nisi ex suppositione, quòd sit quantitas. Et facta hac suppositione posse intellectum in infinitum procedere in subdiuidendo: quia scilicet rationem formalem intuetur; ob quam vlteriorem diuisionem concipere potest. Verùm absolutè nequaquam; neque enim in illo puncto talis subest quantitas, quæ illarum diuisionum sit capax. Quoniam illa quantitas est quantitas subiecti; quod respuit vlteriorem diuisionem, & si fiat perit subiectum. Reperitur itaque in puncto ratio formalis vlterioris diuisionis; non verò entitas illi correspondens. Sicut in homine reperitur ratio formalis vniuersalis: non ipsum vniuersale, scilicet vnum quoddam in multis; Et cùm concipimus animalitatem, concipimus vnum quoddam in multis commune Homini, & Leoni: nec inde, si quando dicatur de Homine, est etiam Leonis; verùm sit ipsius Hominis, & propter suam ipsam animalitatem dicitur Homo, animal. Si ergo in puncto quantitas concipiatur, vt quantitas partes obtinet; at si consideretur, vt coarctata puncto; & in substantia tali, partes habere nequit. Sic pietas in Deo, vt pietas, est distincta à iustitia: cum tamen in ipso Deo sit vnum quid, & idem attributum.

Dices

Dices secundò idem punctum habet partes Orientales, Occidentales, &c. cùm vndique à similibus punctis tangi possit, & cum eis vniri: ergo plures in illo partes reperiri possunt.

Respondetur. Quantum aliquod posse plura sibi æqualia coniungere, quam plura se minora respectu suę soliditatis: Ita vt minor sit proportio rerum æqualis soliditatis se alteri quanto A coniungentium ad quanti A soliditatem; quàm minoris ad ipsam soliditatem. Sic Cubus sex sibi cubos æquales coniungere potest ob sex æquales superficies, quibus circundatur.

Ita vt proportio cuborum æqualium, se alteri sibi æquali coniungentium sit vt 6. ad 1. At si cubi minores accipiantur, V.g. quorum 27. æquêt cubum A; tunc quælibet superficies sibi coniunget 9. cubos minores eo quòd comprehendat 9. quadratas superficies æquales basibus eorum, & ideo erunt cubi ambientes, & tangentes cubum maiorem 54.; & hinc cum cubus maior sit positus 27. cuborum cubis tangentibus æqualium erunt, vt 54. ad 27. nempe vt 2. ad 1. Et si cubi tangentes dimminuantur respectu cubi A, & 64. minores integrent illud maius in sua soliditate; tunc quælibet superficies cum sit 16. quadratulorum æqualium basibus cuborum paruorum tangentium, erunt tangentes cubi 96. nempe vt 96. ad 64. nempe vt 2. ad 3. & sic consequenter. Vbi vides æqualia habere maiorem capacitatem ad sibi coniungendum æqualia: quàm minora. Superficies ergo externa quanti, quę tangit aliud æquale, se exhibet à pluribus tangendam æqualibus, quàm inæqualibus: Quare etiam punctum licet in se non habeat partes solidas, quæ omnibus punctis æqualibus tangentibus correspondeant: Poterit tamen *consequi superficies tactiles plures*: quàm quòd ipsum sit in sua soliditate, in quibus tangatur. Cùm sit hæc omnis quantitatis proprietas; Cùmque punctum à ratione, & essentia quantitatis non excludamus hinc est. Quòd & eius terminationes, vt poscit esse quantitatis, ei concedamus.

Dices hoc punctum tangeret aliud secundùm superficiem exteriorem, & non secundùm interiorem: Ergo partes complecteretur exteriores, & interiores. Respondetur negando consequentiam. Nam superficies quanti, non est pars quanti; sed eius terminus exterior, si præcisè sumatur, & extrinsecè tantùm, vt infra ostendemus. Tactus verò extrinsecus est; quare ab illo tactu, qui non est secundùm soliditatem, ad partes solidas non est arguendum. Nam tunc argumentum valeret: si partes solidæ ex superficiebus, prout tanguntur, & quatenùs tanguntur, constarent: prout verò sunt tales, nulla profunditate gaudêt, & ideò nec soliditatem adipiscuntur. Cum tactus non sit, nec in minima quidem parte penetratio. Quare superficies tactæ partes solidas integrare, & constituere nequeunt, vtpote indiuisibiles. Vt verò hæc indiuisibilitas superficierum intelligenda sit infra dicemus.

Dices 4. Si sint duo circuli concentrici, qui super duas lineas simul se voluant peruenientes ad eundem terminum, æqualem lineam percurrent: Ergo duo puncta à circulo minori in motu simul occupantur; ergo punctum circuli partes habet, quod pluribus punctis in linea, quam percurrit, correspondeat.

Respondetur moueri circulum minorem velociùs, quàm maior circulus. Velocitas autem motus est causa, quòd simul occupet duas partes velocior, & minor circulus; dum maior vnum physicum indiuisibile pertransit tardiori motu. Nam illa correspondentia motus ad duas partes non est simul; sed successiua. Quare alicui superficiei etiam indiuisibili plures æquales partes correspódere possunt successiuè; imò simul, quod contactus indiuisibilium sit diuisibilis. Velociùs itaq; moueri est acquirere plures partes; dū aliud tardius acquirit partem aliquam indiuisibilem, & sicuti datur indiuisibile physicum; sic datur mouens tardissimum, quò tardius dari nequit: quia scilicet virtus motiua sub minori intensionis gradu nequeat produci, quæ est ad vnum indiuisibile physicum quantitatis.

EXPENSIO VIII.

Quid sint Mathematica indiuisibilia.

TRia sunt Mathematica indiuisibilia. *Punctum*, cuius pars nulla. *Linea*, quæ partes habet secundùm longitudinem tantùm. *Superficies*, quæ partes obtinet secundùm longitudinem, & latitudinem, non secundùm profunditatem, de quibus acturi sumus.

PRÆSSVMPTVM.

OBseruandum est autem. Quòd etiam priuatio corporis easdem commensurationes; & figuras, quas corpus obtinet, consequi potest relatiuè ad corpus, & absolutè. Sic capedo corporis cubi cuba est, & cubi palmaris, cuba est, & palmaris. Sicut etiam priuatio lucis, nempe vmbra, longa, lata est, & vt lux mouetur, vt lux, figuram habet, quam à corpore illuminato consequitur.

CONCL. I. PROPOS. IX.

Superficies, linea, punctum sunt quid reale indiuisibile, iuxta illud esse secundùm quod accipiuntur: non absolutè.

PRobatur. Nam priuationes quantitatis esse nequeunt, & accipi, vt vltimum non esse quantitatis. Nam non datur priuatio priuationis: At verò linea, cùm sit terminus superficiei, esset priuatio superficiei; sed ipsa superficies esset quoque priuatio, cùm esset vltimus terminus corporis; Ergo esset priuatio priuationis, quod esse nequit.

2 Corpora se tangunt in superficie; Sed non se tangunt in nihilo, seu priuatione; quia contactus nihili, nullus est: Ergo superficies est aliquid rei. Sed illud rei non habet profunditatem aliquam, cùm corpora se tangentia non se penetrent: Ergo est aliquid rei indiuisibile.

3 Superficies, & lineæ figuram constituunt, vel planam, vel corporis solidi. Ergo non sunt nihili; sed aliquid rei. At figura partium interiorum non est. Ergo exteriorum. Verùm id, quod est purè exteriùs nulla profunditate grassescit, si sit corpus; nulla latitudine dilatatur; si sit superficies. Ergo superficies, lineaque indiuibilis est. Et idem dicas de puncto; cùm lineæ extremum sit. Neque valet recurrere ad intellectū;

quia contactus, figuraque sunt quid à parte rei. Dices. Si superficies, linea, punctum sunt quantitates, & sunt indiuisibiles. Ergo quantum ex indiuisibilibus componitur.

Respondetur id non sequi. Nam non sunt indiuisibiles absolutè; sed indiuisibiles, vt vltimę & contingentes aliud secundùm sui vltimum esse: Si autem est vltimum esse quanti, non potest consequi secundùm illud, in quo est vltimum, & secundùm illud, in quo tangitur, partes. Nam, si superficies V. g. partes enumeraret, illa non esset vltimum molis; nec propriè tangeretur; sed penetraretur: cum illud, quod tangeretur, non esset exterius; sed quid internum. Cùm igitur sint indiuisibiles, vt vltimę sunt, & quatenus tactæ; Illa tamen quantitas, vt tacta; & vltima non subsistit, nec esse potest sine partibus intrinsecis, ob quas vltima dicitur; si enim partes internæ non essent, hæc non esset vltima, nec exterior. Quare licet, vt vltima, partes non amplectatur profundas, & vt tacta; quia tamen se solâ non est, nec esse potest; hinc emergit, quòd non sit absolutè indiuisibilis; Sed diuisibilitatem, vt composita ex alijs nanciscatur.

CONCL. II. PROPOS. X.

Pars vltima indiuisibilis, nec est, nec esse, aut concipi potest sine alijs compartibus.

PRobatur. Quod esse nequeat *sine suis compartibus*: tum *ex dictis*. Quia illa se solâ, aut esset quantitas molis, aut diuersæ speciei, non molis; quia trinam dimensionem non consequeretur, non alterius speciei: Quia aliam entitatem; quam quantitatis molis non obtineret, cùm sit terminus corporis solidi.

Quod verò nequeat concipi sine suis compartibus perfecto conceptu, probatur. Quia superficies, linea, punctum sunt vltimum esse rei: Quod autem vltimum refertur ad primum. Quare est quid relatiuum; Relatiua autem sunt simul cognitione, nec vnum sine altero perfectè concipi potest. Quare, nec superficies poterit concipi sine alijs compartibus.

2 Si punctum posset concipi sine alijs partibus V. g. sine linea deberet concipi prout deffinit Euclides. *Cuius pars nulla*: sed id, quod nullam habet partem, quantitatis nihil est, ergo deberet concipi, vt priuatio quantitatis, & vt nihil, & idem dicas de lineâ, & superficie secundùm eam rationem, secundùm quam indiuisibiles sunt.

Dices. Tactus non præscindit: & tamen tangit solam superficiem; Ergo superficies, si se solâ tangi potest; etiam se solâ, & esse, & concipi potest.

Respondetur. Tactum esse modum quendam. Modus autem non est aliquid superadditum rei, cuius est modus. Quare, cum sit idem, ac ipsa superficies modificata, sicut ipse l. realiter rebus superueniat, nec esse, nec concipi sine illis valet, quæ modificat. Sic nec ipsius rei modificatæ ab alijs, quibus essentialiter annectitur, conceptus distinguere potest; si de perfectis cóceptibus sermo sit, sicut nec modus actionis, quòd sit facta hoc, vel alio modo vim habet seiungendi, nec realiter, nec per intellectum ipsam actionem à motu, & passione licet modus actionis passionem nullo modo afficiat. Sic situs non efficit, figuram sine re figurata posse subsistere, licet figuram ipsam afficiat, & eam mutet.

3 Probatur vtraque pars. Quantitas molis non datur; nec concipi potest sine superficie, sicut nec superficies sine linea, nec linea sine puncto. Alioquin esset quid infinitum. Ergo neque superficies, linea, punctum sine quantitate molis, cùm quantitas molis non sit aliquid latiùs patens, quàm ipsius terminationes.

COROLLARIVM.

CVm ergo superficies, linea punctum non sit, nec esse possit sine corpore: hinc est, quod non sint; nisi vt tales, indiuisibiles; non autem absolutè, & conceptu adæquato conceptę, & quòd, nec conceptus superficiei, nec lineæ, nec puncti perfectus, & adæquatus hauriri queat; & ideo, quòd in superficie, lineâ puncto semper partes cócipiendæ sint, si sit adæquatus cóceptus. Quare à Mathematicis definitur, nec superficies, nec linea, nec punctum, secundùm suum adæquatum conceptum. Verùm secundùm id; quod precisè dicunt, & explicitè. Sicut definitur à Theologis pietas Dei, licet idem sit cum iustitia, non quidem, vt idem est cum ipsa, & prout in suo conceptu eam implicat; sed explicitè prout ab illa conceptu inadæquato præcisa concipitur.

CONCL. III. PROPOS. XI.

Superficies, linea, & punctum secundùm suum esse inadæquatum à Mathematicis accipiuntur.

PAtet. Quia definiunt ea esse quædam indiuisibilia, aut omnino, aut secundùm quid. Sed etiam definiunt illa, vt quantitates. Ergo considerant inadæquatè. Cum quantitas adæquatè concepta nullis indiuisibilibus integretur.

CONCL. IV. PROPOS. XII.

Superficies, linea, punctum, accipiuntur quoque, vt negationes vlterioris extensionis.

PRobat. Quia superficies non semel accipitur in aliquo corpore solido pro eo, quod mediat inter vnam partem, & aliam non realiter factam; sed tantùm conceptam. At id, quod inter vnam, & aliam immediatam interijcitur, nihil est, & solùm negatio vlterioris extensionis, prout taliter limitatur, aut limitata fuit ab intellectu: Ergo superficies etiam pro negatione extensionis vlterioris accipitur. Idem de linea, & puncto intelligi debet. Nam linea distinguens superficiem in multas partes, est inceptio huius partis, & desitio alterius in eâdem superficie cócepta. Dices. Non potest concipi negatio negationis. Respondetur concipi superficies, non vt negatio; sed vt, quid positiuum inadæquatè conceptum, in quo, & cuius potest negatio concipi.

EXPENSIO IX.

An datis indiuisibilibus, illa possint esse obiectum Mathematica.

BOnauentura Cauallerius per indiuisibilia, libro ad id conscripto, non sine ingenio, & subtilitate Mathematicam se promouere profitetur; Et ex contemplatione punctorum indiuisibilium in quantis existentium æqualitates, & proportiones Mathematicorum corporum inuenire.

Vnde rectè hic quærimus: an indiuisibilia, ex suppositione, quòd darentur, possint deseruire pro obiecto, quod speculationis Mathematicæ capax existat.

CONCL. I. PROPOS. XIII.

Indiuisibilia simpliciter non sunt obiectum Mathematicæ.

EST contra prædictum, Verùm communis inter Neotericos Betinum par. 2. Epilog. Planim. Bullialdi de lineis spiralibus propos. 42. Not. 2. Vincentij Mutij de Maximis, & Minimis lib. 1. propos. 17. Primus quidem directè impugnat; Alij verò amicissimi sui laudant ingenium; cautè tamen vsurpandam doctrinam censent. Et tandem Goldinus de centro grauitatis hanc doctrinam diuersimodè carpit.

1 Probatur. Licet enim indiuisibilia in quantitate laterent; non tamen constat: An sint finita, vel infinita. Ergo non possunt præstare fundamentum euidens demonstrationi.

2 Suppositis punctis finitis. Dantur lineæ irrationales, superficiesque, & corpora. Si verò punctis finitis hæc constant, irrationales nullo modo esse queunt, cùm puncta finita aliquo numero exprimi possint: Partes verò linearum incommensurabilium nullo numero effari possunt, vt suo loco dicemus.

Dices indiuisibilia quidem proportione rationali potiri, seorsim, & distributiuè sumpta; non autem collectiuè.

Sed frustra. Nam collectio finitorum nihil aliud est, quam ipsa distributiuè sumptorum multitudo. Vndè si distributiuè dicunt omnia proportionem, & numeris indicari possunt. Ergo etiam omnium collectio numero aliquo exprimibilis est.

Deinde licet finita: non tamen omnia accipi possunt: sed aliqua; à quibus paritas ad alia acceptibilia deducatur. Sed illa aliqua rationalia sunt. Ergo etiam rationalis erit aliorum proportio.

3 Suppositis item punctis finitis. Destruit hæc opinio lineas; superficiesque potentiâ tantum commensurabiles. V.g. Latus quadrati incommensurabile est diagonali; licet eorum quadrata commensurabilia sint, nempe vt 1. ad 2.: Sed omnes lineæ æquales lateri, ex quibus constat quadratum ex latere effectum sunt incommensurabiles diagonali, & omnibus illi æqualibus, ex quibus constat quadratum diagonalis. Ergo totum quadratum lateris incommensurabile esset quadrato diagonalis. Cùm lineæ omnes, ex quibus vtrumque quadratum conficitur, sint inuicem incommensurabiles.

4 Datis punctis infinitis. Ea ex Euclide proportionem dicunt; quæ multiplicata possunt se inuicem superare. Sed infinitum multiplicari nequit; neque aliud superare. Ergo datis punctis infinitis, quantitates, vt ex ipsis constantes, consideratæ nullam inuicem dicent proportionem. Quod autem infinitum multiplicari nequeat, patet. Quia daretur infinitum triplum, quadruplum, centuplum: Ergo daretur infinitum alio maius: Si autem vnum infinitum concedatur maius alio; Iam ratio infiniti cessat in minori; Cùm ibi finiatur, vbi incipit aliud augescere.

5 Probatur. Quoniam de finito ad infinitum arguere non licet, cùm infiniti, & finiti nulla sit proportio. Sed in argumentis omnia quantitatiua accipi nequeunt, quia infinita sunt: Ergo aliqua V.g. 10. aut 20. lineas ex quarum æqualitate; vel proportione ad alias, arguitur totam planitiem alteri, vel æqualem esse, vel proportionalem. Ergo argumentum procedit ab aliquibus lineis ad omnes. Sed aliquæ finitæ sunt; omnes infinitæ. Itaque argumentum arguit à finito ad infinitum; siquidem superficies totæ infinitis lineis constant.

Dices omnia aliarum, etiã si sint infinitæ similis ratio demonstratur, & ideo aliarum quamuis infinitarum idem argumentum vrget.

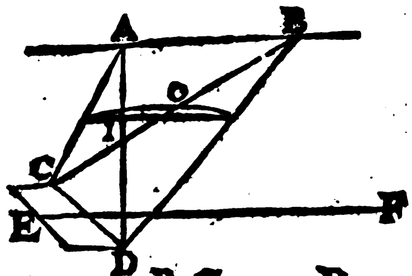
Respondetur nullam rationem æqualitatis, vel inæqualitatis in indiuisibilibus reperiri; quę author admittit; cùm punctum sit, cuius pars nulla: Vnde tota inæqualitas rejicitur in numerum punctorum, quibus lineæ constant; qui numerus cum sit infinitus omnem quoque proportionem obliterat. Deinde cum nesciamus an in quantitate sit maius, aut minus infinitum alio, vel æquale. Si omne infinitum est æquale, destruit omnem proportionem maioris, aut minoris inæqualitatis. Si admittuntur infinita inæqualia non possumus scire, an sint plura, vel pauciora; quàm oportet; & sic proportio, quæ secundùm alteram rationem militat, à numero incerto indiuisibilium destruatur.

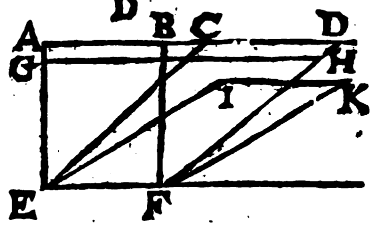
6 Probatur vniuersaliter. Nam ex hoc sequeretur; quod minus esset æquale maiori. Dicunt enim aduersarij: Rectangulum A B E F, in schemate inferiori, esse æquale rectangulo E C D F, vt verè est, & ostendit Euclides lib. 1. propos. 36. Sed non ex demonstratione Euclidis. Verùm, quia inter lineas A D, E F non possit intercipi; nisi æqualis multitudo linearum parallelarum, qualis vna ex ipsis est G H. Quòd si ita est. Ergo E C esset æqualis lineæ E A, nam lineæ omnes, quæ duci possunt inter parallelas E F, & A D occupãt omnia puncta linearum E A, & E C; Ergo E A, & E C æquali multitudine punctorum constabunt. Quare E C erit æqualis lineæ E A maior minori, quòd esse nequit; At si maior multitudo punctorum est in E C: Ergo non tota E C lineis productis occupata est; cùm tamen totam superficiem A D E F integrent, & extendant.

Deinde, si maior multitudo punctorum est in E C; quàm E A: Plures ergo lineæ duci poterunt; cùm ex omnibus punctis lateris E C parallelæ duci queant: Ergo maius planum erit E C D F; quã E A B F contra Euclidis demonstrationem.

* 7 Probat. Nam sint duo plana in figura altiori parallela A B, E F, & sectio C D existat ad angulos rectos ad E F; sintque triangula C A D, & C D B æquicrura; Erunt ergo inter parallelas E F, & A B.

Illæ ergo ſuperficies, quæ inter hæc plana A B, & E F. interponuntur, & ſecant triangulum C A D, tot erunt, quot illa, quæ ſecant triãgulum C D B: Ergo erit ęqualis ſuperficies C A D, ſuperficiei C D B, cùm tot lineas ſectionibus planarum impreſſas recipiant ambæ, vel eamdem multitudinem planorum ſecantium continuorum, vt eſt I O terminent. Sed verè ſunt inæquales: maiorque eſt C D B, quam C A D, ergo ſuperficies earumdem linearum capax maior eſſe poterit; quã alia: Quod ſint inæquales, patebit ex dicendis Propoſ. 1. lib. 6. Ele. quò d eadem baſis exiſtat, & inæqualis eorum altitudo.





Dices. Lineas conſiderandas ſecundùm eundem ſitum, nimirùm parallelum. Sed huic obiectioni vtraque adductarum proximè probationum ſatisfacit: Nam in primâ accipiuntur ſecundùm eundem ſitum, vel ductum parallelum, & tamen plura puncta reperiuntur in latere E C; quàm E A: cùm tamen planities ſint ęquales. Quòd ſi ſecundùm eundem ſitum lineæ C H non ſunt plura puncta in E C, quàm E A; Ergo neque in ſecundo ſchemate altiori plura puncta erunt in C B, quàm C A, & ideo C A D, & C B D erunt æquales ſuperficies. Quod verum non eſt ex cit. Eucl. 1. propoſ. lib. 6.

Deinde ſequeretur, quod lineæ C B eſſent æquales lineę C A, ſaltem ſecundùm illum ſitum acceptæ, cùm eadem multitudo punctorum in C A reperiatur, quæ in C B, quòd tamen falſum euidenter eſt.

8 Probatur. Quia dantur figuræ Iſoperimetræ, quæ ſcilicet ſub eodem ambitu, linearum, & laterum ſuperficies continent inæquales. Quę tamen non eſſent: Cum eadem multitudo punctorum in lateribus æquales in multitudine duci lineas ſuperficiem ſecantes expoſceret, cumque multitudo linearum, tùm huius, tùm alterius ſuperficiei eſſet æqualis; ſuperficies quoque eſſent æquales contra præſupoſitum.

Dices. Ex æqualitate omnium linearum, quæ duci poſſunt in circulo à centro ad circumferentiam, arguitur æquidiſtantia circumferentiæ à centro. Sic ex omnibus angulis rectis, quos facit linea erecta, & inſiſtens cum omnibus lineis, quæ ſunt in plano, arguitur, quòd illa linea ſit perpendicularis lib. 11. propoſ. 3. Eucl.

Reſpondetur. Hic neque æqualitatem, neque proportionem argui: ſed ſolùm ſitum. Vnde eſt diſpar ratio. Deinde à multitudine linearum æquali, non arguit vllam æqualitatem: Sed ab ipſis lineis æqualibus, ſint, quot quot ſunt, æquidiſtantiam deſinit. Ita vt argumentum in numero linearum non fundetur: ſed vel in ſitu, vel in æqualitate earum: Vnde patet, quòd ab infinitate, multitudineque earum omninò præſcindit. Tandem non arguit à lineis, vt indiuiſibilibus ad planitiem, ſed à lineis ſumptis prout ſunt diuiſibiles, & ſecundùm longitudinem: Vnde non tranſit de genere ad aliud genus quantitatis. Hinc autem eruitur.

9 Argumentum. In Mathematicis non eſt bona illatio, cùm ſit tranſitus de genere ad aliud genus quantitatis, V. g. à linea ad ſuperficiem, cum inter prima genera non ſit proportio: Sed Caualierius argumentatur ab indiuiſibilibus ad planities, & à planis ad corpora. Ergo eius argumenta verã, & euidenti illatione non concludunt.

TRA-

TRACTATVS II. PRÆLIMINARIS.

De essentia quantitatis discretæ.

CVM multa, quæ de quantitatis numericæ essentia dicturi sumus, & etiam ex parte ea, quæ diximus, dependeant à quantitatis discretæ cognitione. Hinc est, quòd antequàm ipsas Mathematicas propositiones attingamus, aliquam de quantitatis discretæ essentia haurire cognitionem sit omninò opportunum; nam planiori, liberiorique pede, tùm discretæ, tùm continuæ quantitatis relationes, & respectus percipiendi facultas erit.

EXPENSIO I.

Quid sit vnitas numerica.

VNitas, quantò magis simplex est, tantò laboriosiùs penetratur, vt, velut indiuisa, ab intellectu non posse secerni, & in sua prædicata seiungi, videatur. Vnde apud Methaphisicos mirum est, quot quantæque opiniones de *vnius* essentia ventilentur. Sed nos, quæ certiora sunt, & euidentiora ex nostris Placitis philosoficis hic deducemus.

CONCL. I. PROPOS. I.

Vnitas numeralis est eadem, ac indiuidualis tùm re, tùm ratione.

1 PRob. ex Arist. 3. Metaph. tex. 14. *Numero enim vnum dicere, aut singulare nihil differt; ita enim singulare dicimus, quod numero vnum est.*

2 Ratione prima pars ostenditur. Si vnitas indiuiduationis non esset eadem cum vnitate numeri: multitudo quæ opponitur vnitati numeri; non opponeretur indiuiduationi, sed esset quid disparatum; vt humiditas, quia non est contraria frigori, est quid disparatum respectu caloris. Vnde cum calore morari potest; Sed quælibet multitudo destruit, tùm vnitatem numericam, tùm indiuidualem; estq; contraria, tùm vni, tùm alteri: Ergo idē est vnitas indiuidualis, & numeri.

3 Eatenùs entia sunt multiplicata, quia numerabilia, & è contra. Multiplicata verò sunt, quia diuisa sunt in se, & diuisa à quocumque alio; Sed esse diuisum in se, & diuisum à quocumque alio est vnitas indiuidualis: Ergo hæc ipsa est etiam numeralis.

4 Si tollatur per intellectum omnis vnitas numeralis, relinquendo in subiecto vnitatem indiuiduationis: Ita vel erunt numerabilia, vel non. Si poterunt numerari; Ergo contra hypotesim vnitas numeralis adhuc in subiecto latet, cùm quantum numerabile efficiat: Si verò non sunt numerabilia; Ergo contra præsupositum vnum essent; Siquidem illud vnum est; quod numerali pluritati non correspondet.

5 Entia numerata constituunt numerum. Quia reperit intellectus multitudinem, atque multiplicationem: Sed nulla alia entia à parte rei multiplicationem adipiscuntur; nisi indiuidualem: Ergo vnitas indiuidualis, etiam numeralis fatēda.

Prob. 2. pars. Tunc aliquid cum fundamento distinguit potentia intellectiua: quando reperit, vel capacitatem in re, vel æquiualentiam ad plura actu distincta: sed hæ duæ vnitates numerica, & indiuidualis diuersitatem inter se non habent, nec pluribus separatis æquiualent. Ergo intellectus illas distinguere nequit. Quod diuersitatem inuicem non seruent; quia indiuidua etiam, vt indiuidua, numerabilia sunt; Et quia numerabilitas, & indiuiduatio vnitatem non variant, nec vnum numerale alio pacto se gerit, ac indiuiduale. Quòd verò in ordine ad aliud non distinguātur, id facit. Quoniam vnitas numeralis, & indiuidualis non æquiualent diuersis, cum vnitas numeralis illis omnibus æquiualeat, cui æquiualet indiuidualis. Cui enim istę vnitates æquiualere possunt? nisi alicui vnitati? Pluribus enim vnitatem habentibus subiectum habens vnitatem numericam simul, & indiuidualem correspondere nequit. Illa enim vnitatem duplicem habentia vnumquodque, & vnitatem numeralem, & vnitatem indiuidualem possideret. Quare tùm vnum, tùm aliud vtrisque vnitatibus numerali, & indiuiduali correspponderet.

Dices 1. Substantię spirituales sunt numerabiles, licet non sint indiuiduę. 2. Multitudo ipsa est quoque numerabilis: Nam exercitus, congregationes, acerui numero subesse possunt. 3. Gradus Methaphisici etiam in eodem subiecto, & modi numerabiles sunt, & tamen indiuidua nō sunt: Ergo vnitas indiuidualis numerica non est.

Respondetur hęc omnia esse numerabilia, quo pacto sunt diuisa, & vna. Nam quoad substantias spirituales diuisę verè sunt ab inuicem, & rationem indiuiduam veram habent secundùm Theologos numerosiores. Quoad verò ea, quę sunt vnum per accidens: Iam sicut sunt vnum per accidens, ita numerantur per accidens, & fictè vnum dicuntur, tùm numericè, tùm indiuiduè. Tandem de gradibus methaphisicis non alio pacto sentiendum, qui, cùm sint quid pluribus communē veram vnitatem nō participant:

&

& sic nec veram numerabilitatem. Sed eam, quā mens nostra prȩscindendo illis tradit. Quare sicut verè sunt vnum in intellectu prȩdicata essentialia, vt vnū cogitata verè numerabilia sunt; & vt in mente, numerabilitatem consequuntur propriam, vt propria vnitate gaudent; nempe intellectuali ad imitationem numerabilitatis à parte rei. Sed tolle, quod apposuit humana mens vnitatis, aut diuisionis, & numerabilia non erūt. Modi verò multiplicantur ad subeundam numerabilitatem per solam fictionem nostri intellectus, qui assumit idem subiectum multoties, & vt subiectum diuersorum modorum plurificat. Non enim potest concipi modus sine re cuius est modus; & ideo, cùm concipit duos modos implicitè, cōcipit gemina vice subiectum, in quo sunt, & sic idem subiectum multiplicat tanquam sibi notum ex gemina varietate. Verùm modus absolutè numerabilis non est. Cùm verò plures modi, vt modi sunt, non sint, nec plures entitates, nec quid plurificatum, imò ab eodem subiecto, in quo inexistunt, nec re, nec ratione distinguantur, & modus, nec quidem possit concipi sine re, cuius est modus. Ergo tantò minùs numerari.

Dices contra 2. partem. Potest intellectus concipere vnitatem indiuidualem in ordine ad aliud indiuiduum. Numericam in ordine ad se, qui numerare potest: Ergo potest per diuersos respectus istas duas vnitates distinguere.

Respond. Posse quidem intellectum considerare diuersos respectus: sed hoc non est multiplicare *conceptus ipsius rei*. At relationes diuersas in ipsa re considerare. Quòd maximè asseras de prȩdicamentalibus, vt sunt istȩ. Nam etiam per aliquos, nec quidem transcendentales relationes suum multiplicant conceptum. Cùm per multos actio, passio, & motus, nec quidem ratione distinguantur, & tamen sunt respectus transcendentales operationis ad agens, & passū. Sic animal, licet, vt genus, dicat ordinem ad intellectum, & vt animal, ad naturas, in quibus est; non tamen genus, & animal duo conceptus sunt in ipso animali, sed illud ipsum animal genericum est, & prout substat nostris conceptibus.

CONCL. II. PROPOS. II.

Vnitas numeralis est indiuisio in se, & diuisio à quocunque alio.

PRob. ex prȩfata concl. Quoniam vnitas numeralis est idem re, ac ratione, quod vnitas indiuidualis. Sed vnum indiuiduale definitur; Quòd sit in se vnum, at diuisum à quocumque alio. Igitur tale erit quoque vnum numericum: Vnde eius vnitas erit indiuisio in se, & diuisio à quocumque alio.

CONCL. III. PROPOS. III.

Quantitas continua est fundamentum vnitatis possibilis numeralis in quocumque subiecto.

PRobat. Nam omne continuum diuidi potest: quȩ verò diuisa sunt indiuidua sunt. Vnde & numerabilia.

COROLLARIVM.

HInc eruitur. Intellectum in re quanta sufficiens fundamentum nancisci numerandi partes. Quia adest earum possibilitas, ob quam saltem potentiâ numerabiles sunt, sicut & sunt potentiâ multiplicabiles. Vnde bene Arist. 2. Methaphis. tex. 2. inquit. *Cognoscitur quantum, vt quantum, aut vno, aut numero; omnis autem numerus vno: Quare omne quantum, prout quantum, vno cognoscitur; Et quo primo hoc cognoscitur ipsum vnum, propter, quod vnum, prout vnum, principium est numeri, prout numerus est.*

CONCLVS. IV. PROPOS. IV.

Quantitas intensionis quoque est fundamentum vnitatis numeralis possibilis.

PRob. ex nostris placitis Philosophicis. Quoniam accidens separatum à subiecto, vel saltem diuinâ omnipotentiâ, indiuiduum constituere potest. Quare si tres, & tres gradus accipiantur caloris, & sine subiecto contineantur, efficient duo indiuidua. Ergo etiam qualitas; cùm consequatur indiuidua possibilia, erit fundamentū multiplicationis, & vnitatis numeralis.

CONCLVS. V. PROPOS. V.

Quantitas successiua, prout dicit res pertranseuntes, est numerabilis, aut actu, aut potentiâ.

PRob. Quia omne, quòd mouetur successiuè, aut extensum, aut intensum, aut discretum est, sed hȩc propriè numerabilia sunt. Ergo etiam quantitas successiua, quȩ consistit in motu istarum quantitatum, numerabilis est, quoad partes vt motus pertranseuntes, in quibus ratio temporis consistit.

COROLLARIVM.

ET hinc emergit. Quòd tempus quoque numerabile sit; Quia scilicet numerantur partes ȩquali duratione pertranseuntes, aut saltem proportionali.

EXPENSIO II.

An vnitas, numerusque distinguantur realiter à re, in qua sunt.

CVM dicimus vnum, aut numerabile operȩ pretium est scire; an intelligamus de subiecto, aut in subiecto sit aliquid aliud, quòd numerabile, & vnum appellatur.

CONCLVS. I. PROPOS. VI.

Vnitas, quæ est principium quantitatis discretæ, non distinguitur realiter à re vnitatem habente.

ESt conclusio nost. Pasq. disput. 45. par. 2. sec. 3.

Probat. Nam si vnitas esset accidens aliquod, suam vnitatem indiuidualem possideret. Hȩc vnitas itaque; aut est vna aliâ quadam superadditâ vnitate, aut est vna ex se, si ex se vnitate fruitur: Ergo etiam subiectum vnum esse poterit absque hac superadditâ vnitate. Si verò requiritur alia vnitas, quȩ sit accidens superadditū; iam

iam ad hanc vnitatem alia requireretur, & sic in infinitum, quod repugnat.

2 Per hoc constituitur aliquid indiuiduum numero; *Quod sit vnum in se, & diuisum à quocumque alio*, sed per aliquid extra se non potest quidquam esse indiuisum in se, & diuisum à quocumq; alio, ergo nec vnitatem numericam consequi potest: Minor propos. exponitur. Nam per hoc, quòd substantia sit alba, non est alba in se propriè: quia de se etiam nigredinis capax est. Vnde de se, neque alba est, neque non alba. Ita, si aliquid esset vnum in se per aliquid superadditum, deberet esse indifferens ad diuisionem, & indiuisionem; nempe, neque esse diuisum, neque non diuisum; quod est impossibile.

3 Si indiuiduatio est forma superadiuncta; poterit destrui à Deo. Destruatur. Itaque illa natura iam indiuiduatione expoliata; vel erit à quocumque alio diuisa, vel non? Si non erit diuisa: Ergo erit idem cum aliqua alia natura singulari, & sic esset singularis, ex alterius, cum qua vnum est, singularitate. Quod si, nec quidem ipsa singularis est, cum alia idem sequeretur, & sic de alijs, donec ad naturam singularem aliquam deueniremus, & vltimam, quæ vtique datur, & tunc illa esset vna, cùm sit vltima: quod est absurdum cum dentur multæ naturæ singulares. Vel esset diuisa à quocumque alio illa natura singularitate priuata à Deo. Et iam singularis esset.

Deinde 4. A parte rei vnum in multis non admittitur: ergo quælibet natura in se est diuisa in plura supposita. Alioquin si in se esset indiuisa, & per multas superadditas vnitates diuisa, esset vniuersale à parte rei.

5 Natura non est *possibilis sine indiuiduis*: Ergo inter eius prædicata essentialia inuoluitur indiuiduatio, & vnitas.

6 Agens terminat ad singulare: Ergo natura de se est singularis. Quòd ad eam terminet agens.

7 Tandem; Si hęc vnitas est superaddita separetur intellectu. Et quęro de entitate illa suâ vnitate expoliata: estne vna, aut multiplex? Si est vna: Ergo sine superadditione alicuius entis, quòd vnitatem prębeat vna est, & singularis: Si multiplex. Ergo sine diuisione aliquid potest fieri multiplex. Deinde adhuc vnum erit, cùm pluritas ex vnitatibus constet: Vnde per ablationem vnius plures consequeretur vnitates. Si quid medium statim apparet absurdum; quoniam vnum, & multiplex negatiuè opponuntur.

CONCL. II. PROPOS. VII.

Numerus, vt numerus est, non est ens distinctum à re numeratâ.

Contra Auicenam 3. Metaph. Caietanum, nostrum Morandum, & alios.

Probatur. Quia numerus componitur ex vnitatibus. Sed vnitates non sunt, quid distinctum à re vnâ: Ergo neque numerus.

2 Si esset aliquod accidens à subiecto separabile numerari posset. Ergo numerabilitas numeraretur. Quòd est inconueniens.

3 Numerabilitas dicit posse numerari; nempe quandam potentiam ad actualem numerationem. Sed actualis numeratio nihil superaddit aliud: nisi opus intellectus numerãtis: Ergo nec numerabilitas aliud superaddet: nisi possibilitas operis intellectus numerantis. Quòd res in esse suo possibili tales sint, quales in esse actuali quoad essentialia inueniuntur.

4 Si numerus est accidens; In quo inhæret? Non in omnibus numeratis; alioquin daretur vniuersale à parte rei; nempe aliquod vnum in multis diuisis. Si autem in aliquo tantùm, aut est vnum, aut duo, aut tria. Quare, cùm formæ expositæ suos effectus formales non possint suspendere, trias in subiecto semper trinum denominaret subiectum, & dualitas duo. Quare nunquam posset fieri, aut quatuor, aut quinque. Deinde vnicum posset denominari, trinum, & duo ob formam triadis, vel dualitatis subiecto inhærentem.

5 Si numerus V. g. quinque est ens sine subiecto erit etiam vnũ sine subiecto; quia vnum, & ens conuertuntur. Quod si non obtinet vnitatem sine subiecto; vt patet; neque erit ens sine subiecto. Quod verò numerus, vt numerus vnitatem nõ cõsequatur, patet; quia numerus, vt numerus est formaliter, in multiplicatione cõsistit.

6 Non potest separari ratio ternarij à tribus subiectis. Ergo non est accidens; nam si tale esset, posset auferri, & sic tria indiuidua essent, & non essent tria. Essent enim tria: Quia adhuc manerét indiuidua tot, vt erant priùs; cùm nullum destructum fuerit, non essent autem tria; Quia ab eis ablata est ratio ternarij.

Dices. Si ergo numerus accidens non est, nec aliquid reale: Ergo Musica, & Arithmetica agens de numeris erit scientia fictitia.

Respond. Agere de numeratis ipsis rebus, prout obijciuntur nostris conceptibus, eisque subsunt. Ideoque esse scientias reales.

CONCL. III. PROPOS. VIII.

Vnitas, & numerus metaphisicè consideratus dicit aliquid præter naturam, & superadiungit aliquam rationem formalem.

1 Prob. Tunc est diuersa formalitas. Quando conceptu affirmatiuo potest concipi vnum sine alio. Sed natura potest concipi sine indiuiduatione, & numero, & dicere. Natura non est vnitas indiuiduationis, aut numerus. Ergo super naturam addit numerus, & vnitas aliquam formalitatem.

2 Omnes naturæ conueniunt in indiuiduatione; sed non omnes conueniunt in naturâ. Diuersificatur quoque numerus multoties, & non natura: Ergo vnitas, numerusque dicit aliquid pręter naturam, scilicet vnitas, indiuisionem in se, & diuisionem à quocumque alio: Numerus verò huius rationis multiplicationem in pluribus subiectis.

EXPENSIO III.

An ratio Indiuiduationis consistat in differentia aliqua, ob quam plurificetur ab alijs.

Cvm aliqui ex Philosophis diuisionem, quam aliquod vnum habet ab alijs, dubitent, an sit diuisio

diuisio dissimilitudinis; idest distinctio; an verò diuisio realis per separationem substantię effecta. Hinc est, quòd, vt penitùs essentiā vnitatis peruestigemus, sit quoque videndum, an aliqua differentia adferat hanc vnitatem singularitatis subiecto, vel per solam diuisionem obtineatur.

CONCLVS. I. PROPOS. IX.

Vnitas nullam importat differentiam in sua formalitate; neque vlla distinctione constituitur ab alijs plurificata.

CONtra multos Philosophos, qui id asserunt de vnitate indiuiduationis, præcipuè Fonsecam in Methaph. cap. 10. quęst. 7. sec. 3. Suarez in Meth. disp. 5. sec. 8. Zachar. Pasqual. nostr. Tom. 2. Meth. disp. 44. sec. 2. num. 10.

1 Probatur. Diuisio non ingerit differentiam inter substantias, cùm nihil producat, nullamque formam nouam subiecto aduehat; sed per solam diuisionem indiuidua multiplicantur; & in vnitates plures transeunt; Sicut per coniunctionem duarum partium integralium in vnum coalescunt: Ergo vnitas nullam differentiam secum aduehit ex suo formali.

* 2 Prob. Huic assignato vni, V. g. huic indiuiduo non repugnat creari indiuiduum omninò simile, ne dum substantiâ; sed etiam in omnibus suis accidentibus, vsque ad positionem in eodem loco, & situationem. Et tunc expostulo. An hęc sint duo indiuidua. Quod si sunt; hoc est quod volumus, duas vnitates reperiri, quæ tamen nullâ differentiâ dissentiant. Quod si duo non sunt; hoc est contra diuinam potentiam pugnare, cui similis indiuidui creatio denegatur.

* 3 Prob. Similitudo est relatio, quæ fundamenta supponit proxima ad relationem fundandam. Sed fundamenta relationis non possunt esse minùs, quam duo. Quod si fundamenta omnimodæ similitudinis duo sunt: Ergo absque aliqua dissimilitudine duas vnitates habemus.

4 Prob. Dissimilitudo est relatio; sed relatio præsuponit pro fundamento plura; Ergo ipsa non facit pluralitatem.

* 5 Sunt multa vnitate pollentia; Ergo in genere vnitatis conueniunt: Sed nec discrepant in ratione talis vnitatis; Quia, cùm vnitas poneret genus, tunc ratio talis vnitatis adueheret differentiam: Ergo tunc constitueret speciem, scilicet aliquod vnum in multis, idest, non omninò vnum contra præsuppositum.

6 Si quæ sunt vnum reposcerent ad sui pluritatem differentiam; Illa, vel esset accidentalis, vel essentialis ipsi vnitati. Si dicas accidentalem; vim plurificandi non consequitur, cùm accidens esse rei non constituat: Plurificatio autem entitatum ab intrinseco, & in rei entitate consistit. Si dicas essentialem, iam res different specie, non numero; cùm possibilia essent alia indiuidua eamdem rationem participantia. Quare iam illa differentia essentialis, & participata à pluribus indiuiduis species esset.

7 Quia multa indiuidua dantur inter quæ nulla potest reperiri diuersitas, vt duæ gemmæ omninò similes. Sic multa dantur, quæ dissimilia sunt, & tamen vnum constituunt, vt partes dissimilares in homine; quæ corpus humanum integrant: Ergo differentia, nec multiplicat vnitates, nec similitudo vnitatem constituit.

CONCLVS. II. PROPOS. X.

Tota ratio multiplicationis indiuiduorum est sola diuisio.

PRobatur. Diuisio formaliter importat negationem, & destructionem vnionis. Verùm, quę vnione non copulantur, vnum non sunt. Ergo multiplicata sunt. Sed nec genere, nec specie; Quoniam nulla inuecta est differentia: Ergo sunt multiplicata indiuiduatione, & vnitate numericâ.

Dices. Multa indiuidua, quæ nullo modo à subiecto diuisa sunt. Vt Accidentia materiæ, Anima corpori, Actus mentis ipsi intellectui, & inter se, Ens successiuum subiecto, & Modi. Quapropter, cùm hæc sint indiuidua, numeroque multiplicata, & tamen indiuisa, diuisio vnitatem numericam non constituet.

Resp. Hæc omnia, demptis modis esse diuersa numero à subiecto, in quo inexistunt, nō actu; sed potentiâ; quia entitatem possident, vt saltem diuina operante potentia sine subiecto commorari possint. Ad id verò de modis respondetur non constituere; neque in subiecto, neque inter se pluritatem numericam, sed solùm specificam; cùm nec sine subiecto concipi possint.

CONCL. III. PROPOS. XI.

Vnitas numerica, seu realis, seu potentialis per aliquam differentiam dignoscitur.

PRob. Quæ differentia non sunt ab intellectu distingui nequeunt: Ergo ea omnia, quæ distincta cognoscuntur, aliquam differentiam secum ferunt, ob quam dignoscantur. At si ab intellectu res non distinguantur, vt vnum concipiuntur: Ergo ad hoc, vt intellectus plures vnitates concipiat, debet recognoscere aliquam differentiam, ob quam distinguat. Quod verò; quæ distincta non cognoscuntur, vt vnum aprehendantur, patet experimento. Nam pone mihi aliquod corpus omninò alteri simile eodem loco, ac aliud, & deinde dico; an sit aliquis intellectus humanus, qui possit illa duo corpora, vt duo recognoscere. Et si aliquando oculus iudicat continuum gyrum esse Titionem pluribus locis celerrimo, & circulari motu deuectum; quia ob celeritatem loca non distinguit; Tantò magis id asserendum si duorum esset omninò idem locus.

2 Prob. Ratio indiuisionis in se, & diuisionis à quacunque alio est eadem in omni indiuiduo: Ergo hæc non potest penes intellectum rem à re diuersam demonstrare. Igitur aliæ differentiæ desiderantur, ob quas rerum distinctio manifesta euadat.

COROLLARIVM.

HInc autem deduces; quòd licet differentiæ non constituant indiuidua: ea tamen ostendunt; & quædam notæ sunt, & characteres, ob quę vnitates dignoscuntur. Vnde non est mirum; quòd intellectus allucinetur quandoque, & concipiat indiuiduum, vbi est solùm possibile, vel vbi nullo modo reperiri potest. Quia scilicet intuetur aliquam differentiam; ob quā solet indiuidua distin-

distinguere. Vnde primò ob differentias, vel accidentales, vel substantiales concipit plura; vt euenit in omnibus heterogeneis. Secundò ob ipsius dessignationem, vt in omnibus homogeneis, in quibus intellectus designat partes, & de illis agit, tanquam si essent plura actu indiuidua. Tertiò accipere quandoque pro pluribus, quæ nullo modo in plura facessere possunt. Quia differentias percipit, ob quas distinguit ea, quæ vnum sunt, in plura. Quartò & aliquando concipere, vt vnum; quæ verè duo sunt, sic si Luces à diuersis luminibus prodeuntes in eodem foramine decussentur, videntur, vt vna lux, cum tamen duæ luces sint, numero distinctæ.

EXPENSIO IV.

An vnitas numerum constituat.

NVmerus ex vnitatibus constare quibusdam dificile visum est; cùm vnitas opposita multitudini videatur. Verùm, vt rem determinemus, sit.

CONCL. I. PROPOS. XII.

Vnitas est idem obiectiuè; ac numerus; non formaliter, & reduplicatiuè.

PRob. Plura sunt numerus obiectiuè: Ea verò sunt ab inuicem diuisa, & in se singula nequaquam plurificata: Ergo quodlibet vnum est. Ergo numerus ex vnitatibus constat.

Dices. Vnum, & plura opponuntur. Ergo pluritas ex vnitatibus constare nequit.

Respondetur. Vnum, & plura opponi disparatè, non negatiuè; neque contrariè. Nimirum ex suppositione quòd intellectus conceperit vnū, non potest cognouisse quinque. Hoc autem non dum vnitas habet; sed quilibet alius numerus præter vnitatem. Nam eâdem oppositione, quâ opponuntur vnum, & sex; duo, & sex, vel duo, & septem contradicunt; quia nec duo possunt esse septem, eodem modo, quo nec vnum.

Dices. Quinque, & duo, V.g. conueniunt in ratione plurium. Non vnitas, quæ nulli numero conuenit; nec alicuius communis proprietatis consors est.

Resp. Numerum significare implicitè vnitatem sumptam cum alijs. Quare solâ vnitate non componitur numerus: Sola igitur vnitas, vt sola, contradicit numero, estque ea contrarietas impropria, & per reduplicationem. Quam etiam nos fatemur. Sic etiam decimæ numeris simplicibus opponuntur, & tamen ab eis constituuntur.

2 Prob. Vnitas est quadratus, cubus; par, & multas similes numeri proprietates continet. Ergo est numerus alioquin, si opponeretur speciē ipsi numero, easdem; quas numerus, proprietates non enumeraret.

EXPENSIO V.

An vnitas, numerusque præscindant perfectè à naturis numeratis.

PRæscindere perfectè est concipere aliquid talis naturæ, vt eius conceptus, qui intellectui obijcitur nihil inuoluat eorum, quibus à parte rei adnectitur. Sic conceptus perfectus est animalis, quia iste conceptus, prout in intellectu est rationalitatem, quæ ei à parte rei in homine connexa est, non inuoluit. At si ego concipiam ens. Iste conceptus, prout menti se obijcit, non est perfectus; quia, etiam quatenus in mente est, sine substantia quid chimericum euaderet.

CONCLVS. I. PROPOS. XIII.

Indiuiduatio numerica à rebus indiuiduatis perfectè non præscindit.

PRobat Arist. 8. Metaph. text. 16. *In prædicatione vnus homo non addit aliquid aliud, quam homo, sicut & ipsum esse, præter quid est, aut quale, aut quantum, & vni esse, est vnicuique esse.* Sic 3. Methaph. tex. 30. *Idem enim vnus homo, & ens homo, & non significat diuersum aliquid secundùm distinctionem repetitam homo, & ens homo, & vnus homo.*

Probaturque ratione. Vnitas numeralis, & indiuiduatio idem sunt, vt suprà dictum est. Ideoque vnitas est esse indiuisum in se, & diuisum à quocunque alio. Sed nec indiuisio, nec diuisio ab alijs potest concipi sine re indiuisa in se, & ab alijs diuisa. Igitur nec vnitas numeralis, nec numerus vnitatibus constans sine ipsis rebus numeratis perfecto conceptu potest intelligi.

CONCL. II. PROPOS. XIV.

Naturâ, neque ipsa, ab vnitate numerali perfectè præscindit.

PRobatur ex Arist. lib. 10. Methaphis. tex. 8. *Quòd autem id est quodammodo significet vnum, & ens, patet, quòd similiter se habet, sicut ens.*

2 Prob. Quidquid est in Petro diuisum est, V.g. à Paulo, & omnibus alijs; Ergo quidquid est in Petro vnum est.

3 Prob. Quoniam conceptus naturæ, si prout est in mente, consideretur non potest saluari sine vnitate, & indiuiduatione: Ergo inuoluit indiuiduationē saltem possibilem. Neque enim potest dici natura hæc, quam concepi, sine indiuiduatione esse potest: sicut potest asseri. Natura animalis sine rationalitate esse potest. Cùm autem natura, vt intellectu cognita non potest seiungi ab aliquo, perfectè non præscindit ab illo. Quamobrem cùm nec sine indiuiduatione naturâ concipi possit affirmatiuè; ideò nec perfectè.

CONCL. III. PROPOS. XV.

Datur conceptus communis vnitatis, non autem pluritatis.

EST multorum Philosophorum; qui id de indiuiduatione sentiunt.

Pr. Omne indiuiduum conuenit in hoc cum alio; quòd sit vnum in se, & diuisum à quocumque alio: Sed hæc ratio potest concipi ab intellectu alijs non conceptis, & sine hoc, vel altero indiuiduo cogitari. Ergo saltem imperfectè præscindi potest. Maximè quia, sicut indiuiduatio perfectè à naturâ non præscindit; sic nec natura ab indiuiduatione. Sed natura potest concipi sine indiuiduatione: Ergo etiam indiuiduatio sine naturâ.

Prob. 2. pars. Pluritas nihil addit vnitati; nisi aliam vnitatem, & vnum vni; Ergo ab vno, & vno præscindi nequit.

2 Ratio præcisa essentialiter excludit pluritatem: Quia debet esse quid vnum commune multis, atque conueniens. Ergo pluritas, vt pluritas præscindi nequit.

Dices con. 1. partem. Rationes contrahibiles, & contrahentes debent esse diuersæ. Sed indiuiduatio præcisa est eadem, ac illa, de qua dicitur; cùm sit vnum, & idem: Ergo non datur ratio contrahibilis vnitatis, & per consequens nec præcisa.

Resp. Totum concedendo demptâ vltimâ consequentiâ. Nam res, quæ à parte rei contrahit Indiuiduationem, non est; nisi ipsum indiuiduũ, nempe hoc, & illud. Non requiritur autem; quòd hoc contrahens, & illud sit aliquid diuersum à conceptu meo mentali; nisi per accidens. Ratio est: Quia intellectus multiplicat conceptus suos non ratione diuisionis: Sed ratione distinctionis. Cùmque diuisio à parte rei nullam differentiam dicat: Hinc est, quòd per ipsam conceptus suos multiplicare non possit, & in plura secernere, nisi ostensione huius, vel illius; vel (si adsit) mediante aliqua differentiâ extrinseca.

Dices con. 2. *Mathematica*, vtpote scientia, præscindit à *rebus* materialibus: Sed numerus est obiectum mathematicæ. Ergo ab indiuiduis, in quibus inest potest præscindi.

Resp. Præscindi quidem numerum ab hoc, & alio indiuiduo, sed non per se ipsum, at mediante vnitate, quam essentialiter dicit, & ex quâ methaphisicè componitur. Ideoque, cùm numerus sit idem, ac vnitates, & vnitas præcisa reperiatur, etiam numerus præscindi poterit. Inquies. Ratio præcisa importat immultiplicationem, vt dictum est: Ergo, neque ratione vnitatis præscindi poterit.

Respond. Posse naturam abstractam in indiuidua abstracta multiplicari: Vt quando concipiuntur plura animalia; certum est, quòd non concipitur hoc, seu illud animal. Sed concipitur animal abstractum ab hoc indiuiduo, & animal abstractum ab alio. Nam sicut ratio animalis à pluribus abstrahi potest, ita etiam ab vno tantũ. Consideratur ergo animal quodlibet tanquam ab vno præcisum, & cum indiuiduatione abstracta. Quare si species, & genus abstractè, concipitur multiplicatum, tantò magis ipsa Vnitas.

COROLLARIVM.

Hinc potest agnosci rationem communem indiuiduationis esse vniuocam. Ratio est, quia tunc tollitur vniuocatio; quando in ipsa ratione vniuocâ sese ingerit aliqua dissimilitudo; ita vt ex parte quidem sit similis, ex parte dissimilis. Verùm ratio, per quam dicuntur vnitates, similes, nullam aduehit dissimilitudinem, quare relinquit vniuocationem.

EXPENSIO VI.

An possit dari numerus infinitus.

AD complementum tract. antecedentis hæc Expensio necessaria est; nam supposito, numerum infinitum dari non posse: Nec ipsa quantitas continua infinitis punctis; vtpote numerabilibus constare potest: At si numerus infinitus non repugnat, ibi statuta ex parte debilitantur.

CONCL. I. PROPOS. XVI.

Non potest dari infinitum actu in multitudine.

PRob. Multitudo infinita, vt perspicuum est, numeris aliquibus finitis constat. Quare, cùm sint finiti, omnes sumi possunt. Sumantur. Eritque ea, quæ superaddetur, vnitas extra omnem finitatem: Ergo infinita per additionem huius vnitatis ea multitudo efficietur. Rursusque infinita non erit: quia per additionem vnius, numerus finitus, infinitus non euadit, cùm finitum additum finito nõ faciat infinitum.

Neque dicas. Hoc argumentum contra Dei æternitatem militare: hoc enim falsum est, quia æternitas numerabilis non est; cùm sit tota simul; nec fluat per partes.

2 Vel in infinito numero adsunt partiales numeri, vel non. Si non: Ergo quantitas discreta summam vnitatem possidet; cùm numeros partiales non amplectatur. Et sic infinitus numerus vnitas est. Si verò numeros partiales possidet. Illi, vel infiniti sunt, vel finiti. Si infiniti: Ergo totum partibus infinitis constat, cùmque non detur infinitum maius alio, pars erit æqualis toti. Neque dicas, hoc non verificari in infinito, vt aiunt Conimbricentes l. 1. phys. cap. 8: q. 2. ar. 4. & in eo totum suæ parti esse æquale. Nam hæc proprietas est essentialis conceptui totius, & partis; nec sine illa concipi potest? Quare si conceduntur partes in infinito? Fatendum quoque est partem in eo totum adæquare non posse.

Neque dicas posse admitti infinita numerorum inæqualia, & maius aliquo infinito concipi posse. Nam si hoc concedatur, etiam multa infinita poterunt reperiri æqualia. Sed numerus infinitus vnicus solum esse potest, cùm omnia per eamdem seriem numerorum naturalium augeantur. Ergo cùm multa non dentur infinita æqualia, neque inæqualia admitti poterunt. Quod verò vnicus numerus tantùm sit, patet: quia non loquimur de numero rebus applicato. Sed secundùm se, & abstractè; qui vnicus est, & immultiplicabilis, sic enim neque plura 4, neque plura 5, dantur; Sed tantùm ex singulis numeris vnum. Sed iam ad secundam partem Dillemmatis transeamus. Et si admittuntur partes huius infiniti omnes finitæ. Ergo totum infinitum, finitum erit: Cum quidquid in eo partium reperiatur finitum sit, & totum maius suis partibus simul sumptis non sit.

3 Quia Aduersarij contendunt, quemlibet numerum in infinito esse innumerabilem, etiam si sit veluti pars ipsius infiniti. Quæro: an diuidendo in infinitum semper reperiam, quidquid diuisum sit, infinitum, vel non. Si numerum finitum

finitum nullum inuenio. Ergo infinitus numerus numeris non constat, cùm in numeris, duo, tria, quatuor essentialiter reperiantur; qui certè numeri infiniti non sunt: Si inuenio aliquos finitos, V. g. duo; Ergo infinitum, finitis numeris constat, & per medium diuidi potest; Vnde & duo numerorum infinita darentur vnum maius alio.

* 4 Secetur numerus infinitus proportionaliter; ita vt minus extremum sit ad maius, vt maius ad totum, & de minori, & minori extremo id fiat in infinitum. Certè illud extremum semper hac diuisione minus fiet, & in infinitū procedēdo fiet minus omni quantitate propositâ. Sit ergo proposita quantitas 4, Vel ergo hac continua diuisione manet semper infinitum, & sic dabitur aliquis numerus infinitus minor, quam 4, vel fit tandem finitus; cùm ergo ita sit iste numerus finitus vltimo repertus ad maius extremum, vt maius extremum est ad totum; & sic consecutiuè, erit etiam maius extremum finitum; cùm finiti ad infinitum nulla sit proportio. Quare & totum erit finitum, non infinitum, vt à principio supponebatur.

Neque dicas contra hoc, & antecedens argumentum: Dualitates in numero infinito esse infinitas, sicut & triadas, & quatriadas, &c. Resp. enim inde sequi incōueniēs, quod in 3. Argum. Nā omninò vnitates plures erunt dualitatibus, & dualitates minùs erunt numero quaternarijs. Quod si sic. Ergo adhuc vnum infinitum est maius alio, & aliud includit. Quod si non. Iam inter numeos infinitos non datur proportio, quæ consistit. Quòd vna quantitas plures partes de alia consequatur; quam quòd ipsa contineat, vel pauciores, vel æquales. Si verò quantitates infinitæ proportionem *excludunt; iam & quantitatis* essentiam exuunt; quę inter prędicata essentialia proportionem enumerat.

5 Vel processus finitorum numerorum per finitos numeros, vsque dum peruenias ad infinitum, repugnat, vel non. Si repugnat, cur in infinitis deinde admittitur. Siquidem ternarij in infinito, licet infiniti, poterunt addi infinitis quaternarijs, & hi quinarijs, & sic in infinitum. Vnde infinitus esset numerus in infinitum numerorum, qui facerent infinitum numerum, licet naturali serie per 1, 2, 3, 4, &c. progredientes, & se augentes. Quod si non repugnat. Ergo repugnabit infinitus numerus; cùm admisso perpetuò finito, infinitus numerus excludatur.

* 6 Si datur infinitum maius alio, vt videtur concedendum. Admisso numero infinito quęro, An infinitum minus includat omnem numerum possibilem. Si includit omnem numerum possibilem includit etiam maius se. V. g. infinitum quaternariorum concludet infinitum decimarū. Si non amplectitur omnem numerum possibilē. Ergo non totam seriem naturalem numerorum includit. Sed series naturalis numerorum non tota finita est. Ergo etiam illud, quod dicitur infinitum; finitum.

* 7 Dantur numeri quadrati, qui nascuntur ex multiplicatione sui in seipsis, vt 3, multiplicatus per 3, facit 9. Dantur quoque simplices numeri non quadrati; qui omnes quadratorum sunt radices, cùm in seipsis multiplicari possint. Et idem dicas de numeris cubicis: nempe geminè vice in se multiplicatis, qui, & pro radicibus habent ipsos numeros, qui quadratorum sunt radices. Quare cùm omnes numeri sint radices, suumque quadratum, & cubum obtineant; Tot erunt quadrati, & cubi, quot numeri. Quare si sunt infiniti, etiam quadrati, cubique erunt infiniti. Sed inter quadratum, & radicem; inter cubum, & radicem multi necessariò sunt numeri intermedij, vt inter 3, & 9, sunt 4, 5, & 6, &c. Et quo maiora quadrata, maioresque cubi, eo plures sunt numeri intermedij. Ergo datis numeris infinitis erunt plures radices; quam quadrata, & cubi. Sed supra ostensum est esse tot, quot numeri. Ergo æquales, & inæquales; quod repugnat.

* 8 Quantò magis procedimus in numeris, eo pauciores numero inueniuntur quadrati numeri, multoque pauciores cubi, & tantò ampliùs pauciores super solidi. Sed numerus infinitus debet consequi tot cubos, tot quadrata, tot supersolida, quàm numeri; Ergo quo magis progredimur in numero, eo magis elongamur ab infinito quadratorum, & cuborum, vel supersolidorum: Quia rariores eos inuenimus. Sed non possumus discedere ab infinito quadratorum, & cuborum; quin discedamus ab infinito radicum, qui numeri simplices sunt; Ergo multiplicando numeros ab infinito discedimus.

* 9 Si numerus infinitus totalis infinitos numeros partiales claudit; multiplicetur infinitum partiale per infinitum totale. Vtique producetur numerus planus maior ipso totali; Ergo ipse non erat totalis; cùm maior illo detur. Sed rursus erit totalis, vt præsuponitur, cùm omnem numerum possibilem includat. Ergo totalis, & non totalis.

Quod si dicas. Hanc multiplicationem adhiberi neutiquam posse: Ergo illud, quod dicitur infinitum, numerus non est; cum multiplicationem excludat, qui numero essentialis proprietas est. At si numerus totalis immultiplicabilis est; numeri partiales fortè non erunt. Multiplicentur ergo inuicem duæ medietates, vel proximè numeri totalis, & producetur quadratum quadruplo maius, quam duę medietates: Quare totius infiniti totalis, duplo maiùs infinitum erit productum, vt priùs.

EXPENSIO VII.

An numerus essentiam consequatur.

FRustra Arithmeticus numeros specularetur, si nullam essentiam possiderent. Neque enim, vt volunt Philosophi verissimo decreto, entia per accidens scientijs, quæ sunt æternæ veritatis sufficiens fundamentum præbere possunt; Sed solùm essentiæ rerum; quæ immutabiles sunt, & æternæ. Videtur autem numerus nulla essentia frui, cùm sit vnum per accidens, vt lapidum aceruus, vel vt multitudo. Verum sit.

CONCLVS. I. PROPOS. XVII.

Numerus essentiam non possidet vt numerus est.

PRobatur. Numerus, vt numerus, est quædam multitudo; sed multitudo essentiam non obtinet, cùm sit ens per accidens; Ergo neque numerus essentiâ potitur.

2 Multitudo, & numerus excludunt, vt talia, vnitatem: Ergo quid essentiale non sunt: Patet.

Omne essentiale ens est. Omne ens est vnum; cùm vnum & ens conuertantur. Ergo, quòd non sit neque vnum, neque ens numerus essentia non gaudebit.

2 Numerus; seu sumitur in ordine ad intellectum, & sunt plures eius operationes ad placitum factæ, vel in ordine ad res numeratas, & est multitudo ad placitum coadunata: Sed entia ad placitum nullam essentiam adipiscuntur. Ergo numerus essentiâ deficit.

CONCL. II. PROPOS. XVIII.

Numerus, prout dicit partes quantitatis numeratas, essentiam possidet.

PRobat. Quantitas illa prout suis partibus integrata essentia potitur: Ergo etiam numerus, vt eam exprimens suâ gaudet essentiâ. V.g. si 4. assumatur tanquam quatuor partes alicuius planitiei, necessariò multiplicatæ in se producent cubum; Quia cubus, qui superficies suas in quatuor partes diuisas habeat necessariò amplectetur 16. cubos partiales, quorum quilibet superficiem vnam habet vni ex illis 4. æqualem, & sic dicas de alijs.

CONCL. III. PROPOS. XIX.

Numerus quoque possidet essentiam in ordine ad opera nostri intellectus.

PRobatur. Opera nostri intellectus essentialiter connexa sunt, & in arguendo dependentia. Nam priùs oportet cognoscere; deinde iudicare, tandem dicurrere. Sic quod acceptum est, vt priùs: semper acceptum erit, & stante eâ acceptione; posterius esse non poterit quòd ordinatum; ordinatum; Quod simile; simile, &c. Quare intellectus, si accipit duos numeros dicentes relationem æqualitatis; vel proportionis ad alios, necessariò illi numeri tales erunt; quia scilicet intellectus accepit numerum talis respectus participem, & discurres de alijs.

Dices. Euclides 7. lib. 8. & 9. absque vlla dependentia ab operibus intellectus, vel à quantitate continuâ affectiones numerum demonstrat. Ergo numeri secundum se essentiam; quam demonstremus; passionesque possident.

Resp. Euclidem 7. 8. & 9. lib. affectiones numerorum demonstrare per reductionem ad impossibile quoad primas propositiones, quæ in alijs arguendi fundamenta sternunt. Deinde arguere à ratione continentis, & contenti, mensurantis, & mensurati, quę relationes sunt, & applicationes vnius quantitatis ad aliam nostri intellectus; eo quod V. g. si assumatur numerus; qui sit pars alterius A; quòd etiam erit pars maioris; cuius A pars est. Relationes verò licet præbeant fundamentum euidenter arguendi, non tamen entia eam relationem habentia per eam essentialiter constituuntur; cùm per multos Philosophos relationes nihil sint à parte rei, & solum per opus nostri intellectus comparantis habeantur: Cùm itaque numerorum demonstrantur passiones, operationum nostri intellectus in accipiendis vnitatibus demonstrantur, quæ taliter acceptæ, alio modo accipi nequeunt, alioquin implicantia in ipsis operationibus sequeretur.

Et licet operationes intellectus, vt simpliciter tales, sint ad placitum, vt 2. prob. Concl. 1. diximus: non tamen, vt relatiuæ, & dependentes inuicem: nam positis quibusdam cognitionibus, ad tali modo operandum deinceps in sequentibus mens impellitur ab ipsâmet speculationum naturâ, vt Logici nouerunt.

TRACTA-

TRACTATVS III.

De Mathematica eiusque Affectionibus.

QVÆDAM de ipsâ Mathematicâ præcognoscenda, antequam limina ipsius tentemus, & præcipuè quodnam sit eius obiectum; qui modus procedendi, & similia; qui animum doceant, quò modo in mathematicis se debeat gerere; qui primus & inassuetus eas addit. Sic, & in artibus, congruum est; vt qui eas callere velit, instrumenta priùs, & materiam; quæ ei tractanda sunt, noscat, modum quoque, quo ea tenere, & manibus versare, adiscat; vt deinde in ipsa arte promptiùs se exercere, vt illa potiatur, facultas sit.

EXPENSIO I.

De obiecto Mathematicæ eiusq; abstractione.

PRÆASSVMPTVM.

QVælibet scientia, vt Logicus docet, obiectum materiale, & formale consequitur. Materiale quidem est illud, quod ab illa scientia consideratur; Formale verò est illa ratio sub qua consideratur. Sic *Medicus considerat corpus animatum; sed vt sanabile*. Sic Physicus considerat corpus naturale; sed vt mutabile. Sic Theologus Deum speculatur; sed vt cognoscibilis lumine reuelato medio discursu. Vnde in medicina corpus animatum erit obiectum materiale, sed eius sanabilitas obiectum formale.

PRÆASSVMPTVM II.

ITem considerandum est; quòd nulla scientia intuetur suum obiectum; vt in singularibus; sed, vt abstractum ab eis. Neque enim Medicus considerat corpus Petri, vt Petri: Sed, vt corpus. Ratio est; quia non vt singulare rationem formalem participat, sed vt vniuersale. Quare sub ea ratione consideratum, debet etiam concipi, non vt singularizatum. At vt inferioribus, particularibusque naturis denudatum; cum Petrus, vt Petrus sanus sit, non sanabile corpus. Et tantò magis, quod omnis scientia rei speculetur essentiam: quæ à particularibus, & indiuiduis præscindit.

CONCL. I. PROPOS. I.

Obiectum Mathematicæ est ens quantum, vt mensurabile.

PRobat. ex Arist. lib. 1. post. cap. 10. *Quare propter hoc non malè Geometra dicunt, & de entibus disserunt, vt entia sunt.*

Prob. Nam, quòd sit ens quantum, patet. Considerat enim trinam dimensionem longitudinem, latitudinem, & profunditatem, quę sunt dimensiones ens quantum constituentes. Considerat quoque quantitatem eorum, quæ corpora non sunt; Ergo eius cognitio latiùs patet, quā corporis, & in ente quanto constituenda est.

2 Agit de Conis, Cylindris, Sphæris. De numeris, de tempore, de luminis intensione, de quantitate motuum, quæ conueniunt tantùm in ratione entis quantitatiui. Ergo ratio, per quam Mathematica ad illa perscrutanda fertur, est entis quanti; Nam enim de illis ageret omnibus; nisi in aliquâ ratione, conuenirent ob quam in illa simul posset intendere.

Dices. Agit de Superficiebus Lineis Angulis, quæ entia quanta non sunt, cùm sint negationes. Item obiectum, cuiuscumque scientiæ debet esse abstractum; vnde etiam obiectum Mathematicæ. Quapropter, eius obiectum erit potiùs quantitas ipsa; quàm ens quantum.

Respondetur ad primum. Superficies, lineas, puncta esse corporis extrema, ab illo, nec quidem mente, separabilia, vt diximus. Vnde agendo de illis, implicitè agit de corpore. Deinde multa in scientijs considerantur; quæ quidem obiectum non sunt. Sed solùm assumuntur, tanquam necessaria ad perfectam cognitionem obiecti. Sic agit medicina de plantis; quòd illa cognitio ad sanabilitatem corporis indagandam, conducat. Sic Theologia de Angelis, Sacramentis, Peccatis. Quæ licet Deus non sint. Ordinantur tamen ad cognitionem Dei sub ea formalitate, sub qua consideratur à Theologo. Vnde licet superficies, lineæ, puncta entis quanti conceptu non fruerentur; eorum tamen cómensurationes deberet Mathematicus considerare, vt ad corporis quanti cognitionem, pernecessarias.

Ad secundum respond. Obiectum cuiuscunq; scientiæ debere esse quid subsistens, & quod directæ sit positum in prædicamento substantiæ. Quantitas verò non ponitur in prædicamento substantiæ; sed ens.

Prob. quoque secunda pars, quòd in ens quantum tendeat; sed sub ratione mensurabilis. Nam intendit acquirere cognitionem entis quanti. Quanti verò essentia in capacitate partium consistit. Quare ens, vt partibus constans, & in partibus

tibus conueniens; aut disconueniens cum alio, debet cognosci, quæ est ratio mensuræ. Deinde tota disputatio, quæ inter Mathematicos versatur proportiones corporum rimatur: proportio verò in commensurabilitate consistit.

Dices agit de lineis, superficiebus, corporibusque irrationalibus; quæ nullam commensurabilitatem possident.

Resp. Primo quantitates incommensurabiles non esse omninò tales. Sed solùm respectiuè ad aliam quantitatem. Vnde de illis simpliciter agere potest. Deinde agit de ipsis, vt ad cognitionem commensurabilitatis conducunt: nisi enim sciret, quenam lineæ essent incommensurabiles, nec commensurabiles agnosceret, aut distingueret. Sicuti Physicus agit de priuationibus, & negationibus, de vacuo, de spatijs immaginarijs; licet entia non sint naturalia: Quia ad cognitionem corporis naturalis deseruiunt.

CONCLVS. II. PROPOS. II.

Mathematica, quidquid considerat abstractè considerat, & ab ente indiuidua-li præscindit.

PRob. 1. ex Arist. l. 2. Methaph. cap. 12. *Materia quædam sensibilis, quæ am intelligibilis: sensibilis quidem vt æs, lignum. Intelligibilis verò, quæ in sensibus existit, non prout sensibilia, vtpote Mathematica.*

Probatur verò ratione. Quoniam si hæreret sensibus: tunc multa ~~falsa mentiretur~~; dum lineam alteri æqualem omninò dicit; cùm tamen linea alteri præcisè æqualis, vel dari nequeat in rebus materialibus, vel dari saltem certum non sit. Sic rectam esse ductam, quæ quidem, an possit rectissimè duci, dubium est. Sic circumferentiam circuli perfectam; quæ in circumferentijs materialibus non reperitur. Quod etiam aduertit Arist. l. post. cap. 10. *Neque*, inquiens, *Geometra falsum supponit quemadmodum quidam asseruere dicentes; quod non oporteret falso vti; Geometram verò mentiri dicentem pedalem, non pedalem; aut rectam descriptam non rectam existentem. Geometra verò nihil concludit, eoquod hæc est linea, quam ipse loquutus est, sed quæ per hæc ostenduntur.* Sic Proclus lib. 2. cap. 2. *Qui in sensibilibus circulus compositus, magnitudine distans, ac certa ratione diminutus, ac ineptiarum plenus ab immaterialium puritate longè deficiens. Geometria verò, cùm de circulo quidquam loquitur, atque diametro, & de passionibus, & affectionibus, quæ ad circulum spectant, non de sensibilibus docet, aut disserit, ab ipsis quidem separare conatur; & vniuersale ipsum considerat.*

* Prob. 2. Nam ostendimus puncta impartibilia nequaquam dari posse, à materia seiuncta partesque in infinitum diuisibiles esse prout considerãtur à Mathematicis. Cùm itaque Mathematici præsuponant partes in infinitum diuisibiles, patet sumere ens quantum, vt quantum est; & ideo, vt semper partium capax. Non autem sumere ens, quod est à parte rei: quod diuisibilitatis infinitæ capax non est, aut saltem incertum. Sic in circulo supponit Mathematicus figuras inscriptibiles in infinitum. Hyperbolem ad Asymptotum acceddere in infinitum, & multa alia, quæ certè de rebus sensibilibus non possunt verificari, sed de ipsis, vt abstractis, & vt tales sunt.

Dices. Mathematica docet operari in problematibus; Sed operari est circa res sensibiles, & vt sunt à parte rei. Mathematica igitur saltem in problematibus à materiâ non abstrahit.

Resp. Docere quidem operari, sed adhuc illam operationem, vt à materiâ seiunctam, & ei non applicatam considerare. Vnde Proclus lib. 2. com. 5. inquit. *Propriè in Mathematicis disciplinis problema vocatur, quòd ad contemplationem operantem proponitur. Quod namque in his fit, finem, contemplationem habet; & sæpenumero quidem eorum, quæ fieri non possunt, quædam problemata vocant.* Igitur, cum Mathematicus problema proponit, & docet operari, instruit, quid operetur, non circa rem materialem, licet, vt plurimùm etiam id, per doctrinam, quam tradit, præstari queat; sed circa rem conceptam, & eam operationem, vt versantem circa res abstractas, considerat. Quare & aliquando docet problemata, quæ fieri nequeant, prout res ita se habent, non absolutè, V.g. datum pondus datâ quacumque potentiâ mouere. Quasi quod essemus cuiuscumque potentiæ vltimis viribus instructi, Vel cum docet Altitudines stellarũ fixarum, latitudines, lõgitudines mẽsurare, tãquã si essemus in centro, cùm nec ibi esse possimus; sed in superficie. Sic describere Horologia; tamquam si planum horizontale subesset centro mundi, & à centro in illud planum vmbra decideret.

EXPENSIO II.

De Mathematica.

DIfficulter potest apprehendere, quis quod proponitur: nisi nec nomen eius quod proponitur nouerit. Quare in primis quærendum quid sit Mathematica.

Mathematicę nomen deriuat à Gręco nomine, quod Latino deprumptũ significat doctrinã: seu disciplinam, eo quia verè doceat; quòd nihil, nisi per ostensionem, vt plurimùm, affirmet, & nihil, nisi, aut per se euidens, aut probatum ad arguendum pro principijs assumat. Aliæ verò scientiæ pro maxima sui parte potiùs probabiles sunt, quam euidentes, vnde potest deffiniri.

CONCLVS. I. PROPOS. III.

Mathematica est scientia ostensiua, cuius obiectum est omne illud, quòd mensurari potest.

HÆc Conclusio probatur ipso experimento quoad primam partem, cum omnes eius propositiones ostensiuæ sint.

Dices. Sunt aliqui tractatus, vt Optica Astrologia, Sphęra, & multæ aliæ partes, quæ rationibus probabilibus inituntur. Resp. id quidem esse verum saltem penes aliquas conclusiones; & tunc non appellatur simpliciter Mathematica; sed Phisiomathematica; quòd sic exigente obiecto partim Mathematica sit, quoad mensurationem, partim verò Physica, quò ad eas conclusiones, quæ mensurationi deseruiant, V.g. Sphęra, quòd probet fluiditatem Cœlorum erit Physica; quatenus verò ex fluiditate motus Planetarũ hypo-

hypoteses, & commensurationes colligit, & ea doctrinâ suppositâ ostendit, erit Mathematica.

CONCLVS. II. PROPOS. IV.

Mathematica in tres partes diuidi potest in Mathematicam, Vniuersalem, Cosmicam, & Microcosmicam.

PRobatur. Quia eius obiectum in tres has species facessit. Nam aut est vniuersalissimum, & à quocumque obiecto speciali præscindit. Et hoc à Mathematica vniuersali consideratur; Aut est speciale, & hoc diuiditur in duas amplissimas partes, nempe *mundum, & hominem*: Quæ considerat mundum eiusque proportiones dicitur *Cosmica*; quæ hominem *Microcosmica* appellari potest.

Prima est duplex; nam alia est, quæ agit de quantitate *Discreta*, alia de *Continua*. Secunda quoque duplex est, alia agit de Cœlo, altera agit de Terra, terrenisque omnibus, quæ mensuris subsunt. Tertia quoque duplex est. Alia enim pertinet ad naturam hominis; vt visus circa quē versatur Optica. Alia spectat ad artem, vt Mechanica, & huiusmodi.

Hoc autem libro tradimus Mathematicam Vniuersalem, quæ de omni quantitate in communi peragit, & omnibus alijs Mathematicis partibus aditum aperit. Omnes verò Mathematicæ partes possunt tendere in suum obiectum promiscuè. Modo illud speculando, vt quantitas discreta est, modo, vt quantitas continua. Quia scilicet, & quantitas, vt sic sumpta, & mundus, & homo, in se quantitates discretas, & continuas amplectuntur, in quas potest tendere intellectus; vnde promiscuè secundùm quod res exigit, & dependentia obiectorum reposcit, modo fit Geometria, modo Arithmetica: Vnde & harum scientiarum naturam exponere oportet.

CONCL. III. PROPOS. V.

Geometria est scientia ostensiua, quæ de quantitate continuâ pertractat: Arithmetica verò est scientia pariter ostensiua, quæ quantitatem discretam intuetur, & ambæ istas quantitates, vt mensurabiles considerant.

PAtet per semet conclusio; si nomen Arithmeticæ, & Geometricæ secundùm suam latam significationem accipiantur. Verùm non semper ita est. Geometria enim vt plurimùm significat eam partem Mathematicæ, quæ agit de planis nomine vniuersali sibi specialiter applicato, quæ propriè Panthometria dicitur. Arithmetica quoque strictiùs acceptâ illa est, quę dat regulas supputandi nullis adhibitis demonstrationibus. Mathematica, itaque vniuersalis, de qua hoc Libro agimus partim per occasionem Geometriæ, partim Arithmeticâ constans, in duas quoque partes secernitur intuitu modi procedendi: Nam alia est Elementaris; alia verò nequaquam, & licet eadem tractentur; tum in Elementari, tum in altera parte, & circa eadem obiecta speculatio versetur. In Elementis tamen solùm traditur quædam fundamentalis, & prima doctrina, & velut primi aditus ad profundiores speculationes aperiuntur, in alijs verò non elemētaribus circa eadem obiecta profundiora quidem cognoscuntur, sed quæ elementares cognitiones nequaquam dici possint, quoniam limen non aperiant, vt Elementa efficiunt, alijs speculationibus.

EXPENSIO III.

De titulis Mathematicis.

COngruum est librorum, & partium, quæ in ipsis reperiuntur titulos quandoque exponere, vt magis, quæ ipsâ continentur oratione, & euidentiùs innotescant: Ideoque cum Mathematica suis præfigat propositionibus titulos; qui non explicati possent, & ipsius rei, de quâ agitur, obnubilare euidentiam: hinc est, quod eos declarandi prouinciam sumpserim.

QVID SINT ELEMENTA.

DE Elementis inquit Proclus. *Totius Geometriæ sunt quædam theoremata principalia, & ad ea, quæ sequuntur, principij rationem habentia, quæ Elementa appellantur. Elementaria verò sunt, quæcumque extensam in multitudinem cognitionem non habent.* Et deinde. *Non omne lementum vocabitur. Verùm ea, quæ principalissima sunt eorum, quæ in rei effectæ ratione sunt constituta.*

Itaque Elementa sunt quædam Theoremata, vel etiam problemata; quæ in re, de quâ agitur vniuersalissima sunt, & plurimarum propositionum fons, & origo. Quas visum est Mathematicis, seorsim ab alijs propositionibus à se dependentibus segregare; vtpote illæ, quæ non solùm propositionibus de eâdem materiâ agentibus deseruiant; sed multis alijs possint aditus aperire. Vnde vt magis essent ad manus, & familiariùs adiscerentur in vnam seriem coordinata fuerūt: Maximè quia, nec cognitio quidem omnigena; quæ extra Elementis erat; licet eamdem materiam, quæ in Elementis versata est, specularetur sæpenumerò poterat perfici: sine Elementis ad illam materiam spectantibus: Vnde, ne dum fuit vtile; sed etiam necessarium, Elemētares cognitiones ab extraelemētaribus seiungere: vt ipsis singulis omnia Elementa, vt res postulabat, possent inseruire.

QVID SINT PRINCIPIA.

QVoniam, vt ait Arist., omnis cognitio fit ex præexistenti cognitione. Etiam Mathematica quædam habet principia adeo clara, vt prorsùs negari nequeant; nisi stultè, & imprudenter. Talia sunt. *Omne totum est maius sua parte.* In quibus ab alijs omnibus scientijs differt. Nam principia aliarum scientiarum multa, aut negari possunt, aut explicari, cùm vera semper non sint principia; sed quædam potiùs persuasiones mente firmiter radicatas; quàm euidentiæ. Mathematica verò, quæ principia ponit, aut omninò innegabilia sunt, aut talia, quæ, si negantur, protinùs per reductionem ad impossibile ostendat.

DE

DE DEFINITIONIBVS.

DEfinitiones apud Mathematicos verè naturam rei non explicant ex eorum intentione; cùm essentiam rei explicare; sed tantùm nomen exponere sit apud ipsos in definitionibus constitutum, vt sentit Clauius in prolog., & Galilæus in dialog. contra Betinum. Id verò patet; quia si naturam rei explicarent; oporteret, quòd eam definitionem ostenderent quidditatiuam esse, & naturam rei exponere; quod nequaquam efficiunt. In concessis tamen est; quòd etiam aliquandò naturam rei exponant. Sed id non curat Mathematicus; siquidem, si curaret, maximè in id incumberet; vt talem esse rei naturam; qualem definitio describit, comprobaret.

DE POSTVLATIS.

POstulata sunt quædam; quæ faciliter conceduntur, vt fiant, & quasi axiomata sunt; sed hæc solùm speculatiua; illa verò operatiua. V. g. vt liceat *lineam ducere*. Vt liceat, *lineæ adiungere*: *Vt* liceat. *Quacumque distantia circulm du ere*. Verùm non omnia; quæ clara sunt, & concedibilia postulantur. Cùm etiam. *Producere lineam æqualem alteri*, aut. *Quacumque distantia lineam pr ducere*. potuisset postulari ab Euclide: quod tamen non fecit: Sed ea sine quibus permissis nulla posset inchoari Mathematica operatio. Cùm debeamus posse aliquid efficere, sine probatione, vt opus primâ eâ operatione effectum ostendatur euidenter se benè habere.

QVID SIT THEOREMA.

THeorema est pura speculatio alicuius passionis quantitatiuæ euidens. quæ nullo modo aliter esse potest, vocaturque Theorema; quia in purâ speculatione sistit, & nihil efficit.

QVID SIT PROBLEMA.

PRoblema vocatur sic. Quod fit circa operationem, quæ, aut alio modò exequi posset, aut circa illam materiam aliud effici: vt si quando demonstrat. *Triangulum æquilaterum super rectam constitu re*, hoc opus, aut alio modo executioni mandari, aut aliquod aliud triangulum super illam rectam constitui posset, & ideo *Problema* vocatur ad similitudinem Problematis dialectici; quod sicut in vtramque contradictoriam affirmari potest; sic & Problema Mathematicum, & hoc modo, & alio effici, & circa eamdem materiam aliud in opus demandari. Vnde illud, quod alio modo effici nequit; nec de eadem materia aliud fabricari, non vt Problema; sed vt Theorema proponendum est. Sic si quis proponeret in semicirculo angulum rectum efficere: Omninò errorem acciperet; cùm omnis angulus in semicirculo rectus sit: vnde cum alio modo effici nequeat; nec alius angulus in semicirculo constitui possit: Non erit hoc, vt *Problema*; proponendum; sed vt Theorema. At, inquies, sunt quædam, quæ ad modum problematis, & Theorematis proponi possunt. Id enim verum est, & licet aliquod Theorema possit etiam subire rationem problematis; non tamen vice versâ. Vnde attentiùs considerandum est; an ea, quæ problematis speciem ferunt. Verè illius naturam assequantur. Antiquorum verò sententiam Pappus refert de Theoremate, & Problemate. *Dixerunt*, inquiens, *Theorema esse, quod proponitur in ipsius propositi demonstrationem. Problema, quod effertur in constructionem propositi*; idest propositionis.

QVID SIT PORISMA.

POrismatis nomen etiam apud antiquos fuit controuersum, & videtur Pappus triplicem efferre Porismatis significationem. Primam explicat, quam antiquioribus tribuit; dum ait. *Horum autem species omnes neque Problematum, neque Theorematum: sed mediam quandam inter hæc formam, & naturam habent; quo factum est, vt ex multis Geometris alij quidem ex genere esse Problem ita, alij verò Theoremata opinati sint.*

Secūdā verò iuniorū affert, inquiēs, *Immutata est autem hæc Porismatis definitio apud iuniores, & deffinierunt; Porisma est, quod hypothesi deficit à locali Theoremate*. Idest, quod nullam consequitur hypothesim, seu suppositionem: Pro quo sciendum, quò Theorema triplici modo potest considerari. Primò quoad modum procedendi in probatione. Secundò quoad ea, quę antecedunt demonstrationem. Tertiò quoad ea, quæ in demonstratione ostenduntur.

Modus procedendi quadruplus est; nam aut diuersas partes enumerat, aut plures casus, aut diuersos progressus probando priùs multa alia, antequam ad vltimam conclusionem deueniat; aut simplex est, nullaque vel partium, vel progressuum, vel casuum multiplicitate discriminatur. Porisma itaque videtur appellatum Theorema multiplex ex aliquorum sententia, aut partibus, aut casibus, aut progressibus. Quare, inquit Pappus. *Porisma à multis sic intelligitur, vt ar fitiosa collectio sit ad Analysim grauiorum, seu difficiliorum problematum, & generum in comprehensibilem multitudinē præbente ipsorum naturâ.* Si verò Theorema consideretur quoad antecentia; in triplici quoque differentia versantur. Alia præsuponunt aliquid in gratiam aduersariorum. Alia præsupponunt aliquid factum; quod non est operi demandatum, vt Archimedes præsuponit. V. g. Spheram esse proportionaliter sectam per talem superficiem, & probat deinde, id verè taliter se habere. Alia iubent ad demonstrationem efficiendam, talem, aut tali modo operationem faciendam. V. g. talem lineam ducere. Tandem si consideretur Theorema, quo ad ea, quæ in demonstratione ostenduntur duplex est; nempe locale, & non locale. Locale est illud, quod ostendit locum. V. g lineas esse parallelas. Extremum alicuius lineæ esse in circumferentia. Tale punctum esse in medio circuli; quæ propriè circa quantitatem non sunt; nisi reductiuè, quatenus locus est proprietas rei quantitatiuæ, & deseruit ad illius cognitionem.

Dicit itaque Pappus. Quòd secundum Iuniores Porisma non est Theorema locale, eo quia præsuponat Hypothesim, seu aliquam suppositionem, quam deinde non explicat, cuius sit illa suppositio, seu quænam? Insuper illud verbum *deficit* ambiguum est; nescimus enim: An deficiat ipsa hypothesis ad hoc, vt sit theorema locale: An ipsum Theorema deficiat à locali, idest localis naturâ nō assequatur, eo quod Hypothesim obtineat.

Verùm

Verùm Proclus in Euclidem lib. 3. sic Porisma definit. *Porisma etiam de quibusdam problematibus dicitur qualia sunt ab Euclide conscripta porismata. Propriè verò talia dicuntur; quando ex demonstratis aliud aliquod Theorema nobis non proponentibus emergit, & offertur: Quod propterea Porisma appellarunt; quasi lucrum ex scientifica demonstratione obiter, & prater expectationem factum.*

Itaque habemus clarum duplicem sensum, penes quem Porisma accipi queat. Primum ex Pappo iuxta antiquos. f. quod sit quid medium inter Problema, & Theorema, quòd & possit, vt Theorema, & vt Problema proponi. Secundum ex Proclo. Quod sit veluti quoddam Corollarium ex demonstratione collectum, & breuiter ex dictis ostensum. Obtinemus quoque alias duas ex Pappo Porismatis acceptiones; sed obscuras, & ancipites: Nempe, quod sit aliquid simile Theoremati locali. Vel quod sit Theorema, vel Problema quoddam multiplex.

QVID SIT ZETEMA.

Zetema est titulus; quem Algebrici suis operationibus præfigunt: cùm enim ea, quæ Algebra docet non demonstrentur; sed in ipsa operatione nota, & euidentia auadant; propter hoc, nec Problema, nec Theorema appellare potuerunt: vnde quam medio nomine Zetema appellauerunt.

QVID SIT LEMMA.

Lemmata sunt propositiones minus principales, & quæ obiectum, de quo agimus, non respiciunt. Sed tamen ad demonstrationes alterius propositionis omninò necessariæ sunt. Lemma itaque est demonstratio, seu constructio, quæ necessariò ad demonstrandam aliam propositionem principalem, & ad rem spectantem præter institutum assumitur.

QVID SIT PROPOSITIO.

Propositio est nomen quoddam genericum; quod tùm Porismati, tùm Problemati, tùm Theorematì conuenit, & nihil aliud significat; nisi quòd proponitur aliquid ostendendum.

QVID SIT ANALYSIS, ET SYNTHESIS.

Analysis nihil aliud est; nisi quædam explicatio rei, quæ proponitur. Synthesis verò accipitur, cùm traditur modus operis, quòd fieri iubetur.

EXPENSIO III.

De Mathematica instructione.

Mathematica institutio, aut potest sumi iuxta subiectum, aut penes modum instruendi.

Si penes modum instruendi. Modus quidem euidens est. Sed Syllogismis non procedit, at Enthimematum continuata serie, quæ breuiùs probant. Ratio huius rei est: Quia, cùm sæpè repetant easdem literas, si tres propositiones efficerent, vt requirit Syllogismus, pronam in mentem audientium confusionem inducerent. Vnde Entymematibus vtūtur, quę cōclusionē immediatam habent, & quæ probata Syllogismi demonstratiui efficatiam consequuntur.

2 Quod incipiat à primis principijs, & paulatim deueniat ad conclusiones. Vnde contrario modo, ac Philosophia facit, siquidem hæc conclusionem immediatè à præmissis deducit immediatioribus, & deinde assumptas præmissas probat euidentioribus alijs, donec ad prima principia deuentum sit. At Mathesis à primis principijs incipit, & paulatim per diuersa Enthimemata, diuersasque conclusiones, ad illam vltimam, quam proposuit, tandem accedit, & in illa conquiescit.

3 Mathematici nunquam anticipant, neque vt probata accipiunt, quæ probanda postmodum sunt. Vnde Proclus ad 11. Eucl. propos. ait. *Demonstrationem autem, quæ per semicirculum fit; nec commemorare dignum est: Multa enim præsuponit eorum, quæ posteriùs ostendenda sunt, ab Elementarisque institutionis ordine omninò recedit.* Et propos. 23. reijciendo operationem, quâ fiunt anguli æquales ex peripherijs interceptis æqualibus inquit. *Huiusmodi itaque ostensionem, tanquam posterioribus vtentem, ab elementari institutione alienam esse censemus.*

Aliquando tamen ipse Proclus anticipauit ostendendo ad propos. 24. Eucl. quæ sequentibus indigebant ad sui ostensionem, in hoc verò se gessit tanquam interpres, & non vt absolutè pareret euidentiam; sed potiùs, vt indigitaret fallacias, quæ in ea propositione potuissent accipi. Sic Clauius contra Pelletarium anticipat, & Commandinus, vel qui addiderunt propos. extremas lib. 5. Eucl. supponunt enim propos. 12. lib. 6. Nam verè non potest dici demonstratio, nec intelligi quidem, quæ præsuponit non ostensa, sed potiùs credulitas, & obscuritas: cùm addiscētem opporteat credere ea esse demonstrata; vt hæc, quæ ab illis dependent, sibi persuadeat, & capere nequeat illa, quorum, nec quidem figuram aspexit. Vnde valde illi culpandi sunt; qui Euclidis Elementa perperam augentes, ea introducunt, quæ multa cognitione aliarum propositionum indigent, non dum haustam, vt suam euidentiam nanciscantur.

4 Peregrina fugiunt, & quæ ab instituto recedunt. Sic Procl. lib. 2. cap. 10. enumerat conditiones, quæ ad institutionem Mathematicam necessariæ sunt; & ea inter primas est: *quod sicut necessaria non omittat; sic superflua non interserat; perspicuitatem, & breuitatem seruet.* Et ratio est. Quod impertinens sit, scientiam extra suum obiectum vagari, & alia obiecta contemplari, quæ ad ipsam non spectant. Cùmque partes Mathematicæ sint scientiæ maximè subordinatæ; quarū vna ab alia aliquo semper subalternationis vinculo dependeat; omnes commiscere, est omnes confundere, nihilque certi tradere; dum omnia sine necessariâ dependentiâ traduntur. Vnde in iura Mathematica maximè illi peccant, qui, vt ex vngue adiscamus Leonem, dum vnam propositionem probant, alias, quæ illius loci non sunt, praxes, propositionesque ex alijs non cognitis ostensas, aut tantummodò assertas adferunt, & sic mentes discentium tenebris, offundunt, & in ambages vrgent.

5 Eandem probationem multoties repetunt; dummodo propositioni deseruiat, quam demonstrare satagunt: Sic eandem demonstrationem

9. & 11. propos. primi Euclides replicat, vt passim vbique videre est.

6 Licet nitantur, quæ proponunt, ostendere Mathematici, aliqua tamen sunt; quę nonnisi probabili ratione attingunt: Vnde Mathesis secundum omnes suas partes euidens non est: Nam in multis suis partibus ob defectum principiorum, ab instituto deficit, & probabilitate conquiescit: Sic Astrologia, Optica, Sphera quoque, & Theorica Planetarum, & multi alij tractatus ex parte quidē euidentes sunt, ex parte verò probabiles euadunt, vnde & Phisiomathematici dicuntur. Omnes autem praxes Mathematicę probabiles sunt. Quis enim credat se diuisisse perfectissimè lineam bifariam? Circulum perfectissimum duxisse? & circinum, aut crure se girante, aut pede immoto parumper non diuaricasse, & sic de alijs. Qua de re Problemata Mathematica, vt monuimus, abstractæ semper sunt intelligenda, vt euidenter concludant.

EXPENSIO IV.

De illis, qui studijs Mathematicis operam nauant.

SCiant illi frustra terere tempus, & in ventos niti: si postpositis Elementis, & prærequisitis tractatibus, velint posteriores Mathematicas demonstrationes haurire. Duplici enim de causa nunquam intelligent. Primò, quòd ea, quæ in demonstratis apud Mathematicos sunt, obscura per se sint, & quæ ænigmatis formam præseferant; vt putes de tripode Apollinem loqui, & absoleta effari. Imò & aliqua à probabilitate remotissima sunt: nisi demonstratione firmentur ita quòd; nec quidē probabilem assensum eis intellectus præbere possit proprio lumine ad id suadente, quod nō euenit in alijs scienciis. Siquidem, quæ V.g. Philosophi assumunt, vt probata, & demonstrata in antecedentibus talia sunt, vt intellectus propriâ vi impellente non abnuat. Vnde si non euidentem, saltem probabilem cognitionem assequuntur.

2 Termini Mathematici obscuri; neque propriè, quid significent, & quo pacto imaginationi rapresentari queant, nescit ille, qui prima non viderit. Sicut enim propositio sine figurâ licet multis explicata, & clarissimis verbis, argumentisque ostensa percipi nequit. Ita multò minus, quæ præcesserunt intellectui, seu imaginationi succurrere queunt, cùm tum demonstratione, tum figurâ destituantur. Quamobrem patientèr procedendum est, & cùm tractatus primus alteri aditum præbeat, per omnes successiuè transeundum. Verum tamen est, quòd non omnes tractatus æquali nexu se vinciunt, aut adeo necessario, vt quis aliquem intermittere non possit, dum ad alios festinet; sed vt plurimùm se necessario astringunt vinculo., aut certè multò facilius erit antecedentia legisse, vt singula postrema omninò percipiantur.

Verum est quoque Mathematicā praxibus vti, quæ independenter ab omni demonstratione possint exerceri, sed nunquam intelligi. Et hinc artifex Mathematicus excellens, & peritus euadere potest spretis demonstrationibus; quę ostendendis, non exercendis praxibus inseruiunt.

Ne tamen aliquis, qui vnam, aut alteram Matheseos partem consequi exoptat, non omnem animo amplecti, mole rerum adiscendarum obrutus, deficiat, & ab incepto se absterreat, singulis tractatibus indicabimus, quænam necessariò præcognoscenda, quænam tantùm vtiliter, vt facilè prætermitti possint; Et per omnes partes expeditè omnibus superfluis amputatis discurremus, vt quantum in nobis est, omnis facessat difficultas, & planum sternatur iter ad omnia intelligenda.

Si quis verò exquirat. Quęnam ingenia ad studia Mathematica apta sint. Isti responsum erit. Pueros omninò ablegandos, si de demonstrationibus agatur, solùmque ad primas definitiones, & praxes admitti poterunt. Demonstrationes enim Mathematicæ arduæ sunt, & intellectum perspicacem & acutum summoperè requirunt, maximè, cùm agitur de proportionibus. Et si quando quærit Aristoteles. *Quid est, quòd puer fieri Mathematicus potest, sapiens autem, aut naturalis non potest.* Non intelligit simpliciter de puero; Sed de iuuene. Sic enim affirmat 6. mor. cap. 8. *iuuenes licet Geometrici, & Mathematici, & in eiusmodi rebus sapientes euadunt; prudentes autem euadere non videntur.* Quod & potest intelligi circa praxes; sicut & prudens speculatiuè iuuenis fieri; sed non practicè potest; iuuentute, & feruore animi, rerumque inexperientiâ prohibente axiomata prudentię ad opus rectè demandari. Sic licet iuuenes exercitatissimi in rebus Mathematicis sint; non tamen in demonstrationibus exhauriendis. Cùm enim Iuuenum animi instabiles, & ad oblectamenta aclines sint, parùm ad Mathematicam habiles videntur, quæ ingenium patiens, stabile, remotum, & solitarium requirit, & maximè quòd hodie Mathesis in tantam molem excreuerit; vt qui omnia probè nouerit, iam ad canos se peruenisse cum ipsa perfectione doctrinæ experiatur.

EXPENSIO V.

De Principijs.

PRincipia, quæ primo Elementorum libro inseruiunt, ea toti Mathematicæ aditum sternunt, sicut & ipse primus liber ianua ipsius est, & limen, quo posthabito, nullum aliunde in eius demonstrationes sese iter aperiat. Sunt autem in duplici differentia; nam quædam sunt, quæ pertinent ad materiam, de qua agitur, vt definitiones; aliæ, quæ ad discursum, & argumentationem inseruiunt: vt sunt prima principia per se nota, & concessiones.

DEFINITIO I.

PVnctum est, cuius pars nulla.

DEFINITIO II.

Linea est longitudo latitudinis expers.

DEFINITIO III.

SVperficies est, quæ longitudinem, & latitudinem tantùm habet.

Dicitur *punctum* nullam partem habere; quia acci-

accipitur, vt vltimus terminus lineæ, & linea, vt vltimus terminus superficiei: Superficies autem, vt vltimus terminus corporis conceptu explicito, & inadæquato. Ideoque à superficie excluduntur partes secundùm earn rationem, in qua concipitur terminus: nempe penes profunditatem, non quidem positiuè, & conceptu affirmatiuo, sed negatiuè præscindendo à partibus secundùm profunditatem, & de illo conceptu loquitur Euclides in superficie definienda excludēdo partes, quoad profunditatem à superficie prout inadæquatè concepta, & prout stat in intellectu. Et eodem modo loquitur de lineâ, latitudinem ab ea excludendo; quia precisè, vt inadequatè concepta, prout terminus superficiei, partes penes latitudinem excludit. Et quia puncta sunt quoque termini lineę; hinc est, quòd etiam à puncto debuit excludere partes secundùm longitudinem, & quia erat in linea, & pertinebat ad quid ipsius; cùm esset eius vltimus terminus; hinc, etiam debuere ab eo excludi partes penes latitudinem; & quoniam linea, quid erat superficiei, vtpote terminus ipsius; hinc & à linea; & ideo etiam à puncto debuit excludere partes penes profunditatem. Ideoque punctum precisè sumptum, vt terminus lineę debuit excludere partes, & penes longitunem, & latitudinem, & profunditatem. Vnde benè definitum est *cuius pars nulla*; non quidem à parte rei; sed prout substat nostris conceptibus negatiuis explicitis: & inadequatis: cùm punctum, etiam prout est in intellectu; sed adęquatè conceptum partes obtineat.

DEFINITIO IV.

Lineæ autem termini sunt puncta.

Non quod omnis linea terminos consequatur, cum multæ redeant in semetipsas, vt *Circularis, Eliptica, Orbicularis*. Sed quia omnis linea, quę terminos consequitur puncta vice terminorum recognoscat; & quod omne punctum, vt terminus alicuius lineę concipiēdum sit; cùm se solùm, vt quantitas concipi nequeat ea ratione, quòd nullam sine linea partem obtineat: Ex partibus autem, vt dictum est, quantitas essentialiter constat.

DEFINITIO V.

Recta linea est, quæ ex æquo suis interiacet punctis.

Idest, vt exponit Proclus, *quod quanta sit punctorum alterius ab altero distantia, tanta sit recta linea, quæ ab ipsis terminatur magnitudo; atque hoc est ex æquo inter sua puncta collocari.* Quare linea recta est breuissima, quę de puncto ad punctum duci queat, vt patet in 1. figura. Siquidem punctata est maior, quàm continuata linea, quæ inter A, & C, puncta mediant.

Regulæ verò alicuius, aut cupreę, aut ligneæ; quę deseruit ad ducendas rectas lineas examen est. Si eâ adhibitâ ducatur linea A B ab A in B puncta. Deinde inuertatur, vt regulę superior superficies fit inferior relinquendo extrema ipsius ad eas partes, ad quas erant, dextrum ad dextram, sinistrum ad sinistram, & ducatur alia linea, de puncto A ad punctum B, nam si per primam lineam incedit optima est, si verò non incedit falsa. Ratio est; quia linea recta eadem extrema consequens, spatium non occupat, vt infrà in

DEFINITIO VI.

Termini superficierum sunt lineæ.

Superficierum, & linearum terminantium exempla Proclus assignat, *vmbras*, quę cùm priuationes sint, & nihil consequenter altitudinis habeant, latitudinem tamen, & longitudinem possideat lineisque terminantibus circumscribātur. Illud namque, in quo vmbra finit, lux incipit, quod equidem indiuisibile est: nisi, pœnumbra obliteretur, linea est, vmbrosam superficiem terminis definiens.

DEFINITIO VII.

Superficies plana est ea, quæ ex æquo suas interiacet lineas.

Scilicet, quæ ad instar alicuius speculi, nihil anfractuosum, impollitum, aut montuosum, rugosúmue continet. Estque superficies breuissima; quæ de linea ad aliam lineam, duci queat. Et si super eam ducantur rectę, omnes secundùm omnem suam superficiem, subiectum tangent; Vnde modus experiundi superficiem, est, regulam exactissimam illi multimodè, & penes diuersos situs applicare.

DEFINITIO VIII.

Planus angulus est duarum linearum in plano se mutuò tangentium alterius ad alteram inclinatio.

Angulus planus, qui fit à lineis rectis hic specialiter definit ab Euclides: Quamuis, & angulos curuilineos comprehendat, qui eodem plano iacent. Licet enim multæ lineę curuę ad sese perpetuo fluxu incliment, vt circularis, Elliptica, Spiralis, & tamen angulum non constituant. Nihilominus, & ipsę angulum efficient, vel ad aliam curuam, vel ad rectam inclinatę, quę sequellam suę inclinationis, & normam non imitetur, vt vides figura 3. & 4. & 5. At duę circulorum portiones A B, & B C ductę duobus centris B, & D angulum non constituunt, quia licet diuerso centro ducantur, altera tamen alterius ductum suauiter sequitur, & inclinationem emollit. Sicut enim rectę à rectitudine deflectentes angulum constituunt: Sic quoque curuę suam inclinationem, & ductum non continuantes angulum constituent.

Nota verò; quòd in angulo duo possunt considerari, & ipsa linearum inclinatio, & spatium, quod inter lineas rectas ab illâ inclinatione relinquitur. Euclides verò non loquitur de spatio; sed de ipsa inclinatione. Vnde frigidum est illud aliquorum paradoxum; Lineas mutuò inclinatas duos angulos constituere, licet enim duo spatia relinquant, nempe A B E C extimum, & A B C intimum; adhuc tamen vna est inclinatio. Quare & vnus angulus, qui relinquit spatium exteriùs A B C E vtcumque terminandum, & non vnicâ rectâ, & internum A B C, quod ductâ lineâ rectâ à puncto A ad C terminari potest, & hoc spatium est propriè anguli, qui circumferentiâ A C metitur facto centro in B vertice inclinationis: Itaut maior ille angulus dicatur, qui habere potest æqualis circuli interpositam maiorem circumferentiam inter crura A E, & E C; minor verò; qui minorem inter sua crura complectitur Peripheriam.

DEFINITIO IX.

C*Vm autem, quæ angulum constituunt lineæ rectæ, fuerint; rectilineus ille angulus appellatur.*

Patet definitionem octauam de angulis rectilineis præcipuè loqui: quia tantùm hanc rectilineorum ponit definitionem. Sunt autem plures formæ angulorum rectilineorum, & mixtorum, de quibus hîc superfluè loqueremur. Tantummodò genericè aduerte. Mixtos eos esse, qui curuâ, & rectâ continentur, vt in figura 4. Curuilineos autem duobus curuis, vt in 5. figura videre est.

DEFINITIO X.

C*Vm autem recta linea super rectam insistens lineam angulos facit deinceps æquales, rectus est vterque æqualium angulorum; & , quæ insistit, recta linea perpendicularis vocatur ei, cui insistit.*

Anguli deinceps sunt illi, qui ab eadem lineæ vltra contactum productâ, & ab altera inclinatâ fiunt ad idem punctum: Sic apud 6. figuram angulus E A D, & angulus D A C ad idem punctum A effecti, anguli deinceps vocitantur. Si ergo, in ipsa 6. figura, in puncto 6. recta A 6. cadat, & angulum A 6 B, & alterum B 6 A, qui sunt anguli deinceps, æquales fecerit; itaut 6 A non magis inclinet in hanc, aut alteram partem, anguli illi recti dicuntur.

DEFINITIO XI.

O*Btusus angulus est, qui recto maior est.*

DEFINITIO XII.

A*Cutus verò, qui minor est recto.*

Acutus itaque angulus erit E 6 B, quia minor recto est B 6 A. At verò C 6 B recto maior erit. Anguli autem apud Mathematicos tribus literis designantur, & media litera semper significat illud punctum, ad quod fit inclinatio, & ipsum angulum denotat.

DEFINITIO XIII.

T*Erminus est alicuius rei extremum.*

Vnde sunt tres termini quantitatis, Punctum, Linea, Superficies; quia eam secundùm tres rationes terminant.

DEFINITIO XIV.

F*Igura est, quæ sub vno, vel pluribus terminis comprehenditur.*

Igitur, nec punctum, nec angulus figura est; quia terminata non sunt suis terminis. Angulus enim licet sit clausus duobus terminis; non tamen vndique: Cùm ab ea parte, quâ lineæ patent, licet possit terminari, vel rectâ, vel curuâ, & fieri triangulum; non tamen de sua essentia, & secundùm esse præcisum angulus id consequitur. Punctum verò secundùm rationem puncti terminus omnigener est, cum nullam partem amplectatur: Quaderè, nec plures terminos, aut ambitum consequi poterit hinc, & inde claudentem: alioquin in partes distingueretur. Sic nec quantitas infinita; etiam si aliquibus terminis clauderetur; si tamen ab aliquâ parte in infinitum pateret, figuræ appellationem mereretur; quia terminis vndiquè non comprehenderetur.

DEFINITIO XV.

C*Irculus est figura plana sub vna linea comprehensa, quæ* Peripheria *appellatur; ad quam, ab vno puncto eorum, quæ intra figuram sunt, omnes rectæ lineæ terminantes æquales sunt.*

Si in figura 7. omnes rectæ à puncto A in peripheriam terminantes, vt A B, & A C, A E, & A I sint æquales, ille vocatur *Circulus*. Potest etiam hoc pacto definiri. *Circulus est figura plana, quæ describitur à linea finita altero manente extremorum, alio se mouente; donec perueniat, ad idem punctum, à quo discessit motus*. Sic si linea A B manente A moueatur, donec alterum extremum B se mouens perueniat ad punctum idem B, à quo incepit motus, circulum describet. Differunt autem istæ definitiones, quòd hæc causam efficientem explicet, illa formalem. Geminus apud Proclum vocat lineam circularem compositam; nempe refractam, & in sese inclinatam, & angulatam, & Arist. 1. de Cœlo inquit. Circulum infinitis angulis constare, quod intelligendum est, non à parte rei; quasi quod circulus materialis infinitis angulis plicaretur, cùm, nec quidem infinitas partes consequatur: Sed quod ex suo conceptu debeat vna pars concipi inclinata ad aliã. Cùmque in quantitate partes quidem in infinitum conceptibiles sint; licet non factibiles; hinc est, quòd infiniti anguli in circulo concipiendi sint; nempe quælibet pars, quæ concipiatur, si vt circuli concipiatur, oportet concipi, ad aliam inclinata, interiùs minor, exteriùs maior.

DEFINITIO XVI.

H*Oc verò punctum* Centrum *circuli appellatur.*

Itaque nullum aliud punctum *Centrum*; nisi circuli dici potest, eo quod debeat esse in circuli plani medio. Benè autem *Centrum* circuli dicitur punctum, licet enim nullas concludat partes; omnes tamen lineas, quæ à circumferentiâ ducuntur terminat. Quod nec lineæ secundùm, id iuxtà quod in punctum feruntur, partes obtineant; nimirum latitudinem, & hoc Methaphysicè, & abstractè, cum fundamento tamen in re, scilicet in ipsa diuisione circuli in sectores, vt est sector I A E, cùm enim diuisiones spatium non occupent in latitudinem, mente conceptæ; nec illud, quod terminat istas diuisiones, partes habebit in latitudinem: Sed neque in longitudinem: cùm lineæ terminus sit. Verùm materialiter, & in ipsa quantitate punctum propriè non est, nec indiuisibile, cùm nulla pars in quantitate ipsa indiuisibilis sit; vt supra dictum est.

DEFINITIO XVII.

D*Iameter autem Circuli est recta quædam linea per centrum ducta, & suis extremis in peripheriam terminans; quæ circulum bifariã secat.*

Tales sunt in fig. 7. lineæ I C, & E V; Transeunt enim per centrũ A, & in peripheriã finiunt suis extremis I, & C, sicut etiam E, & V; circulumque bifariam secant; quia per punctum medium transeunt, nempe per centrum. Quamobrem, si superficies circuli plicaretur, in punctis,

E V,

E V, congrueret pars circuli E E V parti E D V; cùm A B sit æqualis lineę A D.

DEFINITIO XVIII.

Semicirculus est figura, quæ continetur sub diametro, & sub dimidio peripheria.

Talis est *semicirculus* E D V, qui continetur sub peripheria E D V, & sub diametro E V.

Porrò segmentum circuli erit illud, quod sub peripherię portione, & linea, quę diameter non sit, continetur. Sunt autem compositę figurę, & mixtę ex curua, & recta linea; angulusque tum segmenti, tum semicirculi mixtus est, curua, rectaque comprehensus, vt A E D.

DEFINITIO XIX.

Rectilineæ figuræ sunt, quæ sub rectis lineis continentur.

Genus explicat Rectilinearum figurarum; Non autem earum, quę vnica linea continentur. Quod in istis libris agat quidem de pluribus figuris rectilineis, de solo autem circulo sermonem sit facturus. Quapropter non fuit necesse explicare genus figurarum vnico ambitu comprehensarum. Verùm possent sic definiri *figuræ orbiculares vnica linea clausæ, quæ in sese regreditur.* Figurę verò plurium laterum; sed curuorum definientur, *quæ flexis lineis continentur.* Mixtę autem, *quæ sub curuis, & rectis clauduntur.*

DEFINITIO XX.

Trilineæ figuræ sunt, quæ sub tribus lineis continentur.

DEFINITIO XXI.

Quadrilateræ, quæ sub quatuor.

DEFINITIO XXII.

Multilateræ, quæ sub pluribus, quam quatuor rectilineis comprehenduntur.

Quoniam species figurarum rectilinearum desumptę à multitudine laterum in infinitū progrediuntur. Ideo omnes alias generali definitione complectitur. Attamen explicauit trilateras, & quadrilateras; quòd de istis hoc primo libro tractet, quę & omnibus alijs fundamenta prebent, & propriè ad Elementa pertinent; cùm omnis figura rectilinea plana, vt videbimus, in triangula resoluatur.

DEFINITIO XXIII.

Trilaterarum autem figurarum, Æquilaterum est triangulum, quod tria latera habet æqualia.

DEFINITIO XXIV.

Isosceles autem, quod duo latera æqualia tantummodò tenet.

DEFINITIO XXV.

Scalenum autem, quod tria inæqualia habet latera.

Nam, cùm triangulum tribus lateribus claudatur; in tres etiam species diuiditur. Si etenim omnia latera sint æqualia, constituitur *Æquilaterum*, vt fig. 8. Si duo tantùm *Isosceles*, vt 10. fig. & 11. Si omnia inęqualia, vt fig. 9. *Scalenum* constituitur.

DEFINITIO XXVI.

Ad hæc etiam trilaterarum figurarum, rectangulum quidem triangulum est, quod rectum angulum habet.

Vt fig. 10. vel 11. Hęc autem secunda triangulorum diuisio non est subordinata primæ; sed æquè vniuersaliter patet, nec ei vllo pacto annexa. Nam vt benè aduertit Proclus ad hanc definitionem possunt pertinere figurę laterum quatuor, quæ tamen tres angulos solùm obtineant, vt triangula Cilogonia, & Accidoidea cuspidi sagittę similia, vt fig. 12. quæ tamen tres tantùm angulos obtinent. Deinde triangulum rectum angulum habens potest esse, & Isosceles, & Scalenum, non autem æquilaterum. Vnde patet hanc triangulorum distinctionem à primâ non pendere. Licet magnitudo angulorum à lateribus quasdam insignes obtineat dependentias; vt videbimus.

DEFINITIO XXVII.

Amblygonium autem, quod obtusum angulum habet.

Veluti fig. 12. apud circulum. Quod etiam potest esse Scalenum, & Isoscelum.

DEFINITIO XXVIII.

Oxigonium autem, quod tres habet acutos angulos.

Velut fig. 8. Quod etiam potest esse Scalenum, Isosceles, & Æquilaterum. Eo quod in omni triangulo tres quidem possint esse acuti anguli; sed rectus, & obtusus solùm vnus esse potest. Quamobrem reliqui duo necessariò acuti erūt. Qui si erunt æquales, triangula quoque, duo latera ęqualia obtinebunt: si inęquales inuicem, duo latera quoque subtenta erunt inęqualia, & semper latus tertium angulo abtuso, vel recto subtensum maius, ob angulum maiorē reliquis, quem subtendit.

Oxigonium, cum tribus acutis angulis potiatur latera potest consequi omnia inęqualia, vel duo, vel tria æqualia, & sic esse Æquilaterum, Isoscelum, & Scalenum. Nam dari potest triangulum, vt cum Barocio aduertit Clauius ad propos. 15. lib. 4. Elemen. Oxigonium, quod latus habeat, tum hoc, tum altero crure seorsim sumpto maius; etiam si crura reliqua inuicem sint æqualia.

DEFINITIO XXIX.

Quadrilaterarum figurarum quadratum *est, quod æquilaterum, & rectangulum est.*

DEFINITIO XXX.

Altera parte longior figura est, quæ æquiangula quidem est, & non æquilatera.

DE-

DEFINITIO XXXI.

R*hombus, quæ æquilatera, at æquiangula non est.*

DEFINITIO XXXII.

R*homboides, quæ opposita, & latera, & angulos æqualia tantùm habet. Non omnia.*

DEFINITIO XXXIII.

R*eliqua verò ab his quadrilatera* Trapezia *vocentur.*

In istis Definitionibus illud aduerte. Quòd ab altera parte longiori, qualis est fig. 13. differt quadrata 2. non in angulis: sed in lateribus tantùm: Rhombo verò fig. 14. expresso in angulis; at non in lateribus: A Rhomboide fig. 16. signato in angulis simul, & in lateribus; sicut & à Trapezio, fig. 15. designato.

DEFINITIO XXXIV.

P*arallelæ rectæ lineæ sunt, quæ, cum in eodem sint plano, ab vtraque parte; etiam si in infinitum producantur, in neutram partem sibi mutuò incidũt.*

Tales sunt in fig. 17. Parallelæ A B, & C D. Quare duas conditiones essentiales requirit Euclides; vt lineæ parallelæ, idest æquidistantes sint; Prima, quòd sint in eodem plano, alioquin in diuersis certum est non conuenire. Secunda quòd numquam coeant, licet in infinitum producerentur. Quod licet nequeat cognosci experimento, cognoscitur tamen animo, & ratione. Quòd, cùm distantia inuicem non sit imminuta, dùm procedunt vsque ad certum spatiũ atque terminum; nec vmqnam imminuetur, cum par sit ratio de illo processu ad quamcumque distantiam: neque dicas, posse illam quidem distantiam esse imminutam; sed non sensibiliter: nam non loquimur de lineis sensibilibus; sed abstractis, & animo conceptis, in quas, vt supra diximus Mathematica, velut in suum obiectum fertur.

Definitiones, quę sequuntur Euclidis non sunt. Ab authoribus tamen adduntur, vt necessarię ad ea, quę primo libro traduntur, percipienda.

DEFINITIO XXXV.

P*Arallelogrammum est figura quadrilatera parallelis oppositis lateribus.*

Sic fig. 13. 14. 16. 2. Parallelogramma sunt, estque nomen genericum conueniens quadrato, Rhomboidi Rhombo, & altera parte longiori, sed non Trapezio.

DEFINITIO XXXVI.

D*iameter in parallelogrammo est linea; quæ diuidit angulos oppositos. & latera bifariam.*

Hoc aduertit Arist. lib. 15. Probl. 1. & 2. Cur diameter appelletur, quę de angulo ad angulum ducta sit, vt A B, & non quęlibet alia bifariam figuram diuidens, & reddit rationem, quia diuidit bifariam non solùm latera, ita vt duo remaneant hinc, duo indè; sed etiam angulos; quod nullę alię rectę in parallelogrammis ductę efficiunt.

DEFINITIO XXXVII.

S*I parallela in parallelogrammo ducantur per idẽ diametri punctum, partes, per quas transit diameter,* circa diametrum; *per quas verò non transit,* complementa *dicuntur.*

Sic ductis parallelis A B, & C D per idem punctum I, nigra, per quę diameter non transit, Parallelogramma *Complementa*; & alba, per quę transit, vocantur, *circa diametrum* consistentia.

POSTVLATA.

1 P*Ostuletur. Vt à quouis puncto ad quoduis punctum linea recta duci concedatur.*

2 *Lineam rectam terminatam in continuum rectà producere.*

3 *Quouis centro, & interuallo circulum describere.*

4 *Omni magnitudine data posse sumi maiorem.*

PRIMA PRINCIPIA.

QVæ etiam solent dici *Dignitates, Axiomata, Pronuntiata, Effata, communes Notiones*; Alia omninò prima, quę adeo sunt clara, vt primo conceptu indubitata euadant; Alia non item; sed quasi immediatæ primorum principiorum conclusiones. Primi generis sunt.

PRINCIPIVM I.

Q*Væ eidem sunt æqualia, & inter se sunt æqualia, & quod vni æqualium maius est; maius etiam alio necessè est esse, & si minus vni similiter minus altero. Et si vnum æqualium est maius magnitudine quapiam, aut minus alterum quoq; æqualium ea magnitudine maius est, aut minus.*

PRINCIPIVM II.

E*T si æqualibus æqualia adiecta fuerint, tota erunt æqualia; Et, si ab æqualibus æqualia ablata fuerint, tota erunt æqualia.*

PRINCIPIVM III.

E*T si inæqualibus æqualia adiecta fuerint remanent, vt priùs inæqualia, & si ijsdem inæqualia inæqualia quoq; addantur; sed maius maiori, minus minori, adhuc sũt inæqualia; Et, si ab inæqualibus æqualia ablata fuerint manent, vt priùs inæqualia. Quòd si ab ijsdem inæqualia ablata sint maius maiori, minus minori remanent inæqualia.*

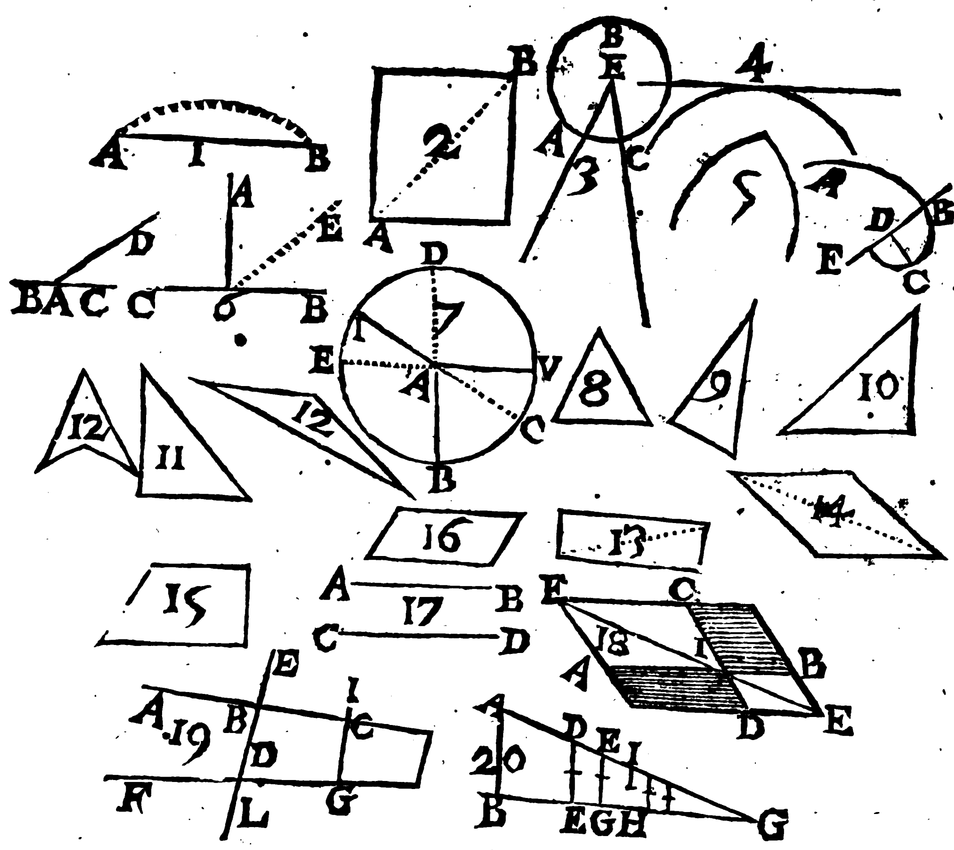
PRINCIPIVM IV.

E*T quæ eiusdem duplicia sunt, inter se sunt æqualia, & quòd vni æqualium duplum est, duplum etiam est alteri. Et, quæ eiusdem sunt dimidia, inter se sunt æqualia; Et, quæ sunt æqualia, eiusdem dupli, sunt dimidia.*

PRINCIPIVM V.

E*T, quæ mutuò sibi congruunt, inter se sunt æqualia: Nimirum quando vnum alterum nulla parte excedit.*

PRIN-



PRINCIPIVM VI.

T*Otum sua parte maius est.*
Quibus auctores addidere sequentia.

PRINCIPIVM VII.

O*Mne totum est æquale omnibus suis partibus simul sumptis.*

Si æqualibus inæqualia adijciantur, erit totorum excessus adiunctorum excessui æqualis; & si ijsdem inæqualibus æqualia addantur erunt adhuc excessus totorum, & adiunctorum æquales. Sic si è conuersò æqualibus inæqualia demantur, aut inæqualibus æqualia essent totorum excessus, & adiunctorum æquales.

V. G. si duobus palmis addantur, hinc tres quartæ palmi, inde palmus, differentia erit horum compositorum vnius quartæ palmi, vt differebant priùs tres quartæ palmi à palmo, antequam adderentur. Et si tribus quartis palmi palmus, & palmo palmus addatur quantitates additæ different vna quarta palmi; vt differebant priùs tres quartæ, & palmus antequam vnus palmus singulis adderetur: quod est dicendum pariter de ablatione.

Principia, quę minus clara sunt, & ideo ostendi possunt.

PRINCIPIVM VIII.

D*Væ lineæ rectæ non habent vnum & idem segmentum commune.*

Idest. Nequeunt reperiri duæ lineę quarum vna pars sit eadem cum altera, ita vt eandem lineam integret: Reliqua verò sit ab illa remota, V. g. in fig. 7. Quod I A V sit vna recta, I A C sit altera recta, quę consequantur eamdem partem I A, & in ipsa idem sint; Reliqua verò in duas partes abeat. Si enim hoc esse posset, vt ostendit Proclus, I D V esset semicirculus; quia linea, quę supponitur recta I A V, transiret per centrũ; vnde pars circuli I A D V ab ipsa, & à peripheria conclusa esset semicirculus, & ideo æqualis I A C D V semicirculo, quod esse nequit.

PRINCIPIVM IX.

D*Væ lineæ ad idem punctum concurrentes, si producantur, se mutuò secant.*

Sic A C, & A B in fig. 7. quæ ad idem punctum A concurrunt productę in D, & I se mutuò secant. Id autem potest ostendi. Nam si se non secant, congruunt (Si enim producantur vtique retrò non redibunt) & I A erit idem segmentum, ac A D, & idem erit cum ipsa, quod est contra præcedens pronunciatum.

PRINCIPIVM X.

D*Væ lineæ rectæ in eadem puncta concurrentes spatium non comprehendunt.*

Sic in prima figura. Si à puncto A, in B alia linea recta ducatur, cadet in lineam primo factam, & per eam ductus ipsius lineę incedet, nec inter eas spatium mediabit, vt mediat inter punctatam, & rectam A B.

PRINCIPIVM XI.

O*Mnes anguli recti sunt æquales.*

Quoniam, si essent inæquales, alter esset maior recto, vel minor, & sic esset acutus, vel obtusus; quod esse nequit, cùm esset rectus, vt supponitur; non rectus autem, quia minor altero recto. Et sic rectus, & non rectus.

PRINCIPIVM XII.

S*I duas alias lineas alia secans, angulos intra ipsas, & versus eandem partem, minores duobus*

rectis

rectis fatiant; illa lineæ tandem concurrent.

Quia est altera, ad alteram inclinata; vnde cùm non sint æquidistantes, necessariò tandem conuenient: Sic quia anguli in fig. 9. ad CBD, & CDB ad easdem partes, quas facit linea EL incidẽs, vel secans duas AC, & GF sunt minores duobus rectis; necessariò tandem concurrent, dummodo ducantur per partes semper æquales.

Ratio est. Quia si B c procedendo à h in c absumat aliquam partem distantię, V. g. sextam CI, quę est eadem, ac illa, quę est inter B, & D. Si producatur etiam per aliam partem æqualem; absumet rursus aliam partem æqualem sextam: Cumque partes æquales intèr B, & D infinitę non sint. Ideo tandem omnes absumet, & sic perueniet ad aliam lineam FG. Dices; Dantur lineę asymptotales, quę ad rectam accedunt semper; nec vnquam eam assequuntur. Respondetur eas; aut esse flexas, & de istis non loquimur; aut esse rectas, & istę non ducuntur per partes æquales, sed semper minores, & minores; Vnde est dispar ratio.

Nam Sint duę rectę, vt in fig. 20. AC, & BC, sed tali modo ducantur. Producatur AD vsque ad D, & BE vsque ad E, & ducatur ED. Deinde medietas ED assumatur, & ad eam distantiam ducatur parallela GF, & postea producatur AD in F, & BE in G. Assumptaque rursus medietate GF, quę est minor: quam ED ducatur alia parallela HI, & ad eam ducatur AD in I, & BE in H. Itaque Mathematici ostendunt, quòd lineę de parallela in parallelam viciniorem ductę, & semper in minores, minoresque distantias continuatę quales sunt AD, DF, & FI; numquam esse peruenturas ad punctum C, in quo se coniungant. Eo quod spatium AC sit diuisibile in infinitum. Sed hoc est ducere lineas inuicem inclinatas per partes semper minores, & consequenter minori, minorique augmento eas prolungare, at non per partes æquales, & æquali additione eas continuare. Partes verò seipsis perpetuò minores saltem Methaphisicè Exp. I. tract. I. admisimus. Non autem æquales; quę ipso sensu iudice infinitę in quantitate non reperiuntur.

EXPENSIO VII.

De Elementis in genere.

SVpra nomen Elementi, vimque explicauimus; modo de eius differentia, atque diuisione peragendum.

Elementares institutiones à varijs olim inuentas collegerunt antiquitùs aliqui Hypocrates, Chius, Leo discipulus Neoclidis, Theudius Magnes, Hermotinus Colophonius. Omnium autem Euclides prestãtissimus, qui, cùm longo tẽpore Alexandrię docuisset, vt testatur Procl. l. 2. c. 4. *Multa construxit eorum, quæ ab Eudoxo multa verò perfecit eorum, quæ à Theateto reperta fuerant, & ea præterea, quæ à prioribus molliore brachio ostensa fuerunt, ad eas redegit demonstrationes; quæ nec coargui, nec conuinci poßunt.* Vnde etiam Ramus lib. 3. Scho. Math. testatur. *Nullus paralogismus nulla Speudographia in totis Elementis Euclidis nobis, quamquam seuerè inquirentibus animaduerti potuit.* Nec solùm Elementa, sed multas alias insignes lucubrationes edidit quarum, quę ad nos peruenerunt, sunt Optica, Catoptrica, Musicæ elementares institutiones, Phęnomena Datorum liber, & insuper, quas, non habemus, operas liber de diuisionibus, & Conicis: vnde insignem in Geometricis consecutus est, & primam laudẽ.

CONCL. I. PROPOS. VI.

Elementa in duplici ordine sunt, alia subalternata, alia subalternantia.

PAtet, quia aliqua dependent à primis, & suppositis illis probantur; Ergo aliqua sunt subalternantia, idest, quę alijs prima principia prębent, alia dependentia, ab illisque principia mutuant, & ex eis euidentiam adipiscuntur. Vnde propriè, & verè Elementa non sunt. Hæc verò sunt, quę II, & sequentibus libris explicantur; maximè quia non adeò vniuersalia sunt; sed ad certas figuras, nempe solidas tales, aut tales restringuntur.

CONCLVS. II. PROPOS. VII.

Ordo Elementorum decem libris comprehensorum talis est; Primò agitur de proportione; Secundò de proportionum similitudine; Tertiò de quantitatis Discretæ, & Continuæ comparatione.

PRob. Quia primis 4. libris ostendit figurarum, aut partium in ipsis factarum proportionem; & aut æquales, aut maiores, aut minores probat, Primo quidem lineas triangula parallelogrãma quo ad se, Secundo lineas quoad earum potentiam, Tertio circulos, Quarto alias figuras planas explicans. Libro verò 5. agit de proportionum similitudine in genere, Sexto de proportionum similitudine in quantitate continua, Septimo, Octauo, & Nono de proportionum similitudine in numeris. Decimò comparat quantitatem Discretam, & Continuam, & earum proportiones componit, aliasq; conuenire cum proportionibus numerorum. alias non conuenire affirmat, & ideò numeris inexprimibiles, & irrationales asserit, & quamuis passim agat de effectione figurarum, vt cũ agit de constituendo triãgulo æquilatero, & quadrato, &c. Attamen in ipsa probatione ostenditur, earum partium adinuicem æqualitas, vel quod vna alterà sit, vel maior, vel minor. Vnde semper agit de proportione corporum, vel eorum partium adinuicem. Non agit verò de proportione numerorum, quia in ipsa prolatione numeri statim agnoscitur, an numerus sit maior, aut minor, aut æqualis. Vnde superfluum erat de hac re demonstrationem extruere. Agit itaque de proportione in genere, 1. 2. 3. & 4. libro. De proportione verò in specie, eam comparando alteri proportioni, ideoq; de proportionum similitudine 5. 6. 7. 8. & 9. libro, & tandem 10. de quantitatis Continuæ, & Discretæ comparatione.

TRACTATVS IV.

In primum Librum Elementorum.

LIBER primus Elementorum agit præcipuè de lineis inter se comparatis, quoad situm, æqualitatemque, & de triangulis duplici modo, primò item in se, comparando latera angulis, quibus subsunt. Secundò etiam respectu aliorum triangulorum, ostendendo quænam sint æqualia, quæ verò non. Tandem agit de quadratis, & parallelogrammis versus finem. Agit autem duplici modo quædam speculatiuè tantùm, & Theoricè, quædam verò Problematicè, & in ordine ad operationem. Ordo verò confusus est; non quidem, quoad rerum dependentiam, cùm aptissimè in hoc procedat; sed quoad materiarum diuersitatem. Siquidem primo agit de triangulo, inde de lineis, rursus reddit ad triangula, &c. Nos verò hunc ordinem ausi sumus paululùm immutare; vt etiam secundus ordo seruaretur in ipsis rebus tractandis. Et quia modo nominantur latera, modo anguli, angulos nigro, alboque, vel sub nigro distinximus; at lineas literis notauimus, vt magis perspicua esset demonstratio, & literarum ferè eadem repetitio intellectum legentium non confunderet. Sicca verò, & nuda ponimus Elementa, quòd & ipse Euclides ita faciendum duxit, vt testatur Proclus lib. 2. cap. 5. *Præcipuè verò circa Geometricam Elementorum institutionem eum*, nempe Euclidem, *quispiam admirabitur, propter ordinem, & electionē eorū, quæ per Elementa distribuit; etenim non ea assumpsit omnia, quæ poterat dicere;* sed ea dumtaxat, *quæ Elementi potuit ordine tradere*. Vnde puto grauia per se, & difficilia primo ingressu esse Elementa; vt contra ius faciat, & æquitatem, illum, qui insuper ad augendam fascem, aliena vocet in Elementa, & ex alijs principijs dependentia, & ideò obscurissima, & altioris ordinis, vt tenebras offundat clarissimis, proponat. Satiùsque existimaui sobriè me agere, & necessaria solùm proponere consulens simul, & breuitati, & claritati.

EXPENSIO I.

De Triangulis constituendis.

CVm Triangulum prima figurarum sit, & quædam etiam inter lineas exerceri nequāt sine eorum consideratione, & effectione, ideò primus limes in triangula ingreditur.

PROB. I. PROPOS. I.

Super data linea terminata Triangulum æquilaterum constituere.

SIt linea B A finita, super quam triangulum æquilaterum sit constituendum.

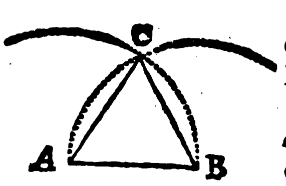
Centro B trahatur circulus interuallo A B vt in postulatis concessum. Iterumque centro A eodem interuallo A B alius circulus describatur.

Se intersecabunt in C; Trahatur igitur ad illud punctum intersectionis C à puncto B linea recta C B, & item à puncto A alia recta A B ducatur ad idem punctum C: eritque factum triangulum A C B rectilineum, *quod dico esse æquilaterum*.

PRÆASSVMPTVM.

PRimò supponendum lineas tractas à circumferentia ad cētrum esse æquales ex dictis. Secundò quod, quæ sunt æqualia alicui tertiæ rectę, esse lineas æquales inuicem ex I. pronunc.

Prob. Linea C B est æqualis lineæ B A; vt ductę à centro B ad punctum circumferentiæ A, & C.

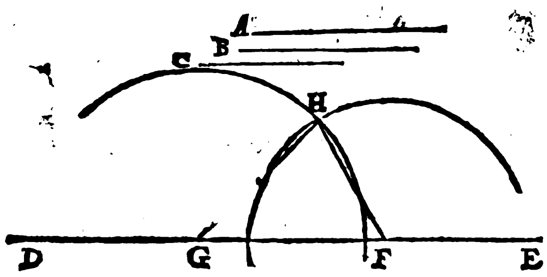


Linea quoq; altera A C est æqualis eidem A B, ob eandem rationem, quod ductæ sint à centro A ad puncta circūferentię C, & B; Ergo cùm lineæ tertiæ A B, duo crura A C, & C B sint æqualia, erunt & inuicem æqualia.

PROB. II. PROPOS. II. Euc. 22.

Datis tribus partibus in vna recta, quarum duæ simul sumptæ reliquâ mediâ sint maiores, constituere triangulum habens crura illis æqualia.

SVnt datæ in recta D E partes D G, & G F, & E F æquales, si ita placuerit, singulę singulis A, C, B. Debeatque triangulum constitui, cuius crura dictis partibus sint æqualia.



Facto centro in F circulus ducatur interuallo F E. Iterumque facto centro in G interuallo D G circulus ducatur, qui se intersecabunt in H. Ductis igitur ad H rectis G H, & F H *erit factum triangulum* G H F. *Cuius basis est* G F *vna pars, linea* G H *æqualis* G D *alteri parti, &* F H *tertiæ parti* F E.

Probatur; quia sunt duæ D G, & G H æquales, vtpotè radij eiusdem circuli ducti centro G. Sic quoque duæ F H, & F E sunt æquales, vtpote radij eiusdem circuli ducti centro F; Tertia autem G F eadem, quæ prius. Ergo crura huius trianguli G F H, tribus partibus lineæ D G, & G F, & F E sunt æquales.

Quòd autem circuli se debeant intersecare; patet ex conditione, quam posuimus in propositione; quòd duæ D G, & F E reliquâ mediâ sint maiores simul sumptæ; quia sic circulus F H, & G H in linea G F vnus, vbi alter est, secundùm aliquam sui partem cadet: Vnde necessariò deuecti ad H, dum alter exit ab altero, se intersecabit.

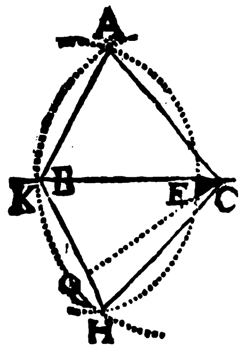
PROB. III. PROPOS. III.

* *Dato triangulo, ei triangulum æquale ad aliam partem constituere.*

AB antecedenti Propos. emergit, quod dato triangulo A B C possit fieri aliud triangulũ B H C super eãdem basim B C alteri æquale. Interuallo B A describatur circulus, & interuallo C A describatur rursùs circulus; vbi ergo se intersecant in H à punctis B, & C ducantur rectę B H, & H C, *Et erit factum triangulum* B H A *æquale triangulo* B A C.

Probatur latera enim sunt æqualia; Nam B A crus, & B H crus sunt eiusdem A B H radij; Ergo æqualia: Sic & A C, & C H crura sunt eiusdem circuli A K H radij; Ergo æqualia. Crus verò B C commune.

Anguli autem singuli, angulis erunt æquales; Nam si aliquis est inæqualis; Sit V.g. B C H, qui sit maior: ita vt B C Q niger dicatur angulo B C A æqualis. Et tamen latera sint lateribus, singula singulis trianguli B A C æqualia; Ergo B Q crus



erit æquale B A: sed B A est æquale cruri B H; Ergo etiam B Q crus esset inæquale cruri B H, minus maiori; quod esse nequit. Ergo omnes quoque anguli erunt æquales: Cùm idem argumentum sit de reliquis, quòd verò possimus ducere circulũ interuallo dato, & centro V.g. C: hoc postulauit Eucl. & fecit in prima Propos. Nã in ducendo posteriori crure æquilateri trianguli interuallum assumpsit idem, quòd priùs facto alibi centro.

COROLLARIVM.

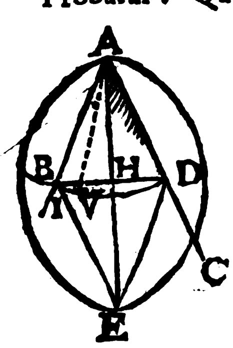
HInc est vniuersaliter, quòd si detur triangulum habens duo crura innixa eidem basi. V.g. B C vel æquali, & crus vnum vni, alterum alteri sit æquale, quòd & triangula singulis angulis insistentibus, ijsdem lateribus æqualibus erunt æqualia: Sic anguli ad C erunt æquales; quia æqualibus B H, & B A cruribus insunt, vel insistũt.

PROB. IV. PROPOS. IV.

Datum angulum, & basim, æquicrurumque triangulum bifariam secare.

* SIt datus angulus I A C, qui in duo secãdus sit centro A interuallo ad libitum A B ducatur circulus B V D, & secet crus A C in D, & recta ducatur B D. Facto deinde centro in D interuallo D A ducatur circulus, & idẽ fiat in B interuallo B A. Et à puncto, in quo se intersecãt in E, ducantur rectæ B E, & D E. A puncto deinde A, ad E ex post. 1. ducatur A E. Dico *angulum apud* A *esse medium sectum, medietatemque nigram albæ esse æqualem.*

Probatur. Quia A D, & B A, vtpote eiusdem circuli radij sunt æquales; & B E est linea æqualis lineæ B A ob eandem rationem; nec non E D, ipsi A D. Ergo etiã erunt, vt illa A D, & B A, inter se æqualia hæc postrema crura B E, & E D. Ergo triãgulum A D E super eandem basim A E, ex præced. erit æquale triangulo E B A. Et sicut singula latera, singulis lateribus, sic & anguli singuli, singulis angulis; Quare angulus niger erit æqualis albo, apud A.



Dico secundo basim B D in duo sectam.

* Prob. Nam; si non est secta bifariam, erit pars altera, vel maior, vel minor. Sit, V.g maior H B, quę, vt esset ęqualis, deberet esse H V, & ducatur ab V linea V A.

Quęro, an V A sit æqualis A D, vel non? Si nõ. Iam sumus extra pręsupositionem: Nam A D, & A B præsuponimus æqualia crura: Vtpote Isoceles. Si verò æquat V A crus A D. Iam habemus V A H triangulum æquis cruribus, singula singulis correspondentibus trianguli A H D, & basis communis: Ergo etiam anguli ex pręced. erunt æquales. Quare angulus apud A inter V A, & A H erit æqualis angulo maiori H A D nigro, & consequenter albo sibi æquali B A H; pars toti, quòd esse nequit. *Quare basis* B H *non erit minor basi* H D, *sed æqualis.*

*Pro.

* Prob. 3. pars: Quòd etiam triangulum B A D nuper factum sit bifariam sectum. Nam cum omnia duo crura trianguli B A H, & H A D, vnum B A, vni A D, & aliud B H, alteri H D correspondenti sint æqualia, & basis H A cōmunis, erūt triāgula ipsa inter se æqualia, ex pręced. BAH, & HAD.

EXPENSIO II.

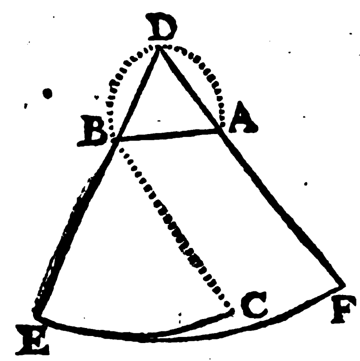
De lineis secandis.

Licet lineæ circino secari possint, & æquales assumi, & inter postulata id potuisset connumerari; vt liceret lineam, ad placitam distantiam ducere. Id tamen noluit Euclides: Quia, vt aduertit Tartalea, poterat ostendi; & ipse voluit ostendere, quidquid ostendibile fuit.

PROB. I. PROP. V. Euc. 2.

A dato puncto datæ rectæ æqualem rectam ducere.

Sit linea data punctata B C, & datum punctum A. Oporteatque ab illo puncto A ducere rectam, quę sit æqualis datę punctatæ B C. Coniungatur punctum extremum illius lineæ punctatæ, quę datur, cum puncto A dato, & sit linea coniungens A B. Superque eam constituatur triangulum ęquilaterum B D A: Deinde pūcto B, quod coniūctum est ad A, interuallo B C fiat circulus, & secet B D productum latus trianguli in E. Centro postea D vertice trianguli, interuallo prolungati lateris E D circulus describatur. Postea latus alterum D A prolungetur vsque ad hanc secundi circuli peripheriam E C F, nempe vsque ad F. *Et erit A F ea linea, quæ quæritur æqualis lineæ punctatæ B C.*

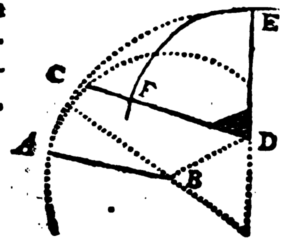


Probatur lineę D F, & D E sunt æquales, vtpote radij maioris circuli. Vnde demptis cruribus æquicruris trianguli D A, & D B, residuę portiones remanebunt æquales E B, & A F ex pronunc. I. Sed etiam B E, & punctata B C; vtpote radij minoris circuli; sunt æquales. Ergo duę A F, & A C æquales tertię B E, inter se erunt æquales.

PROB. II. PROP. VI. Euc. 3.

Duabus datis lineis inæqualibus de maiori æqualem minori rectam lineam detrahere.

Dentur duæ rectæ A B minor, C D maior. Et iuxta præcedens Problema, vt punctatę lineæ, & circuli ostendunt à puncto D ducatur æqualis minori A B linea D E: Et ducatur cētro D interuallo D E circulus: qui secet D E in F. *Dico segmentum D F æquale esse lineæ A B.*



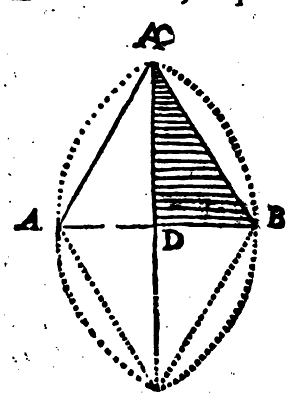
Probat. Quoniam sunt æquales vni tertiæ D E, linea A B ex effectione iuxta præcedens Problema, & F D segmentum, vtpote radius eiusdem circuli centro D ducti. Ergo etiam sunt inuicem æquales A B, & D E.

Patet itaque quod lineæ rectæ in tantum assumuntur æquales; quia sunt eiusdem circuli diametri, quod fortè intendit Euclides. Et ideò noluit id inter postulata exquirere, tanquam concedibile; cùm hàc proprietatem æqualium voluerit demonstrare; Quod scilicet potentiâ sint eiusdem circuli semidiametri.

PROB. III. PROP. VII. Euc. 10.

Datam rectam lineam finitam bifariam secare.

Sit linea recta data A B; quæ non in infinitum extendatur; & quæ in duas partes æquales sit diuidenda. Super eam fiat triangulum æquilaterum. Ex prop. I. A B C. Cuius angulus C bifariam ex prop. 4. diuidatur. *Dico lineam A B in duas partes æquales esse sectam.*



Probat. Quia in propos. illa 4. ostensum est segmentum D B basis A B æquale segmento A D eiusdem: Ergo in duas partes æquales secta est.

EXPENSIO III.

De linearum se tangentium situ.

Quo ad situm lineę consideratę secūdùm se, non prout figuræ alicuius latera, inuicem referri possunt; quæ sunt in duplici differentia; aliæ paralellæ, quæ nunquàm se tangunt, etiàm in infinitum productæ; aliæ verò se tangunt, vel saltem productæ se tangunt, & de istis sermo in præsenti est.

PROB. I. PROP. VIII. Euc. 11.

Datâ rectâ lineâ à puncto in illa dato lineam rectam ad angulos rectos excitare.

Recta linea detur, quæ sit A B: & in ea punctum C, à quo linea perpendicularis, quæ def. 10. descripta est, sit educenda. Electo puncto altero in ea, V. g. in E. Ex prop. 6. Portioni C E auferatur ęqualis ad alteram partem C D; ita vt C sit pūctum medium.

Et ex docum. propos. I. super E D triangulum æqui-

æquilaterum constituatur D E F. Et à puncto C ad F recta ducatur: *Hæc enim insistet super rectam datam A B perpendiculariter.*

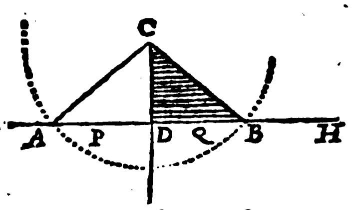
Probatur crus C E, & D C sunt æqualia, & B F eius alteri F D; basis verò C F communis. Ergo totum triangulum nigrum toti albo triangulo erit æquale, etiam quoad angulos ex Coroll. prop. 3. Angulus itaque niger, est æqualis albo apud C existenti; Ideoque F C erit perpendicularis, ex defin. 10.

PROB. II. PROP. IX. Euc.12.

Super datam rectam infinitam à dato puncto, quod in ea non sit, perpendicularem rectam ducere.

HAnc lineam indefinitam vult esse Eucl. quia, si esset nimis breuis posset euenire, circulum ad operationem necessarium ipsam non secare; vel quòd punctum, ita extra eam esset positum, vt ipsa prolungata in illud incideret, & sic circulus necessarius ad operationem, vt oportet, duobus punctis nõ secaret, vt si esset linea P Q, & punctum H: itaque.

In puncto dato C, quod in linea non est, fiat centrum electo radio, & interuallo tali, vt rectam datam A H secet in duobus punctis A, & B. Et ab illis ducantur ad



punctum C duæ rectæ A C, & C B. Deinde ex proposs. 8. ea diuidatur in duas partes æquales in D, & ducta C D. *Est, quæ in propos. promittitur, ipsi A B perpendicularis.*

Probat. Nam trianguli nigri crus D B alterius triãguli albi cruri A D ex cõstructione est ęquale, & item crus C B, cruri A C vtpote radij: Basis verò D C communis; Ergo totum triãgulũ nigrũ etiam quoad angulos toti albo est æquale. Vnde angulus niger ad D correspondẽti albo ad D erit ęqualis, & ideò ex defin. 10. D C *erit perpendicularis.*

THEOR. I. PROP. X. Euc.13.

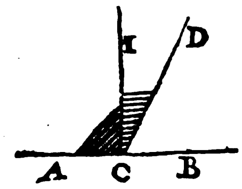
Cùm recta linea super rectam consistens angulos facit, aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficit.

INcipit hic sola speculatio, & primam proprietatem linearum se tangentium demonstrat.

Sit itaque recta A B, super quam consistat C D, & si quidem anguli hinc, inde sunt æquales, sumus extra quæstionem: Nam ex 10. defin. illi anguli recti sunt. Quòd si anguli illi sint inæquales: Dicit tamen Eucl. duobus rectis, simul sumptos esse æquales. Quod vt ostendat, imperat ex proposs. 9. à puncto C dato erigi perpendicularem C I.

Probatur. Quoniam ex 7. pronunc. omne totum est æquale omnibus suis partibus simul sumptis; rectus angulus I C B erit æqualis nigro, & albo, vtpote suis partibus: Si verò addas, tum recto angulo I C B, tum albo, & nigro, nigerrimum A C I rectum, efficietur, vt albus niger, & nigerrimus additus, sint æquales duobus recto I C B, & item eidem nigerrimo ei addito, ex 2. pronunt. quòd memoriâ tenendum.

Progres. 2. Rursus Angulus A C D ex eodem pronunt. 7. est æqualis, vtpote suis partibus angulo nigro I C D, & nigerrimo A C I: quare, si addas vtrisque angulũ album, efficietur, vt angulus A C D, & angulus albus ad C sint



æquales tribus albo, nigro, & nigerrimo ad C. Iam itaque vides angulum I C B rectum, & nigerrimum item rectum, vt priùs probatum est, tribus albo, nigro, & nigerrimo esse æquales: Rursusque, vt modo dixi, A C D obtusum, & album acutum factos à lineâ D C, tribus albo, nigro, & nigerrimo item esse æquales, vt modò demonstraui: sed quę eisdem sunt æqualia, & inter se sunt æqualia ex 1. pronun. Ergo *angulus* A C D, & *albus* ad C *sunt æquales angulis duobus* I C E *recto, & recto nigerrimo* A C I.

COROLLARIVM.

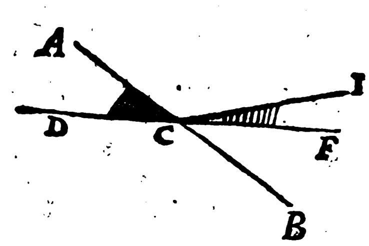
COllige quoscumque angulos super rectam à pluribus lineis insistentibus effectos esse duobus rectis æquales; sicuti hi tres albus, niger, & nigerrimus duobus rectis ostensi sunt æquales.

THEOR. II. PROP. XI. Euc.14.

Si ad aliquam rectam lineam, atq; ad eius punctum, duæ rectæ lineæ non ad easdem partes ductæ, eos, qui sunt deinceps angulos duobus rectis æquales fecerint; in directum erunt inter se illæ lineæ rectæ.

ELigendum est punctum C in linea A B, & ab eo duæ lineæ trahendæ sunt in diuersas partes, idest ad oppositas, vt sunt C D, & C E. Modò inquit. *Si hæ lineæ angulos, qui ex eorum tractione nascuntur, æquales duobus rectis fuerint, necessariò erunt in directum, & vnicam lineam rectam continuabunt.* Hęc verò propositio conuertit superiorem, ibi enim probatum est ex rectis lineis nascentes angulos debere esse æquales duobus rectis, hic probatur lineas *rectas*, & *in directum positas* fore; si angulos, quos hinc, inde faciunt, cum lineâ, super quam cadunt, duobus rectis æquales fecerint.

Probatur. Nam si anguli, quos super lineas C E, & C D facit C A duobus rectis sunt æquales; sicut & illi, quos B C efficit; & tamen D C, & C E in directum nõ sunt. Linea D C



prolungata non coincidet, nec super lineam C E incedet: Sed vel suprà, vel infrà. Cadat V. g. suprà, & sit D C I recta, prout inquiunt aduersarij. Itaque C A suprà D C I cadens, vtpote super rectam, angulos nigerrimum D C A, & album A C I duobus rectis æquales efficiet ex precedẽti Prop.

Verùm

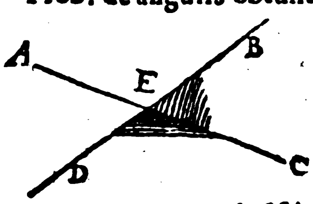
Verùm id præsuponimus, & facere AC insistens super DC, & CE. Quamobrem, cùm, ex 12. pronun. omnes recti sint æquales, emergit; vt tum anguli facti ab AC insistente super lineam ACI, quam volunt aduer. etiam rectam, quales sunt negerrimus, & albus, quàm anguli affecti ab eadem AC cadente, & insistente super DC, & CE, quales sunt niger cum albo, & nigerrimus, inuicem esse æquales; vtpote omnes duobus rectis æquales; Si itaque auferas DCA nigerrimum ab vtrisque, remanerent æquales albus tantùm, cum albo, & nigro simul sumptis, nempe pars toti, quod esse non potest. Ast si dicas infra cadere lineam prolungatam DC, eodem argumento perurgeris: vnde oportebit confiteri; quòd *cadet in directum* DC *ipsi* CE, *& quòd eadem in vnicam lineam dirigantur*.

THEOR. III. PROP. XII. Euc. 15.

Si duæ rectæ lineæ se mutuò secuerint; angulos ad verticem æquales inter se efficient.

PRo angulis ad verticem intelligit eos, qui iuxta intersectionem sibi oppositi sunt; vt est in duobus lineis se intersecantibus AC, & BD, angulus nigerrimus, & albus E.

Prob. de angulis obtusis primò ex Propos. 10. Cùm linea BE insistat super lineam AC, faciet angulos suos, nempe album E, & nigrum duobus rectis æquales: Rursus; quia recta CE insistit super rectam BD faciet item ex eadem 10. Propositione angulum nigrum, atque nigerrimum æquales duobus rectis: Omnes verò recti sunt inuicem æquales, ex 12. pronunc. Vnde, & duo albus E, & niger anguli, duobus nigro eidem, & nigerrimo æqualitate commensurabuntur. Aufer itaque angulum nigrum vtrisque coniunctum, & annexum, quia idem ab vtrisque abstulisti; ex 3. pronunc. *Angulus albus* apud E, & *nigerrimus, aquales remanebũt*.



Simili argumenti specie de angulis acutis veteris, qui sunt niger, & albus oppositus, cum etenim AE recta insistat rectæ BD; faciet ex propos. 10. cit. angulos duobus rectis æquales; nempe obtusum album E, & acutum album: Quòd & præstabit BE cadens super AC: Quapropter angulus niger acutus cum albo obtuso E, sicut & angulus albus acutus cum albo obtuso E, erunt æquales, vtpote duobus rectis æquales. Auferatur communis obtusus albus E; remanebuntque albus, & niger acuti æquales.

COROLLARIVM I.

EX sententia Procli colligit primo Euclides: *Lineas se secantes facere quatuor angulos, quatuor rectis æquales*; nam in demonstratione ostensum est, nigrum, & album E esse duobus rectis æquales; sicut & nigerrimum cum albo acuto.

COROLLARIVM II.

ET hinc colligitur secundo, *Omnes quotcumque angulos, qui circa aliquod punctum fieri possint tantùm esse quatuor rectis æquales*. Namque si multiplicas rectas ad punctum E terminantes, nihil aliud efficies, quàm diuidere in multas partes quatuor angulos dictos ad E constitutos, quæ omnes simul sumptę totis suis adęquantur; Cùmque illi angulis quatuor rectis sint æquales; hinc est, vt omnes quotcunque anguli circa aliquod punctum consistentes quatuor solùm rectis sint æquales. Quare & omne spatium circa aliquod punctum consistens non, nisi quatuor rectis angulis, poterit æquiualere.

EXPENSIO IV.

De proprietatibus Triangulorum.

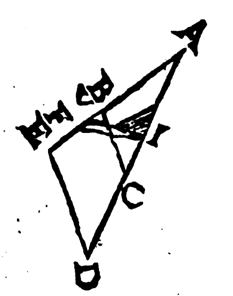
TRiangula possunt, aut considerari in se, aut considerari quatenus comparantur cum alijs. Primò agemus de triangulis in semet consideratis.

THEOR. I. PROP. XIII.

Si sit triangulum ita dissectum; vt crus, cruri, & alterum crus, alteri sit æquale; angulus quoq; ab illis cruribus clausus angulo sit æqualis. Basis quoq; erit basi æqualis, & totum triangulum toti.

SIt triangulum EAD lineis sectum; ita quòd crus BA sit æquale cruri AI, & crus BC cruri FI, anguli verò ad B, & I æquales. *Dico Basim* AF *basi* AC, *& triangula per sectionem facta inuicem esse æqualia*.

Probatur. Nam, si basis basi non est æqualis, sit maior AF, quę, vt esset ęquales, deberet esse V. g. VA: Tunc quęro, ductâ rectâ VI; an hęc sit æqualis cruri BC; Si non est æqualis, est contra hypothesim. Si verò est æqualis VI crus cruri BC, iam habemus triangulũ VAI, quod habet vnum crus VI, cruri BC æquale, & alterum BA alteri AI, basimque VA basi AC æqualem. Quare ex Coroll. Propos. 3. totum triangulum toti erit æquale, & angulus ad I niger erit æqualis angulo apud B; Et ideò angulo sibi æquali AIB seminigro, quod esse nequit; Cùm niger sit eius pars, & ille IAF totum, & idem contexes argumentum, si crus AF sit maius; Nam AC erit minus, & eadem operatio, & demonstratio valebit.



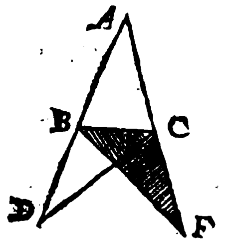
THEOR. II. PROP. XIV. Euc. 5.

Anguli Isoscelium triangulorum, qui sunt super basim, sunt inuicem æquales, & productis cruribus, anguli infra basim sunt etiam inuicem æquales.

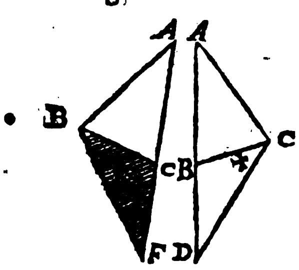
SI Triangulum duorum æqualium crurum ABC, & ea duo crura producatur AB in D, & AC in F, & ex Propos. 5. BD, & CF portiones adiunctę fiant inuicem ęquales; & rectâ BF coniungantur puncta B, & F, sicut lineâ DC puncta D, & C.

D, &c. *Dico angulos super basim* B C *apud* B, *& C esse inuicem æquales; & angulos infra basim, vt seminiger ad* B, *& niger ad* C *esse quoq; inuicē æquales.*

Probat. secunda pars, & considerentur D A C, & D C A; tanquam duo triangula; quæ vt tali ratione cogitarentur fecimus separata, replicando in ipsis triangulum idem Isoscelum B A C. Quoniam itaq; anguli ad A in triangulo seminigro, & albo sunt æqualia, & crus vnum B A vni A C ex hypothesi alterum A F ex effectione alteri A D est æquale; Ergo ex præced. B F basis basi D C erit æqualis; & totum triangulum seminigrum toti albo erit æquale.



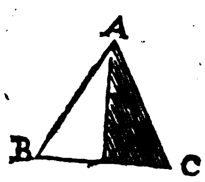
Progr. 2. Deme. B A C triangulum ab vtrisq; & quod residuum est æqualium, triāgulorum nigrum albo B D C erit æquale: *Quare, & angulus niger ad* C, *& semialbus* D B C *erunt æquales, qui sunt infra basim anguli.*



Prob. 1. pars. Quia triangulum A C D triangulo B A F est æquale ex 1. parte probat. erit angulus apud B totus angulo apud C toti æquale. Et eadem ratione pars nigra apud B parti C cruce signatę erit æqualis; quòd triangulum nigrum sit ęquale albo B C D. Ablatis ergo partibus æqualibus angulorum nigra, & C cruce signatâ ab angulis totis æqualibus; *ex post.* 1. *remanebunt æquales anguli supra basim* residui apud B, & C; nimirum C B A, & A C B, quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

Hinc emergit triangulum æquilaterum habere omnes angulos ęquales. Prob. Nam cū duo crura A B, & A C sint ęqualia, anguli supra basim C niger, B albus erunt ęquales ex pręced. Sic quia duo crura A C, & C B sunt ęqualia angulus seminiger apud A, & albus B erunt ęquales. Duo itaque anguli seminiger A, & niger C vni tertio B sunt ęquales; Ergo ex Pron. 1. sūt ęquales inuicem.



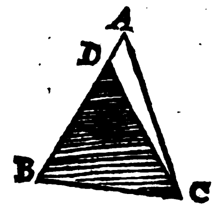
THEOR. III. PROP. XV. Euc. 6.

Si in triangulo duo anguli æquales inter se fuerint; & sub æqualibus angulis subtensa latera æqualia inter se erunt.

Licet hoc Theorema faciliter possit colligi ab antecedenti; cùm sit conuersa eiusdem propositio nihilominus, quia aliquę sunt propositiones, quę conuerti nequeunt, ex logicis: Ponendo prędicatum loco subiecti; eo quòd prędicatum sit minus vniuersale subiecto; vt hęc *omnis homo est animal*, conuerti nequit, & dici, *omne animal est homo.* Cùm animal magis pateat. quam prędicatum hominis; sed dici debet, *aliquod animal est homo.* Ideò consueuere Mathematici etiam conuersas propositiones ostendere, vt demonstrent illas propositiones conuerti seruata quantitate, & qualitate earum; nimirum esse affirmatiuas, & eodem pacto vniuersales, cōuersę ß vt priùs erant; quòd euenit in ista propositione.

Dicit itaque Euclides, quod si sit triangulum B A C, cuius duo anguli sint ęquales B niger, & C semialbus; *quod latera subtensa* A B *seminigro, &* A C *nigro æqualia inter se erunt.*

Quod si aliquis neget; Ponatur; quod B A sit crus maius, quam A C, & ideò quod ad hoc, vt sit ęquale debeat esse B D.



Probatur itaque, quia B D est ęquale cruri A C ex aduersarijs: Crus verò B C est commune, & angulus B niger, communis quoque, tàm triangulo nigro minori, quàm seminigro maiori: Ex prop. 13. erunt triāgulū nigrū B C D, & seminiger B C A æqualia; pars nigra toti B C A, quod esse nequit.

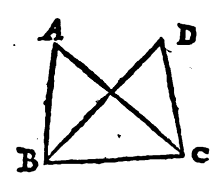
COROLLARIVM.

Sequitur ex hac propositione omne triāgulum æquiangulum esse quoq; æquilaterum; quòd est conuersum pręcedentis Corollarij, cùm enim anguli B albus in fig. pręced. Coroll. & C niger sint æquales, latera A B, & A C erunt æqualia: Item, cùm angulus A seminiger, & angulus B albus sint æquales, etiam latera A B, & B C erunt æqualia: Quare omnia latera erunt æqualia.

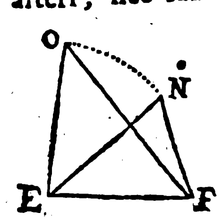
THEOR. IV. PROP. XVI. Euc. 7.

A basis alicuius trianguli termino cruri discedenti æqualis linea, & ab altero extremo alteri cruri alia linea æqualis non discedet, quæ terminet ad aliud punctum; quàm ad verticem prioris trianguli: dummodo versus eandem partem lineæ ducantur, in quam crura conueniunt.

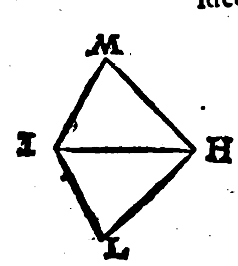
Multę requiruntur conditiones ad hoc, vt Theorema verificetur; Primò, quod linea æqualis cruri exeat ab eodem extremo basis; ideoque C A, & B D sunt æquales; Sed non exeunt ab eodem puncto C, quod requirit propositio, & ideò de eis non loquitur.



Secundò, quòd, tum hæc linea sit ęqualis vni cruri, tum altera æqualis alteri; nec sufficit æqualitas vnius cruris cum vna linea, & vt E O, & E N sint æquales, & F O, & F N inęquales, & ideò de istis non est sermo.



Tertiò requirit, quòd ducantur versùs easdem partes; Et ideò licet I M, & I L sint æquales, & H M, & H L; quia tamen ducuntur ad duas partes oppositas M, & L. Ideò nec de istis loquitur propositio.

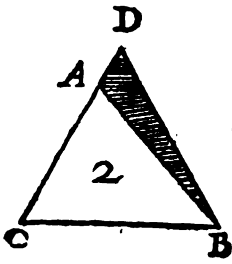


Multos verò habet casus, hæc propositio secundùm quòd punctum hoc prope verticem trianguli, in quod conueniunt collocatur.

Casus

Casus 1. Si ergo duę lineę dicantur conuenire, & non in verticem trianguli; quarum quęque suo cruri, à cuius extremo discedit, ęquetur. Sit illud punctum assignatum D, pro primo casu, ita vt linea DC à puncto C discedens super crus CA ducatur, & perueniat ad D cū alterâ BD æqualis alteri cruri BA. extra triangulum CAB. Sed hoc euidenter implicantiam inuoluit, & falsum est. Nam linea CD esset maior, quàm crus CA contra hypothesim.

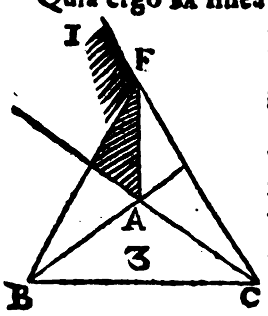
Casus 2. Idem erit. Si punctum cadat in latere



aliquo, V.g. CD in fig. 2. Nempe, quòd linea BA ęqualis cruri BD, & linea CA discedens ab C, & super crus CD ducta conueniant in A infra verticem trianguli D; Et hoc etiā extra hypothesim; quia linea CA ęsset minor; quàm CD.

Casus 3. Si punctum hoc concursus ponatur intra triangulum in A; vt in 3. fig. Et tunc ostendetur propositio, ex propos. 14. Productâ enim linea AC, & crure CF ducatur recta AF; Et habebimus duo triangula; ex aduersarijs æquicrura CAF, & BAF.

Quia ergo BA linea cruri BF ex aduersarijs æ-



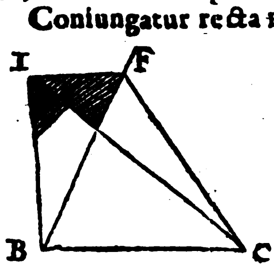
quatur; erunt anguli super basim AF; nempe A seminiger, & niger F æquales in triangulo BFA. Angulus verò F est pars anguli IFA infra basim AF trianguli alterius AFC, & AFI totum. Ideoque angulus seminiger A, toto illo IFA minor erit, & pars ipsius nigra ad A multò minor angulo eodem IFA infra basim trianguli ACF existenti.

Pars verò ista nigra anguli ad A est infra basim AF trianguli ACF. Sunt ergo duo anguli infra basim apud A, niger A, & IFA inæquales. Sed rursum sunt æquales ex propos. 14. quia linea AC ex aduersarijs est ęqualis cruri CF. Ergo essent æquales, & inęquales anguli infra basim, quòd esse nequit.

Casus 4. Quod si punctum concursus ponatur extra triangulum sit illud in F. Et productis cruribus trianguli BAC, & ducta AF, & producta CI idem contexes argumentum.

Casus 5. Est. Si punctum concursus cadat extra triangulum in I assignatum ab aduersarijs tali modo; vt altera linearum posteriùs ductarum secet aliquam ex primo ductis; V. g. secet lineam BF, & excurrat in punctum I.

Coniungatur recta FI, eritque factum trian-



gulum CIF; cuius duo anguli supra basim debebunt esse æquales; nempe angulus I niger, & angulus F seminiger ex propos. 14. quòd linea CI ab aduersarijs dicatur æqualis cruri CF. Quare pars nigra anguli seminigri apud F erit minor angulo nigro CIF, & multò minor addita ei parte nigerrima, vt fiat angulus BIF: Sed angulus niger F, & totus BIF niger sunt quoque æquales; quòd sint anguli ad basim in altero triangulo BIF, cuius linea BI ex aduersarijs æquatur cruri BF; & ideò ex pr. 14. sint æquales. Ergo æquales, & inæquales, quod esse nequit. Quare nullibi punctum concursus linearum postremò ductarum potest cadere; nisi in verticem trianguli, igitur vera propositio.

THEOR. IV. PROP. XVII. Euc. 32.

Cuiuscumque trianguli tres interni anguli duobus sunt rectis æquales.

Et vno crure producto, externus angulus duobus internis, & oppositis est æqualis.

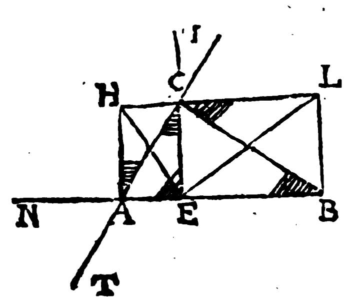
SI triangulum ABC. Volo primum ostendere angulum ad A album, C seminigrum, & B nigrum omnes internos esse æquales duobus rectis; Quòd vt ostendatur.

Progressus 1. Ducatur perpendicularis à puncto C ad basim AB ex propos. 10. & sit EC. Producto deinde AC in T, & I detruncetur ex propos. 5. CI æqualis AE, & AT æqualis EC; Et ex propos. 2. constituatur triangulum AHC; quod erit æquale ex Coroll. prop. 3. triangulo AEC; Ideoq; ad H angulus CH, & HA clausus erit æqualis angulo recto nigro apud E. Ducatur deinde HE; Eritque rursus triangulum HCE æquale triangulo HAE ex prop. 3. quod sit super eandem basim HE, & inter crura vnum HC vni AE, & alterum CE alteri HA æqualia ex effectione; Sed hæc duo componunt totum AHCE. Quòd priùs erat. Ergo ambo simul æqualia triangulis ACE; & AHC; quæ priùs erant; Sed illa erant æqualia inter se, & ideò dimidia eiusdem totius: Sed hęc etiam sunt æqualia inter se, & dimidia eiusdem totius; Ergo æqualia cum primis. Vnde HCE erit ęquale triangulo AEC, & angulus C in ipso seminiger, angulo E nigro, & recto. Sic dicas de angulo seminigro apud A, quòd erit æqualis angulo H albo, vel E nigro rectis. Vnde recti erunt angulus HAE, & HCE.

Eodem modo procedemus in constituendo triangulo CLB; & eodem pacto argumentabimur, ostendendo angulum C, & B semialbos in triangulo ECL, & EBL esse rectos angulos.

Prog. 2. Quo posito. Sic prima pars propositionis prob. In parte ACE; quę prima consideratur. Angulus apud A niger est æqualis angulo apud C nigro, & albus apud C albo apud A ex propos. 3. Coroll. eo quod æquis cruribus insistant. Quare interni trianguli niger apud C, simul cum albo apud A, sunt æquales toti semialbo EAH, nempe angulo recto.

Prog. 2. Iterum in spatio ECB angulus niger



apud B, & niger apud C; vtpote æqualibus cruribus insistentes EC, & BL ęquales sunt. Item albus B, & albus apud C æquales; Ergo albus apud C, & niger apud B angulo recto EBL, vel ECL erunt ęquales. Cum ergo in triangulo ACB anguli ACB nigra pars, cum angulo A sit recto æqualis ex primo prog. & in angulo item C pars alba, cum nigra apud B sit recto æqualis, qui in triangulo ACB sunt interni anguli. Patet, quod omnes anguli interni trianguli ACB duobus rectis erunt æquales.

Prob. pars 2. Et producatur latus aliquod, V.g. NA. Quia angulus EAH semialbus rectus est, erit

erit quoque angulus NAH rectus; & ideò angulus externus NAC, & internus CAE erũt æquales duobus rectis ex propoſ.10. & propterea tribus internis angulis trianguli CAB. Tolle internum communem album apud A: remanebit itaque ſolus angulus externus NAC ęqualis duobus internis, & oppoſitis ſeminigro apud C, & nigro apud B.

Hincque eſt quadrangulum quodlibet habere angulos quatuor ſuos quatuor rectis æquales: Cum enim CHAB in duo triangula diuidatur, & quodlibet triangulum ſuis angulis duos rectos angulos æquet; patet omnibus angulis ſuis quadrangulum quatuor rectos æquare.

COROLLARIVM I.

HInc eſt primo, quod angulus externus maior ſit: quàm quilibet oppoſitus, & internus ſeorſim ſumptus; quia duobus internis, & oppoſitis eſt æqualis; quod oſtendit Eucl. propoſ. 16. primi, alia ratione ſatis difficili.

COROLLARIVM II.

SEcundò deducitur cuiuſcumq; trianguli tres angulos ſimul ſumptos æquales eſſe tribus angulis ſimul ſumptis alterius: Quia tum hi, tum illi ſunt æquales duobus rectis. Deduciturque etiam, quòd, ſi duo anguli vnius erunt æquales duobus angulis alterius trianguli; quòd reliquus angulus reliquo erit æqualis, & æquiangulum erit triangulum alteri quoad omnes angulos.

COROLLARIVM III.

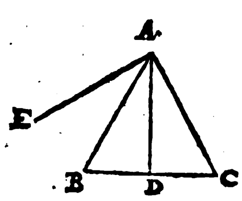
COnſtat etiam in omni triangulo Iſoſcele, cuius angulus lateribus æqualibus comprehenſus, fuerit rectus, quemlibet reliquorum eſſe ſemirectum; cùm omnes tres ſint æquales duobus rectis, & tertius ex ipſis ponatur rectus. Quare, cùm duo reliqui inter ſe ſint æquales, ex prop. 14. erit quilibet eorum ſemirectus. At ſi angulus cruribus comprehenſus fuerit maior recto, nempe obtuſus, qui ad baſim ſunt, erunt minus, quàm ſemirecti; Si verò minor recto, ideſt acutus, reliqui erunt magis, quàm ſemirecti.

COROLLARIVM IV.

PErſpicuum quoque fit. Quemuis angulum trianguli æquilateri eſſe duas tertias partes anguli recti, vel tertiam partem duorum rectorum. Quia omnes tres inter ſe æquales, exęquant duos rectos.

COROLLARIVM V.

FIt etiam manifeſtum. Quòd ſi ab vno angulo A trianguli æquilateri BAC perpendicularis AD ad latus oppoſitum BC ducatur, conſtitui duo triangula Scalena ADC, & BDA; quorum cuiuſlibet angulus ad D rectus erit duo B, & C quiſque duas tertias anguli recti; reliquorum verò ad A; vtpote partes æquales vnius anguli in æquilatero vnam partem tertiam anguli recti quiſque continebit. Quamobrem ſi ſuper latus AC perpendicularis ab A eleuetur EA ex propoſ.9. habebis angulum rectum inter crura EA, & AC diuiſum in tres partes æquales, vt ſunt EAB, & BAD, & DAC anguli.



COROLLARIVM VI.

CViuſcumque trianguli duos angulos duobus rectis eſſe minores omnifariam ſumptos; Quia tres duobus rectis ſunt æquales. Ergo duo tantùm erunt minores.

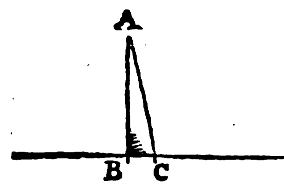
COROLLARIVM VII.

COlligitur quoque angulum externum ſuperare hunc, ſiue illum internorum reliquo angulo oppoſito. V.g. NAC externum in fig. prop. ſuperare oppoſitum internum ACB tantùm, quantùm eſt angulus B niger. Et etiam, quod duo anguli interni cuiuſcumque trianguli deficiunt à duobus rectis reliquo angulo interno.

COROLLARIVM VIII.

HInc etiam manifeſtum eſt ex Proclo. Ab eodem puncto ad eandem rectam non poſſe deduci plures lineas perpendiculares, quã vnam.

Quod ſi fieri poteſt ducatur ex A puncto ad rectam BC duæ perpendiculares; nempe AB, & AC, facientque triangulum ABC; In quo, quia AB eſt perpendicularis faciet angulum B internum nigrum rectum: Rurſuſque, quia AC perpendicularis præſupponitur, faciet angulum C album internum rectum; quòd militat contra præced. prop. in qua oſtenſum eſt, angulos duos internos cuiuſcumque trianguli eſſe duobus rectis minores; cùm tres ſint æquales duobus rectis.

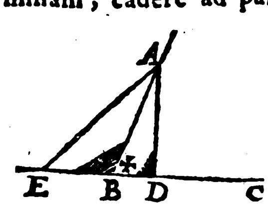


COROLLARIVM IX.

SEquitur quoque ex præc. propoſ. omnia triangula habentia vnum angulum rectum, vel obtuſum reliquos obtinere acutos: cùm enim duo anguli interni ſint duobus rectis minores, ſequitur; vt ſi vnus ſit rectus, aut obtuſus, nempe maior recto; quod reliqui ſint recto multò minores, nempe acuti; namque ſi reliqui, vel vnus eorum eſſet æqualis recto, vel maior, iam haberemus contra pręced. propoſ. duos angulos in triangulo duobus rectis, aut maiores, aut æquales, ſequitur quoque, quod vnus ſit alterius complementum cum ambo vni recto ſint æquales ſi tertius ſit rectus.

COROLLARIVM X.

SEquitur quoque, quod ſi linea recta cum aliâ rectâ angulos faciat hinc, inde, obtuſum vnum, alterum acutum, lineam perpendicularem à quouis eius puncto ad aliam rectam demiſſam, cadere ad partes anguli acuti. Faciat enim linea A B recta cum rectâ conſimili DB angulum, nigrum quidem obtuſum, album verò cruce notatum, acutum, & à puncto A demittatur perpendicularis AD. Cadet vtique ad partem anguli acuti albi cruce inſigniti; nam ſi caderet ad aliam partem anguli obtuſi nigri, vt facit linea altera AE; iam duo anguli interni eſſent duobus rectis maiores; nempe,



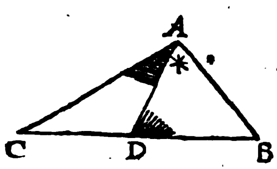
nempe, quia vnus, quem perpendicularis efficere, esset rectus, alius verò, vt niger esset obtusus ad B contra positam propositionem. Itaque si perpendicularis rectum angulum internum nigerrimum efficit ad D, alius debebit esse acutus, vt est albus cruce notatus B; sic enim positi simul minores erunt duobus rectis, vt oportet esse duos angulos internos.

THEOR. XI. PROP. XVIII. Euc. 15.

Omnis trianguli maius latus maiorem angulum subtendit.

MVltâ declaratione non indiget propositio, cùm clarum sit, dici illud latus angulum aliquem subtendere, quod è regione illius est, & coniungit duo latera angulum illum comprehendentis; ita C B subtendit angulum A constantē medietate nigrâ, & albâ; quia è regione eius est, & copulat duo latera A C, & AB, quę illum angulum nigrum, & album A comprehendunt. Igitur ponatur, triangulum A C B habere latus C B maius alijs, *dicit, & angulum A nigrum, albumq; esse alijs maiorem*; nempe angulo C, aut angulo B. Et priùs probat de angulo C, & ad id pręstandum ex docum. 3. propos. detruncetur latus in D tali modo; vt recta B D æqualis sit lateri B A; ducaturque recta A D.

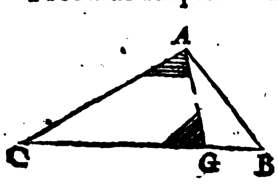
Probatur. Quia A B est æqualis B D, anguli ad basim A D, vt pote trianguli Isoscelis, quales sunt ad D nigerrimus, & ad A albus stellula notatus erunt inuicem æquales ex 14. prop.



Sed angulus nigerrimus ad D ex Coroll. 1. prop. 17. vtpote externus trianguli A D C est maior Interno, & opposito C: Quamobrem, & angulus albus A stellula notatus; cùm sit æqualis nigerrimo ad D; erit maior angulo C; Sed iste est pars totius anguli A albo, nigroque constantis; Ergo iste angulus niger, albusque maior est angulo C.

Sed, vt probetur, angulum A esse quoque maiorem angulo B, replicetur idem triangulum, & à C B latere maiori detrũcetur æqualis lateri C A sitque C G, trahaturque A G: eodemq; genere argumenti ostendetur, angulum nigrum, albumque A esse maiorem angulo B.

Probatur itaque. Nam angulus niger A, nigerrimusque G sunt æquales ex propos. 14. eo quod triãgulum A C G Isosceles sit. Vnde & anguli ad basim, quales sunt nigerrimus G, nigerque A, sunt æquales.



Sed angulus nigerrimus externus respectu trianguli A G B est maior opposito, & interno B. Quare etiam niger A æqualis nigerrimo G maior erit ipso angulo B: Sed angulus niger A est pars anguli A nigri albique totius trianguli A C B: Ergo erit multò maior angulo B. *Et ecce tibi ostensum angulum A, album nigrumque esse maiorē alijs angulis, cui maius latus* B C *subtensum est*.

COROLLARIVM.

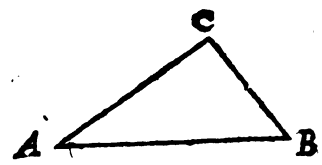
SEquitur hinc omnes tres angulos trianguli Scaleni esse inæquales. Triangulum enim Scalenum est illud, quod habet tria latera inæqualia, vt est suprapositum A C B. Si autem maius latus maiorem angulum subtendit sequitur, vt angulus A sit maior reliquis C, vel B. Iterumq; quia latus A C est maius, quàm A B, erit quoque maior angulus B angulo C: Vnde omnes erunt inæquales, maximus quidem A, minor verò B, minimus tandem C.

THEOR. XII. PROP. XIX. Euc. 19.

Omnis trianguli maior angulus maiori lateri subtenditur.

PRopositio conuertit pręcedentem; Tunc autem angulus maiori lateri subtenditur, cùm è regione illius est, & super eo aperitur; ita vt ei maius latus deseruiat pro basi, eiusque latera nectat. Sit itaque triangulum A B C, cuius angulus maior C subtensus sit lateri A B, *dicit latus* A B *necessariò omnibus alijs debere esse maius*.

Prob. Nam si A B non est maius, aut latus A C, aut latus C B ei, aut æquales erunt, aut eo maiora: Hoc verò esse non potest; & primò ostendemus id de latere A C, quòd sit, licet, nec æquale lateri A B, nec eo maius esse possit.



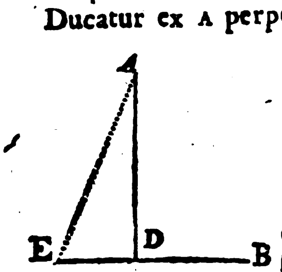
Nam si dicatur æquale etiam angulus B cui subtenditur, erit æqualis angulo C ex demonstratis in pręcedenti propositione, in quâ ostendimus *latus maius, maiorem angulum subtendere*, & per consequens æquale, æqualem. Iam verò in hypothesi, & propos. supposuimus angulum C omnibus alijs esse maiorem. Quòd si dicas latus A C esse maius latere A B; tantò magis vrgebit argumentum. Nam angulus B consequenter erit maior angulo C, ex 18. propos. eo quod pręsumas A C latus subtensum esse maius; & tamen in hypothesi supponimus non angulum B, sed C esse maiorem.

Sed modo probemus latus A C esse quoque maius latere C B, & eodem modo argumentandi vtemur. Nam si C B non est minus, sequetur vel esse maius, vel esse æquale. Sed posito B C latere maiori, vel æquali, angulus A, cui subtenditur, ex propos. antec. erit quoque angulo C, aut maior, aut æqualis contra pręsuppositum, & hypothesim. *Maior itaque angulus in sua apertione maiorem lineam requirit; cui subtendatur, & è regione sit.*

COROLLARIVM.

SEquitur ex hac propositione lineam perpendicularem esse breuissimam inter omnes, quę à dato puncto ad subiectam lineam deducuntur.

Ducatur ex A perpendicularis, quæ vnica, (vt ex Prop. 17. Coroll. 8 cum Proclo deduximus) esse potest; & postmodum aliæ ab eodem puncto descendant super E B. Breuissima omnium perpendicularis erit A D: Nam si statuatur, aliam esse, V. g. A E. In triangulo itaque A D E, cum angulus D sit rectus, alius E erit acutus, cùm duo anguli in nullo triãgulo possint esse duobus rectis æquales,



ex Coroll. 6. Propos. 17. Quare ex hac Prop. 19. cùm angulus rectus D sit maior, quàm E, obtinebit quoque latus, cui subtenditur, nempe AE maius, quàm latus, cui subtenditur angulus E acutus, quod latus est perpendicularis AD: Ergo hęc perpédicularis minor est crure EA: quòd semper eodem pacto concludes positis alijs, alijsque lineis ab A cadentibus super BB, vt manifestum est.

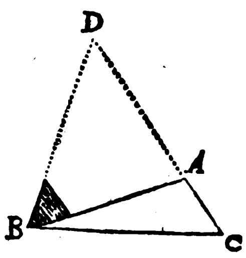
THEOR. XIII. PROP. XX. Euc. 20.

Omnis trianguli duo latera reliquo sunt maiora quomodocumque sumpta.

DIcit, quod si sumãtur simul *duo latera* trianguli cuiuscumque; siue hęc, siue illa assumas, vt tibi placet, *comparata cum reliquo semper esse eo maiora.*

Ad quod ostendendum Euclides facit triangulum quodcumque ABC: Prolungatque vnum ex lateribus, quod libuerit, V.g. AC in D, & quod ex documentis 6. propos. perficit, AD æqualem facit lineę AB, coniungitque rectã DB: Ita quod triangulum constituatur ADB duo latera habens æqualia AB, & AD.

Probatur. Nam cùm in triangulo ABD duo latera ex constructione constituta sint æqualia; nempe BA, & DA sit (vt ex probatis in 14. proposit. constat) quòd anguli B niger, & D sint æquales, vt sunt in Isoscelibus anguli super basim: Quamobrem, cùm B niger angulus sit pars anguli nigri, albique B, trianguli DBC, fiet, vt angulus B niger albusque sua parte nigra maior, erit quoque maior angulo D, huic parti nigrę æquali. Hinc verò enascetur, quod latus DC, vtpote oppositum maiori angulo B albo, nigroque, erit maius, quàm latus BC oppositum minori angulo D (vt ex probatis in anteced. prop. constat) at tota DC est æqualis duobus lateribus trianguli ABC, nempe, quod pars CA sit vnum latus, & pars AD ex cõstructione sit æqualis lateri AB. Quamobrem si tota DC est maior latere BC, etiam maius erit latus BA, & AC eodem latere BC. Et eodem modo argumentum contexes de quibuscunque alijs duobus lateribus respectu tertij reliqui. *Quapropter omnis trianguli duo latera reliquo erunt maiora*, &c.



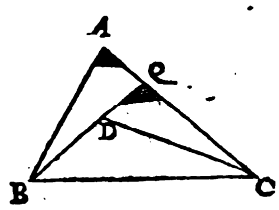
THEOR. XIV. PROP. XXI. Euc. 21.

Si super trianguli vno latere ab extremitatibus duæ rectæ lineæ interiùs constitutæ fuerint: Hæ constitutæ reliquis trianguli duobus lateribus minores quidem erunt; maiorem verò angulum continebunt.

DVas partes hęc propositio habet. Prima, quę depẽdet in Probatione ab anteced. dicit. Quod si ab extremitatibus vnius lateris, puta BC duę lineę ducantur in angulum D intra triãgulum ABC cõuenientes. *Illæ erunt minores exterioribus lateribus AB, & AC.* Dicit autem ab extremitatibus vnius lateris esse trahẽdas prędictas lineas interiores, quia potest esse, si trahatur à medio BC vna earum (vt in triangulo, rectangulo, vel amblygonio) quod lineę interiores simul sumptę, sint maiores, vt prob. Proclus. Secunda verò pars est, quæ in Coroll. 6. prop. 14. fundatur; quod angulus D, quem conuenientes in apice lineę ab extremitatibus lateris vnius BC protractę, efficiunt, erit maior angulo exterioribus comprehenso, vt est angulus A in triangulo ABC. Debent autem, & hic lineę protrahi ab extremitatibus; quia angulus tunc, quem constituunt lineę non ab extremis ductę, sed ab intermedijs partibus, vt idem Proclus ostendit, potest esse maior, aut æqualis angulo exterioribus cruribus effecto.

Ad ostendendũ verò id, quod propositio proponit. Altera earum, V.g. BD continuanda est, vsque ad latus alterum ad Q. Quo facto: ita primum assertum in propositione ostendetur.

Quoniam ex propos. antecedenti duo latera AB, & AQ trianguli BAQ maiora sunt latere BQ. Si addamus vtrisque latus QC remanebunt latera BA, & AQ cum QC adhuc maiora; quàm duo BQ, & QC. Rursus. Si vertamus considerationem ad aliud triangulum DQC ex eadem propos. anteced. concludemus duo latera DQ, & QC esse maiora latere DC, & si addamus huic DC sicut, & duobus DQ, & QC, latus DB: Maiora adhuc erunt hęc duo DQ, & QC cum addito DB; quàm DC, cum addito eodem BD. Modò reasumamus id, quod probatum est primò, nempe duo latera BA, & AC esse maiora, quàm BQ, & QC. Quod si verum est; cùm & BQ, & QC sint maiora, quàm BD, & DC sequitur illa, nempe BA, & AC esse latera multò maiora: *Nempe externa, internis ab eisdem extremitatibus ductis.*



Secunda verò pars ostenditur quoque: Nimirum, quòd sit maior angulus D, quàm angulus A. Nam angulus niger Q externus respectu triãguli ABQ est maior; quàm eius internus niger A sibi oppositus: sed angulus D externus respectu alterius trianguli DQC, est maior interno, & opposito nigro Q in eodem triangulo DQC; *Ergo angulus D erit multò maior, quàm angulus niger A, siquidem superat nigrum Q superantem nigerrimum A.*

EXPENSIO V.

De comparatione triangulorum ad inuicem.

COmparantur hic triangula prout, aut lateribus, aut angulis talibus constant, propter quę euadant æqualia (Nam infra, vt partes parallelogrammorum comparationem quoque subibunt) & demonstratur quod datis aliquibus lateribus, aut angulis æqualibus, sequitur deinde, totum triangulum toti esse æquale.

THEOR.

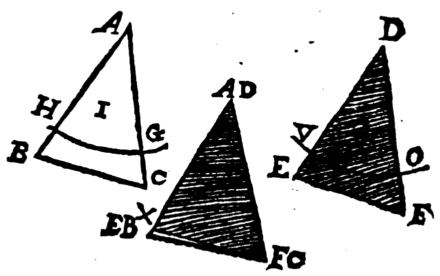
THEOR. I. PROP. XXII. Euc.4.

Si duo triangula habent crus vnum vni, & alterum alteri æquale, & angulum ijs comprehensum æqualem; basim quoq; habebunt æqualem.

Et totum triangulum toti erit æquale.

SIt triangulũ D E F nigrum, cuius angulus niger D sit æqualis albo A trianguli B A C crusque vnum E D vni A B, alterum D F alteri A C sit æquale. *Dicit, quòd basis* E F *quoque basi* B C *erit æqualis; & totum triangulum toti albo æquabitur.*

Probat Euclides superpositione. Nam si intelligantur vnum alteri superponi, vt E B, A D, F C, trianguli angulus D angulo A congruet, & fiet vnus angulus A D, crus verò vnum D E æquale vni A B congruet quoque, & in idem punctum finiet in E B; Sic & alterũ latus D F alteri A C æquale finiet in idem punctum F C. Ergo basis, tum vnius, tum alterius in eadem duo puncta E B, & F C, finiet. Ergo ex 10. Axiomate erit eadem linea; Quia duę lineę in eadem puncta terminantes latitudinem non faciunt, qualis esset, si terminaret altera ex ipsis ad x.



THEOR. II. PROP. XXIII. Euc.8.

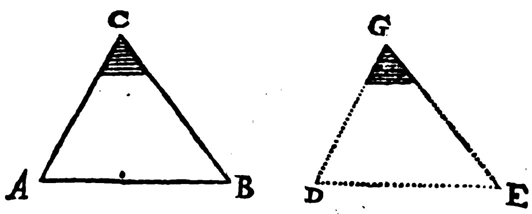
Si duo triangula, dua latera, duobus lateribus æqualia habuerint, vnum vni, alterum alteri; habuerint verò & basim basi æqualem. Angulum quoque sub æqualibus rectis lineis contentum angulo æqualem habebunt; Totumque triangulum toti æquale erit.

HÆc propositio conuertit antecedentem. Nam ibi ab æqualitate vnius anguli, & duorum crurum conclusimus æqualitatem basis, & ideò totius trianguli, hîc ab æqualitate basis, & duorum crurum concludimus æqualitatẽ anguli.

Sit itaque datum triangulum, cuius basis A B basi D E alterius, & crus vnum A C vni D G, alterum B C alteri G E sit æquale. *Dico angulum* C *nigrum nigro* G *esse æqualẽ* lateribus A C, & D æqualibus, atque C B, & G E item æqualibus contentos.

Probatur basis æqualis A B basi ęquali D E superponatur; Tunc ab eodem puncto extremo basis D, & etiam A duo latera exient æqualia D G, & superpositum A C. Sic à puncto E, idemque B duo crura æqualia prodibunt versùs easdem partes f. crus E G, & superpositum B C. Ergo ex prop. 16. in idem punctum terminabunt C, & C erit idem, ac G. Ergo eundem angulum constituent; & ideò totum triangulum toti erit æquale.

Possent autem hæ duę propositiones colligi ex dictis: hęc ex Coroll. propos. 3. illa ex propos. 4. Verùm euidentiùs, & vniuersaliùs hic rem concludimus.



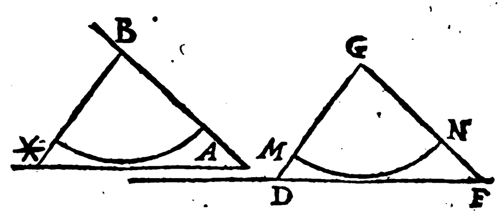
PROB. I. PROP. XXIV. Euc.23.

Ad datam rectam lineam; datumque in ea punctum constituere æqualem angulum, atque etiam triangulum alicui dato angulo rectilineo, siue triangulo.

HOc Problema parum differt à prop. 3. Tantùmque in eo aliquod discrimen patitur, quod præsuponat datas duas lineas angulum facientes, & tertiam, quæ debeat trahi, aut tractam triangulum complentem, quę tres lineę in illa dantur, vt partes vnius lineę, & absque eo quod faciant triangulum.

Sit itaque Angulus B comprehensus lineis A B, & A *, compleatur (si non sit completum) triangulum, & trahatur B *, & postmodum tracta linea indefinita diuiditatur in tres partes, singulę singulis cruribns æquales, ex prop. 6 & ex prop. 2. super eam constituatur triangulum, quod obtineat latera tribus trianguli iam facti lateribus æqualia, nempe G D lateri B *, & D F alteri * A, & tandem F G postremo A B. Nam hoc pręstito *angulus* F *erit æqualis angulo* A.

Ratio est, quia ex propos. anteced. hęc triangula duo latera duobus lateribus vtrunqne, vtrique sibi correspondenti, vt basim basi æqualem adipiscuntur. Quare & omnes angulos correspondentes æquales habebunt, & ideò angulus A erit æqualis angulo F.



Verùm faciliùs praxis hęc fiet, si in B, & G posito centro fiat ad interuallum quodlibet circulus, sumaturq; in dato * B A portio circuli, quę intercipitur inter B *, & B A, & transferatur in altera portione circuli M N; Nam, si per puncta M, N trahas G D, & G F, à G habebis angulum G æqualem angulo B. Docet Clauius hîc.

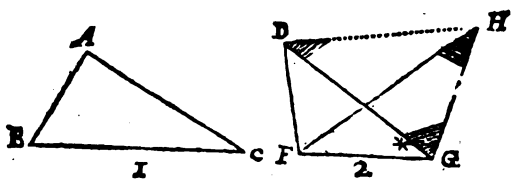
THEOR. XV. PROP. XXV. Euc.24.

Si triangula, duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrunque, vtrique: Angulum verò angulo maiorem sub æqualibus rectis lineis contentum: & basim basi maiorem habebunt.

SIt triangulum A B C, cuius angulus A, cum angulo D trianguli alterius D F G comparatus dignoscatur maior, cùm tamen latera ambientia

bientia hunc angulum, qualia sunt A B, & A C, ista lateribus alterum angulum D claudentibus correspondeant, vt vnum sit æquale vni, V. g. A B, & D F, & alterum alteri; vt A C, & D G. Concludit Euclides, *quod hoc triangulum* A B C *basim quoque suam* B C *maiorem consequitur, quàm alterius basis sit, nempe* F G, *quod vt probetur.*

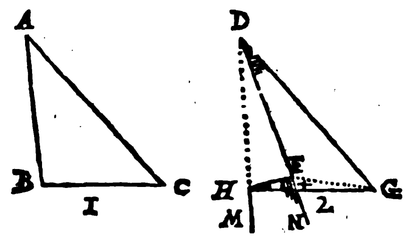
Fiat ex antecedenti propos. angulus D æqualis prædicto angulo maiori A trianguli A B C trahendo latus punctatum D H. Hoc autem latus semper cadet extra triangulum, quia angulus ad D fit maior. Sitque hic angulus maior ad D albus, & niger; Longitudo autem huius lateris punctati D H sit æqualis lateri D C: Trahaturque F H, quæ triplicem occupare situm potest secundùm diuersitatem triangulorum, quæ fiunt, nimirum supra F G, vt est in proposito triangulo; In ipsam F G, ita vt vna linea fiat. Vel infra F G ad partes exteriores, qui tres casus diuersam probationem requirunt. Vnde in tres partes probatio diuidenda est. Primò itaque ponimus cadere supra versùs ipsum triangulum, vt est F H. Coniungenda itaque sunt extrema H, & G lineá H G. Quò posito sic Euclides contexit argumentum.



Probatur. Quoniam enim latus D F est æquale lateri A B, sicut & DH pũctatum lateri A C angulus quoque D ex albo nigroque integratus angulo A prioris trianguli. Sequitur secundùm documenta 22. propos. quod & basis punctata F H sit æqualis basi B C prioris trianguli. Rursus oportet considerare, quòd & latus D G, vt præsuponimus est æquale lateri punctato D H; Quare anguli ad basim niger G, & seminiger H, ex doct. 14. prop. erunt æquales. At pars nigra huius anguli H, ex 6. pron. est minor, quàm totum ipsum nimirum, quàm pars nigra simul cum alba. Ergo, & angulus niger G toti H æqualis, est maior, quàm eius pars nigra: Sed si addatur angulo nigro G altera pars alba stellulâ notata, multò maior eadem eadem parte nigra, anguli eiusdem H. Igitur ex doct. prop. 19. subtendet maius latus, quod est F H, quàm pars nigra anguli ad H, cuius latus subtensum est G F. Linea verò F H æqualis est, vt in principio ostendimus basi B C prioris trianguli. *Igitur* F G *basis posterioris trianguli erit minor ipsa* B C, quod probare oportebat.

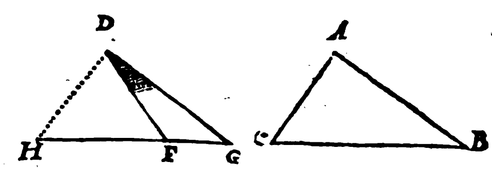
Casus secundus. Sit triangulũ primũ A B C acutangulum, aliudq; D F G secundum, habens angulũ D nigrum minorem angulo A, huic verò angulo D nigro addatur talis pars, vt fiat æqualis angulo A, ex anteced. propos. trahendo latus punctatum D H vsque ad M. Abscindaturque æqualis ex 6. prop. lateri D F, & sit D H. Coniungantur deinde simul H, & G linea, quę cadet infra basim F G. Rursus coniungatur H F, & tandem prolungetur latus D F vsque ad N.

Patet itaque in primis H G basi B C æqualem esse, ex prop. 22. quod angulus D albus, nigerque sit æqualis angulo A, & latera secundi lateribus primi trianguli sibi correspondentibus æqualia, nimirum D H lateri A B, & D G lateri A C. Cumque, & latus D F, prout supponimus, sit æquale lateri punctato D H, ex 14. prop. fit, quòd anguli infra basim, quales sunt H niger, & albus, &



angulus alter H F N totus niger sint æquales. Vnde hic totus niger F erit maior parte nigerrima anguli H: Angulus verò idem F niger, est pars anguli totius comprehensi lineis H F, & F G, & altera eius compars cruce notata est, quare totus F nimirũ pars nigra, & altera cruce notata simul, erunt multò maiores, quàm pars nigerrima anguli H. Quamobrem totus angulus F, ex documentis 19. propos. habebit subtensum maius latus, nempe H G lineam, quàm pars nigerrima H cui subtenditur F G: Sed iam in principio dictum est H G esse æqualem basi B C. Igitur F G basis trianguli D F G, est minor, quàm basis B C.

At si tertius casus detur, nimirum. Quod FH neque cadat infra, neque supra F G, sed in ipsam, vt fiat vna linea. Facilis est probatio. Nam cum angulus niger ad D sit minor angulo A; si fiat æqualis addendo partem albam, & trahendo D H. Patet ex doct. propos. 22. quòd subtendet basim H G æqualem basi C B, & consequenter maiorem, quàm F G.

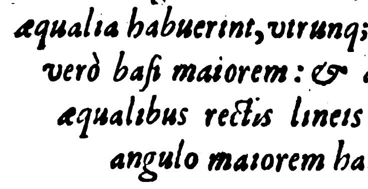


THEOR. XVI. PROP. XXVI. Euc. 25.

Si duo triangula, duo latera, duobus lateribus æqualia habuerint, vtrunq; vtrique; basim verò basi maiorem: & angulum sub æqualibus rectis lineis contentum angulo maiorem habebunt.

DVo latera A C, & C D trianguli albi sint æqualia duobus trianguli nigri D F, & D G quodlibet suo correspōdenti: basis autem A B triãguli albi maior sit, quàm nigri F G. Dicit, & angulum C albi trianguli, qui clauditur inter lineas C A, & C B esse maiorem angulo D, qui lineis D F, & D G continetur.

Probatur autem faciliter. Nam si angulus C non est maior angulo D; erit, aut æqualis, aut minor ipso. Sed si est æqualis, sequitur ex doctr. 22. prop. quòd basis quoque A B sit æqualis basi F G contra præsuppositum. Quia iam quoque præsupponimus latera, quodlibet suo correspondenti esse æqualia; tum nigri, tum albi trianguli; Quod si dicatur angulũ C esse minorem angulo



lo D, tantò magis absurdum sequitur; Nempe, quòd & basis A B sit minor basi F G. Cum afferamus esse maiorem; quia cùm pręsupponamus quoque latera sibi correspondentia, tum albi, tum nigri trianguli esse æqualia, sequitur ex propos. antecedenti, basim etiam A B esse minorem basi FG; sicut angulo D minorem fingunt angulum C. Quare cùm non possit esse angulus C aut minor, aut æqualis angulo D; necessariò eum debebimus fateri maiorem.

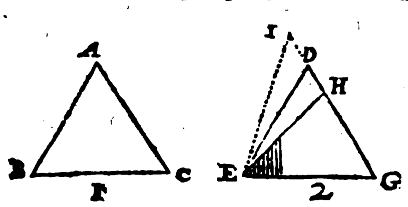
THEOR. XVII. PROPOS. XXVII. Euc.26.

Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, vtrumque vtrique, vnumque quodlibet latus alteri lateri æquale; & reliqua latera reliquis, vtrumque vtriq; correspondenti æqualia consequuntur.

DEntur duo triangula. Primum ABC. Secundum DEG. Primum habeat angulum C æqualem angulo G, & alium quoque angulum, V.g. B æqualē alteri sibi correspōdenti seminigro DEG. Insuper, & latus obtineat, siue quod æqualibus angulis adiacet, siue quod alicui ex eis subtenditur. Et sit, quod adiacet BC ęquale alteri GE adiacenti (vt priùs propositionem ostendamus de hoc.) Dicit igitur, datis omnibus istis conditionibus fore quoque æqualia reliqua latera; quodlibet nempe suo correspondenti, scilicet BA primi trianguli lateri DE alterius, & latus CA lateri GD exęquari.

* Neget igitur aliquis, quod res ita se habeat; tunc iste debebit assignare latus, V. g. G D, quòd sit, vel maius, vel minus latere AC. Si dicat esse maius; detruncetur per propos.6. G H portio æqualis, & ducatur recta E H.

Probatur itaque propositio. Quoniam iam habemus ex hypothesi angulum C ęqualem angulo G, & B ęqualem angulo D E B, etiam ex Cor.



2. propos.17. angulus reliquus A erit æqualis reliquo D. Sed BC latus ex hypothesi ęquat latus EG, & GH æquat latus AC iuxta id quod effecimus ex aduersariorum sententia: quare ex 22.h. cum hęc latera singula singulis correspondentibus ęqualia stringant angulos C, & G ęquales etiam angulus H æquabitur angulo A, sed angulus A æquatur angulo D, ergo etiam angulus H æquabitur angulo D contra prop.21. huius, nam linea EH interior facit maiorem angulum H, quam D. Quod si dicatur latus GD esse minus latere AC addatur punctata DI, vt tota GI æqualis sit ipsi AC. Et idem absurdum sequetur dum totus angulus punctato latere I B, & EG clausus esset æqualis angulo D, quia æquatur angulo A, vt dixi, eo quod sit I angulus ad basim trianguli, cuius latus I G æquatur lateri AC iuxta aduersarios, & EG ipsi BC ex hypothesi, & G angulus angulo C, ideoque etiam angulus I æquaretur angulo D contra prop. 21. h. At faciamus, quod latus æquale datum sit ex illis, quæ subtenduntur vni ex angulis æqualibus V. g. sit EG æquale lateri BC, & oppositus ei angulus A æquetur angulo D, & C angulus angulo G, tunc etiam tertius angulus B æquabitur ex Coroll. 2. propos.17. angulo DEG; si ergo sit latus aliquod DG maius, quam CA detruncetur GH crus æquale cruri CA, & ducatur FH. Tunc sequetur idem absurdum H. Quia enim EG crus æquatur cruri BC, & GH crus cruri AC ex aduersarijs, & angulus G angulo C esset angulus H æqualis angulo A, & ideo ipsi æquali ex hypothesi angulo D contr. propos.21. huius.

Quod si ex aduersarijs sit minus, tunc addatur ID punctata portio, ita vt latus GI æquetur cruri CA, & ducatur EI. Quia itaque G æquatur angulo C, & crus EG opposită angulo vni æqualiŭ D ęquatur ex hypothesi cruri BC, & I G latus ex aduersarijs fecimus æquale lateri AC etiam angulus H ad basim ex prop.22. huius æquabitur angulo A, & ideo ipsi A æquali ex hypothesi angulo I contra 21. prop. huius.

Posset etiam probari propositio demonstrando secuturum illud absurdum, quòd pars HEG anguli DEG esset æqualis toti ipsi DEG si dicatur aliquod latus DG esse maius, quàm CA, vel anguli IEG pars DEG esset æqualis ipsi IEG toti. Si latus GD ab aduersarijs dicatur minùs. Nam angulus DEG esset æqualis angulo ABC, cui æquaretur: & angulus HEG, vel IEG ex aduersaris ob latus BC æquale lateri EG, & latus GH, vel GI assertum ab ipsis æquale lateri CA claudentia angulos C, & G æquales.

COROLLARIVM.

SEquitur ex demonstratione huius Theorematis, tota etiam triangula quoad areas esse æqualia; Nam si latera A B, & BC lateribus DF, & FG æqualia sunt; continuentque ex hypothesi angulos æquales B, & F, ex propos. 22. huius erunt quoque tota triangula æqualia inuicem.

EXPENSIO VI.

De situ linearum se mutuò, nec secantium, nec tangentium.

CVm iam visa triangulorum comparatione velit triangula ipsa parallelogrammis comparare Euclides; necesse est, vt hanc comparationum cognitionem, duæ notiones procedant; Prima est de parallelis lineis, quomodo se habeant ad inuicem, & deinde ex hac parallelogrammorum hauriat cognitionem; quibus cognitis, inde possit parallelogramma triangulis comparare, vel vt eorum partes dignoscere.

THEOR. I. PROP. XXVIII. Euc. 27.

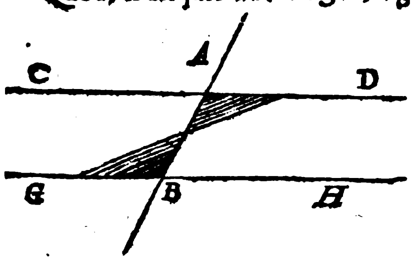
Si in duas rectas lineas recta incidens linea alternatim angulos æquales inter se fecerit: parallelæ erunt lineæ.

IN duas rectas, quę sint in eodem plano (hoc enim libro, vt notat Clauius, agitur de planis) incidat linea; nempe eas ambas secet, vt facit incidens AB in lineas CD, & GH: Et hæc faciat angulos alternos, nempe hinc, inde, vnus adiaceat parallelæ C D niger, & inde alter adiaceat alteri lineę parallelę GH, vt est nigerrimus,

faciat

faciat inquam hos angulos æquales; *Dicit illas lineas esse parallelas, & semper æquidistantes.*

Quod, si aliquis hoc neget; Igitur adinuicem semper fient propinquiores V. g. versùs H,& D: quare tandem cō uenient; quod si cōuenient; facient triāgulum, cuius vertex erit vbi conueniunt; basis verò erit AB, & angulus B nigerrimus erit externus; angulus verò niger oppositus A, & internus, qui ex hypothesi inueniuntur æquales contra probata in Coroll.1. propos.17. vbi ostendimus in omni triangulo externum angulum quolibet opposito, & interno esse maiorem.



Quare maior debebit esse angulus nigerrimus ad B, vtpote externus, & oppositus; quam niger apud A eo casu, quò conueniant: Cùm itaque sint æquales anguli; lineæ CD, & GH non conuenient. Quod autem lineæ rectæ; quæ sibi inuicem appropinquãt, tandem sint coituræ in communem verticem; inter principia posuimus, cum Euclide, & verè principium censendum est, cùm nulla in oppositum hæsitatio animum pulset, si de approximatione per partes æquales agatur, vt ibi declarauimus. Licet Proclus, & Clauius nimis scrupulosè dubitent, & ostensionem astruant ad id probandum.

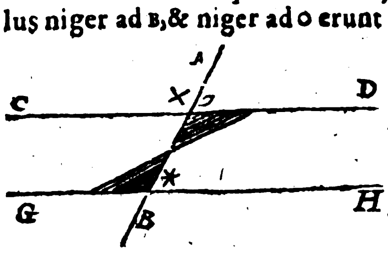
THEOR. II. PROPOS. XXIX. Euc. 26.

Si in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum interno, & opposito, & ad easdem partes æqualem efficit, aut internos, & ad easdem partes duobus rectis æquales, Parallelæ inter se erunt ipsæ rectæ lineæ.

SIt angulus externus factus ab incidente AB, & linea CD cruce signatus; Angulus internus, & oppositus, sed ad easdem partes, non autē, vt in anteced. prop. hinc, inde, qui est niger apud B factus ab incidente AB, & lineâ alterâ GH. Dicit. *Quòd, si hi anguli sunt æquales; & lineas æquidistantes. & parallelas futuras esse.*

Dicit quoque. Quòd si eadem AB cadens super rectas CD, & GH fecerit angulos internos, & ad easdem partes, vt est angulus niger, & angulus albus asterismo notatus, duobus rectis æquales; adhuc illæ parallelæ erunt.

Prob. verò 1. pars. Cùm namque angulus nigerrimus apud B sit æqualis angulo cruce notato ex hypothesi; isq; cruce notatus sit æqualis angulo nigro, ex documentis prop.12. (Namque linea AB secat CD; vnde anguli ad verticem, vt est niger, & cruce notatus æquales sunt.) Internus angulus niger ad B, & niger ad O erunt æquales, qui sunt anguli alterni: Quare ex præced. prop. *lineæ* CD, GH *erunt paralellæ*.



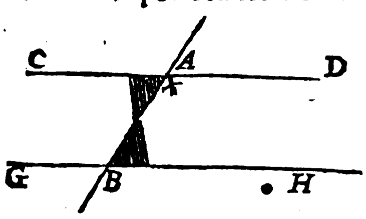
Prob. 2. pars. Nempe, si faciat internos, & ad easdem partes duobus rectis æquales, incidens linea AB super duas CD, & GH; eas etiam esse parallelas: Sint itaq; angulus internus niger O, & alter asterismo insignitus duobus rectis æquales. Sunt quoque ex 10. propos. angulus niger O, & alter comprehensus lineis AO, & DO duobus rectis æquales; quòd linea DO insistat super AB. Quamobrem ab dato angulo nigro communi, qui cum angulo O duos rectos æquat, & item cum angulo asterismo notato (vt præsupponimus) remanebunt angulus externus AOD, internusque. & oppositus asterismatus, æquales. Quare ex præcedenti propositione *lineæ* CD, *&* GH *erunt parallelæ*.

THEOR. III. PROPOS. XXX. Euc. 29.

Si in parallelas rectas lineas recta incidat linea, alternatim angulos inter se æquales efficit, etiā externum interno, & opposito, & ad easdem partes æqualem.

Et internos, & ad easdem partes duobus rectis æquales facit.

HÆc propositio duas antecedentes conuertit, vt perspicuum est; tresque partes habet. Namque intendit probare primò. Quod si in duas parallelas CD, & GH incidat linea AB *angulos alternos nigrum apud* A, *& nigrum apud* B *æquales efficiat*.



Prob. sic per reductionem ad impossibile. Si isti duo anguli niger, & nigerrimus non sunt æquales, maior cōsequenter erit vnus illorum. Is itaque, V. g. dicatur niger apud A. Vtrisque per imaginationem addatur angulus cruce impressus, eruntque niger apud A, & cruce notatus simul maiores nigro apud B cum eodem angulo cruce signato. Sed niger A, & cruce signatus ex 10. propos. sunt æquales duobus rectis; Quare niger apud B, & cruce signatus erunt minores duobus rectis. Vnde ex propos.28. coibunt illæ lineę; quia tunc interni nigri æquales non essent duobus rectis. Quod est absurdum, cùm CD, & GH ponantur parallelæ.

Secunda pars intendit ostendere; angulum A externum ęqualem esse interno, & ad easdē partes, vt est niger apud B, qui sunt ad eandem partem dextram. Si lineę CD, & GH sint parallelæ.

Probatur ex modo demonstratis. Nam angulus niger apud A est æqualis angulo nigro apud B, idemque ex propos.12. est æqualis angulo A externo: Ergo angulus A externus est æqualis angulo interno opposito, & ad easdem partes nigro apud B.

Tertio intendit demonstrare angulum internum cruce notatum, & angulum nigrum B esse æquales duobus rectis. Si CD, & GH parallelæ constitutæ sint.

Nam angulus externus A, & cruce signatus internus sunt æquales, ex 10. propos. duobus rectis. Quòd linea AD cadat, & insistat super lineam AB; Sed iam ostensum est, angulum A externum esse æqualem angulo nigro apud B opposito, & ad easdem partes lineæ AB. Quare angulus cruce signatus, & niger apud B duobus rectis remanebunt æquales.

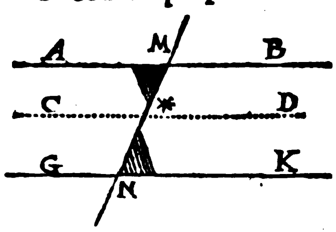
THEOR.

THEOR. IV. PROP. XXXI. Euc.30.

Quæ eidem rectæ lineæ parallelæ sunt, & inter se sunt parallelæ.

PRæsupponatur, quod lineę A B, & G K in eodem plano existentes sint alteri, vt puncta-tę C D, parallelę. *Dicit. Illas inter se debere esse parallelas*. Quòd, vt ostendat, super eas trahit lineam, vtcunque, quæ sit M N.

Probatur propos. Nam anguli alterni niger apud M, & stellula notatus sunt æquales, siquidem lineę A B, & C D ex constru-ctione pręsupponũtur parallelę, & ideò facientes angulos alternos æquales, ex propositione antecedenti. Secundò angulus niger ad N est æqualis angulo eidem stellula notato: Quia C D, & G K ex constructione pręsupponuntur parallelę. Quare ex propos. antecedenti angulus internus niger ad N erit æqualis ei angulo stellulâ notato, externo, & opposito, vt patet.



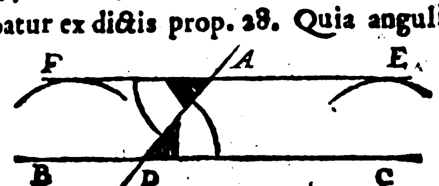
Quare concluditur, quod, cũ duo anguli nigerrimus ad M, & niger ad N sint æquales tertio, sint quoque inter se æquales: sed sunt quoq; alterni. Quapropter ex propos.28. erunt A B, & G K lineę inuicem parallelę.

PROBLEMA V. PROPOS. XXXII. Euc.31.

A dato puncto parallelam lineam ducere datæ rectæ lineæ.

APuncto A ducenda sit parallela lineę B C. Ducatur ex A ad B C recta A D, faciens angulum quemcunque, V. g. nigrum, huicque angulo æqualis constituatur alternus niger, ex documentis propos.24. trahendo lineam F E: *Dicit. Lineas esse parallelas*. Vbi aduerte punctum A debere esse extra lineam B C, vt ad eam linea duci possit.

Probatur ex dictis prop. 28. Quia anguli al-



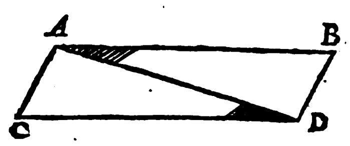
terni niger apud A, & niger apud D per constructionem æquales sunt. Nota parallelas facilliùs duci. Si tracta linea B C eodem interuallo, & aperitione circini super duo puncta quæcumque distantia, vt sunt B, & C facto centro ducantur duę portiones circulorum æqualium, vt sunt F, & E. Et postea ducatur linea eas portiones tangens, vt linea F E. Hęc enim erit parallela; Quia puncta C, & E distant eodem interuallo, vt puncta B, & F ob radios circulorum ęquales.

PROB. VI. PROP. XXXIII.

Rectæ lineæ, quæ æquales, & parallelas ad easdem partes coniungunt; Et ipsæ æquales, & parallelæ sunt.

SInt rectę lineę A B, & C D æquales, atque parallelę, quę coniungantur ad easdem partes rectis; ita vt, quę à sinistrâ parte discedit lineę C D, coniungat sinistram partem lineę A B; sicut, & quę à dextra discedit lineæ C D, annectat quoque dextrâ partem alterius A B; vt faciunt A C, & B D. *Dicit. Has lineas coniungentes, & esse æquales, & esse parallelas*. Quod, vt probet, oportet trahere diametrum A D ab A in D, incidetque lineis A B, C D, & A C, B D.

Probatur itaque. Nam, cùm A D incidat in parallelas A B, & C D; ex probatis in 30. propos. angulus niger ad A, & angulus niger ad D erunt æquales. Quoniam sunt alterni, qui, vt ibi demonstratum est, æquales sunt: Quapropter triangula A B D, & C D A æqualia erunt. Quoniam ex 22. propos. ea sunt triangula æqualia, quę habent vnum angulum alteri æqualem, vt est angulus niger A, & niger D, & latera eiusdem anguli sibi correspondentia æqualia; vt hîc euenit; nam ex hypothesi A B, & D C sunt æquales rectæ; diameter verò A D est idem latus, quod deseruit vtrisque. Hęc inquam triangula basim quoque basi æqualem possident. *Quamobrem A C, & B D erunt æquales*; Quod erat primò probandum.



Probatur itaque. Quod etiam sint parallelæ ex eadem propos. 22. In dictis triangulis A C D, & A B D habentibus angulum angulo, & latera lateribus vtrunq; vtriq; suo correspondẽti ęqualia, etiam totum triangulum est toti triangulo æquale. Quare angulus albus ad D, & angulus albus ad A erunt æquales. Sed hi sunt alterni respectu linearum A C, & B D, ergo *hæ lineæ A C, & B D erunt quoque parallelæ*, ex propos. 28.

EXPENSIO VII.

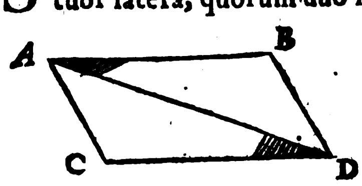
De Parallelogrammis, & Trapezijs.

HÆc Expensio diuiditur in tres partes. Prima agit de proprietatibus parallelogrammorum, tum in se, tum diametro diuisorum. Secunda comparat inuicem parallelogramma. Tertia docet quadratum constituere pręcipuam inter parallelogramma figuram.

THEOR. I. PROP. XXXIV.

Parallelogrammorum spatiorum anguli, & latera æqualia sunt inter se; quæ ex aduersò sibi sunt; illa verò spatia diameter bifariam secat.

SIt Parallelogrammum A B C D habens quatuor latera, quorum duo sibi aduersa sint parallela, vt sunt latera A B, & C D, Item A C, & B D.



Dicit primò. Quod hęc figura possidet quoque *hæc latera, quæ sibi ex aduersò sunt æqualia*, nempe æqualia esse A C, & B D; sicut A B, & C D. Deinde dicit quoque *angulos sibi ex aduersò existentes esse æquales*, nempe B, & C sicut & A, & D albus nigerque. Postremò diametrum quoque, si ducatur, vt A D, diuidere spatium contentum à paralà parallelogrammo in duas partes æquales; & hęc vno, eódemque argumento ostendit.

Probatur. Quoniam diameter inter parallelas A B, & D C reperitur, erunt angulus niger ad A, nigerque ad D æquales, ex prop. 30. vtpotè alterni. Et quia A D est etiã inter parallelas A C, & B D eodem modo angulus albus ad A, & angulus albus ad D, ex propos. eâdem 30., quia sunt alterni, erunt æquales. Quapropter trianguli A B D, & A C D duos angulos æquales duobus angulis, quilibet suo correspondenti; insuper, & latus idem possident; nempe diametrum A D, & hinc ex demonstratis in 27. propos. latera correspondentia ad inuicem æqualia quoque erunt, nempe A B, & C D opposita ad inuicem; sicut A C, & B D opposita inuicem. Quod est primum.

Probatur secunda pars. Nam angulus B, & angulus C oppositi erunt æquales, ex eadem propos. 27. Et quia supra niger apud A nigro apud D, & albus apud A albo apud D ostensi sunt ęquales, si simul componãtur niger albusque apud A erit æqualis angulo D nigro, & albo, quod est secundum propositum.

Prob. tertia pars. Nam sequitur quoque ex Coroll. propos. 27. totum triangulum A B D toti A C D esse æquale. Quare spatium parallelogrammi diuisum est bifariam à diametro A D; nempe in duo triangula æqualia A B D, & A C D.

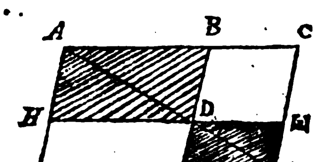
THEOR. II. PROP. XXXV. Euc. 43.

In omni Parallelogrammo complementa eorum, quæ circa diametrum sunt inter se sunt æqualia.

Vide in definit. 37. Quid sint consistentia circa diametrum, & complementa.

Dicit ergo propositio. Quod complementa nimirum in parallelogrammo A G M C parallelogramma alba H F, & D C sint æqualia.

Probatur. Quoniam ex propos. præced. triangula A C M, & A G M, quę diuidit diameter sunt æqualia. Eademque ratione in parallelogrãmo nigro maiori H B duo triangula A B D, & A H D sunt æqualia; vtpote à diametro bisecta.



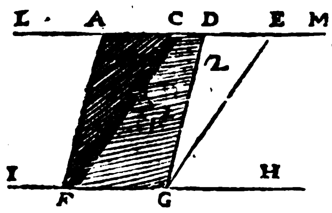
Sic etiam in parellelogrammo minori nigriori D M duo triangula D F M, & D E M sunt æqualia. Deme ergo à triangulis totis maximis A C M, & A G M partes æquales, nempe huic A C M triangulum nigrum, & nigrius, & deme deinde alteri triangulum quoque nigrũ, & nigrius, quę primò demptis æquiualent, & residua H F, & D C complemẽta remanebunt æqualia, vt in 2. pronunt.

THEOR. III. PROP. XXXVI. Euc. 35.

Parallelogramma super eadem basi, in ijsdem parallelis constituta inter se sunt æqualia.

Dicitur. Aliquod parallelogramum esse cum alio inter easdem parallelas, quando duo latera opposita partes sunt parallelarum; vt latus A D, & C E partes sunt parallelę L M, sicut, & F G est pars parallelę I H. Dicitur verò esse super eandem basim, cum latus alternum in parallela commune vtrisque est, vt F G. Dicit itaque hæc parallelogramma inter se esse æqualia, non quoad latera, & angulos, sed quoad capacitatem, & aream: Propositio verò habet tres casus. Quare requirit tres probationes.

Probatur. Sint duo parallelogramma super basi F G eadem, & inter parallelas L M, & I H, nimirum A D F G, & C E F G, cadatque latus F C secundi suo extremo C inter latera primi inter puncta A, & D.

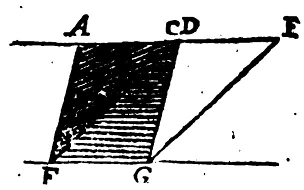


Nam cùm latus A D primi, & C E secundi sint æqualia suę basi communi, laterique opposito F G, ex pręced. propos. fit vt sint æqualia inter se. Aufer itaque mente lineam C D; quę vtrisque deseruit, eisque est communis, remanebunt adhuc æqualia A C, & D E segmenta.

Progress. 2. Similiter iam constat ex prop. 34. latus A F nigerrimi trianguli esse æquale lateri D G albi trianguli 2; vtpote latera parallelogrammi seminigri nigerrimique.

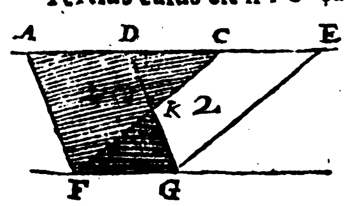
Progr. 3. Angulus verò A nigerrimus est ęqualis angulo albo D ex propos. 30. quòd vnus sit externus, alter internus inter parallelas A F, & D G. Cùm itaque habeamus duo latera, quodlibet suo sibi correspondenti æqualia, nimirum A C, & D E inuicem ex 1. Prog. Sicut A F, & G D ad inuicẽ, ex 2. Prog. Angulumque A nigerrimum angulo D albo æqualem, ex 3. Prog. Ex 22. propos. duo triangula nigerrimum A C F, & secundum album D E G erunt æqualia, quibus vtrisque si addatur commune Trapezium nigrum C D F G, cum vtrisque idem addatur; adhuc erunt æqualia, Quare triangulum nigerrimum; & trapezium integrantes parallelogrãmũ A D F G Trapezio, atq; triãgulo albo integrãtibus parallelogrammũ secundũ C F G E equabũtur, quod demõstrare oportebat.

Secundus casus est. Si F C latus secundi parallelogrammi cadat in D.



Tunc enim ex eadem ratione A D, & D E rectæ erunt (vt primo Prog. ostensum est) æquales sicut & A F, & G D, (vt secundo) Et angulus A nigerrimus angulo D albo æqualis. Quare duo triangula nigerrimum D A F, & E D G album æqualia erunt. Addito itaque, tàm vni, quàm alteri commune triãgulum nigrum D F G complens, tàm cum nigerrimo, quàm cum albo triangulo parallelogramma nigrum, & semialbum; Ea remanebunt adhuc æqualia, nimirum A D F G, & E D F G parallelogramma.

Tercius casus est si F C çadant extra punctum D, ita vt secet latus G D in K.



Cùm itaque rectę A D, & C E ex supradicta ratione 1. Prog. æquales sint. Si vtrisque addatur D C inter eas medians. Linea A D cum addita D C, & C E cum eâdem additâ D C erunt æquales. Sicut & F A, & G D ex prop. 34. Et etiam, supradicta ratione 3. Prog. angulus D niger

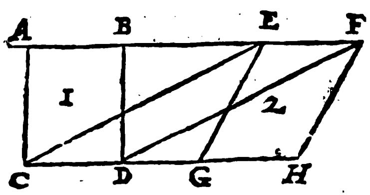
niger, f, CDK externus, & angulus A niger internus æquales erunt. Quare triangulum BDG, & CAF erunt æqualia. Aufer itaque triangulum nigrum DCK per imaginationem commune vtrisque, remanebuntque duo trapezia primum subnigrum ADFK, & secundum album CEKG adinuicem æqualia. Vt itaque fiant parallelogramma æqualia, adde vtrisque mente commune triangulum nigerrimum FGK, & habebis ea æqualia, nempe ADFG, & CEFG; quod demonstrandum erat.

THEOR. IV. PROP. XXXVII. Euc. 36.

Parallelogramma super æqualibus basibus, & in eisdem parallelas constituta inter se sunt æqualia.

SInt duo parallelogramma. Primum ABCD. Secundum verò EFGH inter parallelas AF, & HC constituta, & super æqualibus basibus CD, & FE sita. *Dico hæc esse æqualia.* Quod, vt probet, coniungit basim primi cum latere basi opposito secundi, nimirum puncta extrema ad eandem partem, v. g. sinistram, vt sunt E, & C recta CE. Similiterque duo puncta terminatiua ad partem dextram F, & D rectâ DF.

Probat verò ostendendo priùs, has lineas postremò tractas CE, & DF cum basi primi parallelogrammi CD, & basi secundi FE facere parallelogrammum, ex 34. propos. Nam cum EF basis secundi, & CD basis primi sint parallelę, & æquales sit, vt ibi diximus. Quod CE, & FD postremò tractæ sint parallelæ, & æquales, & ideò, quod CDFE sit parallelogrammum, cùm eius definitio requirat tales prorsus conditiones. Quo posito sic astruitur intentum. Quę eidem sunt æqualia, & inter se sunt æqualia: Sed parallelogrammum primum ABCD, ex præced. propos. est ęquale parallelogrãmo postremò facto CDEF; Eidemque est æquale ex eadẽ parallelogrammum secundum EFGH, ob basim eãdẽ EF; ergo hęc nẽpe primum, & secundum erunt inter se æqualia.



COROLLARIVM.

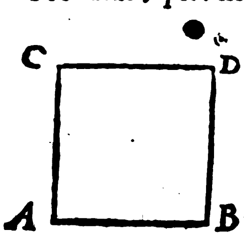
COlligitur trapezia quoque, quorum oppositę bases inter se æquales, sint inter parallelas, inter se æqualia esse; nam trapeziũ AEGC est æquale trapezio BDFH siquidem duo parallelogramma I, & 2 sunt inuicem æqualia. Trapezium verò BDEG vtrisque commune: Vnde etiam idem dicendum erit si alterum latus alteri sit idem, & opposita latera sint æqualia.

PROB. V. PROP. XXXVIII. Euc. 46.

A data recta linea quadratum describere.

SIt data recta linea AB, super quam quadratum describere necesse sit.

E duobus punctis A, & B ipsi AB geminę perpendiculares erigantur, per 8. propos. & sint æquales per propos. 6. ipsi AB, & pũcta CD connectantur, *& quadratum erit constitutum.*



Probatur, quia illud erit quadratum. Quod æquiangulum, & æquilaterum est, sed figura ex facto habet æqualia latera duo nempe AC, & BD ipsi AB; Tertium verò nimirũ DC, quod reperiatur inter perpendiculares AC, & BD, & ideò parallelas, ex prop. 29. quòd anguli A, & B sint duo recti. Quamobrem DC, vtpote parallelas coniungens, & æquales erit æqualis ipsi AB, & parallela, ex propos. 33. Omnia itaque latera sunt æqualia, & parallela.

Probatur secundò de angulis, nam iam duo A, & B sunt recti; quare & alij duo, D, & C, vtpote oppositi istis, ex propos. 34. erunt recti; cùm constitutum, sit quoque parallelogrammum.

EXPENSIO VIII.

De triangulorum cum parallelogrammis trapeziisque parallelis constantibus comparatione.

PArallelogramma in triangula diuiduntur. Vnde iam incipit comparare triangula; cum toto, quòd primò, & immediatè componunt; Cæterę enim figurę, licet, ex triangulis componantur; plura tamen ea componunt: Trapezia verò, & parallelogramma tantùm duo.

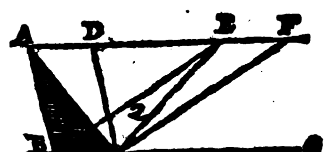
THEOR. I. PROP. XXXIX. Euc. 41.

Triangulum parallelogrammi inter easdem parallelas, & eadem basi constituti, dimidium est.

SIt Parallelogrammum seminigrum BADC, & triangulum BCE inter parallelas AE, & BO & super eandem basim BC constitutum. *Dico esse triangulum BEC dimidium parallelogrammi seminigri ADBC.*

Quod vt probetur ex propos. 32. à dato puncto C ducatur parallela ipsi BE lateri trianguli, & erit factum parallelogrammum BCEF, cuius diameter CE. Diuidatur deinde parallelogrammum seminigrum bifariam ducto diametro AC. Quo posito sic propositio probatur.

Nam, cùm parallelogramma album, & semialbum sint super eamdem basim, & inter easdem parallelas, ex prop. 36. sunt inter se ęqualia; Sed illorum parallelogrammorum æqualium dimidia sut triãgula nigrum I, & 2, ex prop. 34. Eo quia latera eorum AC primi, & BC secundi sint parallelogrammorum diametri. Quæ verò æqualium sunt dimidium, ex pronunc. 7. inter se necessariò æqualia sunt. Quapropter triangula primum nigrum, & secundum album inter se æqualia erũt. Sed nigrum est parallelogrammi seminigri dimidium. Ergo etiam triangulum album 2 erit eiusdem parallelogrammi dimidium.



COROLLARIVM I.

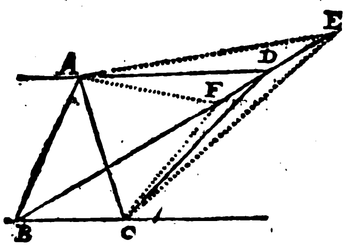
HInc patet quod triangula super eandem basim, & inter easdem parallelas constituta sint inuicem æqualia: Nam sunt triangula nigrum 1, & album 2 dimidia æqualium parallelogrammorum A C seminigri, & alterius albi B F, vt in serie demonstrationis ostensum est.

COROLLARIVM II.

ETiam esse veram propositionem conuersam, nempe *triangula æqualia super eãdem basim, & ad easdem partes constituta esse inter parallelas.*

Nam sint triangula B A C, & B D C æqualia super eandem basim constituta B C, & ducta per eorum vertices A D linea, non sit parallela basi B C: Ducatur parallela; hæc cadet, vel infra, vel supra lineam vertices coniungentem A D.

Cadat primum supra, & sit A E, & producta B D, in E coniungatur C E. Itaque triangulum B C E; quod inter parallelas exaduersarijs sit, erit æquale triangulo B C A. Sed eidẽ ex hypothesi est æquale triangulum B D C: Ergo triangulum B E C maius esset æquale minori B D C, vtpote quod sint vni tertio B A C æqualia, quod est absurdum.



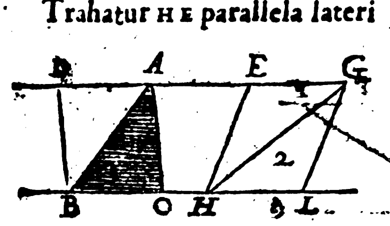
Quod si cadat infra ad F, vbi incidit, ducatur C F, & erit triangulum B C F æquale triangulo B A C eo quod ex aduersarijs sint parallelæ A F, & B C, & consequenter minus B F C, æquale triangulo B C D maiori; quod esse nequit.

THEOR. II. PROP. XXXX.

Triangulum parallelogrammi inter easdem parallelas, & æquali basi constituti dimidium est,

SIt triangulum L H G notatum numero 2, & parallelogrammũ seminigrum D B A C inter parallelas D G, & B L, & constituta super æquales bases B C, & H L; Dico triangulum 2 esse dimidium parallelogrammi seminigri.

Trahatur H E parallela lateri trianguli L G à puncto H, ex propos. 32., & erunt duo parallelogramma, ex 37. prop. æqualia, & erit H G parallelogrammi albi diameter. Trahatur quoque diameter B A in seminigro parallelogrammo.



Quo facto probatur propos. Triangula nigrũ, & album 2, vtpote dimidia æqualium parallelogrammorum semialbi, & albi inuicem sunt æqualia. Ergo triangulum 2 erit etiam medietas parallelogrammi semialbi.

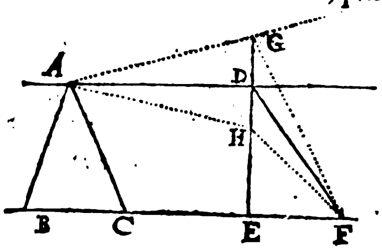
COROLLARIVM I.

COlligitur hinc; triangula super æqualem basim, & inter easdem parallelas esse inuicem æqualia. Quia sunt dimidia æqualium parallelogrammorum seminigri, & albi.

COROLLARIVM II.

ESse quoq; veram propositionem conuersam præced. Coroll. *Nempe triangula æqualia super æqualem basim ad easdem partes constituta esse inter parallelas.*

Nam eadem ratio militat, quæ superiori 2. Coroll. præceden. propos. Nam si A D ducta per vertices triangulorum B A C, & E D F æqualium non est parallela lineæ B F; erit altera; quę si cadet super A D, vt A G, ducta F G, fiet triãgulũ E F G, quod ex dictis per aduersarios æquabitur triangulo A B C; & cõsequenter sibi ex hypothesi æquali E F, maius minori, quod esse nequit; Et si cadat infra, vt A H. Efficietur triangulum E H F, quod vtpote inter parallelas A H, & B F erit æquale triangulo B A C, & ideò sibi æquali triangulo E D F; minus maiori, Quod esse nequit.

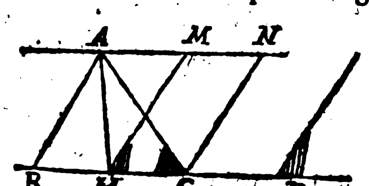


PROB. I. PROP. XXXXI. Euc. 42.

Dato triangulo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

DAtum triangulum sit A B C, & datus angulus rectilineus D. Oporteat autem facere parallelogrammum, quod sit æquale triangulo: Sed quod obtineat angulum internum aliquem æqualem angulo D. Sic efficere oportebit. Trianguli dati aliquod latus, V. g. B C diuidatur per medium in H, ex propos. 7. & per doct. propos. 24. à puncto dato H fiat angulus æqualis angulo D; trahaturque H M, vt lubet, siue ad dextram, vt in exemplo, siue ad sinistram, si commoditas postulet. Deinde per propos. 32. trahatur parallela A M ad B C à puncto dato A. Rursusque per eandem propos. 32. ducatur à puncto dato C parallela ad H M; quę occurrat parallelæ primo tractę A M, & prolungatę si oportuerit in N. Eritque factum *parallelogrammum* M N H C *æquale triangulo* A B C; quòd vt probetur linea A H coniungatur punctum H cum vertice trianguli A.

Probatur. Nam parallelogrammum H C M N duplum est trianguli A H C, propos. 39.; siquidem est super eandem basim H C; & inter parallelas A N, & B C. Sed triangulum A H C est dimidium triãguli totius B A C, eo quod duo triangula, in quę diuisum est, sint æqualia, vtpote super æquales bases B H, & H C, & inter easdem parallelas A N, & B C constituta, ergo totum triangulum A B C erit æquale parallelogrammo M N H C, vtpote ambo eiusdem trianguli A H C dupla.



CO-

COROLLARIVM.

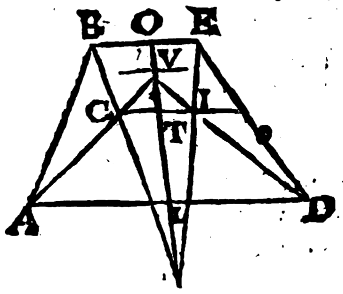
Colligitur ex Pelletario; quòd eodem pacto potest constitui triangulum in dato angulo, quod sit æquale dato alicui parallelogrammo, vt in figura huius propos. datum parallelogrammum sit M N H C, ex C puncto dato fiat angulus nigerrimus, in quo postulatur, vt fiat triangulum. Trahendo A C, & prolungato latere parallelogrammi M N, vsque dùm occurrat in A lineæ anguli dati nigerrimi A C; assumatur in linea B C, B H ęqualis lineæ H C, trahaturq; à puncto B linea A B, quę compleat triangulum B A C, quod est duplum parallelogrammi M N H C, vtpote ex probatione superioris propositionis constat.

THEOR. III. PROP. XXXXII.

Triangula Trapezijs bipartitis, duobusque lateribus parallelis clausa inter se sunt æqualia.

Sint duo triangula A B C, & I E D clausa Trapezijs bipartitis, & parallelis duobus lateribus, vt sunt A C I D, & B C E I, & A B E D, quæ habent latera A D, & C I, & B E parallela, & bipartita linea L O. *Dico hæc triangula esse æqualia.*

Probatur Trapezium A C I D linea T L latera bipartiente est diuisũ in duas partes æquales. Nam productis lateribus |, vt conueniant in V, erit triangulum A V L triangulo V L D æquale; quòd sit inter easdẽ



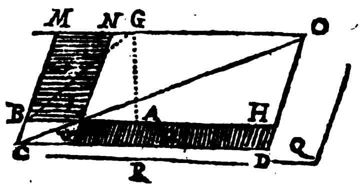
parallelas, & super æqualem basim; sic dicas de triangulo C T V, & V T I. Ablatis ergo triangulis istis C T V, ab A V L, & T V I à triangulo V L D trapezium residuum A C T L erit æquale residuo T L I D. Et idem dicendum de parte C T B O, quòd sit æqualis parti T O E I in trapezio B I; & de parte A B O L; quòd sit æqualis parti L O E D, in trapezio B D; Si ergo ab istis partibus æqualibus trapezij magni auferãtur partes æquales trapeziorum C O, & C A L T, hinc ab A O; inde T E, & L T I D ab O D, remanebunt residua triangula æqualia A B C, & I E D, quod erat ostendendum.

PROB. II. PROP. XXXXIII. Euc. 44.

Ad datam rectam lineam dato triangulo æquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo.

Sit triangulum datum punctatum B A G; angulus verò datus Q; linea verò data R. Iam nosti ex propos. 41. facere parallelogrammum æquale triangulo dato B A G, quod parallelogrammum angulum æqualem angulo dato obtineat. Fiat igitur, & sit parallelogrammum nigrum M N B L, habens angulum L ęqualẽ dato Q; ipsum verò totum secundùm aream æquale sit triangulo dato punctato B A G. Extendetur itaque B L in H, ita vt L H sit æqualis datæ R. Deinde per punctum H extremum ducta parallela H O ad B M occurrat rectę M N parallelę B H, in O: Eritq; factum parallelogrammũ album N H, quod diametro O L bifariam diuidatur, & producatur vltra L in C, donec occurrat lateri B M nigri parallelogrammi producto in C, deinde ex C ducatur parallela ad B H, vsque ad latus O H, productum in D. Postremò producatur latus N L parallelogr. N L nigri in V. Eritque alterum parallelogrammum nigrum longius, cuius latus L H, vel V D est æquale datæ R. Probandum verò est quod & angulus nigerrimus ad L sit æqualis dato Q, & ipsum V H triangulo dato punctato B G A.

Probatur itaque primò de angulo. Nam ex



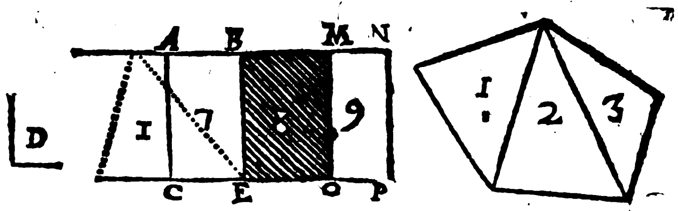
prop. 15. angulus ad L nigerrimus secundi parallelogrammi nigri lõgioris est æqualis angulo L alterius nigri primi parallelogrammi, quod sint anguli ad verticem. Sed angulus L est æqualis ex constructione angulo dato Q: Ergo & angulus L nigerrimus secundi V H est æqualis eidem Q.

Probatur secundò, quod totum parallelogrammum nigrũ secundum V H sit quoad aream æquale triangulo dato G B A; nam cùm sit vnum ex complementis eorum parallelogrammorum, quę circa diametrum sunt, sit, quòd ex propos. 35. sit æquale parallelogrãmo primo nigro B N: At illud est æquale ex constructione dato triangulo B G A. Ergo & parallelogrammum secundum nigrum eidem æquale erit, quod oportebat demonstrare.

PROB. III. PROP. XXXXIV. Euc. 45.

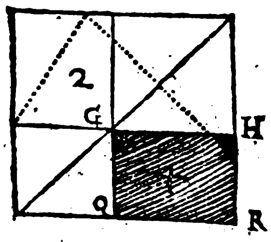
Dato rectilineo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

Vult hic Euclides docere modum, quo quælibet figura rectilinea etiam si triangularis, & inæqualis, tum angulis, tum lateribus possit ad figuram parallelam reuocari. Sit itaque figura quæcunque rectilinea 1, 2, 3, quę in totidem triangula resoluenda est, per lineas ad vnum angulum protractas; Ex inde sit angulus D iuxta quem parallelogrammum æquale ijs triangulis 1, 2, & 3 oporteat costituere: ad id verò efficiendum obseruanda est primò regula, & praxis, quam in 41. propos. docuimus, & constituendum est parallelogrammum A B C E album habens angu-

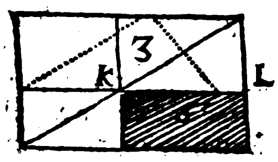


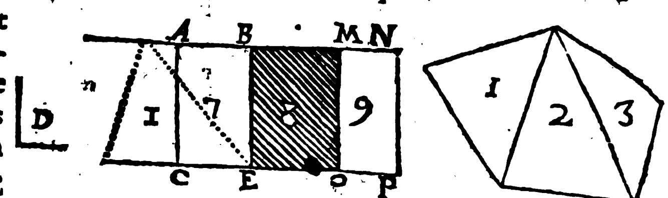
lum C æqualem dato angulo D; secundò triangulum 2 reducendum est ad parallelogrammum nigrum per regulas propos. antecedentis, vt vides factum in sequenti figura signata numero 2, quod angulum nigerrimum ad G dato angulo D æqualem possideat, & latus insuper G H æquale lateri

BE consequatur: Hocque transferendum est ad 1. figuram inter AB, & CE parallelas prolungatas, ita vt GH conueniat, & idem fiat cum latere BE; quod autem hoc effici possit, ex probatione constabit. Tertiò de 3 triangulo idem efficiendum est, reducendo illud ex institutione præcedentis Prop. ad parallelogrammum nigrum, vt in tertia figurâ factum est, faciendo angulum nigrũ ad K æqualem angulo dato D, & latus KL æquale lateri BE; deinde inter parallelas AB, & CE prolungatas quantum opus sit, constituendum; ita vt apud parallelogrammum secundum nigrum collocetur, & KL cum latere MO idem fiat. Factumque erit parallelogrammum ANCP quod constabit tribus parallelogrammis 7, 8, nigro, & 9 æqualibus tribus triangulis, quodque nempe suo rectilineo, & per cõsequens toti rectilineo 1,2,3.



Quod ergo hic probationem reposcit est, quod parallelogrammum secundæ figuræ nigrum possit transferri inter parallelas AN, & CP, illud simul adaptando, vt præcepimus lateri BE. Et priùs quod latus GH parallelogrammi nigri in secunda figura possit adaptari lateri BE patet; quia huic BE per constructionem fecimus æquale latus GH; Quare cum eo congruet. At quia angulus G nigerrimus est æqualis angulo dato D, cui quoque æqualem fecimus angulum C, & per consequens, & angulum externũ E nigrum in 1.fig. ex prop.30. angulus G niger secundæ figuræ capiet prorsus, & se æquabit cum angulo B nigro, & latus GQ incedet super EO. Sic angulus H nigerrimus secundæ figuræ capiet adamussim, & conueniet prorsus cum angulo nigro B primæ figuræ, eo quia angulus B sit complementum anguli E ad æquandos duos rectos, siquidem ambo simul, vtpote ambo interni inter parallelas, & ad easdem partes sunt, ex prop.30. æquales duobus rectis. Et hanc eandem conditionem habet respectu anguli nigri G, & consequenter respectu anguli sibi æqualis E in alterâ figura, angulus H nigerr. in hac figura secunda in parallelogrãmo GR cũ sint inter parallelas QG, & HR. Quare & etiam ipse erit complementum anguli E ad duos rectos æquandos, & ideò ipsi B æqualis. Vnde angulus H conueniet, & idem spatium æquabit, ac angulus B, & HR incedet cum parallela EM. Quare si fiat EO æqualis HR tracto parallelo latere MO erit BEO parallelogrammum æquale nigro GR figuræ secundæ. Eademque probatio applicabitur parallelogrammo nigro 3. figuræ ostendendo KL ex constructione conuenire cum MO: Angulum nigerrimum K bene collocari, & occupare idem spatium, ac angulus O exterior albus in prima figura, & angulum L nigerũ in fig.3. benè conuenire, & esse æqualẽ angulo M albo in prima figura; Quia tàm vnus, quàm alius compleant æquales angulos, nẽpe nigrum K, & album O, ad duos rectos. Vnde euenit, quod parallelogrammo 8 nigro possit superaddi perallelogr. 9 album inter parallelas AN, & CP, & fieri totum parallelogrãmum ANCP æquale rectilineo 1,2,3.





Ne mireris; nos hic primum librum finire; necessè enim fuit, vt Propositionem 47. Euclidis cum alijs eiusdem generis poneremus in fine secundi Libri.

TRACTATVS V.

In secundum Librum Euclidis de æquipotentia linearum.

IN hoc secundo libro agit Euclides de linearum æquipotentium diuersis generibus. Dicuntur autem lineæ æqualiter posse; Cùm super ipsas potest fieri quadratum æquale alteri, vel quadrato, vel parallelogrammo à duobus lineis effecto. Quando autem duę lineę dicuntur æqualiter posse, de quadratis intelligitur. Quoniam, quando non intelligitur de quadratis, tunc exprimitur, quòd possit æquè, ac rectangulum tale, vel tale. In quatuor verò expensiones tantùm hunc tractatum secabimus. In prima agemus de principijs. Secunda potentias linearum, vt sunt latera quadratorum ostendet. Tertia quatenus sunt latera triangulorum; Et tandem ducere lineas æquipotentes, vel eas secare docebimus. Superfluum verò est texere huius libri laudes, & vtilitates enumerare. Cùm experimentum demonstraturum sit, nihil ferè sine hac doctrina in Mathematicis posse probari.

EXPENSIO I.

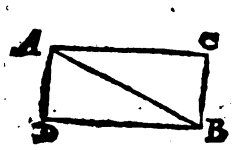
De principijs huic libro inseruientibus.

NE laboremus in singulis propositionibus ostendendo parallelogramma parua, quæ in rectangulo maiori à parallelis ad ipsius latera fiunt esse rectangula. Hic id duximus ostendendum semel; vt hęc vnica demonstratio singulis demonstrationibus infra ponendis deseruiat. Aduerte autem parallelogrāmum rectangulū solo nomine rectanguli ab Euclide appellari.

THEOR. I. PROPOS. I.

In parallelogrammo omnes anguli recti sunt, si vnus sit rectus.

PRobatur eo quod omnia latera parallelogrammi sint parallela ex eius definit. Posito itaq; A angulo recto; cùm A C incidat parallelis A D, & C B, ex prop. 30. l. 1. anguli interni erunt duobus rectis æquales: Sed A est rectus, ex hypothesi; Ergo etiam C. Quòd si A, & C recti sunt; Ergo etiam oppositi D, & B anguli, ex propos. 34. primi.

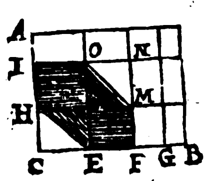


THEOR. II. PROPOS. II.

Si sit rectangulum, & intra ipsum ad latera parallelæ ducantur, quæ se intersecando faciunt sunt rectangula parallelogramma.

SIt rectangulū A B magnum contentum lateribus A C, & C B: *Dico, quod si ad latera hæc ducantur parallelæ* A N, & H M, & rursus E O, & F N, *se intersecando efficere rectangula.*

Probatur primò, quòd habeat latera æqualia parallelogrammum quodlibet inclusum, V. g. N E. Nam latus O E, est æquale lateri F N, quod sit inter parallelas O N, & E F. Sic O N, & E F sunt æquales; quòd sint inter parallelas E O, & F N, ex prop. 33. primi. Erunt quoque omnes anguli recti: Dùm C angulus albus rectus est ex hypothesi: Ergo etiam angulus E niger, quòd ex propos. 30. sint æquales, vtpote internus, & externus. Quare ex prop. anteced. etiam omnes reliqui O, N, F. Idcircò, cùm latera omnia probata sint æqualia, & anguli ostensi sint æquales; erit O E N F parallelogrammum rectangulum. Quod autem dicitur de hoc parallelogrammo; dicatur etiam de alijs, cùm par sit ratio.



COROLLARIVM I.

SEquitur ex hac propos. Duas parallelas, quæ ab æqualibus partibus laterum angulum rectum comprehendentium, hinc, inde proueniunt, se decussare in segmenta æqualia: quia ab æqualibus segmentis procedunt, & ideò efficere quadrata. Talis est figura seminigra M O, quia enim E F, & H I sunt æquales; M N, & O N sunt quoque æquales, & ideò est quadrata.

DEFINITIO.

OMne parallelogrammum rectangulum contineri dicitur sub rectis duobus lineis angulum rectum comprehendentibus.

Sit parallelogrāmū rectangulū A C B D prop. 1.

Dicitur

Dicitur hoc parallelogrãmũ duobus rectis cõtineri; Namq; licet quatuor lineis verè cõprehẽdatur, duę tamen sunt, quę inæquales inuicem; Illud à quadrato distingunt. Sic, & vnum angulum, licet sint quatuor, sufficit nominare; quia per rectum angulum secernitur à Rhombis, & à Rhomboidibus, quę nullum angulum rectum obtinent. Patet autem definitio ex propos. 1. in quâ demonstrauimus, quòd in parallelogrammo, si vnus angulus sit rectus, omnes alij tres sint recti quoque.

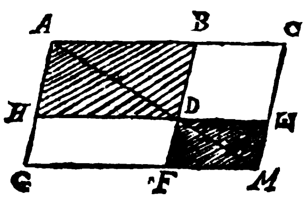
COROLLARIVM II.

SEquitur autẽ ex hac antecedẽti definitione, & propositione omnia parallelogramma, à parallelis ad latera in parallelogrammo maiori illa continente facta, contineri, vel sub ipsis segmentis, vel sub æqualibus ad ipsa segmenta à quibus illę parallelę ductę sunt. V. g. rectangulum seminigrũ HE dicitur cõcludi sub segmentis CH, & CE; Patet, ex definit. quia angulum C rectum concludunt; quòd verò MO seminigerrimum concludatur sub æqualibus HI, & EF, patet; quia latus ON æquatur EF, cùm sit inter parallelas; & NM latus lateri HI eâdem ratione.

DEFINITIO II.

IN omni parallelogrammo vnumquodque eorum, quæ circa diametrum sunt parallelogrammorum, cum duobus complementis, Gnomon vocetur.

Dicit in parallelogrammo AGCM, vnum parallelogrammum diametrum AM ambiens, V. g. nigrum cum duobus complementis albis DC, & DG vocandum esse *Gnomonem*; Vel alterum ni-



gerrimum minus, cum duobus complementis ijsdem *Gnomonem* appellari. Igitur tolle mente à parallelogrammo toto ACGM vtrumlibeat parallelogrammorum nigrorum diametrum ambientium, & reliqua remanens figura Gnomon vocabitur. Sic deme parallelogrammum nigrum AD, reliquum erit Gnomon HMB, vel nigerrimum DM, & reliquum erit Gnomon EAF.

EXPENSIO II.

De potentijs linearum diuersimodè sectarum ad æquanda suorum segmentorum rectangula.

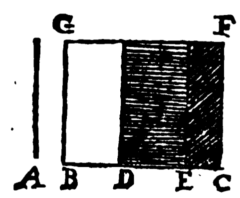
POtentię linearum sumuntur, vel totæ, vt eorum quadrata, & rectangula æquè possint, ac segmentorũ quadrata, atq; rectangula, vel totę cũ aliquo segmenti, vel quadrato, vel rectangulo, vel non totę; sed partis alicuius potentia, nimirum eius quadratum, dicitur æquale, vel solum, vel cum aliquo rectangulo, alijs segmentorum rectangulis. De istis ergo potentijs, idest quadratis, quę lineę possunt efficere, iuxta tres assignatas comparationes, agemus, in hac expensione.

THEOR. I. PROP. III. Euc. I.

Si fuerint duæ rectæ lineæ, seceturque ipsarum altera, in quotcumque segmenta: Rectangulum comprehensum sub duobus illis rectis lineis æquale est omnibus rectangulis, quæ sub non sectâ, & quolibet segmentorum comprehenduntur.

SInt duę rectę A, & BC, quarum BC in segmenta aliqua diuidatur, vt libuerit, V. g. in partes BD, & DE, & EC. Dico, quòd si ex omnibus istis partibus fiant rectangula, à singulis, & non sectâ lineâ A comprehensa: Hæc omnia erunt æqualia rectangulo, quod sub linea A non secta, & lineâ rectá sectâ BC continetur.

Praxis 1. Constitue itaque parallelogrammum rectangulum erigẽdo duas perpendiculares ęquales lineæ A ab extremis B, C, & rectarum extremitates G, & F rectâ coniũgantur. Nam, vt probatum est propos. 38. primi de quadrato, omnia latera opposita erunt parallela, & æqualia, & omnes anguli recti. Quare erit factum rectangulum sub A non sectâ, & sectâ BC totâ comprehensum.

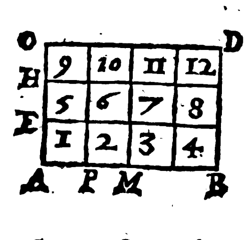


Praxis 2. Deinde ex diuisionibus D, & E trahe parallelas alteri perpendicularium vsque ad alterum latus oppositum GF. Nam ex propos. 33. primi erunt æquales perpendicularibus, vel GB, vel CF, & consequenter lineæ A non sectæ: Vnde erunt constituta rectangula super partes rectę BC, album, nigrum medium, & alterum nigrum EF, ex partibus BD, DE, EC, & lineis æqualibus datæ lineæ A.

Quare facili ostensione, quæ ex ipsa effectione eruitur, ostenditur propositio. Rectangula album, nigrum medium, & alterũ EF sunt constituta ex partibus lineę sectę BC, & lineę A non secta, vt 2. praxi ostensum est; Sed hæc omnia integrant rectangulum à totâ rectâ BC, & non secta A comprehensum, & idem spatium occupant. Quare ei erunt æqualia.

COROLLARIVM.

HInc colligit Commandinus. Idem sequi, etiam si altera linearum in quotcumque segmenta diuidatur. Nam rectangula facta à partibus, segmentisque, tum vnius, tum alterius, æquatur toti rectangulo à lineis illis duabus integris consurgente. Id verò patet. Nam diuisa AO in quotcumque segmenta, & AB pariter, & à singulis diuisionum partibus ductis parallelis se insecabunt, & illis intersectionibus se diuident in partes illis segmentis ęquales, à quibus ducuntur, erũtq; rectangula, ex pr. 2. Quare, cũ omnia ea rectangula, vt 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. à rectangulo toto, lineis AB, & AO comprehẽso, cõcludantur, illi erunt æqualia.



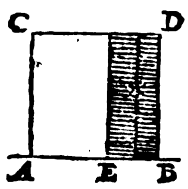
THEO-

THEOR. II. PROPOS. IV. Euc. 2.

Si recta linea secta sit vtcumque, rectangula, quæ sub tota, & quolibet segmentorum comprehenduntur, æqualia sunt illi, quod à tota fit, quadrato.

SIt recta AB diuisa vtcunque in E, & super eam constituatur quadratum ABCD. Dicit *hoc quadratum fore æquale rectangulis à tota BA, & parte AE, & à tota BA, & altera parte EB comprehensis.*

Trahatur à diuisione E parallela ad alterum laterum; factáque erunt duo rectangula, de quibus sermo est, nigrum, & album; quæ ex 2. propos. 2. Coroll. continebuntur nigrum sub segmento EB, & tota AB, vel æquali BD, & album sub tota AB, vel æquali AC, & segmento AE.



Quapropter cum hæc rectangula album, & nigrum in quadrato CB contineantur, eiq; commensurentur; patet esse æqualia. Vel prob. ex preced. quia AB secta est, vtcumque, & AC data æqualis ipsi AB, vnde rectangula nigrum, & album, ex tota, & segmentis AB, erunt æqualia rectangulo BC 1 secta, & non secta comprehenso.

COROLLARIVM.

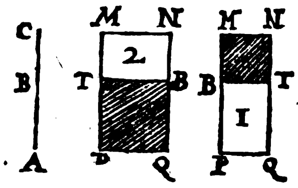
ELicies. Quod licet propositio de vnica sectione loquatur; adhuc tamen verificatur de pluribus sectionibus, ne dum vnius lineæ, sed vtriusque; eadem enim hæc prop. quæ 3, est, nisi quòd ambæ lineæ, quæ dantur, hic ponuntur æquales, quæ comprehendunt angulum rectum, & ideò hic faciunt quadratum, ibi verò inæquales, & faciunt rectangulum. Vnde quæ verificantur de precedenti, etiam de hac vera sunt.

THEOR. III. PROP. V. Euc. 3.

Si recta linea secta sit, vtcumque; rectangulum sub tota, & vno segmentorum comprehensum, est æquale rectangulo, quod sub ambobus segmentis continetur, & quadrato, quod ab ipso segmento efficitur.

DIuidatur linea AC vtcumque in B, & eligatur, quæ pars magis placuerit, V. g. BC; fiatque rectangulum comprehensum à tota CA, & segmento BC; quod sit I semialbum. Deinde à puncto diuisionis B mensurato in PM ducatur parallela BT. Nam, quia BP est æqualis parti BA, & PQ parti BC erit rectangulum album I illud sub segmentis contentum, de quo loquitur propos. Pariter cùm BM, & MN sint æqualia segmento BC, rectangulum nigrum MT erit quadratum illius segmenti, sub quo, & tota, rectangulum continetur nimirum MQ. *Dico itaq; rectangulum BQ ex segmentis, & quadratum MT ex segmento, esse æqualia rectangulo MQ contento ab ipso segmento MN; nimirum æquali BC, & tota PM æquali lineæ CA.*

Probat ex 3. propos. Quia linea PM secta est, vt nobis placuit, iuxta mensuram CB, & data est altera non secta æqualis, vt placet ipsi CB, nimirum MN. Vnde rectangula album, & nigrum ex non secta MN, & segmentis PB, & BM contenta æqualia erunt ex 3. huius rectangulo ex tota secta PM, & non secta MN comprehenso; Probatur etiam alio modo. Quia rectangulum I ex segmentis, & quadratum nigrum ex segmento BC ex constructione continentur in rectangulo MQ. Et idem erit, si eligas alterum segmentorum, & fiat eodem modo rectangulum MQ, quod est 2.



COROLLARIVM.

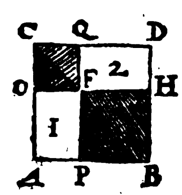
HInc est, si totum rectangulum I, & rectangulum 2 componerentur; quòd facerent quadratum, dummodo secundùm latera longiora NQ, vel PM fieret compositio. Patet, quia latera longiora, V. g. PM constant ex duobus segmentis maiori AB, & minori BC. Sed minora latera sunt duo eadem segmenta maius rectanguli 2, minus rectanguli I. Quare, si componatur facient totum latus PM; Vnde latera erunt æqualia totius compositi, & ideò totum compositum ex duobus rectangulis I, & 2, integratum erit quadratum.

THEOR. IV. PROP. VI. Euc. 4.

Si recta linea secta sit vtcumque, Quadratum, quod à tota describitur, æquale est vtilis quadratis, quæ describuntur à partibus, & insuper duobus rectangulis, quæ à partibus comprehenduntur.

SI linea AB, vt libet, diuidatur in P. Dico; quòd, si ex parte AP fiat quadratum, & aliud ex alia parte PB, & ex iisdem partibus AP, & PB duo rectangula fiant; *hæc omnia fore æqualia quadrato, quod à tota describitur.*

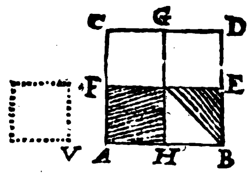
Probatur ex præceden. propos. Nam si fiat ex tota AB, & parte PB rectangulum QB & in eo per parallelam HF à puncto H æquali segmento PB describatur quadratum, habebimus quadratum nigrum ex segmento, & rectangulum 2 ex segmentis, & totum QB ea continens. Item, si id fiat ex parte minori AP, habebimus quadratum nigrum, & rectangulum I, ex segmentis, & hæc continens QA. Quæ rectangula I, 2, & quadrata nigra equant comprehensa sub tota, & partibus, vt sunt rectangula ea continentia QB, & QA: Sed, & Coroll. propos. anteced. ea si coniungantur, faciunt quadratum æquale quadrato ex tota AB descripto; Ergo duo quadrata ex partibus descripta, & duo rectangula ab ijs comprehensa equantur quadrato ex tota AB descripto.



CO-

COROLLARIVM.

Hinc elicitur, lineas duplas facere quadrata sua quadruplicia. Nam si detur linea v, & dupla A B, super quam fiat quadratum A B C D; & diuisis lateribus singulis per medium, trahãtur parallelę ad latera F E, & H G; quę se intercipiendo ex 2. huius propos. Cor. æqualia efficient segmenta, quod sint dimidia æqualium laterum quadrati magni C B. Sequitur omnia quadrata esse, & æqualia inuicem, & consequenter quadrato v punctato, cui ob lateris A H, quod sit dimidium A B, æqualitatem, ex eis vnum, V. g. nigrum quadratum æquatur; Ergo & omnia: Sed hęc quadrata sunt quatuor. Ergo quadratum illa continens C B quadruplum est quadrati punctati v.

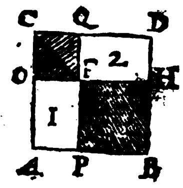


COROLLARIVM II.

Elicitur quoque è contra; quòd si quadratum sit quadruplum alteri; latus maioris esse duplum minoris lateri: Quia, cùm quadratum nigrum in minori quadrato sit ęquale minori punctato v, sequitur; vt latera quoque sint ei æqualia: Quare A H æquale erit lineę v. Sed A H est æquale lineę H B; quòd quadratum eius semininigrum sit æquale ex hypothesi nigro. Ergo etiã latus H B est æquale lateri v. Quadere totum latus A B erit duplum lateris v.

COROLLARIVM III.

Hinc quoque manifestatur. Parallelogramma circa diametrum quadrati esse quadrata: Quia demonstrabitur ductam diametrum in figura propositionis, C F, & F B in quadratis nigris esse vnam, & eandem lineam; si rectangula C P, & Q B componantur, ita vt partes ęque commensurentur. Nam tunc latus P F rectanguli, & Q F alterius coincident, & eandem lineam fiet cum lateribus rectangulorum nigrorum; Vnde quadrata nigra se tangent in puncto F, quare, & diameter C F, & F B se tangent in eodem puncto. Erunt etiam in directum, quia anguli apud F recti à diametro bifariam diuiduntur, ex propos. 34. & latera subtensa sunt æqualia, vtpote latera quadratorũ: Cùm itaq; anguli C F Q, & H F B nigri sint semirecti, & angulus F rectus; Ergo lineę C F, & F B incidentes in lineam, V. g. Q F faciunt angulos semirectum nigrum, & album cum altero semirecto ad eandem partem nigro duobus rectis æquales; Quare illi ex prop. 11. lib. 1. diametri C F, & F B in directum erunt, & erit vna linea; & ideò diameter quadrati C B maioris. Ergo parallelogramma nigra circa diametrum quadrati C B magni erunt quadrata.

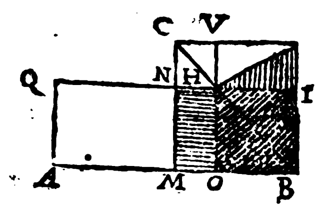


THEOR. V. PROP. VII. Euc. 5.

Si recta linea secetur in partes æquales, & inæquales, rectangulum sub inæqualibus segmentis totius comprehensum, vnà cùm quadrato, quod nascitur ab intermedia sectionum, æquale est ei quadrato, quod à dimidia describitur.

Diuidatur linea A B in partes æquales, vt in M, & non æquales in O: Superque medietatem M B fiat quadratum; tractoque diametro B C, ab o puncto inæqualium partium, excitetur parallela O V lateri quadrati, V. g. C M, & vbi secat diametrum in H ducatur Q I parallela ad A B, & ducta ab A ei perpendiculari A Q, erit rectangulum O Q ex parte nigrum segmentis inæqualibus A O, & O B contentum, *de quo dico; quòd cùm quadrato ex* M O *inter media sectionum s. quadrato* C H, *sit æquale quadrato à medietate descripto* C B.

Probatur. Nam pro Progress. primò ex Coll. 3. anteced. prop. Rectangula nigrius, & album sunt quadrata, vtpote circa diametrum C B consistentia. Quadratum verò paruum album, ex prop. 2. Coroll. 1. huius factum super N H, dicitur etiam factum super M O intermedia sectionum; & latus O H rectanguli Q O ex parte nigri æquatur ipsi O B: Vnde habemus rectangulum Q O, & quadratum paruũ C H, de quibus loquitur propositio, & dicit esse æqualia quadrato B C ex dimidiâ.



Progress. 2. Considerandum deinde complementa nigrum, & seminigrum, ex propos. 35. primi inuicem esse æqualia, quibus vtrisque, si addas quadratum nigerrimum per imaginationem adhuc remanebunt æqualia.

Progress. 3. Complementum autem alterum nigrum N O, cum quadrato nigro addito æquatur rectangulo albo M Q, vtpote ex propos. 37. primi inter parallelas, & super æquales bases A M, & M B posita.

Progress. 4. Idcircò concluditur, quod si complementum semialbum, cum quadrato nigro, ex 2. Progress. æquatur complemento nigro, & eidẽ quadrato nigro: At huic tertio, ex 3. Progr. æquatur rectangulum album; quod etiam sint æqualia inuicem rectangulum videlicet album, quadrato nigro, cùm complemento semialbo.

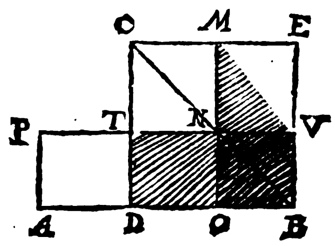
Progress. 5. Adde itaque vtrisque æqualia, nempe, rectangulo albo complementum nigrum, & sit rectangulum ex segmentis inęqualibus O Q, & quadrato nigro, complementoque seminigro idem complementum nigrum, vt fiat Gnomon N B V: Eritque rectangulum ex segmentis inæqualibus Q O æquale Gnomoni N B V: Adde rursus vtrisque quadratum album C H, *eritque rectangulum* Q O *cum quadrato* C H, *æquale Gnomoni* N B V *cum quadrato eodem* C H *complente quadratum, nimirùm* C B, *ex dimidia*, quod erat probandum.

THEOR. VI. PROPOS. VIII. Euc.6.

Si recta linea data bifariam secetur, & illi recta quædam linea in rectum adijciatur; rectangulum comprehensum à totâ datâ, & additâ, tamquam vno latere, & adiectâ solùm, tamquam alio, vnà cum quadrato, quod describitur à dimidia; æquale est quadrato, quod à medietate, & adiuncta; tamquam vnâ lineâ, describitur.

SI data linea A O diuisa per medium in D, & ei alia addita sit O B. Dicit propositio, quòd si à dimidia, & addita simul, nimirum D B, fiat quadratum C B, & ex tota A O data, cum adiecta tamquam vnâ lineâ A B, & adiectâ solùm pro alio O B; vel æquali B V, fiat rectangulum P B; *Quod hoc rectangulum erit æquale illi quadrato* C B, *non tamen se solum; sed cum quadrato* N C, *quod fieret ex* D O *dimidia.*

Progress. 1. Ductâ lineâ O M; & diametro C B per N. Rectangulum A V habet latus B V æquale adiectæ O B, ex hypothesi; Ergo nigerrimum rectangulum, ex Coroll. 3. propos. 6. est circa dia-



metrum, & ideò quadratum: Ergo latus O B est æquale lateri B V: Alterum verò latus A B est tota data A O, cum adiecta O B, ideò est rectangulum, de quo loquitur propos.

Sic C N est quoque quadratum, quòd sit circa diametrum, & ex Coroll. 2. propos. 2. dicitur contineri à linea D O dimidiâ; Ergo est quadratum, quod cum rectangulo prędicto æquale probandum est quadrato C B ex dimidia D O, & adiecta O B, tamquam vno latere confecto, vt vult propositio.

Progress. 2. Nunc considerandum est complementa inuicem, ex propos. 35. primi esse æqualia nigrum T O, & seminigrum. Sed complemento nigro est æquale rectangulum album P D, vtpote in parallelis, & super æquales bases A D, & D O, ex propos. 37. primi. Ergo rectangulum album, erit æquale complemento seminigro.

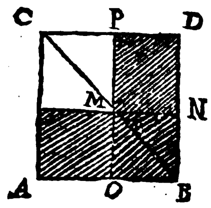
Progress. 3. Addamus complementum nigrum T O, & quadratum nigrum rectangulo albo, & fiet rectangulum P B de quo loquitur propositio: Addamus quoque eadem, nigrum complementum, & quadratum nigrum complemento semialbo, & fiet Gnomon T B M: Vnde additis vtrinque ijsdem, rectangulum P D æquale prius, ex 2. Progress. complemento seminigro, erit æquale Gnomoni T B M.

Adde rursus quadratum C N album, ex dimidia; ipsi Gnomoni fiet quadratum C B: Adde quoque rectangulo P B etiam hoc quadratum album C N; & erit æquale, quadrato C B, quemadmodum prius erit æquale Gnomoni; quod volebat propositio.

THEOR. VII. PROP. IX. Euc.7.

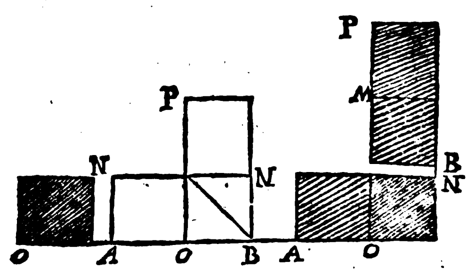
Si recta linea secetur vtcumque; quod à tota, quodq; ab vno segmentorum vtraque simul quadrata fiunt æqualia sunt illi, quod bis sub tota, & dicto segmento comprehenditur rectangulo, & illi, quod à reliquo segmento fit quadrato.

SIt data A B, quę vtcumque secta sit in O. Dico, quod, si fiant duo quadrata, vnum minus ex segmento, quod eligeris, vt B O; alterum maius C B ex tota: Deinde fiant duo rectangula, vt A N, & B P sub tota, & eodem segmento comprehensa, *erunt illis quadratis æqualia addito tamen rectangulis quadrato alterius segmenti* A O.



Progress. 1. Si rectangula A N, & P B superponantur, & latus maius ponatur super minus efficietur pars O N quadrata, cùm O B, & B N sint æquales parti minori O B; & ideò inter se, quare efficietur Gnomon A B P æquale duobus rectangulis non solùm tamen; sed addito quadrato nigro O N, cùm causâ superpositionis illud quadratum O N nigrum, quod in duplici rectangulo erat duplex, in Gnomone factum sit vnicum.

Progress. 2. Adde deinde Gnomoni A B P qua-



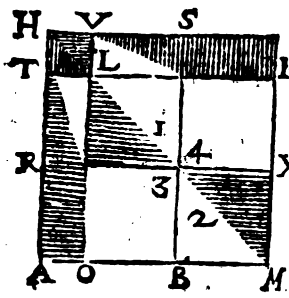
dratum ex reliquo segmento, ex prop. 2. Coroll. 2. complebit quadratum magnum C B, nam ex eo Coroll. quadratum C M est idem, ac quadratum ex A O: Itaque quadratum C B magnum cum quadrato nigro O N ex segmento est æquale duobus rectangulis A N, & P B nigris; sed non solis; verùm addito illis ipso quadrato C M ex A O altero segmento. Quod vult propositio.

THEOR. VIII. PROP. X. Euc.8.

Si recta linea secetur vtcumq; rectangulum quater comprehensum sub tota, & vno segmentorum cum eo, quod à reliquo segmento fit quadrato, æquale est ei, quod à tota, & dicto segmento, tamquam ab vna linea, describitur quadrato.

SIt linea A B secta vtcumque in O. Dicit, quòd si fiant quatuor rectangula comprehensa à tota A B, & altera portionum, quam volueris, V. g. O B; & postea ex reliqua portione A O fiat quadratum: hæc omnia fore æqualia quadrato ex tota A B, & portione, quæ pro rectangulis comprehendendis electa est. Nimirum O B, si lineę totâ hęc pars insuper adderetur, & fieret A M.

Facto quadrato super A M, quod sit M H, ab extremo datę B, & sectionis pũcto O eexcitentur perpendiculares O V, & B S; perque puncta 4, & L in quibus secant diametrum agantur parallelę R X, & T I.



Probatur modo propositio, ex ipsa constructione.

Progreſſ. 1. Itaque inprimis rectangula H L nigrum, & semialbum 1, & 2 sunt quadrata, vtpote circa diametrum existentia, ex propos. 6. Coroll. 3. Et ex Coroll. 2. propos. 2. sunt facta ex O B: Ergo etiam reliqua duo alba, ex defin. 1. quia eorum angulus 3, & 4, continetur æqualibus lateribus seminigrorum quadratorum, erunt quadrata.

Progreſſ. 2. Rectangula quoque nigra, & seminigra, vt O R, & alia tria sunt æqualia inuicē; siquidem æqualibus duobus lateribus comprehenduntur A O. & O B, ex Coroll. 2. prop. 2. huius, vt per se patet: Nam L V est æqualis T L, &c. Sic A R æquatur lateri V S, &c.

Progr. 3. Adde itaque rectangulum O R, quadrato O 3 eritq; rectãgulum R A B 3 cõprehensum sub tota A B, & segmẽto O B; & si reliquis singulis quadratis addas singula rectangula quadratis semialbis semialba rectangula, & albis quadratis nigra rectangula, erunt quatuor rectangula; de quibus loquitur propositio sub tota A B, & segmento O B comprehensa, quæ cum quadrato H L nigro alterius segmenti A O integrant quadratum magnum ex tota A M confectum, & ei adæquantur, quod erat ostendendum.

EXPENSIO III.

De potentiâ laterum Triangulorum.

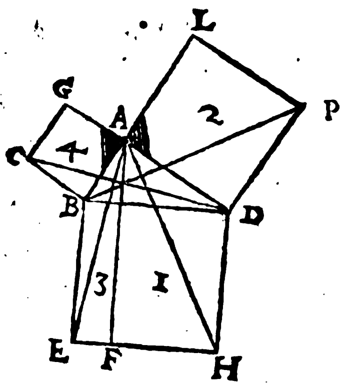
EXcerpsimus propositionem 47. & 48. à primo libro; & hic sub suo titulo apposuimus; vt ordo seruaretur materiarum, spretis numeris: Vnde audacię venia dabitur, quę in melius cesserit. Eximiam autem hęc Expensio consequitur vtilitatem: quòd in ipsâ mensura triangulorum, quoad areas fundetur, & ferè vniuersa Mathematica maximè in hac inixa sit; vt vllus tractatus in ea vix reperiatur; qui multas ex hac Expensione probationes, principiaque non desumat.

THEOR. I. PROP. XI. Euc. 47. Primi.

In triangulis rectangulis quadratum, quod à latere rectum angulum subtendente describitur, æquale est duobus quadratis, quæ à lateribus angulum rectum continentibus describuntur.

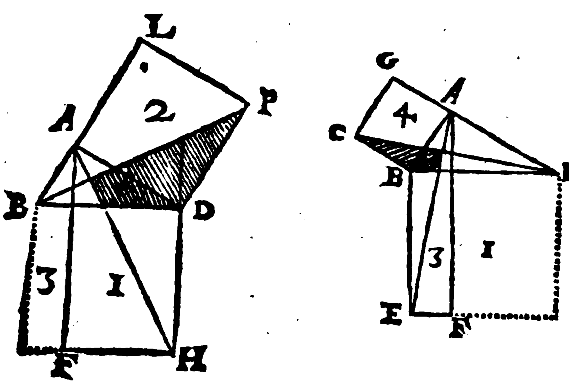
FIat rectãngulum habens rectum angulum A; duo verò latera quomodocumque, seu æqualia, seu inæqualia A B, & A D angulum A claudentia, basisque subtensa angulo recto A sit B D. Fiat itaque ex propos. 38. primi, quadratum 4 super A B, & aliud 2 super A D, & ex basi B D fiat aliud quadratum 1 3. *Dicit itaque propositio; Quod quadratum 1 3 basis sit æquale quadratis 2, & 4 laterum angulum rectum stipantium.*

Quod, vt probet, secundùm documenta propos. 32. à puncto dato A: nempe vertice anguli recti ducit parallelam A F lineę B E, quę diuidat quadratum 1 3 in duas partes 1, & 3. Deinde ab angulis quadratorum ad angulos trianguli oppositos rectæ ducuntur, vt C D, & B P, & etiam E A, & H A ab angulis quadrati basis ad angulum rectum A. Quæ ductæ faciunt triangula hinc quidem C B D, & E B A: Inde verò A D H, & B D P infra consideranda.



Probatio autem in tres considerationes secernitur. Vnde Progressus 1. intendit probare latera quadratorum ex cruribus, quæ angulo recto adiunguntur in vnam eandemque lineam conuenire, cum cruribus ipsis trianguli angulum rectum claudentibus, quale est latus G A quadrati 4, & A L quadrati 2; nimirum vnicam lineam esse B A, & A L sicut A D, & A G. Hoc autem sic ostenditur. Crus A B incidens in crus A D angulum rectum A trianguli efficit, & latus quoque quadrati A L incidens in idem crus A D angulum rectum nigrum efficit quadrati. Ergo hæ duę lineę incidentes in eandem; & facientes duos angulos rectos in directum erunt, ex prop. 11. pr. & vnam rectam B L efficient. Et idem erit de linea G A respectu lineę A D, quę incidentes in lineam B A angulos rectos efficiunt quadrati nigrum, & trianguli A. Vnde G A, & A D erit vna recta linea G D.

Progreſſ. 2. Vergit ad probandum triangula



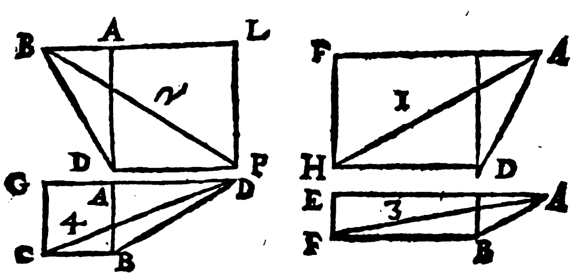
C B D, & A B E esse æqualia. Similiterque B D P, & A D H: quę claritatis gratiâ in duas figuras diuisimus: Itaque in maiori figurâ 2. habemus triangulum A D H, & D B P, de quibus dico. Equalia esse. Si quidem illa triangula sunt inuicem æqualia, ex propos. 22. Primi, quorum vnum crus vni, & alterum alteri est, & angulũ conclusum æqualem obtinent; quod de triãgulis B D P, & A D H propositis verificatur. Quoniam latus D P vnius est æquale lateri A D alterius, cùm sint eiusdem quadrati 2, & latus B D prioris lateri D H alterius posterioris; quod sint latera eiusdem quadrati 1 3. Angulus quoque A D P niger, est alteri angulo albo B D H ęqualis, vtpote recti ambo, & spa-

& spatium B A D nigriùs commune vtrisque,quare totus angulus niger apud D addito spatio B D A æquabit totum angulum album apud D, addito illo spatio eodem B D A, qui sunt anguli triangulorum æqualibus cruribus conclusi: Quare ipsa triangula erunt quoq; æqualia B D P, & A D H.

Hæc autem eadem probatio ostendit etiam æqualitatem triangulorum C D B, & A B E in altera figura minori 4. Quoniam latera A B vnius, & B C alterius sunt æqualia, vtpote latera eiusdem quadrati 4. Item latera E B vnius, & B D alterius, quod sint latera quadrati 1 3. Duo quoque anguli A B D æquales; quoniam,quidem angulus trianguli ad B nigrior communis vtrisque reliquus verò niger, in quo hic non occupat alterum album apud B angulus rectus est, sicut & albus. Quare triangula C B D, & E B A erunt æqualia.

Progress. 3. Comparat triangula cum quadratis; & intendit ostendere quadrata quoad continentiam, & aream eis esse duplicia: Pro quo reminiscendum est id,quod diximus in primo Progress. nimirum G A. & D A,& similiter A L, & A B esse lineas in directum positas, & vnam lineam rectam conficere. Deinde reducendum est ad memoriam. Quod fecerimus lineam A F parallelam lateribus B E, & D H quadrati 1 3, & ideò diuidere illud in duo parallelogramma 1, & 3.

Quo posito consideremus priùs parallelogrammum 1 comparando illud ad triangulum H D A,& videbimus ambo super basim H D, & esse inter parallelas F A, & H D: Quare concludemus ex propos. 39. Lib. 1. parallelogrammum 1 esse duplum trianguli D H A. Eodemq;argumento vtemur ad probandum paruum parallelogrammum 3 esse duplo maius, quam suum triangulum F B A.



Eodemque methodo probabimus de quadratis, nimirum esse dupla suorum triangulorum. Sic quadratum maius 2 est inter parallelas D P,& B L (B L enim est vna recta, vt ostendimus Progress. 1.) & super eandem basim D P. Vnde quadratum 2 erit duplo maius trianguli B D P.

Idem quoque argumentum vrgebit de quadrato 4 respectu sui trianguli C B D: Nam inter parallelas G D, & C B, & super eandem basi C B collocatum, duplum erit trianguli C B D.

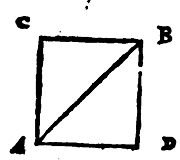
Progress. 4. Quibus omnibus ostensis argumentum clauditur ostendendo parallelogramma quadratis, quodlibet suo correspondenti, & ad eandem partem rectanguli cõstituto æquari. V.g. Parallelogrammum 1 cum quadrato 2, & parallelogrammum 3 quadrato 4.

Hoc verò deducitur à Progress. 3. Nam, cum triangula facta super basim parallelogrammi 1,& quadrati 2, scilicet B D P, & A D H, sint probata æqualia: Ergo etiam parallelogrammum 1, & quadratum 2, vtpote dupla triangulorum erunt æqualia ad inuicem. Et tale erit parallelogrammum 3, & quadratum 4, vtpote dupla suorum triangulorum æqualium.

Quoniam itaque quadrata 4, & 2 sunt æqualia parallelogrammis 3, & 1, quæ integrant totum quadratum 3 1 factum ex basi B D; Ergo *quadratum ex B D angulum rectũ subtendente æquatur duobus quadratis factis ex lateribus B A, & A D angulum rectum concludentibus.*

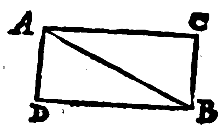
COROLLARIVM I.

Ex hac propositione, quadratum diametri duplum quadrati lateris, arguitur. Quoniam angulus, cui diameter A B subtenditur, qui V.g. est C, rectus est, & triangulum A C B rectangulum est; Quare quadratum diametri est æquale quadrato duorum laterum; sed illa laterum quadrata sunt inuicem æqualia; Ergo quadratum diametri erit duplum vnius eorũ seorsim sumpti.



COROLLARIVM II.

Elicitur quoque quadratum diametri figuræ altera parte longioris æquale esse duobus quadratis laterum A C, & C B: Quia diameter A B subtendit angulum rectum C.



THEOR. II. PROP. XII. Euc.48.l.1.

Si quadratum, quod ab vno laterum trianguli describitur æquale est eis, quæ à reliquis lateribus trianguli describuntur, quadratis, angulus comprehensus sub reliquis trianguli lateribus rectus est.

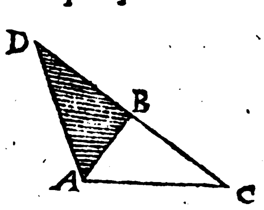
Conuertit hęc propos. antecedentem ad hoc, vt ostendat securum fore argumentum ab æqualitate quadrati basis, & laterum ad rectitudinem anguli.

Sit itaq; triangulum A B C. Dicit, quòd si quadratum confectum super latus maius A C, sit æquale quadratis simul sumptis crurum A B,& B C, *angulum B fore rectum.*

Vt autem id ostendat erigit super vtrumlibet laterum,V.g. A B à puncto B anguli, qui maiori lateri opponitur, versus partes exteriores perpendicularẽ B D æqualem reliquo lateri eiusdem anguli B C: Postea coniungit extremum D cum extremo lateris B A, super quod perpendicularis erecta est.

Prob. Progr. 1. Basis A D trianguli nigri describit quadratum æquale duobus quadratis, quę describuntur à lateribus A B, & B D angulum rectum A, ex effectione, claudentibus; vt preced. propos. ostensum est.

Itaque quadrato eidem ex basi erunt æqualia quadrata ex cruribus A B, & B C albi trianguli; quòd crus B C sit ex effectione æquale cruri B D, & crus A B commune.



Idcirco etiam quadratum ex basi C A æquale quadratis crurum albi trianguli, ex hypothesi, consequenter æquabitur quadrato ex basi nigri trianguli, vtpote æquali æqualibus quadratis crurum.

Progress. 2. Cùm itaque quadrata basium A C, & A D sint æqualia; ipsę quoque lineę erunt ęquales A D, & A C, quòd quadrata æqualia æqualibus etiam constent lateribus.

Quadere ex propos. 23. lib. 1. angulus apud B albus erit æqualis nigro. Quia crura cruribus singula singulis, & basis basi ostensa est æqualis; Sed angulus niger apud B rectus est ex effect., ergo etiam albus B erit rectus.

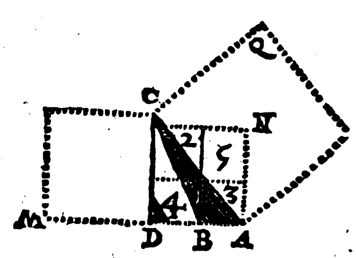
THEOR. III. PROP. XIII. Euc. 12.

In Amblygonijs triangulis quadratum, quod fit à basi angulum obtusum subtendente, maius est quadratis, quæ fiunt à cruribus eundem angulum comprehendentibus rectangulo basis comprehenso sub altero ex istis cruribus, in quod perpendicularis à vertice cadat, & sub adiuncta linea, quæ inter perpendicularem, & crus alterum intercipitur.

SIt triangulum Amblygonium A B C, & angulus apud B niger, obtusus, & perpendicularis C D cadat extra triangulum in crus A B prolungatum in D; nempe ad partem anguli acuti, vt Coroll. 10. prop. 17. (posset etiam cadere in latus B C ab A, si placeret.) Dico, quod quadratum descriptum ab A C basi angulo obtuso subtensâ *est maius, quàm duo simul, quæ describuntur iuxta mensuram laterum* A B, & B C angulum obtusum ambientium; *& excedit illa rectangulis duobus*, quę fiunt à crure A B, in quod productum perpendicularis ducta est, & à segmento exteriori D B, quod est inter C B crus alterum, & C D perpendicularem.

Progress. 1. Probatur itaque, cùm enim recta A D diuisa sit vtcumque in B, ex propos. 6. erit quadratum rectę totius A D, æquale quadratis segmentorum 2, & 3, & rectangulis duobus 4, & & 5 in segmentis comprehensis: Ex pręced. verò propos. quadratum A Q ex basi obtusum angulum subtendente punctatum, est æquale duobus punctatis C M, & D N crurum perpendicularium C D, & D A; quòd angulus niger D sit rectus. Quapropter quadratum A Q ex basi erit æquale quadrato C M perpendicularis C D, & duobus quadratis 3, & 2 ex segmentis, simul cum rectangulis duobus 4, & 5 segmentorum ipsorum.

Progress. 2. Quadratum verò cruris C B angulum obtusum B ambientis (quòd tibi mente supplendũ est) erit æquale duobus quadratis C M ex perpendiculari D C, & quadrato ex B D, nimirum quadrato 2 ex eadem antecedenti



propositione, quòd sit subtentum latus angulo nigro D recto. Pone itaque illud mente conceptum ex C B pro istis duobus ex D B, & C D adhuc quadratum maximum pũctatum A Q ex latere A C erit ęquale quadrato imaginato ex C B quadratoq; 3 ex B A duobusque rectangulis 4, & 5 ex segmentis. Quapropter *quadratum* A Q *basis erit maius quadratis Crurum angulum obtusum claudentium* C B, *&* B A, *duobus rectangulis* 4, *&* 5, *quæ sub segmentis* D B, *&* B A *continentur*, quod erat ostẽdẽdũ.

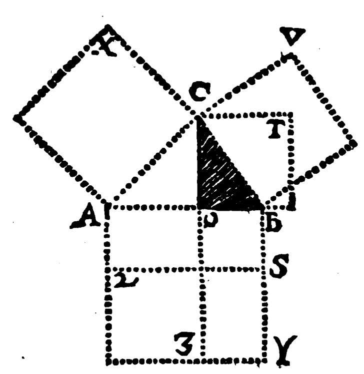
THEOR. IV. PROP. XIV. Euc. 13.

In omni triangulo Oxigonio Quadratum lateris angulum acutum subtendentis, minus est quadratis, quæ fiunt à lateribus illum acutum comprehendentibus rectangulis duobus comprehensis ab eo latere, in quod perpendicularis cadit, & segmento eiusdem inter perpendicularem, & angulum acutum intercepto.

SIt triangulum A B C, quod crus, V. g. A C oppositum angulo dato acuto B nigro habeat. Dico quod hæc basis describit quadratum A X minus quadratis B V, & A Y crurum illum angulum ambientium A B, & B C; Quantitas autem, quâ inuenitur minus, sunt duo rectangula, quę comprehenduntur pro vno latere à toto crure ex ijs, quę acutum angulum ambiunt, V. g. A B, in quod perpendicularis cadat, & pro alio latere claudatur ab eo segmento, quod intercipitur inter punctum O, & verticem B; Nimirum inter punctum illud, in quod cadit perpendicularis, & acutum angulum. Itaque quadratum punctatum A X minus est quadratis A Y, & B V punctatis rectangulis A S, & O Y.

Progess. 1. Deductâ perpendiculari ad alterum crurum ex ambientibus, puta A B: Latus A B erit sectum vtcumque in O. Quamobrem ex propos. 9. huius rectangula duo punctata A S, & O Y comprehensa à crure toto A B, & portione O B, vel æquali B S, & quadratum 3 2 ex A O sunt simul æqualia quadrato toti A Y, sed non soli, verùm simul cum quadrato O S. Quamobrem addito quadrato O T punctato ex perpendiculari O C vtrinque, adhuc hęc illis remanebunt æqualia; nempe rectangula A S, & O Y qudratum 3 2, & O T nuper additum æquabuntur eidem O T, & quadrato A Y, & quadrato O S.

Progress. 2. Quadratum factum super crus C B alterum ambientium angulũ nigrum acutum B, nempe B V, ex propos. 11. huius est æquale duobus; nempe ei O T, quod à perpendiculari fit, & alteri minimo O S propter angulum nigrũ rectum O, cui subtenditur.



Quapropter B V poterit substitui loco horum duorum, quibus æquatur. Et hinc emerget quod rectangula illa duo A S, & O Y, quæ cum quadratis O T, & 23 erant æqualia tribus quadratis in Progr. 1. nimirum A Y, & O S, & O T sic nunc cũ ijs sint æqualia duobus; nimirũ quadrato B V ex crure, & quadrato A Y ex altero crure angulum acutum B ambientibus.

Pro-

Progreſſ. 3. Quadratum A X ex baſi A C ſubtenſa angulo acuto B, ex propoſ. 11. æquale eſt quadrato 2 3, & quadrato O T ex perpendiculari. Quadere ſi ei adderentur rectangula A S, & O Y quadratum A X eſſet quoque equale quadrato maximo A Y ex crure, & B V quadrato ex altero crure ambientiũ angulum acutum B: Quoniam ex 2. Progreſſ. illa duo quadrata 2 3, & O T cum rectangulis iſtis duobus, quadratis A Y, & B V ex cruribus erant æqualia: Vnde vice quadratum 2 3, & O T poſito quadrato A X ex baſi A C cũ rectãgulis iiſdem, quadratis ex cruribus æquabitur, & propterea quadratũ A X ex A C baſi erit minus quadratis crurum A B, & B C duobus rectangulis A S, & O Y, quod erat probandum.

EXPENSIO IV.

De reperiendis æquipotentibus lineis.

Licet ad plenam huius inquiſitionis cognitionem particularis tractatus inſtitutus ſit; vt infra. Hic tamen illius primę baſes iaciuntur, & docet Euclides dato aliquo rectilineo reperire lineam, quę poſſit efficere quadratnm illi æquale; Vel etiam ita ſecare lineam, vt ſegmenta æquè poſſint. Quod fuit neceſſarium pręcognoſcere maximè ob 10. Libri plenam cognitionem.

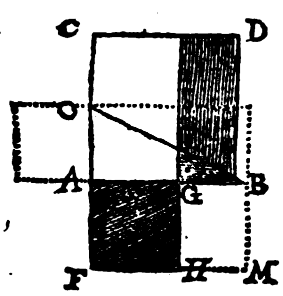
PROB. I. PROP. XV. Euc. 11.

Datam lineam rectam ita ſecare, vt rectangulum ſub tota, & altero ſegmentorum minori comprehenſum, æquale ſit quadrato, quod ſit à reliquo ſegmento.

Data ſit recta A B, quam ita oporteat ſecare, vt tota cum ſegmento minori poſſit comprehendere rectangulum æquale quadrato, quod à maiori ſegmento deſcribitur.

Deſcribatur ex A B quadratum A D, & illud latus, quod cum data A B angulum rectum claudit, vt eſt C A diuidatur in duas partes æquales in O. Trahaturque recta O B ab angulo B ad illud dimidium O, Et æquale ipſi O B prolungetur latus biſariam diuiſum C A ab O medietate vſque in F. Et excedet medietatem O A portione A F: Huic ergo portioni A F detruncetur æqualis ex A B datâ portio A G, & iam id fecimus, quod poſtulat propoſitio, *ſiquidem quadratum ex A G maiori portione erit æquale rectangulo ex A B & G B tota, & minori portione.*

Quòd verò A G poſſit detruncari patet, quia A O, & A B duo crura ſunt maiora, quam O B crus tertiũ ex prop. 20. Vt autẽ probetur propoſitio, fiat ſuper A G maius ſegmentum quadratum A H à puncto G, & rectangulum G D, ex tota, & minori ſegmento: Et dico hoc quadratum nigrum rectangulo nigro eſſe æquale.



Progreſſ. 1. Quoniam ex 8. propoſ. huius rectangulum, quod à tota cum adiecta pro vno latere, & ab adiecta ſolùm pro alio vnà cum quadrato dimidię totius æqualia ſunt quadrato, quod deſcribitur à dimidia ſimul cum adiuncta: hinc eſt, quòd quadratum punctatum ex medietate A O cum rectangulo C H ex tota C A cum adiecta A F, pro vno latere, & alio latere ab adiecta A F, vel F H comprehenſo erit æquale quadrato O M ex dimidiâ O A, & adiectâ A F, vt vna, conſtituto.

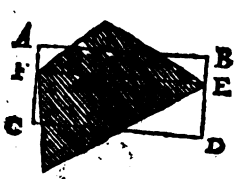
Progreſſ. 2. Quadratum verò B M eſt illud, quod fieret ſuper O B; quia latus eius O F æquatur ex conſtructione lateri O B. At quadratum ex O B ob rectum angulum apud A album, ex propoſ. 11. æquatur quadrato ex A O dimidiâ, & quadrato C B ex A B tota, ergo etiam æqualibus rectangulo C H, & ipſi quadrato A O, æquabitur ipſum A O quadratum, & C B, ex A B datâ quadratum.

Progreſſ. 3. Abijce itaque mente ab vtriſque quadratum A O nimirum à rectangulo C H, & quadrato C B, & adhuc remanebunt æqualia, vt priùs erant aſſociata cum illo. Rurſus deme à rectangulo eodem C H, & quadrato eodem C B commune ſpatium album C G, *& quadratum nigrum*, ex A G ſegmento *rectangulumque nigrum*, ex tota B D, & altero ſegmento G B *reſtabunt æqualia*, quod erat oſtendendum.

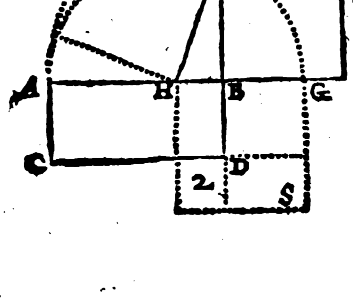
PROB. II. PROP. XVI. Euc. 14.

Dato rectilineo æquale quadratum conſtituere.

Sit Trapezium nigrum: quod ex documentis propoſ. 44. primi reducatur ad rectangulum A B C D. Quod facilimè efficies ſi eũ diuidas in duo triangula recta F E, quorum diuiſo biſariam latere, per eam diuiſionem agantur parallelę ad F E; nempe A B, & C D, & eas perpendicularibus cõiungas ab extremis F, E. Verùm ſi in rectilineo plura capiant triangula ea bina, & bina ad parallelogramma reduces, & inde per propoſit. 44. in vnicum parallelogrammum ea compones. Sit ergo latus huius rectanguli A B: quod prolungetur in G; itaut B G pars prolungata alteri lateri B D æqualis ſit. Deinde diuidatur per medium tota A G. Si medietas reperitur in puncto B erunt æqualia latera A B, & B G. Vnde rectangulum erit quadratum: nec aliud hoc caſu faciendum erit. Quod ſi punctum B non ſit medium, per medium diuidatur linea A G in H, & centro H fiat ſemicirculus A E G, ad interuallum medietatis. Poſtea prolungetur alterum latus B D, in quo centrum non eſt vſque ad E circuli circumferentiam, eritque linea B E perpendicularis, & hęc erit illa, quę quęritur, ex qua ſi fiat *quadratum* B V *hoc erit æquale rectangulo* A D.

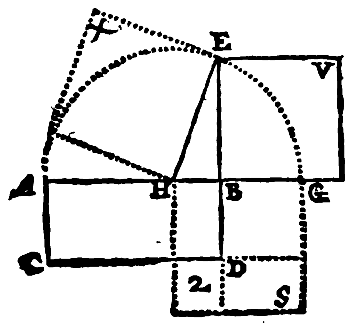


Ad quod oſtendendum à centro ad E eius extremitatem ducatur H E, eritque triangulum H E B habens angulum rectum B.



Pro-

Progreſſ. 1. Linea A G diuiſa eſt in æqualia in H, & non æqualia in B. Vnde ex propoſ. 7. huius rectangulum comprehenſum ſub ſegmētis inæqualibus, vt eſt A D, cuius latus B D æquatur ipſi B G, ex effectione, hoc, inquam, rectangulum, & quadratum ex intermedia H B, quod eſt punctatum paruum 2 ſimul, eſt æquale quadrato magno punctato H S ex dimidia.



Progreſſ. 2. Quadratum quoque H X erectum ſuper H E baſi æquatur quadrato 2 ex intermedia, & quadrato B V ex perpendiculari, ex prop. 11. huius: Sed hoc quadratum H X eſt æquale quadrato H S; Quia ſcilicet eorum latera H E, & H G ſunt æqualia, vtpote radij eiuſdem circuli: Ergo quadratum H X ex baſi erit æquale quadrato 2 ex intermedia, & rectangulo A D ſiquidem ex 1. Progreſſu quadrato H S ea oſtenſa ſunt æqualia.

Progreſſ. 3. Cum itaque quadratum 2 ex intermedia, & B V ex perpendiculari ſint æqualia quadrato HX; Rurſuſque idem quadratum 2 ex rectangulum A D ſint æqualia quadrato H X. Ergo inter ſe erunt æqualia quadratum B V cum quadrato 2, & rectangulum A D cum quadrato item 2 Aufer itaque commune quadratum 2, *& rectangulum* AD *reſtabit æquale quadrato ex* BV, quod erat oſtendendum.

TRA-

TRACTATVS VI.

In Euclidis Librum tertium de Circulis.

EGIT in duobus primis Libris Euclides de primo genere superficierum; nimirum de rectilineis, & non quidem de omnibus; sed solùm de præcipuis, & quæ alias figuras planas integrant, & componunt, vt sunt triangula, & quadrangula, nimirum, vt eas solùm, quæ erant elementares attingeret: In hoc verò tertio Libro agit de circulis, quæ figura est origo, & principium omnium linearum flexarum, puta Hyperbolæ, Parabolæ, Ellipsis, aliarumque similium, vt sicuti rectilineorum Elementa, & flexorum quoque doceat, his enim principijs ferè omnia fundantur, quæ tum de sphęra, tum de sectionibus conicis ostenduntur. Obiectum verò huius Libri est idem, quod primi, & secundi, nempe de sola circulorum æqualitate, vel actuali, vel potentiali, vel linearum in ipso descriptarum, peragere.

EXPENSIO I.

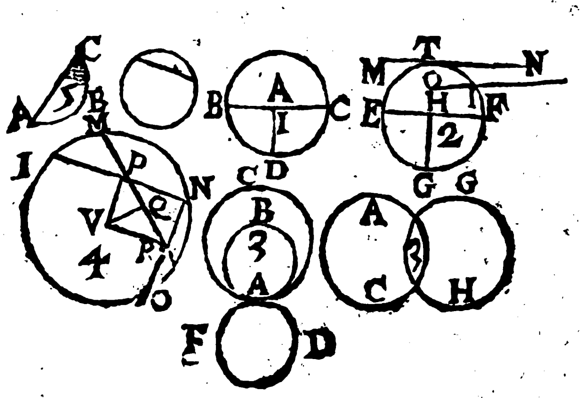
De Principijs.

LIcet aliquę Definitiones ad initium primi Libri traditæ sint ad circulum spectantes, vt diametri, semicirculi, &c. Illæ tamen tantùm exhibitę sunt, quę ad illum Librum pertinebant: Modò superadduntur alię, quę propriè huius loci sunt.

DEFINITIO I.

ÆQuales circuli sunt, quorum diametri sunt æquales, vel quorum radij sunt æquales.

Cùm enim ex ductu lineę, E. g. A D altero extremo A manente, tanquam clauo affixo, dùm extremum alterum se mouet vsque ad illud punctum, à quo discessit, circulus consurgat, & ab hoc ductu efficiatur, patet circulos fore æquales; quorum radius, vel semidiameter A D alteri G H fuerit æqualis, vel quorum diameter nimirum B C fuerit æqualis, ipsi E F, quod faciliter potest ostendi ex superpositione; Nam omnia puncta circumferētiarum, si circuli 1, 2 superponerentur, itaut centrum centro conueniret, & idem fieret, sibi inuicem inciderent, & eandem circumferentiam integrarent ob ęqualem distantiam ab eodem puncto medio.



DEFINITIO II.

REcta linea circulum tangere dicitur, quæ cùm circulum tangat producta illum non secat.

Vt recta M N circulum 2. E G F T tangit in T, quia producta vltra T in alteram partem non secat circulum, vt eum tangit N I, quę producta vltra I in O secat ipsum circulum, & ideò non dicitur tangens, quia tangeret solùm actu in I, potentia tamen eum secaret in sui productione.

DEFINITIO III.

CIrculi se mutuò tangere dicuntur, qui se se mutuò tangentes se se mutuò non secant.

Vt est circulus 3. B A interiùs tāgens, vel D F exteriùs tangens circulum C A, qui illum non secat, vt facit circulus H G, qui secat circulum A C.

DEFINITIO IV.

IN circulo æqualiter distare à centro rectæ lineæ dicuntur, cùm perpendiculares ad ipsas à centro ducuntur æquales, & magis distare illa dicitur, in quam maior perpendicularis cadit.

Sic quia in duas I N, & M Q perpendiculares P V, & V Q cadentes à centro V sunt æquales, lineę prędictę I N, & M Q sunt æquali distantiâ à centro remotę: At linea O N magis distabit; quam Q M; quia perpendicularis V R in eam cadens maior est, perpendiculari V Q, vt in 4. fig.

DEFINITIO V.

CIrculi segmentum est figura, quæ sub recta linea, & parte peripheriæ comprehenditur.

DE-

DEFINITIO VI.

Segmenti verò angulus est, qui sub recta linea, & circuli peripheria comprehendatur.

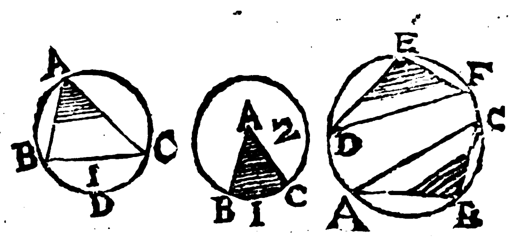
Segmētum itaque circuli est fig.5.portio circuli A B C. Angulus verò, niger est C: Quia tùm figura, tùm angulus circuli peripherię portioné A B C, & linea recta A C concluduntur.

DEFINITIO VII.

IN segmento anguli sunt, cùm crura claudentia circumferentiam, vertice attingunt, & basim habent, rectam segmentum efficiens.

Illi verò peripherię insistere dicuntur, quam crura angulum claudentia intercipiunt.

Angulus itaque niger apud A, est in segmento B A C, quòd eius vertex sit in circumferentia in A, & pro basi B C lineā, quę segmentū B A C facit, obtineat: At angulus idem niger insistere dicitur in peripheria B D C, quam crura se se aperientia A B, & A C concludunt.



DEFINITIO VIII.

SEctor circuli est figura comprehensa à duobus radijs angulum facientibus, & peripheria ab illis comprehensa.

Sector itaque circuli est A B C duobus radijs B A, & A C, & peripheriā B I C comprehensus.

DEFINITIO IX.

SImilia circuli segmenta sunt, quæ angulos capiunt æquales; aut in quibus anguli inter se sunt æquales.

Videtur aliquibus; quòd hic Euclides anticipauerit, & definitionem ponat, quę ostensione indigeret à 6. Libro dependente. Verùm, quia definitiones à Mathematicis non ostenduntur; sed accipiuntur tamquam nominum explicationes: hinc est, quòd hęc Definitio, licet quoad probationem dependeret à 6. Libro, si proponeretur tamquam propositio. Quia tamen tamquam Definitio exhibetur, à nullo dependet: nisi à sola explicatione: Sint itaque duo circulorum segmenta A B C, & D E F, quę excipiant angulos nigros æquales B, & E. Dicit quod illa segmenta debebunt appellari similia. Nec tamen hîc intendit Euclides agere de similitudine, vel proportione siue circulorum, seu segmentorum; sed tantùm de æqualitate, ad quam ostendendum erat necessaria hęc Definitio.

EXPENSIO I.

De punctis, tum centri, tum contactuum.

PVnctum duplici modo potest sumi, aut in medio circuli, aut in circumferentia. Si in medio, & sic aut erit centrum, aut extra centrū. Si in peripheria, & tunc erit aut contactus, aut sectionis. In hac itaque expensione agemus de punctis, tum meditulij, tum circumferentiæ quatenus tamen referuntur ad circulos: Nam de punctis contactuum, aut sectionum rectę lineę cum circulo sequenti expensione peragemus.

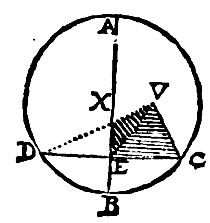
PROBL. I. PROP. I. Euc. I.

Dati circuli centrum reperire.

SIt datus circulus A B C D, cuius centrum oporteat inuenire.

Ducatur linea vtcumque D C, ex prop7.lib.I. diuidatur bifariam in E, & ab eo puncto eleuetur perpendicularis, quę extremis suis punctis circumferentiam attingat, & sit B A. Postea hęc quoque bifariam diuidatur in X. *Nam illud punctum diuisionis, erit centrum, quod quæritur.*

Probatur. Nam si punctum X centrum non est. Assignetur ab aduersarijs. Assignabiturque, vel in ipsâ linea B A, vel alibi.



Non in ipsa linea B A; Quia omne aliud pūctum diuidit eam inæqualiter, & consequenter, contra Definitionem centri, non vtrinquè à circumferentia distaret æqualiter. Sed nec assignabitur extrà lineam prædictam. Nam si potest, assignetur, & sit punctum V. Ducantur itaque ad illud ab extremis D, & C, & medio E lineę C D primo ductę, alię tres D V, & C V, & E V; Quo facto ita exordiemur probationem per reductionem ad impossibile.

Progress. I. Trianguli E V C nigri, & D E V seminigri duo crura ex effectione sunt inuicem æqualia, nempe medietates D E, & E C. Crus verò E V commune, & deseruit vtrique: Reliqua verò crura D V, & V C licet verè inæqualia; Aduersarij tamen debent ea dicere æqualia, vtpote radij ob centrum positum in V. Quamobrem ex propos. 23. primi anguli apud E niger, & semialbus, quę prędictis radijs D V, & V C insistunt, deberent esse æquales. Quare illi anguli erunt recti, ex 10. defin.

Progress. 2. Cum itaque angulus seminiger D E V dicatur rectus: Et eiusdem pars alba apud E sit quoque angulus rectus ex effectione, erunt æquales anguli albus, & semialbus, pars & totū, quod esse nequit. Idem verò semper potest ostendi de omnibus punctis, quæ alibi assignarentur: Quaderè, cùm non possit esse alibi, quam in medio lineę B A; punctum X erit centrum circuli.

COROLLARIVM.

HInc manifestum est; si in circulo aliqua recta linea bifariam simulque ad angulos rectos secet aliquam aliam rectam in secante esse centrum circuli. Nam ex eo, quod A B recta rectam D C, bifariam, & rectangulè secet ostēsum fuit punctnm eius medium esse circuli centrum.

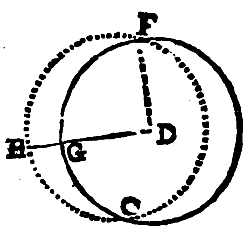
THEOR. I. PROP. II. Euc. 5.

Si duo circuli se se mutuo secant, non erit illorum idem centrum.

SEcent se mutuo duo circuli punctatus, & non punctatus; Dico *eos idem centrum non possidere*, & ostenditur per reductionem ad impossibile. Assi-

Assignetur itaque punctum aliquod ab aduersarijs, quod sit centrum commune vtriusque circuli, & sit D. Ducatur itaque ab hoc centro D ad intersectionem circulorum F linea punctata DF & ad peripheriam punctatam HD; quæ secet alteram in G.

Probatur itaq; propositio D centrum est commune vtrique circulo, vt mendaciter affirmatur. Ergo radius circuli nō punctati GD erit æqualis radio FD pūctato, & ita HD eidē radio FD æqualis cū punctatus sit radius vtriusque in F intersectionē circulorum pertingens. Ergo HD, & DG essent æquales, pars, & totum, quod esse nequit. Ideoque centrum D non erit vtriusque centrum, & sic probabis de quolibet alio puncto. Vnde *non poterit esse vllum punctum centrum vtrisque commune*.

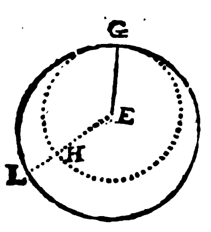


THEOR. II. PROPOS. III. Euc.6.

Si duo circuli se se mutuo interiùs tangant, non erit illorum idem centrum.

HÆc Propositio præcedenti similis omninò est. Sit ergo circulus punctatus, qui tangat continuum in G. Dico quod non possit obtinere idem centrum; quod ostendetur per reductionem ad impossibile.

Ostendatur itaque ab aduersarijs, quodnam centrum sit commune vtrique circulo. Sit V.g. E. Ducaturq; ad contactum G recta EG, & ad peripheriam circuli continui punctata linea LE, quæ secet in H circulum punctatum; quo facto.



Prob. propos. EG est radius vtriusque circuli punctati, & non punctati, vtpote pertingens ad commune punctum G in peripheria ipsorum. Quapropter HE radius punctati, ei radio communi EG erit æqualis, rursusque LE radius continui circuli eidem radio communi EG erit æqualis; ergo inter se LE, & HE essent æquales, pars, & totum, quod repugnat; Ergo assignatum E centrum non erit circulorum commune. Quod dicas dè quocumque alio assignabili.

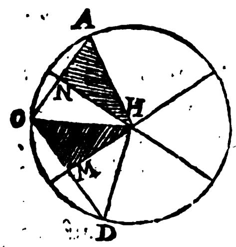
THEOR. III. PROP. IV. Euc.9.

Si in circulo acceptum fuerit punctum aliquod, & à circumferentia ad illud cadant plures, quam duæ rectæ lineæ æquales, acceptum punctum centrum est ipsius circuli.

SI punctum datum H, ad quod à circumferentiā AOD sint tractæ plures; quam duę rectæ lineę æquales. V.g. tres AH, & OH, & DH. Dico, quod illud erit centrum circuli.

Quod, vt demonstret, connectit puncta rectis AO, & OD, quas medias diuidit in M, & N, super punctum diuidens erigit perpendiculares punctatas MH, & NH quo præstito.

Prob. Nam ex constructione, Crus AN nigri trianguli est æquale cruri correspondenti NO albi, crus verò aliud NH vtrisque deseruit. Bases quoque HA, & HO præsupponūtur æquales. Quare angulus ad N niger huius, & albus illius trianguli erunt equales, nempe recti, ex propos. 10. primi.



Eodem modo constabit angulū ad M nigrum, & album tum huius albi, tum alterius nigri esse æquales; Quare rectę NH, MH, quę rectangulè, & bifariā diuidunt AO, & OD transibunt per centrū. *Vnde H erit centrum.* Si enim esset aliud punctum nō transiret vtraque per centrum, vt prop. 1. vult, cùm vnicum solùm sit, & duæ rectæ non nisi in puncto H conuenire possint.

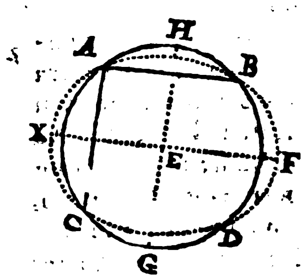
THEOR. IV. PROP. V. Euc.10.

Circulus circulum in pluribus punctis, quàm duobus non secat.

SIt circumferentia punctata, quæ secet circulum continuum in punctis pluribus, quàm duobus A, B, C, D. *Dico eam circumferentiam, circulum esse non posse.*

Quod, vt ostendatur tres ex ijs intersectionibus connectendæ sunt nimirum A, & B, & C rectis AC, & AB, Quæ diuidendæ bifariam, & per diuisiones agendæ punctatę perpendiculares, HG, & XF, quæ ostendent centrum esse in E, ex propos. præced.

Probatur propositio. Quia si E centrum est, deseruiet pro cētro vtrique tum punctatæ peripheriæ, tum circulo, cùm tria puncta A, B, & C sint vtrisque communia. Sed circuli se secantes, propos. 3. huius non habēt idem centrum; ergo non possunt esse ambo simul circuli, sed alter eorum circulus non erit, V.g. circumferentia punctata.



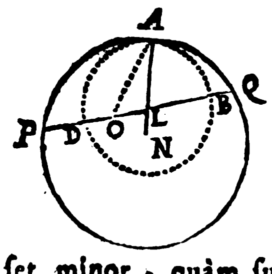
THEOR. V. PROP. VI. Euc.11.

Si duo circuli intùs se se contingant, atque accepta fuerint eorum centra. Ad eorum centra adiuncta recta linea, & producta in contactum circulorum cadet.

SI duo circuli continuum, & punctatum se tangant in A interiùs existendo vnus intra alium, & ducta sit linea LN, quæ connectat eorum centra L, & N. Dico, quòd si hæc producatur vsque ad circumferentiam in contactum terminabit.

Quod per reductionem ad impossibile ostenditur. Si enim ita non est. Sit aliud pūctum centrū circuli continui, quodcumque eligant aduersarij, V. g. O, per quod transiens recta PQ, & per centrum L non cadat in contactum, sed alibi, puta in Q, vel in P? Ducantur ergo à centro L, & à centro mendaciter statuto O ad contactum A duæ rectæ, eritq; constitutum triangulum AOL. Quo exhibito Propos.

Probatur. Nam si O est centrum circuli non punctati AO basis, & recta OQ debebunt esse æquales vtpote radij à suo centro ad suam peripheriam ducti. Hoc autem esse non potest; quòd OB, quæ est eius pars, deberet esse maior, quàm AO basis: Quare OQ esset minor, quàm sua pars OB.



Quod autem OB debeat esse maior, quam AO basis punctata, patet: Nam eius pars OL est crus trianguli, aliud verò crus AL est æquale reliquę portioni LB, cum L sit centrum circuli punctati; eò quòd ducatur à suo centro L, quare tota OB deberet esse maior basi OA sicut latera OL, & LA, ex 20. propos. I. sunt basi punctata OA maiora. Quamobrem OB pars esset maior, quàm OA, & consequenter, quàm OQ tota, eidem basi punctatę æqualis (vt dictum est) Et semper eodem modo argumentabitur, quibuscumque punctis assignatis, quæ non sint LN. Ergo per LN ducta NA in contactum A cadit.

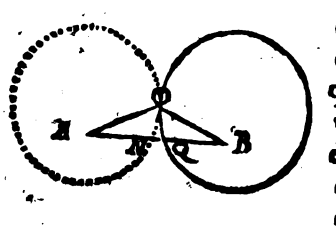
THEOR. VI. PROP. VII. Euc. 12.

Si duo circuli se se exteriùs contingant linea recta, quæ ad centra eorum adiungitur per contactum transibit.

Probatur hæc Propositio per reductionem ad impossibile tali modo.

Nam datis duobus circulis se tangentibus punctatum, & continuum, & recta AB, quæ centra prout volunt aduersarij A, & B nectat, & tamen per contactum O non transeat, sed inferiùs. Ad hoc vt ostendatur, id esse falsum; ad contactum à centris præsumptis A, & B trahantur rectæ AO, & BO, & ecce tibi absurdum, quod sequitur.

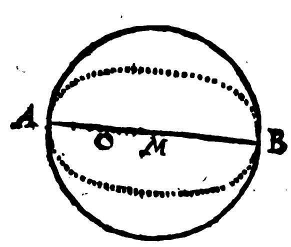
Namque AOB triangulum est, & consequẽter ex propos. 20. primi duo crura AO, & BO debent esse maiora, quàm basis AB. Hæc verò ex alio capite debet esse maior. Nã cum B mendaciter dicatur cẽtrum, pars eius BQ vtpote à cẽtro ad peripheriam ducta esset æqualis cruri OB. Sicque alia pars AN, vt radius à centro A, vt falso asseritur, ad ambitum ductus æqualis esset cruri AO. Quare nedum tota AB non esset dictis cruribus minor; sed potius maior. Quoniam portio quoque inter circumferentias intercepta NQ superadderetur.



THEOR. VII. PROP. VIII. Euc. 13.

Circulus circulum non tangit in pluribus punctis, quàm vno siue intùs, siue extrà tangat.

Reducitur quoque hæc propositio ad impossibile, duasque partes possidet. Prima enim loquitur de contactu interiori, secunda de exteriori. Ponamus itaque circumferentiam punctatam tangere circulum in duobus punctis A, & B, & trahatur recta per duo centra O, & M.



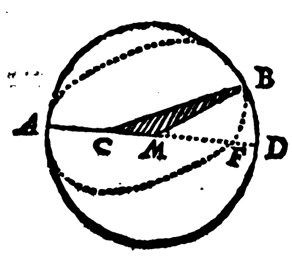
Vel ergo hæc recta transiens per centra, tum punctati circuli, vt mendaciter pręsupponitur, tum cõtinui trãsit per ambos contactus, vel per neutrum, vel per alterum eorum, & sic tres casus habet ista propositio; de quorum singulis intexere oportet probationem.

Casus I. Itaque dicatur rectam AB contactus ipsos coniungere, & hoc non potest esse, quia sic eadem linea diuideretur per medium in duobus punctis; quòd est absurdum; cùm enim puncta contactus; quia sunt communia, distent æqualiter à suis centris, clarum est, quòd quodlibet centrum assignatum diuideret eam æqualiter, & bifariam. Vnde duo centra in quatuor medietates eam secarent AO, & OB, AM, & MB.

Casus 2. At si velit aduersarius, quòd linea transiens per centra, vt est punctata in contactus non cadat, hoc est contra 6. propos. huius, quare saltem in vnum contactum incidet, elige itaque quod vis.

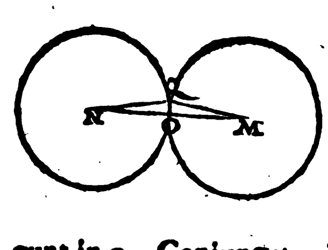
Casus 3. Si eligis contactum A. Ad alterum contactum B duo centra copulabis, lineis CB, & BM, & eadem forma argumenti valebit ad ostendendam impossibilitatem, ac vsi sumus in 6. propos. huius.

Nam sequeretur, quòd MA deberet esse maior, quàm MB; quæ tamen est ei æqualis, vtpote, quòd sint radij à centro M ducti ad circumferentiam circuli nõ punctati in A, & B; Quod verò AM deberet esse maior, quàm MF patet. Quoniam CM, & CB simul sunt maiores, quàm MB, ex 20. propos. primi; sed CB, & AC, vtpote radij spurij circuli punctati sunt æquales ex aduersarijs. Adde CM ipsi AC: Fietque tota AM maior; quàm MB, vtpote, quod sit secundùm sui partem CM crus, & secundùm alterã partem AC ęqualis cruri CB simul maioribus, quã MB basis trianguli nigri.



Quod & concluditur per idem argumentum etiam si duo contactus ponantur vicinius, quã in secunda figura punctum A, & punctum B, vt probauimus Expens. 2. Tractatus Præliminaris de Quantitate Continua.

2. Pars probatur. Quod si exteriùs se tangant, non se tangant in duobus punctis. Nã si tangunt in puncto O ex 6. huius linea recta coniungens centra MN per contactũ O transibit. Quod, & si se quoque tangunt in Q. Coniungatur ille contactus ad centra per rectas NQ, & MQ. Eritque triangulum MQN, cuius duo crura simul, erunt radijs in basi NO, OM ęqualia, vtpote, quia sũt radij, à cẽtris in punctum Q vtriusque circumferentię desinentes, & eadem



& eadem ipsi NO, OM debebũt esse maiora; quia ex propos. 20. primi duo latera cuiuscunque trianguli quomodocumque sumpta reliquo maiora sunt; Vnde implicantia admitteretur.

EXPENSIO II.

De segmentis Circulorum.

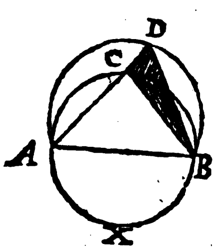
PAtebit hic traditam fuisse inter principia segmentorum similium definitionem, non ad hoc, vt eorum consideratio circa similitudinem, eorumque proportionem versaretur, sed tantùm, vt ea similitudo mediante definitione satis declaratâ præberet fundamenta ad ostendendas segmentorum longè diuersas affectiones à proportione.

Fuit verò necessarium agere de segmentis, quòd possemus ex segmentis ipsos circulos agnoscere; & angulos quoque in segmentis, aut efficere, aut eorum proprietates agnoscere.

THEOR. I. PROP. IX. Euc. 23.

Super eâdem rectâ lineâ duo circulorum segmenta similia, & inæqualia non constituentur ad easdem partes.

REducit hic Euclides demonstrationem ad impossibile demonstrando fore, & non fore similia segmenta similia, & inæqualia super eâdem rectâ effecta: Quod vt ostendat fiant (inquit) super datam A B duę portiones circulorum similes A C B, & A D B (si tamen id fieri potest) Manifestum est ex dictis 5. propos. huius, quod solùm se intersecabunt in duobus punctis, vt in A, & B; Quoniam circuli, nonnisi in duobus punctis se intersecant. Quare peripheria vnius erit extra peripheriam alterius. Quo posito trahatur recta A D secans vtrasque circumferentias in C, & D, & ex ijs punctis duæ rectæ deducantur, nimirum C B, & D B: Habemusque triangulum nigrum cuius angulus D necessariò, ex propos. 17. Coroll. 1. primi, minor est externo albo C.



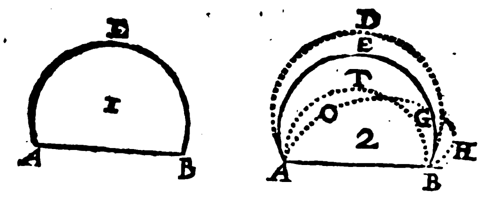
Probatur autem. Nam segmenta similia sunt illa, quæ capiunt angulos æquales, ex definitione 9. huius; Sed angulus niger D internus est maior albo C externo. Ergo ACB, & ADB similia nō sūt; alioquin angulus D niger esset angulo C æqualis, vt volunt, & minor, vt est ostensum, quod est impossibile.

Quare colligit Clauius, & si anguli non fiant ad easdem partes, idem sequi, quòd æquali segmento ei, V. g. A X B, quod est ad alteram partem, ad eandem partem constituto; idem absurdum sequatur.

THEOR. II. PROP. X. Euc. 24.

Super æqualibus rectis lineis similia circulorum segmenta sunt inter se æqualia.

HÆc propositio ostenditur faciliter super positione; nempe imaginando, vel ponendo vnum super aliud segmentum papyro descriptum. Sint ergo duo circuli segmenta similia A B E primum, & A B E secundum.



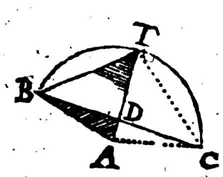
Et ad probandum ponatur vnum super aliud per imaginationem, vel propriè describendo alterum eorum, & circùm recisa charta super aliud realiter ponatur, vel congruet, itaut curuitas vnius eodem loco inexistat, & feratur, ac curuitas alterius, vel non. Si non, vel intra curuabitur, vt punctatum segmentum A T B, vel supra, & extra, vt aliud punctatum A D B, & sic incidemus in absurdum propos. antecedentis. Quod similia segmenta caperent angulos inæquales contra defin. 9. Vel partim supra partim infra, vt facit circũferentia pũctata A O G H B, & sic contra 5. propos. huius circulus secaret circulum in pluribus punctis, quàm duobus, nempe in A, C, B.

PROB. I. PROP. XI. Euc. 25.

Circuli segmento dato describere circulum, cuius est segmentum.

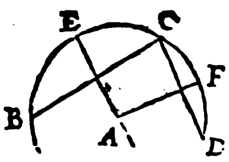
SIt segmentum quodcumque B T C, vel maius, vel minus, vel æquale semicirculo: connectanturque puncta B C rectâ, cui diuisæ per medium in D: in puncto D erigatur perpendicularis D T, & indefinitè prolongetur versus A. Deinde trahatur à puncto, vel B, vel C, quæ rectâ copulauimus, ad punctum T, vbi perpẽdicularis modo ducta circumferentiam secat recta B T, quæ angulum faciet nigrum ad T. Huic itaque angulo nigro alius angulus ad B niger, & albus constituatur æqualis, ducendo lineam B A, quæ, vel cadet extra lineam B C, & adiunget partem nigram, vt hîc vbi portio data semicirculo est minor, vel intra, vt cum semicirculo maius est segmentum datum, & ideò portione nigra diminuit angulum B, vel supra ipsam B C cùm semicirculus est segmentum datum, & sic nec diminuit, nec addit. Sed quomodocumque id accidat semper angulus B fiat æqualis angulo T, ex 24. prop. & A erit centrum postmodum trahatur linea A C.

Probatur. Nam tres lineæ B A, nimirum A C, & A T sunt æquales, quare ex propos. 4. huius A erit centrum circuli. Quia illud est centrum, vt ibi probatur in quod plures, quàm duæ lineæ æquales cadunt. Quòd verò tres lineæ dictæ B A, nempe A C, & A T sint æquales constat: Nam in triangulo B T A angulus niger ad T, & angulus B seminiger ex cõstructione sunt æquales, Ergo subtendunt bases æquales T A, & A B, vt ex propos. 15. Deinde punctata A C est æqualis rectæ B A quia sunt æquales duo trianguli niger, & albus, siquidem anguli ad D niger, & albus recti sunt ob perpendicularem D A: Ideò æquales, & quia habent D A crus commune, & alterum crus D C; alteri D B ex constructione æquale; eadem, & bases



bases B A, & A C erunt æquales. Vnde tres lineæ A B, scilicet A G, & A T radij erunt, & A centrum.

Sed expeditiùs datam circumferentiæ portionem circularem, vtcumque in B, C, D diuide, & rectis B C, & C D punctum diuisionis cum extremis punctis, vel quibuslibet alijs B, & D coniunge; diuisisque rectis bifariam trahe perpendiculares F A, & E A per puncta diuisionis, & in A erit centrum. Probatur, quia ex Coroll. propos. primæ duæ perpendiculares transeunt necessariò per centrum, quòd cùm sit vnicum necessariò in eo conuenire debebunt; quare punctum A, in quo conueniunt erit centrum circuli.



Sufficit quoque excitare perpendicularem sine tractione linearum B C, & C D si ex punctis C, B, D trahantur portiones circulorum se decussantes, & per eas duæ rectæ ducantur: quia non aliter fieret: Si super lineas iam tractas essent perpendiculares erigendæ, vtpote ex prop. 8. primi; Vnde licet non ducantur C D, & C B eadem operatio valebit.

EXPENSIO III.

De lineis intra circulum ductis.

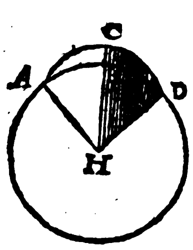
COgnitio linearum intra circulum ductarum deseruit tũ ad cognitionem sinuũ, tum ad cognitionem Parallaxium, tum ad cognitionem Excẽtricitatũ, & ad multa alia, quare in Elementis aliquas primas cognitiones haurire oportet, vt facilior ad ea sublimiora pateat aditus.

THEOR. I. PROP. XII. Euc. 2.

Si in circuli peripheriam duo quælibet puncta electa fuerint. Recta linea, quæ ad ipsa puncta adiungitur tota intra circulum cadet.

HÆc propositio, quasi est principium, & per se nota. Vnde breuiùs eam probabimus.

In circulo A O B sumantur duo puncta, quæ recta copulentur, *hæc recta intra circulum cadet*. Quod si non cadit, cadet in ipsam, vel extra ipsam circumferentiam. Quod si dicatur, aut idem erit cum circumferentia A C D, aut magis flexa, quàm ipsa, vt A C D. Quod si adhuc obstinatiùs asseratur recta, vt eos ita dicentes conuincamus, ducantur ad extrema huius lineæ A C D, rectæ à centro H A, & H D, & ducatur inter ipsas H C eis vtrique, aut æqualis, aut maior, cum vel exeat, vel terminet ad circumferentiam; sed hæc eadem necessariò est minor, si A C D, vt mendaciter asseritur, est recta. Ergo recta, & non recta, quòd est absurdum.



Probandum est itaque, quod debeat esse minor. Id verò à prop. 14. primi eruitur. Nam ibi habemus angulos ad basim Isosceliũ esse æquales, vt niger D, & albus A in triangulo æquicruri A D H, cùm basis curua ab aduersarijs dicatur absurdè recta.

Secundò angulus albus ad C, vtpote externus est maior angulo interno, & opposito D nigro, ex Coroll. 1. prop. 17. primi. Quare, & erit maior angulo huic æquali ad A. Sed ex propos. 19. primi, maior angulus malus etiam latus subtendit. Ergo A H erit maior, vtpote subtensa angulo maiori albo apud C, quàm H C, quæ subtenditur angulo minori ad A. Quare H C, eã A H erit minor, sed supra dictum est, quod esset maior, aut æqualis, quod est absurdum.

THEOR. II. PROP. XIII. Euc. 3.

Si in circulo quædam recta linea per cẽtrum extensa, quamdam non per centrum bifariam secet, eam quoque ad angulos rectos secabit, & si secet ad angulos rectos bifariam quoque eam secabit.

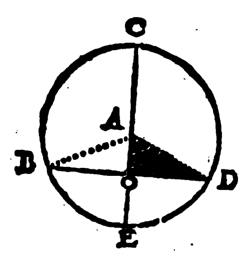
PEr centrum A circuli B C D transeat C E, secetque aliam quamcunque in circulo existentem B D non transeuntem per centrum, per medium; Dicit propositio, quòd & ad angulos rectos secabit, & hæc est prima pars huius propositionis.

Ad quod demonstrandum à punctis circumferentię extremisque lineę B D, trahantur ad centrum A rectę A D, & A B punctatę; quo facto.

Probatur prop. Latus D O trianguli nigri est ex hypothesi æquale albi trianguli cruri O B, bases quoque punctatæ B A, & A D vtpote radij sunt æquales. Crus vero O A commune: Ergo ex propos. 23. primi, angulus ad O niger erit æqualis albo, item ad O: Ergo erunt anguli recti.

Secunda pars est, quod si linea per centrum ducta C E alteri non per centrum ductæ, vt B D ad angulos rectos sit; quod B D etiam secta erit bifariam.

Probatur. Nam crura punctata, vtpote radij sunt æqualia. Quare totum triangulum semialbum B A D habebit angulos B, & D ad basim æquales; sunt quoque ex hypothesi niger ad O, & albus ad O æquales; Ergo in duobus triangulis habemus duo crura punctata æqualia, & anguli D niger, & B albus æquales, & rursus anguli ad O niger, & albus æquales; Ergo ex 27. propos. primi, reliqua quoque latera reliquis lateribus erunt æqualia, nempe B O, & O D.



THEOR. III. PROP. XIV. Euc. 4.

Si in circulo duæ rectæ lineæ se mutuò secent non per centrum deductæ, se se mutuò bifariam non secabunt.

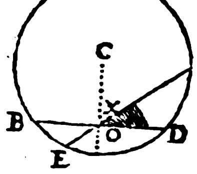
DVæ rectæ lineæ se mutuo secent, V.g. B D, & E F in circulo B D F, quæ per centrum non sint deductæ; dicit numquam posse euenire, vt se in duas partes æquales diuidant. Licet enim vna ex ipsis possit esse bifariam diuisa, altera

tamen

tamen nequaquam in partes æquales remanebit diuisa.

Probatur. Et si vna ex istis transeat per centrum alia non, clarum est, quod transiens per centrum bifariam non secatur: Eò, quia in centro solùm bifariam diuidatur, ex prop. I.

At si neutra transeat per centrum. Tunc ad eam sectionem ducatur perpendicularis à centro inuento, ex prop. I. huius, quod si nequeat duci; est clarum, ex prop. anteced., neutram secari bifariam, cùm ad nullam ex ipsis transiens per centrum perpendicularis duci queat. Quod si ducatur ad alteram ipsarum, vt B D. Tunc dico alteram E F bifariam non esse sectam: Nam si secta E F bifariam est; Ergo etiam cum E F à centro cadens C O faciet angulos rectos, ex prop. anteced. Quare angulus X albus rectus erit æqualis recto seminigro C O D; quod esse nequit, cùm angulus albus X sit pars anguli seminigri C O D.



THEOR. IV. PROP. XV. Euc. 7.

Si in circuli diametro sumatur punctum, quodcumq; quod circuli centrum non sit; & ab eo in peripheriam lineæ rectæ cadant; maxima erit ea quæ per centrum ducitur.

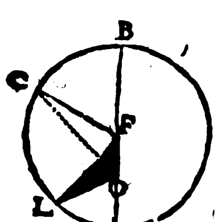
Minima verò reliqua, quæ in directum ad oppositam partem tendit.

Aliarum verò semper maior est, quæ propinquior est maximæ.

Et illi duæ æquè propinquæ, tantummodò æquales erunt.

QVatuor partes enumerat hæc propositio. Prima est illa, quæ ait; quòd si eligatur aliquod punctum in diametro, quod nō sit centrum, V. g. O, & ex eo ducatur per centrum F ad circumferentiam B recta O B, illam fore maximam omnium. Ad quod probandum ducatur quælibet alia, quæ placuerit, V. g. O C punctata. Et puncta C, & F rectâ iungantur. Nam ostendetur O B esse maiorem, quàm O C, quam elegisti.

Prob. In triangulo C O F duo crura C F, & F O sunt maiora basi punctata, ex propos. 20. primi, Sed hæc duo latera sunt æqualia rectæ per centrum ductæ O B; cùm crus O F sit eius pars, & F C sit æquale reliquæ F B, vtpote radij. Ergo tota O B, vtpote æqualis duobus cruribus est maior basi punctata O C.



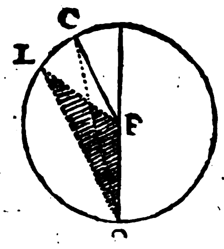
Secunda pars est. Quòd O H sit omnibus alijs minor, quæ ab O indirectū maximæ O B ducitur, & sit vna cum illâ. Ad quod ostēdendum ducatur O L, & coniungatur L F, & probabitur O L esse maiorem, quàm O H.

Prob. Nam basis L F est minor cruribus L O, & F O, ex propos. 20. primi in triangulo nigro; sed tota basis L F est æqualis F H, vtpote radius; Et F O est crus parsque lineæ F H, ergo reliquum O H erit minus crure L O.

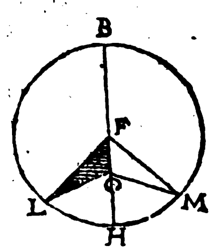
Tertia pars est. Quòd ex lineis ab O ductis, quæ sunt propinquiores maximæ, reliquis remotioribus sint maiores. Sic O C erit maior, quàm L O, quod sit propinquior maximæ O B.

Prob. Nam duo crura F C, & F L, quæ ducuntur à centro ad circumferentiam sunt æqualia, vtpote radij. Crus verò O F idem pro ambobus triangulis deseruit albo, & nigro. Sed angulus ad F seminiger maior est angulo ad F nigro; cùm sit niger eius pars: Ergo ex prop. 25. primi maior erit basis C O, quàm O L, Quod & verificatur etiam si punctum O, sit in circumferentiâ ipsâ, vtpote in figurâ appositâ L C O.

Dicit tandem ab eodem puncto duci posse tantummodo duas lineas æquales ad inuicem, hinc inde. Quod, vt demonstret, ad idem punctum F faciendus est angulus albus æqualis nigro; & fit O F M ducendo crus F M, & postea crus O M. Nam ostendetur O M esse æqualem lineę O L.



Probatur verò sic. Quia crura nigri trianguli, & albi sunt æqualia, vnum quidem commune F O, aliud verò L F, alteri M F, vtpote radij, æquale, angulus quoque albus ex effectione æqualis nigro est. Ergo ex propos. 28. primi, bases quoque L O, & O M erunt æquales. Quod verò nulla alia præter istas possit esse istis ęqualis colligitur ex probatis. Nam quęlibet alia erit, vel ijs maximæ propinquior, vel remotior, & ideò nulla istis L O, & O M erit æqualis. Cùm istæ sint æquidistantes ob æqualem angulum nigrum, & album; qui ab ęquali circumferentia subtenditur L H, & H M.



THEOR. V. PROP. XVI. Euc. 14.

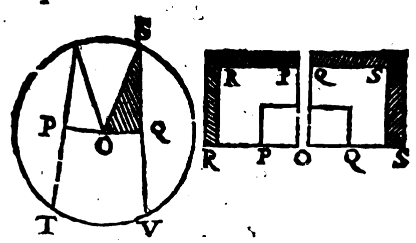
In circulo æquales rectæ lineæ æqualiter distant à centro, & quæ æqualiter distant à centro æquales sunt inter se.

SInt intra circulū R S T V, cuius centrum O duæ rectæ æquales T R, & S V. Dicit prima pars propos. æqualiter à centro distare.

Et ad hoc, vt assumptum probetur; ducantur duæ perpendiculares P O, Q O à centro O ad prędictas rectas R T, & S V, quæ ex propos. 13. secabuntur ab ipsis in duas partes æquales. Deinde à punctis peripherię, & extremis datarum rectarum R, & S rectę ad centrum ducantur, & erunt facta triangula duo album, & nigrum.

Probatur autem ex propos. 11. secundi. Nam cùm hæc duo triangula sint rectangula, quadrata facta super basim subtensam angulo recto erunt æqualia duobus quadratis factis à lateribus angulum rectum continentibus, quapropter quadratum ex O R basi, quod seorsim delineauimus, erit æquale duobus in ipsis descriptis à cruribus P R mediocri, & minimo P O. Et idem asseras de alio quadrato facto super basim O S, quod est æquale duobus inclusis ex cruribus Q S, & O Q.

Secundò. Duo quadrata maiora inter se sunt æqualia ob æqualitatem basium à centro ad circumcumferentiam ductarum o s, & o r. Sed & duo quadrata mediocria sunt æqualia inuicem, vtpote super medietates p r, & s q, æqualium datarum in praxi facta. Siquidem r t, & s v præsuppositæ sunt æquales.



Quamobrem, si quadrata minima ex p o, & o q, cùm mediocribus iuncta erant æqualia maximis, & per consequens inter se, ijs mediocribus ablatis per imaginationem; quę erant inuicem æqualia, adhuc quadrata minima remanebunt æqualia, & consequenter eorum latera p o, & o q, quæ, cùm sint perpendicularia, mensurant distantiam linearum datarum r t, & s v à centro, vt constat ex Defin. 4. huius Libri, & ideò æquales rectæ r t, & s v æqualiter distabunt à centro.

Dicit quoque inuertendò primam partem. Quod datis rectis, V. g. r t, & s v; quę æquidistent à centro; quòd hæ lineę inter se erunt æquales. Ad quod ostendendum ducendę rursus sũt perpẽdiculares po, & o q, quę ex Def. 4. huius erunt æquales insuper, & rectas datas r t, & s v bifariam diuident, quòd perpendiculariter ducantur à centro, vt ex 13. propos. huius, deinde trahendę r o, & o s. Quò posito.

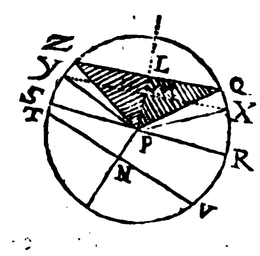
Probatur propos. eodem tenore, ac pars antecedens probata est. Nam bases r o, & o s, vtpote æquales radij, dant quadrata ęqualia maxima quæ sunt r o, & o s; quę etiam sunt æqualia ijs, quę includunt mediocribus r p, & q s, & minimis o q, & o p; si tamen vnà mediocre, & minimum ad maximum includens referantur, & hoc, quia proueniunt à cruribus triangulorum nigri, & albi angulum rectum q, & p concludentibus, vt ex propos. 11. secundi constat; maxima verò à basi. Minima autem quadrata æqualia sunt inuicem; Quia describuntur à perpendicularibus æqualibus o p, & o q. Ergo sublatis istis minimis per imaginationem quadrata mediocria inter se æqualia remanebunt, & per consequens latera eorum æqualia. Hæc verò sunt crura in triangulis albo p r, & nigro s q, quæ, &, vt diximus, sunt quoque medietates datarum r t, & s q. Vnde si medietates sunt æquales; sequitur etiam; quòd integrę lineę datę æquidistantes à centro r t, & s v sint æquales, quod oportebat ostendere.

THEOR. VI. PROP. XVII. Euc. 15.

In circulo maxima quidem linea est diameter; aliarum autem propinquior centro remotiore, semper maior.

SI detur circulus, in quo dentur duę protractę quomodocumq; V. g. z q, & t v, & quę transeat per centrum s r. Omnium maximam dicit esse s r, quę per centrum transit, reliquas, quò ei propinquiores, eò maiores. Quod vt probetur ad datas non transeuntes per centrum z q, & t v deducãtur perpendiculares ab ipso centro, quæ sint p l, & p n; quę enim remotior est, vt z q, ex Defin. quarta huius maiorem perpendicularem habebit. Detruncabis itaque alteri minori perpendiculari ab hac maiori æqualem portionem, quæ erit p m, & per hoc punctum m, ages aliam perpendicularem y x huic p l, & puncta, in quibus circumferentiam tangit rectis y p, & p x cum centro p connectes. Idemque fiat de remotiori data z q connectendo puncta extrema in circumferentiam desinentia, cum centro p rectis p z, & p q.

Probatur primo, quod data per centrum transiens s r sit maior quacunque assignetur, & sit assignata z q. Crura trianguli nigri in centrum desinentia p z, & p q simul sunt æqualia, vtpote radij medietatibus s p, & p r diametri, & per centrum transeuntis s r, quæ, & radij sunt. Sed duo crura cuiuscumque trianguli, ex propos. 20. primi sunt maiora basi; ergo, & diameter æqualis cruribus istis erit maior, quàm basis z q, & ita probabitur de omni alia linea assignabili, quæ tamen per centrum non transeat, vt patet.



Probatur quoque; quod propinquiores centro sint maiores distantioribus.

Duę lineę c t v assignata est æqualis protractę punctatę y x; quia æqualiter distant à centro ob perpendiculares æquales protractas p m, & p n: & ex propos. anteced. quę æquidistant à centro æquales sunt inuicẽ. Sed assignata remotior z q est minor, quàm pũctata y x: Ergo, & minor quàm assignata t v. Quod verò sit minor, patet ex propos. 25. primi. Nam crura trianguli nigri, & alterius y x p, vtpote, quod omnes sint radij sunt æqualia. Angulus verò ad centrum p niger minor se comprehendente y p x. Ergo, & basis z q, quę est assignata remotior est minor, quàm punctata y x, & consequenter minor, quàm altera assignata huic æqualis t v.

EXPENSIO IV.

De lineis circulum tangentibus exteriùs.

VIsis proprietatibus linearum intra circulum, remanent exteriorum proprietates examinandę verè mirabiles propter angulum cõtactus; qui, cũ sit in infinitũ augumẽtabilis, non tamen minimum angulum acutum rectilineum superare potest, nec angulus rectilineus quantumlibet diminutus, eo potest esse minor.

THEOR. I. PROP. XVIII. Euc. 16.

Quæ ab extremo cuiuscumque diametri ad angulos rectos ducitur, extra ipsum circulum ducetur.

Et in locum inter ipsam rectam lineam, & peripheriam comprehensum altera recta linea duci non poterit.

Et semicirculi quidem angulus quouis angulo acuto rectilineo maior est.

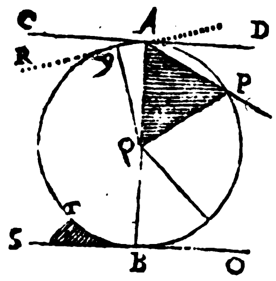
Reliquus verò minor.

MVltas partes complectitur propositio, quas singulis declarationibus illustrare opus est prima

prima est, quod si adsit diameter A B ad cuius extremum A ducatur perpendicularis D A C. Dicit hanc extra circulum cadere. Et probatur per reductionem ad impossibile.

Si namque possibile existimatur, quod intra circulum trahi queat. Trahatur A P coniungaturque eius extremum centro recta P Q.

Probatur. Nam angulus niger ad A per aduersarios, cùm mendaciter asserant A P esse perpendicularem, est rectus; Sed angulus ad P est ei æqualis, vtpote æquicruri trianguli anguli ad basim, ex propos. 14. primi propter æquales radios, cruraque Q P, & Q A. Ergo triangulum A P Q duos angulos A, & P rectos haberet, quod est impossibile, quia ex propos. 17. primi, omne triangulum omnes suos tres angulos duobus tantùm rectis æquales obtinet.



Prob. etiam hęc pars positiuè hoc pacto. Nam assumpto in perpendiculari B O quolibet puncto, V.g. O iunguntur O Q, cùm ergo huius trianguli albi angulus ad B rectus sit erit angulus ad O minor recto, ex propos. 17. primi, quare erit maior Q O basis, vtpote subtensa angulo maiori recto, ex propos. 19. primi, quàm B Q angulo O subtensa, & consequenter punctum O extra circulum erit, & idem erit de quolibet alio puncto assignabili.

In secundâ hac parte asserit inter circũferentiã A P, & perpendicularem ad extremum diametri, A D, rectam aliam non posse trahi à puncto A, quę circumferentiam non ingrediatur ex parte. Et probatur per reductionem ad impossibile. Nam si hoc euenire potest ducatur, & sit punctata A R, ad quam à puncto Q ducatur perpendicularis Q Y ad quodlibet eius punctum Y.

Probatur angulus ad Y rectus est, quia Q Y facta est perpendicularis; ergo angulus ad A erit minor, ex propos. 17. primi. Sed ex propos. 19. primi, maiori angulo maius latus subtenditur. Ergo recta A Q subtensa angulo maiori Y erit maior quàm Y Q subtensa angulo minori A. Sed illa est semidiameter; ergo Q Y minor semidiametro, & tamen si punctata A R non intra circulũ caderet, sed extra deberet esse maior semidiametro ad hoc, vt punctum Y, quod esset extra, copularet; quàobrem punctum Y intra erit.

Tertia pars affirmat quoque angulum interiorem factum à circumferentia, & diametro, vt est angulus Q B T esse maiorem quolibet acuto rectilineo.

Probatur. Nam linea faciens quemlibet acutum angulum, nempe minorem recto, esset veluti punctata A R, vel quęlibet alia similis ei, quę à puncto A inter perpendicularem, & circulum, istis minorem angulum efficeret. Sed iam ostensum est A R, & quamlibet aliã intra circumferentiam cadere, ergo portio circumferentię remanet foras, V.g. Y A. Sed hæc portio circuli facit angulum internum dictum circumferentia diametroque conclusum. Ergo hic angulus erit maior quàm acutus ad A à punctata diametroque conclusus.

Dicit tandem angulum contingentiæ, qui dicitur, & angulus Reliquus, qualis est angulus niger T B S circumferentia B T, & linea circumferentiam tangente in B comprehensus, qui est reliquus anguli interni à peripheriâ diametroque conclusi. Dicit inquam hunc angulum contingentiæ, & reliquum, omni acuto rectilineo esse minorem.

Probatur. Nam sequitur ex dictis. Etenim angulus internus est maior omni acuto angulo, sed hic est reliquus eius ad complendum rectum. Ergo minor omni acuto angulo, qui possit vsque ad rectum, alium acutum rectilineum complere.

COROLLARIVM.

Hinc manifestum est rectam à diemetri extremitate orthogonaliter ductam ipsum circulũ tangere. Ostensum enim est cadere extra circulum, quare in solo illo extremo diametri circulum attingit, & si prolungetur, cum & prolungata orthogonalis sit ad diametrum, cadet extra circulum. Vnde non secabit. Quare tangentem ad quodcumque punctu m circumferentię ducemus, si tracto ad illud diametro, perpendicularem ad eius extremum excitabimus.

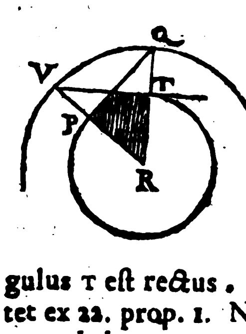
PROB. I. PROP. XIX. Euc. 17.

A dato puncto extrinseco rectam lineam ducere, quæ datum tangat circulum.

Tangens linea ea dicitur ex 2. Def. huius, quæ circulũ tangens, etiam producta, non secat, quod scilicet exteriorem circumferentiam radat, vt in anteced. propos. esset S O; intendit ergo hic docere modum quo hęc trahatur.

Sit itaque circulus, cuius centrum R, & sit punctum datum V, à quo hęc tangens deducenda sit. Connectatur centrum R, cum puncto dato V secante V R, & à puncto vbi secat P excitetur perpendicularis P Q. Deinde centro R ad interuallum R V portio sufficiens circuli ducatur, ad cuius circumferentiam prolũgetur perpendicularis P Q vsque dum secet, & à puncto, vbi secat Q ad centrum R recta ducatur Q R. Quę secabit circulum datum minorem in T. A puncto igitur dato V ad hoc punctum sectionis T, recta ducatur: & hæc erit tangens quæsita, quę tanget circulum datum in T.

Probatur angulus ad T niger rectus est; ergo quę exposcitur T V ad angulos rectos ad diemetrum T R incidit. Itaque est tangens.



Quod verò angulus niger ad T sit rectus probatur. Nam angulus ad P niger rectus est. Sed hi anguli sunt æquales; ergo, & angulus T est rectus. Quod verò sint æquales, patet ex 22. prop. I. Nam triangula V T R, & aliud Q P R habent crus vnum minus P R æquale alteri R T, vtpote semidiametri circuli minoris, & aliud V R alteri R Q, vtpote semidiametri circuli maioris. Angulus verò niger ad centrũ R, est vtrisq; communis. Ergo secundùm eam propositiné 22. primi triangula tota erunt æqualia, & anguli quoque, qui sibi correspondent, æquales, vt est angulus niger P, & angulus niger T. Quare erunt recti cùm niger P vnus eorũ talis sit, ex effect. Vnde T V perpendicularis erit, & ideò tangens.

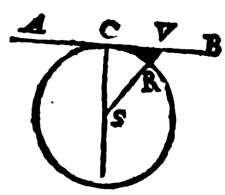
THEO-

THEOR. II. PROP. XX. Euc. 18.

Si circulum tangat recta quæpiam linea; à centro verò ad contactum adiungatur recta quædam linea, quæ adiuncta fuerit ad ipsam contingentem perpendicularis erit.

TAngat recta A B circulum in C, & ab hoc puncto contactus, ducatur ad centrum, C S. Dicit esse perpendicularem ipsi A V. Quòd probabitur per reductionem ad impossibile. Nam ducatur quælibet alia, quæ sit perpendicularis, & hæc V. g. sit S V.

Si itaque S V, vt aduersarij fabulantur perpendicularis est, erit angulus niger ad V rectus, reliqui verò ad C, & ad S oportebit, quod sint minores recto, cũ 2. Coroll. prop. 17. primi: in omni triãgulo 3. anguli, solùm duobus rectis æquẽtur. Sed quia omnis trianguli maior angulus maiorem basim, latusq; subtendit, ex 19. primi. Erit itaque S C angulo nigro, quem rectum appellant, basis subtensa maior, quam S V minori angulo C subtensa, at C S est, vt semidiameter, æqualis semidiametro S R, quæ est pars totius S V. Ergo pars esset totâ maior; quod est absurdum.

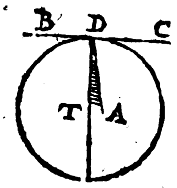


THEOR. III. PROP. XXI. Euc. 19.

Si circulum tetigerit recta quæpiam linea: à contactu verò ad angulos rectos recta linea ipsi tangenti excitetur, in excitata erit centrum circuli.

SIt circulus, quem tangat recta B C in puncto D, & ab eo puncto erigatur perpendicularis D T. Dicit in hac centrum reperiri. Quod si aliquis negauerit, ostendetur quodlibet punctum ab eo assignatum pro centro impossibilitatem inuoluere. Assignetur itaque, & sit punctum A, ad quod ducatur à contactu D recta A D, quæ ex eis, quæ ostendimus in præcedenti propos. erit quoque perpendicularis.

Probatur itaque faciliter. Quia cùm D A ad centrum A fictum ducta sit, perpendicularis erit, facietque angulos hinc inde rectos. Sed etiam D T ducta est ad angulos rectos. Quare, cùm omnes recti sint æquales, angulus lineis D C, & D A clausus albus esset æqualis angulo cruribus D C, & D T seminigro comprehenso. Qui albo CDA parte nigrâ maior est. Qua de re totum esset suæ parti æquale, quod repugnat.



THEOR. IV. PROP. XXII. Euc. 8.

Si extra circulum sumatur punctum quodpiam, & ab eo ducantur rectæ, vna per centrum transiens, reliquæ aliæ in cauam peripheriam, vel conuexam.

Earum, quæ in cauam protenduntur transiens per centrum, maxima; cæteræ, quò viciniores sunt lineæ transeunti per centrum eò, maiores.

Earum autem, quæ in conuexam terminant, minima est illa, quæ inter punctum exterius assumptum, & peripheriam conuexam interponitur tendendo ad centrũ.

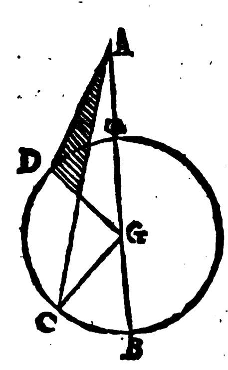
Reliquæ, quò huic viciniores, eò minores.

Duæ verò æquales solùm in peripheriam cadunt vtrinque maximæ, vel minimæ.

HÆc Propositio quinque partes habet, & in omnibus, vt 15. propos. eisdem principijs innititur, excepta 4. probatione, & eodem modo argumentandi procedit, vnde ex ea facilis, & expedita euadit. Dicit primò itaque; quod si eligatur aliquod punctum, V. g. A extra circulum, & ex eo in concauam peripheriam cadens recta transeat per centrum G: Hæc erit maior omnibus, quæ possint in dictam concauam peripheriam cadere.

Quod, si negetur, trahatur quæcumque linea à puncto A in cauam peripheriam, & sit A C. De hac enim, & de qualibet alia, quæ assignetur, probabitur esse minorem linea per centrum ductâ A B. Ad quod ostendendum ducatur à puncto C peripheriæ, quæ ab ea tangitur ad centrum recta G C.

Probatur duo crura sunt maiora reliquo nimirum basi C A in triangulo albo ACG, ex prop. 20. primi. Sed crus à cẽtro ad circunferentiam terminans C G est æquale portioni G B lineæ A B per cẽtrum transeuntis: Crus verò aliud est idem, ac A G alia portione eiusdem per centrum transeuntis lineæ. Ergo tota A B per centrum transiens est maior, quia A C, quæ per centrum non transit, & sic probabitur de omni aliâ, quæ posset assignari.

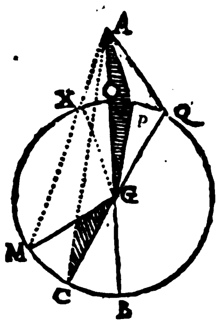


Secunda pars est; quòd portio A O, quæ cadit in peripheriam conuexam, & si protendatur, in centrum caderet, sit omnium minima, quæ in circumferentiam conuexam cadunt. Quod si nõ credatur, assignetur quæcumque, & sit A D. Coniungaturque punctum D, vbi peripheriam tangit, ad centrum linea G D, habemusque triangulum seminigrum D A G.

Probatur itaq;. In hoc triangulo basis G A est minor ex propos. 20. cruribus simul sumptis G D, & A D. Sed G D est æqualis portioni G O, cùm vtraque à centro ad circumferentiam pertingat. Ergo O A est minor, quàm A D; quod volebam ostendere.

ostendere, & valebit in qualibet aliâ lineâ, quæ assignetur; idem argumentum.

Tertia pars est. Quod si alię rectę pręter AB transeuntem per centrum, in cauam peripheriam protendantur, vt AC, & AM, illam esse maiorem, quę magis propinquat transeunti per centrum AB. Quod, vt ostendatur coniungatur CG, & GM, eruntque duo triangula seminigrum AGC, & totum album AGM.



Probatur autem. Nam crus trianguli seminigri CG est æquale cruri triãguli albi MG: Sunt enim ambo radij; nimirum ducti à centro ad peripheriam: Crus verò aliud AG in ambobus triangulis idem est. Sed angulus ad G trianguli albi, cùm sit pars, est minor angulo ad G trianguli seminigri; quod insuper addat portionem nigram: Ergo ex propos. 19. primi basis AM erit minor, quàm AC.

Quarta pars asserit insuper. Quod, quę sunt viciniores portioni lineę transeuntis per centrũ extra circulum AO sint minores remotioribus; quę à dicto puncto A in conuexam peripheriam cadunt, vt sunt AP, & AQ. Nam linea AP erit breuior, quàm AQ; quòd sit vicinior.

Probatur. Nam ductis à centro ad circumferentiam rectis GP, & GQ ad puncta, vbi prędictę AP, & AQ eam contingunt, erunt æquales. Sed intra triangulum maius AQG ab extremis A, & G duę rectę cadũt GP, & PA, quę ex prop. 21. sunt minores duabus AQ, & GQ cruribus trianguli AQG. At iam duo radij GP, & GQ sunt æquales: Si itaque auferantur, remanebit AP minor, quàm AQ. Et sic ostendetur de quibuscunque alijs, quę possent duci.

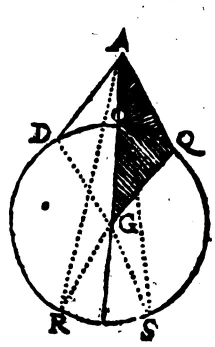
Quinta pars est tandem. Quòd duę rectilineę, hinc, & inde duci possint ad lineam transeuntem per centrum æquidistantes, quæ sint æquales. Inspice figuram Coroll. sequen.

Quod, vt demonstretur, fiat angulo ad centrum G albo, angulus æqualis niger, item ad G; & trahatur AQ. Et probatur sic propositio.

Nam duo crura GD albi, & QG nigri trianguli, vtpote radij, sunt æqualia. Anguli verò ad G, tum niger, tum albus sunt æquales, & crus GA commune; Ergo ex prop. 22. primi, bases AQ, & AD erunt æquales.

Quòd verò nulla alia possit esse istis æqualis; patet ex eo, quia deberet trahi, vel remotiùs, vel propinquiùs ad lineam centralem GA, & iam probatum est lineas rectę transeunti per centrũ propinquiores esse minores; remotiores verò maiores.

COROLLARIVM.



Collige, quod licet Euclides solùm demonstrarit de lineis cadentibus in circumferentiam conuexam, eadem tamen demonstratio valet in lineis cadentibus in concauam, vt patet de lineis RA, & SA.

COROLLARIVM II.

Colligitur 2. Quod licet Euclides demonstrarit de lineis cadentibus ad vnam partem; verificatur tamen etiam de lineis cadentibus hinc, & inde; cùm sit par argumenti ratio; dummodo vna sit remotior alterâ.

EXPENSIO V.

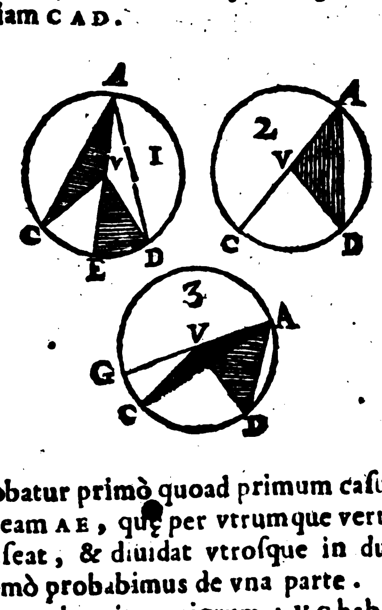
De Angulis in circulis inexistentibus.

Duplex est angulus rectilineus in circulo inexistens, alius est ad centrum, alius est ad circumferentiam. Comparat verò istos angulos, tum inter se, tum prout sunt in segmentis, tum in peripherijs, quibus insistunt, tum angulis, quos facit contingens cùm aliquâ lineâ intrinsecâ, & omnes istę propositiones verè fundamentales sunt; cùm ex ipsis multa, multaque deducantur ad Parallaxes pręcipuè spectantia, & ad figuras describendas, ad sinus inueniendos, &c.

THEOR. I. PROP. XXIII. Euc. 20.

In circulo angulus ad centrum duplex est anguli ad circumferentiam, cùm fuerit eadem circuli circumferentia basis angulorum.

Tribus modis potest accidere; quòd eadem circumferentia sit basis angulorum duorum, quorum vertex vnius ad centrum terminet, alius verò vsq; ad circumferentiam extendatur. Nam potest euenire, quòd crura incipientia ab ijsdem punctis peripherię, V.g. CD exterius, ferantur, vt in prima figura crura AC, & AD anguli ad peripheriam CAD cadunt extra angulum ad centrum CVD. Vel potest euenire, quòd vnum crus feratur super aliud, vt in secunda figura CA ducitur super CV, eademque lineam facit. Vel tandem potest euenire; quòd vnum crus anguli ad circumferentiam secet aliud anguli ad centrum, vt in tertiâ figura CA secat crus VD. Sed quomodocumque id eueniat, affirmat Euclides; quod semper angulus ad centrum: nempe CVD est duplus anguli ad circumferentiam CAD.



Probatur primò quoad primum casum trahendo lineam AE, quę per vtrumque verticem V, & A transeat, & diuidat vtrosque in duas partes: Et primò probabimus de vna parte.

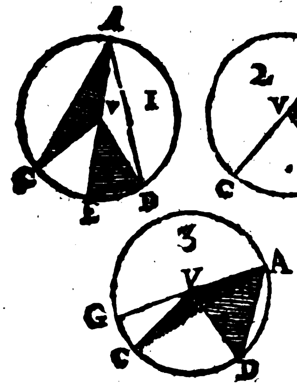
Triangulum itaq; nigrum AVC habet ex prop. 14. primi angulos ad A, & C inuicẽ æquales, cùm sit

sit triangulum Isosceles ob crura duo v A, & v C, quæ sunt semidiametri. Sed ipsi iidem anguli C, & A ex propos. 17. primi sunt æquales externo albo ad centrum v; Ergo angulus v albus ad cẽtrum est duplus angulo nigro A; qui est ad circumferentiam.

Deinde idem quoque ostendetur de aliâ parte simili prorsus argumentatione. Triangulum album A v D Isosceles ob crura, & radios æquales A v, & v D habet angulos A, & D æquales. Sed angulus externus ad v niger est æqualis istis duobus: Ergo est duplus vni eorum, V. g. angulo albo A: Sed angulus niger, & albus ad A angulum totum integrant ad peripheriam; sicut angulus niger, & albus ad v integrãt angulum ad centrum: igitur si partes anguli v erant duplæ partibus anguli A; & totum erit duplum toti.

Probatur in secundo casu eodem prorsus argumento. Nam triangulum nigrum A v D in 2. figura est Isosceles. Quare anguli ad basim æquales sunt; sed angulus v albus ad centrum, vtpote externus est æqualis illis duobus, ex propos. 17. primi, Ergo est duplus vni eorum; nimirum angulo A.

Progr ss. 1. Probatur quoque in tertio casu. Nam tractâ à puncto A per centrum v rectâ A G. Fient duo anguli, vnus ad centrum G v D, alius ad peripheriam G A D, super eandem circumferentiam G D. Et eadem prorsus, quæ in secundâ figurâ de hac dicemus. Nam crus G A deseruit pro vtrisque. Vnde idem argumentum valebit, & angulo nigro ad D, seminigerrimoq; ad A erit æqualis angulus ad centrum semialbus G v D, & ideo duplus ipsi A.



Progress. 2. Trianguli quoque, partes dictorum maiorum sunt eiusdem rationis, ac in secundo casu, nempe albus G v C, & nigerrimus v A C. Nam crus G A deseruit vtrisque; Quare albus ad centrum v est duplus nigerrimi ad peripheriã A.

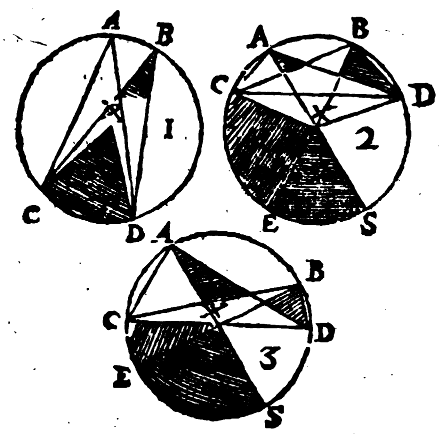
Cum itaque hæc pars alba externa apud v sit dupla parti nigerrimę apud A internę in triangulo C v A, & ex Progr. 1. totus quoq; angulus G v D externus sit duplus angulo toti interno G A D in triangulo v A D; si auferatur, tum ab angulo toto ad centrum G v D externo pars alba, tum ab angulo toto ad circumferentiam interno nigro apud A nigerrima pars; quod residuum erit angulus niger C v D ad centrum erit, & restabit duplus quoque anguli nigri C A D ad circumferentiam.

THEOR. II. PROP. XXIV. Euc. 21.

In circulo, qui in eodem segmento sunt anguli, sunt inuicem æquales.

HÆc propositio tres casus potest habere. Segmentũ enim circumferentiæ, vel potest esse maius semicirculo, vt in prima figura segmentum C A B D. Vel minus, vt in secunda C A B D. Vel ei æquale, vt in tertia figura segmentũ C A B D.

Sit itaque hoc segmentum semicirculo maius vt in prima, in quo sint duo anguli A albus, & B niger ad circumferentiam. Superque eam circumferentiam, super quam inexistunt, vt C D iuxta propos. antecedentem fiat angulus X ad centrum totus niger trahendo crura C X & X D.



Probaturque propositio. Angulus A albus ad circumferentiam iuxta pręced. propos. est semissis anguli nigri X ad centrum: Sed eiusdem nigri X ad centrum est quoque semissis angulus B niger ad circumferentiam. Ergo cùm B niger, & albus A sint medietas eiusdẽ, inter se erunt ęquales.

Ad probandam secundam, & tertiam partem simul necessè est diuidere angulos A, & B per lineas transeuntes per centrum A S, & B E quemlibet in duas partes nigram, & albam. Insuper & trahere semidiametros C X, & X D, & iam vides angulum partialem ad A album, tàm secundę, quàm tertię figurę habere angulum ad centrum ex nigro, nigerrimoque integratum C X S. Sed eundem nigerrimum, & album E X D obtinere quoq; alteram portionem nigram anguli B. Portionem verò albam anguli B in vtraque figura habere pro angulo ad centrum angulum nigrum C X E: Sicut & anguli A portio nigra obtinet pro angulo ad centrum angulum album D X S. His perceptis.

Probatur sic. Duo anguli ad centrum niger, & nigerrimus C X S sunt dupli, ex pręced. propositione portioni albę anguli A. Angulus verò albus ad centrum D X S est portioni nigrę ad A duplus. Ergo niger nigerrimus, & albus simul est duplus toti angulo nigro alboque ad circumferentiam A. Sed hi tres albus niger nigerrimusque ad centrum sunt dupli quoque totius anguli B ad circumferentiam: Siquidem niger est duplus eiusdem B portionis albę; nigerrimus, & albus E X D ad cẽtrum portionis nigrę ad B. Quare angulus B niger albusque totus, & angulus A albus nigerque totus sunt semissis anguli totius portionibus alba, nigerrima, nigraque constantis ad centrum. Quare inter se erunt æquales.

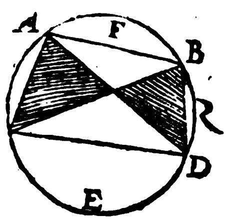
THEO-

THEOR. III. PROP. XXV. Euc. 22.

Quadrilaterorum in circulis descriptorum anguli, qui ex aduerso, duobus rectis sunt æquales.

DIcit; quod si quadrilaterum quodcumque circulo inscribatur C A B D illius anguli oppositi, quales sunt B, & C, aut A, & D sunt duobus rectis æquales. Quod, vt probet, trahit duas diagonales lineas A D, & C B, quę angulos in duas portiones diuidunt.

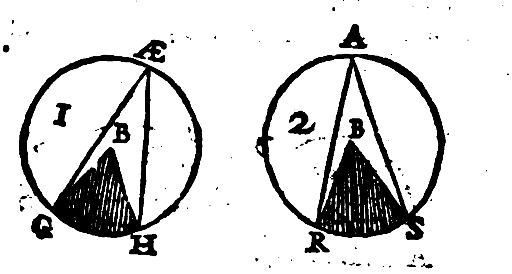
Probatur. Nam anguli A pars nigra est æqualis parti nigrę anguli B, ex pręc. propos. quòd sint in eodē segmento C A B D. Similiter etiam pars alba anguli A, quòd sit in eodem segmento B A C B D, erit æqualis parti albę anguli C. Igitur totus angulus A seminiger æquatur duobus portionibus nigrę B, & albę C. Sed addamus istis portionibus albę C, & nigrę B angulum D seminigrum totum erunt isti, ex propos. 17. primi duobus rectis æquales; Siquidē sunt interni triangulo CBD. Quamobrem angulus totus A niger, albusque vice harum portionum, quibus æquatur, nigræ B, & albę C substitutus, cum angulo D seminigro. Faciet duos angulos duobus rectis æquales: Eodem modo procedet demonstratio in oppositis B, & C. Quare patet propositio.



THEOR. IV. PROP. XXVI.

In æqualibus circulis æquales anguli æqualibus peripherijs insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

SI sint duo circuli æquales, quibus fiant duo anguli ęqui, vel ad centra, vt sunt nigri, vel ad circumferentias, vt albi. Dico illos angulos subtendere portiones circulorum æquales, vel eis insistere. Quod est idem.



Probatur primò de angulis æqualibus ad centrum. Nam segmentum primi G Æ H æquale est segmento secundi R A S; & toti circuli pręsupponuntur æquales. Ablatis ergo à circulis æqualibus segmentis æqualibus portiones æquales remanebunt; nimirum G H, & R S.

Quod verò segmenta G Æ H, & R A S sint æqualia probatur. Quia ex defin. 9. ea segmenta sunt æqualia, quæ angulos æquales includunt: Sed Æ, & A sunt æquales. Siquidem dimidij sunt, ex propos. 23. huius æqualium angulorum nigrorum ad centrum. Quamobrem circulorum portiones G Æ H, & R A S, in quibus insunt, erunt æquales.

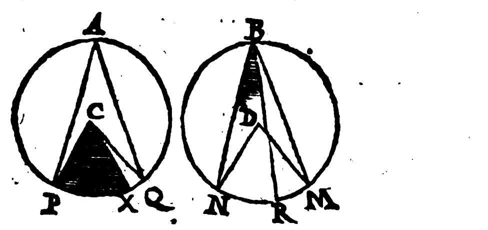
Quare sequitur quoque secunda pars. Nam si fiant anguli ad peripherias æquales Æ, & A insistent æqualibus segmentis ex eadem defin. 10. Quare ijs segmentis à circulis æqualibus ablatis portiones circulorum G H, & R S remanebunt æquales.

THEOR. V. PROPOS. XXVII.

In æqualibus circulis, anguli qui æqualibus peripherijs insistunt, sunt inter se æquales, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

HÆc propositio conuertit antecedentem. Sed alio pacto ostenditur. Nempe per reductionem ad impossibile. Detur itaque duo circuli æquales, & anguli in illis A, & B, vel ad centrum C, & D, qui insistant peripherijs æqualibus P Q, & M N. Dicit *eos angulos fore æquales.*

Nam si non sunt, ducatur punctata C X, quę faciat angulum nigrum ad centrum C primi circuli æqualem angulo albo ad D centrum secundi circuli, prout volunt aduersarij.



Tunc probatur angulus niger ad C centrum, vt falso mentiuntur aduersarij est æqualis angulo D albo secundi circuli. Ergo insistant peripherijs æqualibus, ex propos. anteced. Quare portio pheripherię P X est æqualis portioni M N secundi circuli. Sed eidem ex suppositione est æqualis portio P Q. Ergo portio P Q erit æqualis suę parti P X. Quod est impossibile.

Eodem modo probatur de angulis ad peripheriam A, & B. Nam, si non sunt æquales. Aduersarius faciat eos æquales tracta linea B R: Eritque angulus niger ad B, ęqualis angulo albo ad A. Quare peripherię portiones, quibus insistunt, N R, & P Q erunt æquales. Sed quoque portio M N est æqualis eidem P Q. Ergo portio minor N R esset æqualis maiori N M. Quod est absurdum.

COROLLARIVM I.

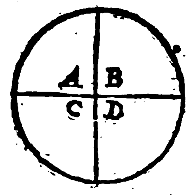
COlligitur hinc primo. Quod si duę lineę in circulo, vt A B, & C D intercipiant duas æquales portiones circuli, vt C A, & B D fore inuicem parallelas, quia tracta A D incidente anguli nigri alterni sunt æquales ob portiones æquales, quibus insistunt ex pręmissâ: Quando verò anguli alterni fiunt ab incidente, vt est A D æquales, duæ super quas cadit, parallelę sunt, ex propos. 28. primi.

COROLLARIVM II.

ELlicitur rursus duarum linearum se rectangulè decussantium, & per centrum transeuntium. Angulos ad centrum quartę circuli insistre. Nam, cùm faciant quatuor rectos A B C D,

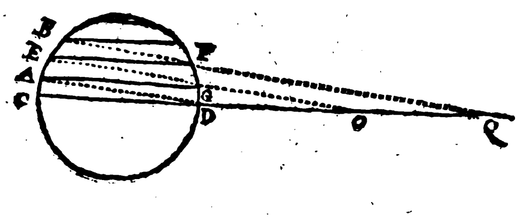
 & om-

& omnes recti æquales sint, oportebit, etiam circumferentias, quibus insistunt esse æquales: Et ideò circumferentiam in quatuor portiones esse diuisam, quę dicuntur quadrantes. Quare quoq; euidens est; omnem angulum acutum insistere minori portioni quadrantis; quia est minor recto: Obtusum verò maiori circumferentię, quàm quadrans sit; quia est maior recto.



COROLLARIVM III.

COlligitur item. Quod illę, quę in circulo coniungunt parallelas æquales arcus intercipiętes ad partes oppositas, vt sunt AD, EG, & BF punctatę coniungentes parallelas arcus ęquos intercipientes CD ad AG, & AG ad EF, adhuc esse parallelas. Ratio est, quia, cùm AG sit incidens in punctatas, & anguli alterni sint æquales ob æqualitatem portionum circuli GD, & AC, quibus insistunt, ex propos. 30. primi, punctatæ quoque æquidistantes erunt.



COROLLARIVM IV.

DEducitur etiam. Quod si EG punctata protendatur, & similiter diameter vsque dum occurrant in O, æqualem futurā diametri portionem, quę extra circulum prolungatur, vt est DO, & lineam AG in circulo ei æquidistantem. Ratio est, quia EO, & AD punctatę sunt parallelę similiter, & OD, & AG. Quare AOGD erit parallelogrammum, ex def. 35. primi. Quare ex propos. 34. primi, latera aduersa erunt inter se æqualia. Vnde OD erit æqualis rectę AG, & si alias protendas eodem modo idem sequetur. Quare diameter productum extra circulum æquabitur omnibus in circulo existentibus sibi parallelis, vt est CQ, quę æquatur tribus in circulo existentibus, & sibi parallelis CD, & AG, & EF.

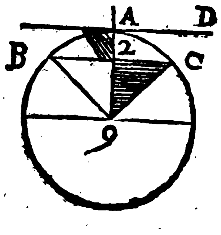
COROLLARIVM V.

COlligitur quoque rectę BC portionē circuli subtendenti esse parallelam lineam AD tāgentem punctum medium peripherię subtensę BAC, quale est A. Quia illę sunt parallelę, super quas recta cadens angulum facit externum, & internum oppositum, & ad easdem partes æqualem. Sed angulus A niger, & B 29. albus sunt æquales, cùm recti sint, vt dictum est.

Ergo sunt tangens AD, & subtendens BC parallelę; vt figura sequenti.

COROLLARIVM VI.

COlligitur tandem. Quod si BC secetur per medium per aliquam lineam à centro prouenientem, & portionem circuli, quam subtendit secari per medium, & viceuersa.



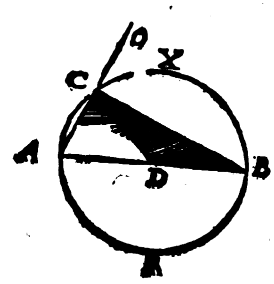
Nam anguli ad centrum æquales æqualium triangulorum, qualia sunt ostensa album, & nigrum ad 9 habent etiam bases æquales, ex 22. primi 2 B, & 2 C, & æqualibus peripherijs insistunt, vt AC, & AB, ex preced. & ideò erunt æquales portiones BA, & CA.

THEOR. VI. PROP. XXVIII. Euc. 31.

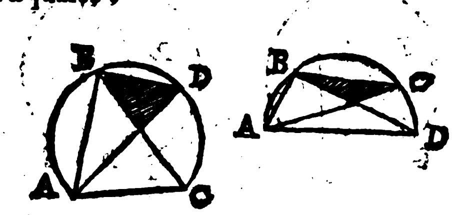
In circulo angulus, qui in semicirculo rectus est, qui autem in maiore segmento, minor recto: qui autem in minore maior est recto. Insuper angulus maioris segmenti, recto quidem maior est, minoris verò segmenti angulus minor est recto.

HÆc propositio quinque partes habet. Sed quę, primâ ostensâ cęterę faciles euadant. Primam itaque partem primò declarabimus. Dicit itaque, quod angulus in semicirculo, vt est C, niger nigerrimusque simul, cuius vertex in circumferentia est, basis verò illum subtendens totus diameter AB, rectus est. Quod, vt ostendatur, ducenda est recta CD, & prolungandum latus CA in O.

Probatur angulus externus albus C est æqualis angulis internis, & oppositis A, & B totius trianguli ACB, ex propos. 17. primi. Ergo est etiam ęqualis angulo interno ad C, qui nigerrimus nigerque simul.



Probatur. Nam angulus A, & angulus B sunt æquales eius duobus portionibus, & A quidem nigrę, angulus verò B portioni nigerrimę: Ergo & eędem portiones sūt æquales angulo externo albo C. Quod verò angulus A sit æqualis portioni nigrę, patet ex propos. 14 primi. Nam sunt anguli ad basim in triangulo Isoscele ACD, cùm duo crura sint semidiametri AD, & CD. Quod verò B sit æqualis portioni, & angulo nigerrimo C, eodem argumento probatur. Nam triangulum totum nigrum ob crura, quę sunt semidiametri est Isosceles, vnde B, & C nigriores, vt anguli ad basim sunt æquales.



Dicit quoque. Quod si in maiori segmento sit ABC angulus erit minor recto, & si angulus ABO, sit in minori segmento erit recto maior. Quod, vt probetur, trahatur à puncto A diameter in vtrisque segmentis AD. Trahaturque crus BD faciens, ex prçced. probat angulum rectum BAD. Nam angulo in maiori segmento ABC, addit partem nigrā; vnde ABC minor erit recto, at angulo in minori ABO parte nigra minor est idem rectus, quare ABO maior erit recto.

Dicit tandem circumferentiam maioris segmenti facere cum recta subtensa, angulū recto maiorem: At minoris segmenti recto minorem, ad

Ad quod ostendendum inspiciatur prima figura. Nam C B erit subtensa, & peripheria segmenti maioris C R B, minoris verò C X B, cùm ergo angulus C rectus sit, & recta C A intra circulum cadat; Patet; quòd circumferentia extra cadens C A faciat suum angulum, cùm recta C B maiorem recto. At in minori segmento peripheria C X lineam C O foras relinquit: Quare facit cum C B angulum recto minorem; quia angulus O C B maior rectus est, vt prima parte huius propos. est ostensum.

COROLLARIVM.

Colligitur hinc. Quod si fiat triangulum rectangulum quodcumque, & maior eius basis bifariam diuisa assumatur pro centro interuallũ medietate eius præbente, circulum necessariò per tres vertices extremos angulorum rectanguli esse transiturum. Quoniam, si non transiret, vel secaret, vel supra, se flecteret: Si secaret, ergo iam intra illud rectangulum triangulum ęquale ei posset constitui contrà propos. 21. primi: Si super transiret, posset constitui triangulum angulum rectum comprehendens, & tunc angulus rectus rectanguli, vtpote comprehensus, ex propos. 21. primi esset maior.

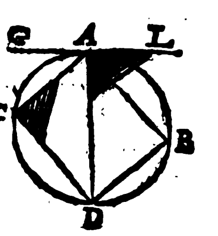
THEOR. VII. PROP. XXIX. Euc. 32.

Si circulum tetigerit aliqua recta linea. A contactu verò producatur aliqua recta linea circulum secans; Anguli, quos ad contingentem facit, æquales sunt illis angulis, qui in alterni circuli segmentis consistunt.

Sit tangens circulum G L in puncto A, à quo recta educatur, quę secet circulum in duo segmenta, vt est A D, Hęc vel per centrum transibit, vel non. Si transibit per centrum, erit primus casus, de quo primò demonstratio erit.

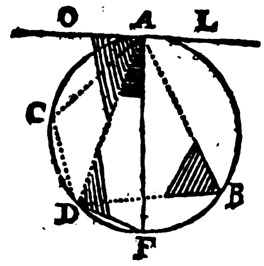
Casus 1. Asserit itaque, quòd hęc transiens per centrum A D faciet angulum, cum tangente æqualem angulo, qui comprehenditur ab alterno segmento; nempe angulum nigrum ad A dextrũ angulo C nigro sinistri segmenti: Angulum verò sinistrum ad A album angulo segmenti dextri B albo.

Probatur verò. Omnes recti anguli sunt ęquales. Sed anguli segmentorum C, & B recti sunt, ex pręced. & anguli G A D, & L A D, quos perpendicularis per centrum transiens facit, cum tangente sunt, ex propos. 20. huius recti: Ergo omnes sunt æquales.



Casus 2. Dicit quoque idem esse, & euenire. Si linea à puncto A egrediens non transeat per centrum, vt in hac secunda figura. Nam angulus dexter albus nigerrimusque ad A à secante A D tangenteque O L factus est æqualis angulo C segmenti sinistro, sicut & alius niger ad A est æqualis alteri nigro B. Quod, vt probetur trahenda est A F, quę transeat per centrum, & tracto crure D F constituendum est rectangulum triangulum A D F.

Probatur propos. Angulus niger O A D est æqualis angulo apud F in triangulo A D F. Sed iste angulus F est æqualis angulo nigro B. Ergo angulus B niger, & niger apud A sunt inuicem æquales. Probatur ex propos. 24. huius, quòd angulus F in triãgulo A D F sit æqualis nigro B: Quia est in eodem segmento A B F D, Probatur quoq; quod idem angulus F, sit æqualis nigro A: Quia niger D ex anteced. rectus est, quare ex propos. 17. primi, reliqui nigerrimus apud A, & apud F vni recto erunt æquales; Sed angulus niger, nigerrimusque apud A rectus est: Ergo ablato angulo nigerrimo, cum quo angulus apud F, & niger apud A æquantur vni recto, restabunt inuicem anguli F, & A niger æquales. Quamobrem angulus B angulo F æqualis, æquabit quoque angulum nigrum apud A.



Sic probatur de angulo dextro L A D, quod sit æqualis angulo sinistro A C D in segmento: Nam B niger, & C albus in quadrilatero C A D B, ex propos. 25. huius æquantur duobus rectis, & similiter anguli niger, & L A D apud A æquantur duobus rectis; Sed iam ostensum est angulum B nigrum esse æqualem angulo A nigro. Ergo reliquum nigerrimum, & album ipsius erit æquale angulo albo C in triangulo A C D segmenti.

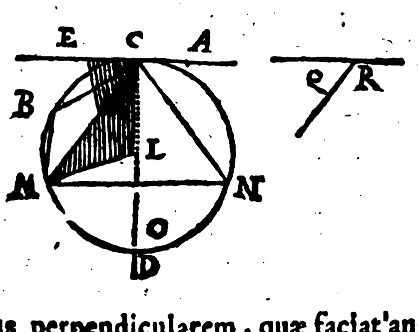
PROB. V. PROP. XXX. Euc. 33.

Super data recta linea describere segmentum circuli; quod capiat angulum æqualem dato angulo rectilineo.

Docet hic constituere quodlibet segmentum super quamlibet rectam, quodcapiat angulum æqualem dato angulo rectilineo.

Et quidem si angulus rectus datus sit, non oportebit, nisi diuidere lineam, V. g. C D bifariam, & ibi centro posito in L describere semicirculum. Nam ex dictis propos. 28. capiet angulum rectum, qui erit ęqualis dato; cùm omnes recti sint ęquales. Sed si non sit rectus, at acutus, vt Q, tunc magis operis requiritur.

Sit itaque angulus datus Q acutus, cui æqualis capax super lineã C M facere oporteat aliquod segmentum circuli. Ducatur ad initium eius C linea E A, quę faciat angulum acutum nigrum ęqualem angulo dato Q, & ad eam erigatur perpendicularis, exiens à puncto C, quę sit O C, & portione nigerrima compleat angulum rectum, & ab altero extremo M punctata alia ducatur



versus perpendicularem, quæ faciat angulum ad M nigrum ęqualem angulo nigerrimo ad C. Hę namque punctatę C L, & L M, vt subtensę angulis ęqualibus æqualibus, ex propoſ.15. primi erunt æquales. Quare facto centro in L interuallo L C deſcribi poterit circulus, qui tranſibit per M, vtpote per ſemidiametrũ æqualem. Si itaque in hoc ſegmento C N M ſuper lineam C M conſtituatur angulus N. *Iſte erit æqualis angulo acuto nigro ad* C. Qui eſt æqualis angulo Q dato.

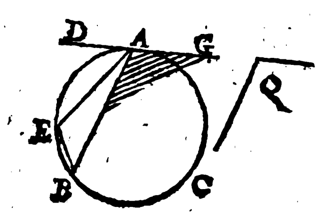
Probatur autem ex præmiſſa propoſitione faciliter. Nam angulus ad C niger E C M eſt angulus ad contingentem. Ergo erit æqualis angulo alterni ſegmenti, qui eſt angulus N.

Quod ſi velimus facere angulum obtuſum, V. g. R. Fiat angulus eodem pacto, quo ſupra A C M ei angulo R æqualis, & facto circulo è centro L in ſegmento C B M fiat angulus B. Nam, cùm ſit ex præcedenti propoſ. in ſegmento alterno C B M erit æqualis angulo obtuſo A C M, & R.

PROB. VIII. PROP. XXXI. Euc.34.

A dato circulo ſegmentum abſcindere capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.

SIt datus angulus Q, & oporteat à circulo dato A B C abſcindere portionem, quæ capiat angulum æqualem dato angulo Q. Ducatur recta D G tangens circulum in puncto A, & à puncto A ducatur recta A B, quæ faciat cum tangente D G angulum æqualem angulo Q, prout docet propoſ. 24. primi, & ſegmentum alternum A E B capiet angulum E æqualem angulo Q.



Probatur. Nam ex 29. propoſ. huius angulus in ſegmẽto alterno A E B capiens eſt æqualis angulo nigro ad A. Sed angulus niger ad A factus eſt æqualis angulo dato Q. Ergo ſegmentum A E B capit angulum æqualem dato angulo Q.

EXPENSIO VI.

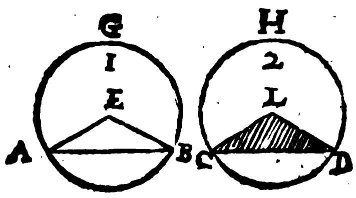
De Peripherijs.

HIc agimus de Peripherijs eas comparando ad inuicem, & oſtendendo quales ſint æquales, qualeſque non ſubeant æqualitatem. Docemus etiam peripheriam, atque adeò circulũ bifariam ſecare: Et, licet hæc expenſio ſit facilior præcedenti, oportuit tamen poſponere, cùm dependeat in aliquibus à demonſtrationibus angulorum præhabitis.

THEOR. I. PROP. XXXII. Euc.28.

In æqualibus circulis, æquales rectæ lineæ, æquales peripherias auferunt maiorem quidem peripheriam æqualem maiori alterius, minorem verò vnius æqualem minori alterius.

DIcit lineas æquales in circulis æqualibus (quòd etiam intelligitur de eodem, vt notat Clauius,) vt ſunt A B, & C D in æqualibus circulis primò, & ſecundò auferre ſegmenta æqualia ſcilicet diuidere qualibet ſuum circulũ in duas portiones, quæ & ſi non ſint æquales, inuicẽ illæ, quæ ſunt eiuſdem circuli, comparanda eſt maior primi circuli, cum maiore ſecundi, & hæ circuli portiones erunt inuicem æquales; ſicut & minor primi comparata minori ſecundi.



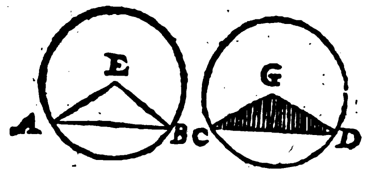
Probatur. Nam anguli ad centrum E, & L triangulorum albi, & nigri ſunt æquales. Ergo inſiſtunt ſegmentis, & peripherijs æqualibus minoribus A B, & C D, ex propoſ. 26. huius, quæ albatæ ab æqualibus circulis per imaginationem relinquent portiones peripheriæ maiores A G B, & C H D æquales.

Probatur verò; quod anguli E albus, & L niger ad centrum ſunt æquales, quoniam baſes A B, & C D, ex præſuppoſitione ſint æquales: Latera verò, vt ſemidiametri æqualium circulorum æquales ſunt, totum igitur triangulum nigrum, toti albo æquale eſt. Quare & angulus ad centrum, ex prop.23. primi E albus erit æqualis nigro L.

THEOR. II. PROP. XXXIII. Euc.29.

In æqualibus circulis rectæ lineæ, quæ æquales peripherias ſubtendunt, ſunt æquales.

ESt conuerſa præcedentis, & ſequitur à 27. huius, quæ & ipſa conuertit 26. Sint itaque peripheriæ æquales A B, & C D, quæ rectis ſubtendantur, fiantque anguli ad centrum E, & G tractis ſemidiametris A E, & E B conficientibus triãgulum album, & alijs G C, & G D nigrum delineantibus.



Probatur. Quia peripheriæ C D, & A B, V. g. minores præſupponũtur æquales, anguli E albus, & G niger ad centrum, ex 27. propoſ. huius ſunt æquales; Sed & crura ſunt æqualia; Quia omnia ſunt ſemidiametri. Ergo ex propoſ.22. primi, & baſes æquales erunt quales ſunt A B, & C D.

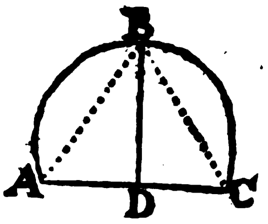
THEOR. III. PROP. XXXIV. Euc.30.

Datam peripheriam bifariam ſecare.

AD hoc vt peripheria A B C bifariam ſecetur. Ducatur recta ſubtendens A C, & diuidatur bifariam in D, & ab ea diuiſione D erigatur perpendicularis D B vſq; ad peripheriã protenſa; hæc namque diuidet eam in duas partes æquales, ad quod probandum ducendæ ſunt duæ lineæ nimirum A B, & B C.

Probatur

Probatur lineę modò tractę sunt æquales. Ergo ex prop. 32. huius, & peripherię, quas subtendunt A B, & B C æquales sunt.



Probatur, quòd subtensę sint æquales. Nam bases sunt triangulorum æqualium A B D, & B D C. Hęc verò triangula probantur æqualia, ex prop. 32. primi: Quia crus B D est commune: alterum verò crus D C ex constructione fecimus æquale D A alteri cruri: At anguli ad D, A D B, & B D C recti sunt. Quare & bases A B, & B C æquales.

EXPENSIO VII.

De Rectis circulo inscriptis, & circumscriptis.

Quemadmodum egit Euclides Libro secundo de potentijs laterum trianguli, tum rectanguli, tum obtusanguli ad æqualia quadrata, & rectangula constituenda.

Sic hic agit de potentijs linearum, aut in circulo se secantium, aut circulum tangentium ad æqualia quadrata, rectangulaque describenda. Vtilissima omnium cognitio; quippe quì conicis maximè deseruiat, tangentibusque reperiendis, & secantibus maximè prosit, & solidis ipsis sphęricis, conicisque ad inueniendam eorum soliditatem aditum sternat.

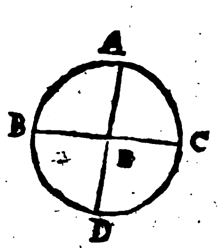
THEOR. I. PROP. XXXV.

Si in circulo duæ rectæ lineæ se se mutuò secuerint rectangulum comprehensum sub segmentis vnius æquale est ei rectangulo, quod sub segmentis alterius comprehenditur.

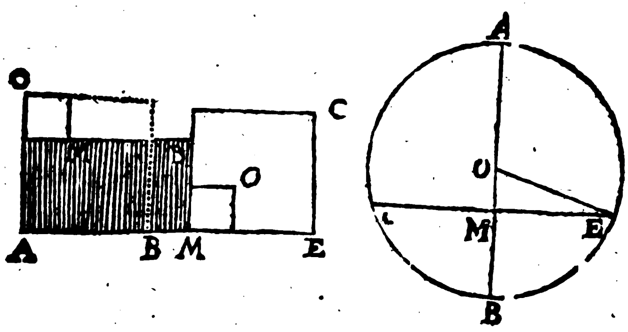
Quatuor casus propositio hęc enumerat. Nam vel ambę lineę, quę se in circulo secant sunt diametri, & est primus casus. Vel vna earum; sed se inuicem secant ad angulos rectos; & ecce secundus. Vel vna earum diameter est; sed non se secant ad angulos rectos; & erit tertius. Vel tandem neutra earum transit per centrum, siue ad angulos rectos, seu ad non rectos secet, & erit quartus casus: Qui singuli diuersas probationes exposcunt.

Primus casus. Sit igitur circulus A B C D, in quo duo diametri A D, & B C se secent in E dicit rectangula, ex segmentis B E & E C vnius, & ex segmentis alterius A E, & D E facta inuicem esse æqualia.

Patet, quia cùm segmenta sint semidiametri sunt omnia æqualia. Vnde & æqualia rectangula constituent.

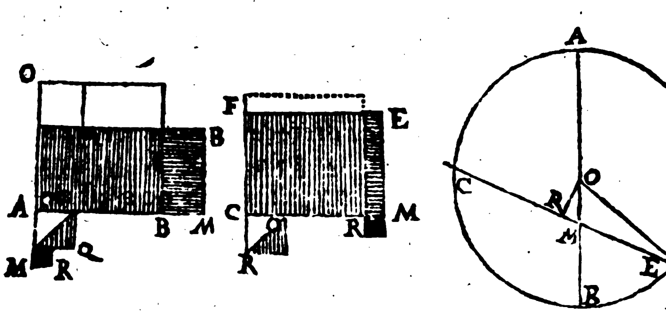


Casus 2. Sit in circulo C B B, linea, quę rectè secet diametrū in M. Dicit, quòd *quadratum* factum ex M E, & M C, *est æquale rectangulo* facto, ex A M portione diametri, & M B alia diametri portione. Quod vt demonstretur trahendus est semidiameter O E.



Probatur verò ex propos. 7. secundi rectangulum nigrum factum ex A M, & M B vna cum quadrato paruo O M ex intermedia O M est æquale quadrato ex dimidia, quale est punctatum B O; quòd diameter A B sectus sit in æqualia in O, & non æqualia in M. Sed huic eidem quadrato ex dimidiâ æquale est quadratum ex dimidia M E; quale est M C iuncto tamen eidem quadrato M O. Ergo si hoc quadratum M O, tum à rectangulo nigro, tum à quadrato M C auferatur remanebunt quadratum rectangulumque nigrum inter se æqualia. Remanet probanda minor, quod duo quadrata M C, & M O paruum æquentur quadrato punctato B O, hoc autem patet. Nam quadratum O B est æquale quadrato O E cùm sint semidiametri, & lineę æquales, sed quadratum ex O E cùm sit basis subtensa angulo recto M, ex propos. 11. secundi est æquale quadratis ex M E, quod est M C, & M O paruo. Ergo eisdem quoque est æquale quadratum punctatum ex O B. *Quare rectangulum nigrum erit æquale quadrato* M C, quod probandum erat.

Casus 3. Dicit tertiò. Quòd si linea C E secuerit A B diametrum, & non ad angulos rectos, adhuc vera erit propositio; Et quod rectangulum comprehensum sub segmentis vnius, V.g. sub C M, & M E erit æquale rectangulo comprehenso sub segmentis alterius, nępe diametri M B, & M A. Quod, vt probet, trahit perpendicularem à medietate lineę C E; nempe à puncto R, quę cadet ex propos. 1. huius Coroll. in centrum O. Deinde coniungit centrum cum extremo E rectâ O E.



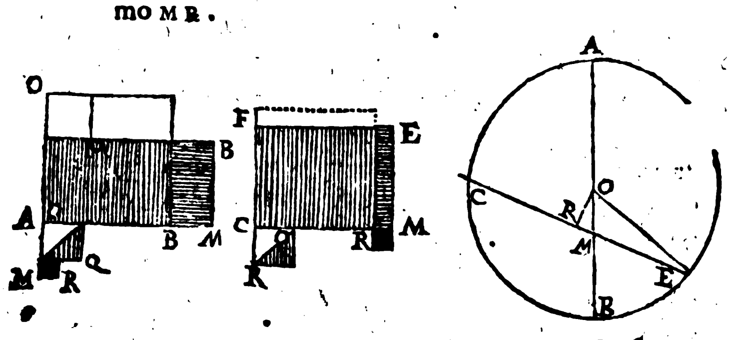
Probatur paulò operosiùs, quam pręcedens propositionis pars. Diameter A B est sectus in O, in æqualia, & in M in non æqualia: Quapropter rectangulum sub partibus inęqualibus A M, & M B contentum, quale est nigrum M A B, & quadratū A Q ex intermedia M O seminigrum simul sunt æqualia quadrato ex medietate diametri O B, ex propos. 7. secundi, quale est ò B, & quod idem est propter æqualitatē linearum quadrato ex O E. Sed hoc quadratum ex O E, vel O B est quoque æquale propter propos. 11 secundi quadratis C R ex O R hoc est, seminigro, & ex R E punctato F R.

Ergo quadratum hoc R F punctatum vna cum quadrato seminigro annexo erit ęquale rectāgulo nigro

nigro A M B ex segmentis diametris iuncto cum quadrato Q A ex O M.

Sed modò hoc quadratum Q A, ex propos. II. secundi est æquale duobus O R seminigro, & M R minimo nigerrimo ob angulum rectum R.

Quapropter poterimus substituere loco illius Q A hęc duo, seminigrum ex O R, & M R minimũ nigerrimum. Quare quadratum punctatum R F, vt diximus, cum quadrato seminigro erit æquale huic rectangulo nigro A M B associato cum quadrato eodem seminigro O R, & minimo nigerrimo M R.

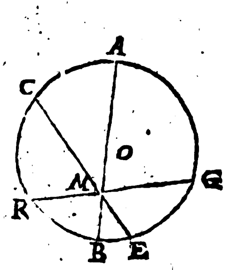


Abijciatur itaque ab vtrisque comes iste seminiger O R, & remanebũt adhuc æqualia rectangulum nigrum A M B cum minimo nigerrimo quadrato, quod remansit, & quadratum punctatum R F factum ex dimidia R E.

Sed huic quadrato punctato R F facto ex dimidia R E est æquale rectangulum nigrum factum ex segmentis inęqualibus C M, & M E lineę C E, nimirum C B vnà, cum quadrato ex intermedia R M facto, quod est minimum nigerrimum R M, ex propos. 7. secundi; Siquidem linea C E est diuisa in æqualia in R, & non æqualia in M. Quare duo rectangula nigra A B M nimirum ex segmentis diametri, & C E ex segmentis alterius associata duobus quadratis minimis nigerrimis sunt æqualia vni tertio; nempe quadrato R F ex R E. Vnde erunt æqualia inuicem. Tolle itaque illa quadrata minima nigerrima, cùm sint eiusdem quantitatis, vtpote eiusdem intermediæ R M, *& remanebunt æqualia rectangulum nigrum, ex segmentis diametri* A M B; *& ex segmentis alterius nigrum rectangulum* C E.

Casus 4. Sint tandem duę rectę, quę in circulo quomodocumque se secent C E, & G R in M. Ducaturque per punctum M ad centrum diameter A B. Dicit; quòd *rectangulum* ex segmentis lineę C E *æquale* est *rectangulo* ex segmentis lineę R G.

Probatur. Nam ex pręcedenti tertia parte rectangulum ex segmentis C M, & M E lineę C E est æquale rectangulo ex segmentis diametri A M, & M B. Sed ex eâdem rectangulum ex segmentis G M, & M R lineę G R est eidem rectangulo ex segmentis diametri A M, & M B æquale. Ergo rectangulum ex segmentis lineę C E, & rectangulum ex segmentis lineę R G sunt æqualia inuicem.



COROLLARIVM.

Colligitur hinc. Quomodo datis duobus lineis inæqualibus poterimus eas ita secare, vt ex earum segmentis rectangula componantur æqualia. Nam si eas in circulo accomodamus, ita ut se inuicem secent; certum erit, quòd rectangula ex segmentis ijs confecta æquabuntur ad inuicem.

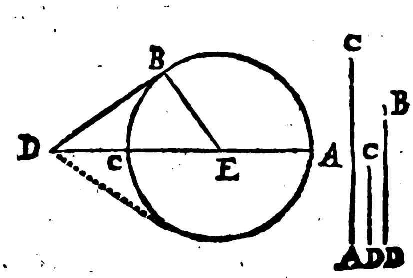
THEOR. II. PROP. XXXVI.

Si extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum tangat, altera secet. Rectangulum, quod sub tota secante, & portione exteriùs inter punctum assumptum, & conuexam peripheriam intercepta comprehenditur, æquale est ei quadrato, quod describitur à tangente.

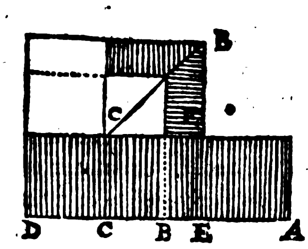
DVos casus hæc propositio enumerat. Nam secans, vel per centrum transit, vel non. Si per centrum transeat, vt est in apposita figura D A.

Primus casus erit, & intendit demonstrare rectangulum sub tota D A, & sub portione D C, quę inter peripheriam conuexam, & punctum assumptum mediat, comprehensum nigrum esse æquale quadrato rectę tangenti D B; Quod, vt perficiat, à puncto contactus ad centrum ducit B E, quæ ex 20. tertij perpendicularis erit.

Ex propos. 8. secundi cùm diameter sectus sit in E in partes æquales, & ei adiecta fuerit recta exteriùs D C, rectangulũ, quod est nigrũ D A comprehensum à tota D A, & adiecta D C, cum quadrato ex dimidia C E nimirum radio, quod est C B, cuius Gnomon niger est æquale quadrato ex D E dimidia, & adiecta confecto, nimirum maximo D B.



Sed huic quoque maximo D B, ex propos. II. secundi sunt ęqualia duo quadrata punctatũ ex D B, & alterum ex radio B E, quod est idem, ac illud, cuius Gnomon niger C E B.

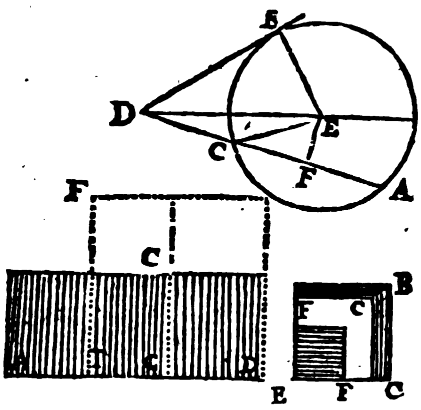


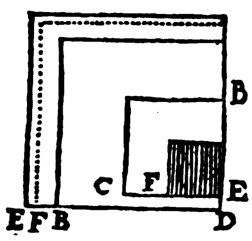
Ergo rectangulum nigrum D A iuncto eodem quadrato C E B, cuius Gnomon niger est, æquale inuenitur istis duobus, punctato nimirum iuncto eodem C E B. Quare, si hoc C E B auferatur ab vtrisque *remanebunt rectangulum nigrum* D A, *& quadratum punctatum ex* D B *tangente æqualia*.

Dicit quoq; hanc propositionem verificari quãuis *recta secans per centrum non transeat*, vt est in seq. figura D A. Nam tota D A, & portio D C exterius intercepta faciet rectangulum æquale quadrato tangentis B D. Vt verò probet. In primis trahit à puncto contactus ad centrum perpendicularem B E, ex 20. huius. Rursusque diuisâ C A bifariam in F, ab eo ducit perpendicularem ad centrum E, ex 13. huius. Deinde ducit radium C E.

Prob. Quadratum punctatum ex D F dimidiâ, & adie-

& adiectâ est equale rectangulo nigro ex tota AD, & adiecta DC, comite quadrato ex dimidia CF ex propos. 8. secundi, & addito vtrinque quadrato minimo EF, quadratum EF cum punctato FD, & rectangulum nigrum cum eodem EF, & alio quadrato CF iam sibi comite remanebunt æqualia.



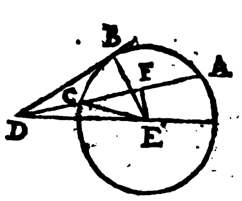


Hęc autem duo quadrata comitantia rectangulum nigrum, vtpote ex cruribus CF, & FE æquantur quadrato ex semidiametro quale est CEB, cuius Gnomon niger, ob rectum angulum F, ex propos. 11. secundi. Ergo possumus substituere hoc pro illis, & sic rectangulum nigrum quadrato hoc ECB comite æquatur quadrato DF punctato, & addito minimo nigro FE.

At hęc duo punctatum, & nigrum minimum æqualia sunt maximo quadrato DE, vtpote facto ex basi, & subtensa angulo recto F, ex prop. 11. secundi. Quamobrem, & rectangulum nigrum comite quadrato ECB ex radio EC nuper substituto æquabitur ipsi maximo ED. Sed & huic idē est æquale quadratum ex tangente DB, & quadratum ECB ex radio EB, ex propos. 11. ob rectum angulum B. Ergo & rectangulo nigro vna cum quadrato ECB erunt æqualia.

Tolle itaque ab vtrisque quadratum ECB ex radio BE, aut EC; quod idem est; *remanebuntque æqualia quadratum DB, & rectangulum nigrum ex DA, & DC.*

Quod & verificabitur si linea DA non cadat ad alteram partem, sed ad easdem partes, vt in figura secunda videre licet.



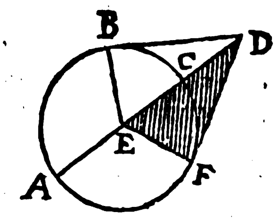
COROLLARIVM I.

Hinc manifestatur; Quod si plurimę lineę cadant secantes circulum, omnia rectangula à totis ijs lineis, & earum partibus extra circulum remanentibus inter se esse æqualia; quoniam suut æqualia omnia vni tangentis alicuius ab eodem puncto exeuntis quadrato.

COROLLARIVM II.

Manifestum quoq; est tangentes ab eodem puncto ductas inuicem æquales existere. Ratio est; quia omnes lineę, quæ tangunt, faciunt suum quadratum rectangulo alicui secantis æquale; Propterea, & quadrata debebunt esse æqualia. Quare & latera eorum quadratorum æqualia esse debebunt.

COROLLARIVM III.



Constat quoque ab eodem puncto extra circulum assumpto non; nisi duas, tangentes duci posse: Alioquin; si alia duceretur, aut infra BD, aut supra caderet, & sic ducta BE eius contactum coniungente esset maior, vel minor, quòd esse nequit, & angulus ad B esset maior, vel minor recto, quod, nec esse potest.

COROLLARIVM IV.

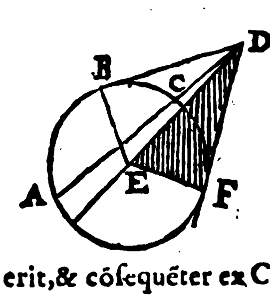
Constat quoque, quòd si duę rectę æquales à quolibet puncto exteriùs assumpto in conuexam peripheriam incidant, & vna earum sit tangens, alteram quoque tangere; Quia si non tangeret, secaret. Quare ad alteram partem punctata tangens duci posset, quę, & esset æqualis tangenti alteri, V. g. DB. Quare in circumferentiam ab eodem puncto inciderent tres æquales contra documenta propos. 22. huius.

THEOR. III. PROP. XXXVII.

Si extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque puncto in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum secet, altera in eum incidat. Sit autem, quod sub totâ secante, & exterius inter punctum, & conuexam peripheriam assumpta comprehenditur, rectangulum æquale ei, quod ab incidente destribitur quadrato, incidens ipsa circulum tanget.

Extra circulum datum sumatur punctum D, & ex puncto duæ rectæ in circulum cadant, quarũ vna secet, & faciat rectangulũ sub suo segmento DC, & tota AD comprehensum æquale quadrato ex tota alterius incidentis, V.g. ex BD. Dicit eam *BD circulum tangere in B.* Quod, vt demonstretur, ducenda est tangens aliqua, V.g. DF, & coniungenda sunt cum centro punctum contactus huius recta EF, & punctum B incidentię alterius lineę rectâ BE; Et si non transeat secans DA per centrum, ducenda est altera secans, quę per centrum transeat, quę sit DE.

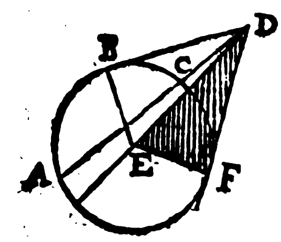
Probatur. Nam triangula album, & nigerũ ęqualia sunt lateribus sibi correspondentibus: Quare ex 23. primi anguli F, & B erunt ęquales; Sed angulus F rectus est, ex propos. 20. quod DF circulum tangat. Ergo & angulus B rectus erit, & cõsequẽter ex Coroll. prop. 18. DB *circulum tanget.*



Remanet probandum. Quòd triangula latera habeant correspondentia ęqualia. Nam basis DE commu-

communis est, crus B E; & E F radius est: Quare remanet probandum de altero crure D B, & D F, id verò ostenditur. Nam quadratum factum ex D F est ęquale rectangulo facto ex tota A D, & segmento exterius inter peripheriam, punctumque assumptum intercepto D C. Sed & huic eidem rectangulo ponitur in propos. hac ex suppositione ęquale quadratum ex B D: Sed quadrata ęqualia facta sunt ex ęqualibus lateribus. Ergo, & latus, crusque D B est ęquale cruri D F.

Collige hinc lineam à puncto exterius assumpto per centrum ductam diuidere angulum B D F comprehensum à tangentibus ab eodem puncto nascentibus bifariam. Ratio est, quia probata sunt duo triangula hinc, inde ęqualia. Quare, & è conuersò recta diuidens bifariam angulum D B F necessariò per centrum transibit; Quòd si non transiret per centrum alibi transiret. Vnde ducta, quę transiret per centrum, D E, angulum D B F bifariam diuideret: Est autem impossibile, quòd angulus in duobus locis bifariam diuidatur.



TRA-

TRACTATVS VII.

In Librum quartum Elementorum. De inscriptione, & circumscriptione figurarum in circulo.

LIBER quartus agit de descriptione figurarum respectiuè ad circulum; licet enim triangula, & quadrata possint sine circulo describi, commodiùs tamen cum reliquis figuris, aut intra circulum, aut circa circulum describuntur. Vsus verò huius Libri pernecessarius est, tum solidis in sphæra inscribendis, & circumscribendis, tum ad comparationem externæ figuræ solidæ, cum interna, ex qua Archimedes soliditatem sphæræ adinuenit, tum ad lineas, chordasque arcuum inueniendas, & tandem ad Militares delineationes fortalitiorum.

EXPENSIO I.

De Principijs.

ANtequam propositiones ipsas aggrediamur aliqua principia, definitionesque ad hunc librum, spetialiter spectantes oportet agnoscere; istæ verò sunt.

DEFINITIO I.

Figura rectilinea in figura rectilinea inscribi dicitur, cùm singuli eius figuræ, quæ inscribitur anguli singula latera eius, in qua inscribitur tangunt.

Cùm debeat agere Euclides de figurarum inscriptionibus, & circumscriptionibus paucis declarat, quid sit figura inscribi, & circumscribi: Quare dicit, quòd, si sit triangulum A B C, cuius vertices omnes angulorum tangant latera alterius, vt tangit triangulum prædictum latera figuræ E F G in punctis A, B, & C; quòd figura tangens in verticibus suis erit inscripta, altera tacta in lateribus vocabitur circumscripta.

DEFINITIO II.

Similiter etiam figura circumscribi figura dicitur cum circumscriptæ latera singula tangunt angulos singulos inscriptæ.

Hæc Definitio est opposita præcedenti; definitque circumscriptam E F G, quę dicitur talis eò quod latera eius tangant angulos A, B, & C alterius inscriptæ.

DEFINITIO III.

Figura rectilinea in circulo inscribi dicitur, cum figuræ inscriptæ singuli anguli tangunt circuli peripheriam.

Sic triangulum A B C circulo inscribi dicetur; quia extremi apices angulorum C B A eũ tangunt.

DEFINITIO IV.

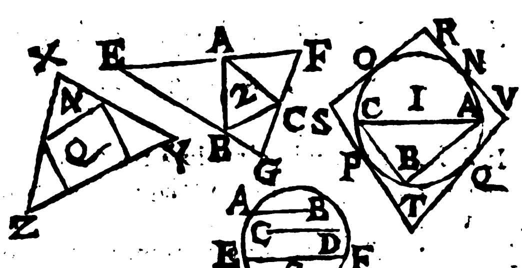
Figura verò rectilinea circulo circumscribi dicitur; cùm singula eius, quæ circumscribitur, latera tangunt circuli peripheriam.

Sic quadrilaterum R V S T circumscribitur circulo; quia eius latera circulum tangunt in punctis N O P Q, vt fig. 1.

Quare patet; quòd quadratum in triangulo, nec quælibet figura possit inscribi in alia; cùm aliquod latus inscriptę, est idem cum circumscribentis latere, vt quadratum Q tangit circumscriptam figuram X Z Y: Hanc tamen inscriptionem licet impropriam admittit Clauius in fine Lib. 6. num 16.

DEFINITIO V.

Similiter circulus in figura rectilinea inscribi dicitur, cum circuli peripheria singula latera figuræ circumscriptæ contingit.



DEFINITIO VI.

Circulus autem circa figuram rectilineam describi cum circuli peripheria tangit singulos angulos figuræ inscriptæ.

Sic circulus N O P Q erit circumscriptus triangulo; quòd apices eius tangat in A B C: At inscriptus quadrilatero R V S T; quòd eius latera tangat in punctis N O P Q.

DEFINITIO VII.

Recta linea circulo accomodari, seu coaptari dicitur; cùm eius extrema in circuli peripheria fuerint.

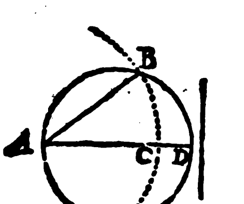
Ita nec recta A B, nec C D est coaptata circulo; quòd eius duo extrema non tangant circulum;

lum ; sed solùm E F ; quòd eius duo extrema circulum tangant, & in circulo sint vt fig. 3.

LEMMA PROBLEMATICVM PROP. I.

In dato circulo rectam lineam accomodare, quæ circuli diametro non sit maior.

COaptanda sit in circulo A B D recta æqualis rectę E, quæ esse debet nō maior diametro; quia diameter est maxima linearum, quæ in circulo capere possunt, vt docuit 17. propos. tertij. Ducatur itaque diameter A C D. Et si fuerit diametro æqualis data E, factum erit quod quæritur. Nam coaptatus, & accomodatus diameter ęqualis rectæ est. Si verò E minor fuerit; Ex diametro abscindatur ei æqualis, vt A C, & centro A, interuallo verò C, circulus punctatus describatur secans circulum priorem B: *Nam ducta recta* A B *accomodata circulo* A B D *æqualis erit datæ* E.



Probatur, quia est ęqualis, ipsi portioni diametri A C, quàm detruncauimus; sunt enim & A C, & A B radij, & semidiametri.

EXPENSIO II.

De mutua circuli, & trianguli inscriptione, & circumscriptione.

HÆc Expensio vtilis admodum est precipuę quod 5. propos. aperuerit ianuam, datis tribus punctis peripheriam, quæ transit per illa, inueniendi; & data portione circuli centrum reperiendi, quæ inuentio immensos vsus habet.

PROBL. I. PROP. II.

In dato circulo triangulum describere dato triangulo æquiangulum.

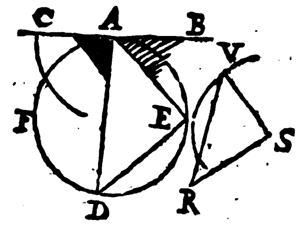
SIt describendum in circulo A D E triangulum A E D æquiangulum dato triangulo cuicumq; V. g. V S R.

Ducatur recta tangens circulum in A, quę sit C B, & à puncto A contactus recta ducatur A D faciens angulum nigerrimum apud A cum tangēte æqualem angulo S; ducatur quoque alia ab eodem puncto contactus, quę sit A E, quę faciat cum tangente angulum nigrum æqualem angulo R, coniungaturque E D; *Eritque triangulum constitutum æquiangulum triangulo* V S R.

Dices. Lineas A E, & A D posse cadere vnā super aliam, aut vnā vltra aliam; itaut non cadat in E; sed ad alteram partem, V. g. F. Respondetur enim id non posse euenire. Quia duo anguli nigerrimus, & niger sunt minores duobus rectis, quod sint æquales duobus angulis R, & S, qui in quocumque triangulo sunt minores duobus rectis, cum omnes tres anguli sint æquales duobus rectis, ex propos. 17. primi. Deberent autem esse duobus rectis æquales, si vna linea caderet super aliam, ex propos. 10. primi, quia tunc insisteret tangenti C B, quamobrem maiores esse quoque deberent, si altera, V. g. A E in alterius partem transiret, puta inter A C, & A D in F. Soluto hoc scrupulo, propositio

Probatur. Quæ sunt æqualia vni tertio, sunt æqualia inuicem. Sed angulus S ex constructione est æqualis angulo nigerrimo apud A, & eidem nigerrimo est quoque æqualis angulus albus E in alterno segmento A E D, ex prop. 29. Lib. 3. Ergo inter se angulus S, & E erunt æquales.

Eodem modo angulo nigro apud A est æqualis ex constructione angulus R, eidemque nigro apud A est æqualis angulus apud D in segmēto A F D E alterno, ergo R, & D anguli inter se erunt æquales.



Sed insuper anguli trianguli cuiuscumq; sunt æquales duobus rectis. Quare etiam horum duorum triangulorum A E D, & V S R anguli duobus rectis æquabuntur. Ablatis itaque à quolibet duobus æqualibus, à dato V R S angulis R, & S, & ab inscripto A E D angulis E, & D correspondenter æqualibus, reliqui albus apud A, & V erunt inuicem æquales. Quamobrem omnes anguli A, E, & D trianguli inscripti erunt æquales omnibus angulis V, S, & R trianguli dati, prout oportebat ostendere.

PROBL. II. PROP. III.

Circa datum circulum triangulum describere dato triangulo æquiangulum.

SIt datum triangulum nigrum, & circulus E A B; oporteatque circa hunc circulum describere triangulum æquiangulum triangulo nigro dato.

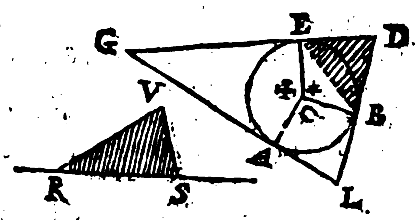
Prolangetur basis R S, vt eueniant duo anguli exteriores albi R, & S, Repertoque iuxta 1. prop. tertij centro C, ducatur vtcumque recta E C; Et deinde alia, nempe A C è centro C educatur, quæ cùm primo ducta capiat angulum ad centrum cruce notatum æqualem angulo externo albo R dati trianguli nigri. Rursusque alia ducta C B cum hac alium angulum C efficiat ad centrum æqualem alteri angulo exteriori albo dati trianguli nigri ad S. Quibus tribus semidiametris ducantur perpendiculares, quę ex Coroll. propos. 18. tertij erunt quoque tangentes, quę productę conuenient inuicem in punctis G, D, L, & constituent *triangulum* G D L *circumscriptum dato triangulo nigro* æquiangulum.

Dices Lineas G E, & L B non coituras in D.

Respondetur enim spatium ad centrum clausum rectis C B, & C E stellula notatum esse angulum, & consequenter tractam rectam punctatam F E. (Debet enim, si sic videbitur, trahi) incidentem in dictas rectas G E, & B D facere angulos ad B, & E nigros minores duobus rectis; cū radij C B, & C E angulos rectos constituant ijs maiores, vt vides: Quare ex def. 12. primi necessariò conuenient in D lineę G E, & B L; quod idem poterit ostendi de linea G A, & B D. Quæ conuenient in L, propter quod spatium C ad centrum sit angulus ex constructione, & de linea L A, & D E; quę conueniet in G; quòd spatiū cruce signatū ex cōstructione angulus factus fuerit,

Quod

Quod verò etiam spatium stellula notatum angulus sit, quod præsupposui, sic ostenditur. Nam Coroll. 2. propos. 12; primi, totum spatium circa centrum, quod litera c, cruce, stellula notatum est, quatuor rectis æquale est. Item anguli ad R albus externus, nigerque internus sunt æquales duobus rectis, ex propos. 10. sicut & anguli ad s externus albus, & internus niger sunt æquales duobus rectis, qui duo, & duo simul sunt quatuor. Quamobrem, cùm angulus ad centrum cruce signatus, & alius litera c notatus facti sint æquales albis, & externis ad s, & R; spatium stellula notatum erit æquale duobus nigris internis ad s, & R. Sed illi duo interni sunt minores, ex prop. 17. duobus rectis; Ergo & spatium stellula notatum minus erit duobus rectis. Quare lineę E C, & C B à puncto centri ductę non erunt in directum, ex propos. 11. primi; Sed facient angulum, & quidem non versus crucem. vel C illi enim anguli maiores sunt duobus rectis. Quare angulum efficient versus stellulam lineis E C, & C B conclusum.



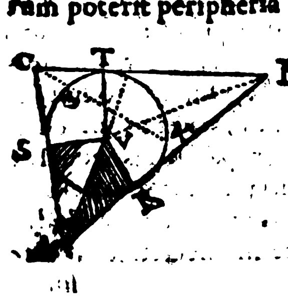
Probatur modò. Quòd hoc triangulum sit æquiangulum. Nam quadrilineum GEAC, quatuor angulos habet æquales 4. rectis vt 17. pr.. Quare ablatis duobus rectis A; & E per imaginationem, reliqui duo remanebunt duobus rectis æquales. Sed & anguli dati trianguli ad R externus albus internus niger sunt duobus rectis æquales; Ergo erunt æquales inuicem simul sumpti. Sed angulus cruce notatus est æqualis, quòd ita fecerimus angulo externo ad R dati trianguli; Ergo oppositus c erit æqualis nigro ad R interno. Eodem modo probabitur de angulo L; quòd sit æqualis angulo nigro ad s.

Sed omnes anguli cuiuscumque trianguli sunt duobus rectis æquales. Ergo, cùm duo interni s, & R sint æquales duobus G, & L; *Reliquus* D. *circumscripti* angulo reliquo v dati trianguli remanebit æqualis. *Quare anguli* G L D *æquabuntur angulis* R V S. Quod, &c.

PROBL. III. PROP. IV.

In dato triangulo Circulum describere.

Sit describendus Circulus in dato triangulo A B C. Diuidantur per punctatas AV, VB duo quilibet anguli bifariam angulus A, & angulus B, & à puncto V, in quo se intersecant punctatæ ducantur rectæ lateribus perpendiculares, quæ sint V T, & V S, V R. Quæ probabuntur æquales. Vnde per earū extrema tamquam semidiametrorum poterit peripheria transire S T R.



Probatur itaque lineas perpendiculares ad latera V R, & V S, primò esse æquales. Anguli ad A albus, & niger per diuisionem, quam linea punctata facit sunt æquales, angulus quoque niger, & niger S sunt æquales; cum recti sint, basis verò A V eadem in vtrisque triangulis nigro, & semialbo.

Sed si duo triangula habeāt duos angulos æquales insuper, & alios duos item æquales, latusq; aliquod æquale, æqualia quoque esse, quoad reliquos angulos, & latera ex propos. 27. primi constat.

Ergo latera V R, & V S. equalia erunt inuicem. Idemque demonstrabitur de V R, & V T. Quare tres lineæ S V, & T V, & R V erunt æquales; poteruntq; deseruire pro semidiametris, & V in quo conueniunt pro centro. Quare descriptus ex V. circulus tanget puncta S T R. laterum trianguli. Vnde triangulo erit inscriptus.

COROLLARIVM I.

Collige ex Io. Baptista Benedicto duo latera superare reliquum lineis, & segmentis suis tangentibus circulum v. g. duo latera C B, & A C, alterum A B superare segmentis tangentibus C T, & C S. Nam demonstratum est basim A R esse æqualem basi A S ob æqualitatem suorum triangulorū, & quia sunt tangentes, vt ex Corol 2. prop. 36. tertij, & idem dicas de basi T B, & B R. Quare hæc duo segmēta A S, & B T reliquum crus A B integrabunt, & residua remanebunt, quibus excedunt S C, & C T, quæ etiam sunt tangentes, & consequenter æquales, & si angulus C rectus esset, quod hic non est, equales etiam semidiametris S V, & V T.

COROLLARIVM II.

Colligitur quoque quòd, cùm segmenta excessus huius C S, & C T sint tangentes; eorum quadratum, si quodlibet segmentum sumatur seorsim, erit æquale ex propos. 36. tertij rectangulo facto, & tota secante C 4. & segmento extra circulum remanente C 3. etiamsi C 4. transiret per centrum. Quare sequitur quoque si super duo segmenta excessus, tamquam vna linea fiat quadratum. Illud sit eidem rectangulo quadruplum: Quoniam est quadruplum quadrati ex vnico segmento facti vt colleg. ad propos. 6. secundi. Quod si angulus C rectus sit, erit hoc quadratum ex duobus segmentis factum æquale quadrato ex diametro descripto. Quoniam hæc duo segmenta ei diametro æquantur ea ratione, vt dixi in primo Corol. quod equantur duobus semidiametris.

PROBL. IV. PROPOS. V.

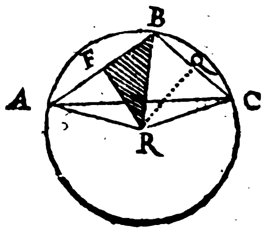
Circa datum triangulum circulum describere.

Sit triangulum A B, & B C, circa quod debeat circulus duci. Diuidantur bifariam quælibet duo eius latera, & (non quod sit necessarium, sed facilitatis gratia) assumantur duo latera, quæ maiorem angulum claudant, vt A B, & B C, à punctisque diuisionis duæ perpendiculares excitentur F R, & B Q. quæ conuenient in R; vt patet, si duceretur recta ab F in Q. Nam faceret, cum punctatis perpendicularibus angulos minores rectis, Quare ex prop. 28 pr conuenient. Coniungantur itaque vertices trianguli rectis A R, &

B R, &

BR, & CR. *Nam cum hæ sint omnes æquales poterunt deseruire pro semidiametris peripheriæ ABC, & punctum R pro centro. Pro circulo circa vertices extremos trianguli ABC transeunte.*

Probandum itaque primò est; quod rectæ AR, & RB sint æquales.



Triangula nigrum, & album sunt æqualia. Quare, & bases AR, & BR erunt æquales. Quòd vero triangula sint æqualia, probatur. Nam vnum crus AF nempe albi est æquale alteri FB nigro sibi correspondenti. Crus autem FR punctatum commune. Anguli quoq; ad F niger, & albus æquales, eo quod recti. Ergo ex propos. 4. primi tota triangula nigrum nempe, & album erunt æqualia.

Probatur deinde, quòd etiam linea RC sit æqualis lineæ RB, & ideo æqualis quoque lineæ RA Quoniã triangula RBQ, & RQC habent crus BQ, & QC; æqualia; crus verò RQ commune angulosque ad Q rectos. Vnde bases subtensæ RB, & RC erunt æquales. *Et sic circulus centro R per ABC transibit*, quod erat probandum.

COROLLARIVM I.

Hinc ellicitur. Quod si cẽtrũ intra triangulũ cadat, omnes anguli triãguli dati sint acuti. Quia sunt in maiori circuli segmento. Si verò centrum cadat in aliquo laterum angulum oppositum huic lateri esse rectum. Quod fit in semicirculo, & latus in quo centrũ sit diameter. Si verò cadat extra triãgulũ, angulũ lateri, cui cẽtrũ prope, est oppositũ, esse obtusũ: quia est in minori segmento, quæ omnia patent ex propos. 28. l. 3.

COROLLARIVM II.

Hinc quoque sequitur, id quod supra diximus propos. 11. l. 3. quomodo datis tribus punctis non in directum positis inueniatur circumferentia, quæ transeat per ea puncta: nam si cogites apices trianguli ABC esse tria puncta data, & ea iungas lateribus BC, & BA, & cætera præstes vt in propos. propositum exequeris, & eadem probatio militabit. Vide quæ citata prop. 11. l. 3. diximus.

EXPENSIO III.

De mutua quadrati, & circuli inscriptione, & circumscriptione.

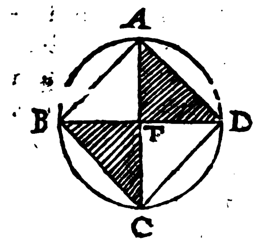
Sicut facilis est hæc quæstio, ita non admodum vtilitatibus abundat: vnde in illa immorandum non est.

PROBL. I. PROPOS. VI.

In dato circulo quadratum describere.

Sit datus circulus ABCD, cuius centrum T, in quo describendum sit quadratum. Ducantur duo diametri secantes se ad angulos rectos AC, & BD Iunganturque extrema eorum quatuor lineis, vt AB, & BC, & CD, & DA. *facientque quadratum in dicto circulo inscriptum.*

Probatur triangula alba, & nigra sunt æqualia ex 14. propos. primi propter æqualitatem laterũ, qui sunt semidiametri, & angulorum ad centrum T albi, & nigri æqualitatem cum omnes fecerimus rectos; quare, & bases BA, & AD, sic BC, & CD erunt æquales.



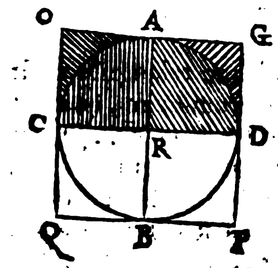
Aut breuiùs anguli ad centrum sunt omnes æquales. Quare ex 26. tertij arcus quibus insistunt, & subtentæ ijs erunt æquales. Insuper, & anguli omnes A, & B, & C, & D sunt æquales; cum sint in semicirculis. Ergo figura ABCD erit quadratum.

PROB. II. PROPOS. VII.

Circa datum circulum quadratum describere.

In circulo ducantur duo diametri ad rectos angulos AB, & CD; ad quorum extrema ducantur perpendiculares OG, & GP, & PQ, & QO, quæ conuenient in quatuor punctis, *& constitent quadratum OGQP circumscriptũ circulo ACBD.*

Probatur latera postremò tracta sunt lineæ perpendiculares diametris, pro vt fecimus, sicuti, & illi sibi inuicem sunt perpendiculares. Quare latera erunt diametris parallela ex 28. primi, cum anguli interni v. g. nigri R, & D sint recti. Propterea ex prop. 31 inuicem quoq; erunt parallela hæc latera, & spatium nigrum erit parallelogramum sicut, & album.



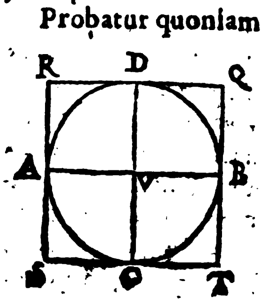
Sed omne parallelogramum ex propos. 34. primi habet angulos oppositos æquales: Ergo anguli O, & C nigri Q, & P albi sunt recti: Quoniam anguli oppositi nigri ad C, & D, ac albi ad D, & C eis oppositi sunt recti. Insuper ex eadem propos. & latera opposita æqualia. Quare latera OG, & QP, sicut vt OQ, & GP æqualia erunt diametris, & ideo inter se. Vnde figura OGQP erit quadratum circulo circumscriptum.

PROBL. III. PROPOS. VIII.

In dato quadrato circulum describere.

Sit quadratum RQST, in quo necesse sit describere circulum. Diuidantur singula latera bifariam in ADCB, rectæque ducantur AB, & CD. Et vbi se decussant in V fiat centrum interuallo, vt placet v. g. VB. *Nam circulus transibit per omnia alia puncta D, A, C ea lambendo.*

Probatur quoniam VB lineæ VA, VC, & VD, sunt æquales: Ergo pro diametris deseruire possunt. Quod verò sint æquales, patet, sunt enim inter parallelas æquales, & simul sunt parallelæ æqualium, cùm de medietate in medietatem ductæ sint

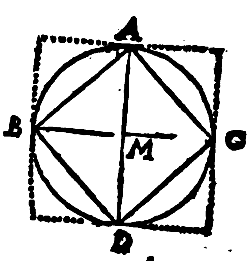


sint: Quapropter sicut sunt æquales dimidio laterum, ita erunt æquales inter se. Nam ex propos. 33. primi, quæ parallelas, & æquales ad easdem partes coniungunt, inter se æquales, & paralleæ sunt.

PROB. IV. PROPOS. IX.

Circa datum quadratum circulum describere

TRahantur in quadrato dato ABCD duo diametri ad angulos rectos, AD, & BC: Et puncto M, in quo se secant facto *centro* interuallo MC ducatur circulus. Iste enim per vertices B, & A, & D transibit, & ideo erit circa datum quadratum, circulus circumscriptus.



Probatur Angulus BAC rectus, & latera BA & AC æqualia. Ergo anguli ad basim B, & C æquales in triangulo BAC. Ideo semirecti ex propos.17 Cor. 3. primi. Idem ostendetur de alijs angulis BAM, &c. Quaderè lineæ BM, & MC, sicut, & AM, & MD erunt æquales, vtpote bases æqualium angulorum habentium angulos æquales, nimirum semirectos: Ergo centro M circulus ductus per ABCD vertices transibit: Vnde erit circumscriptus circulus quadrato BACD.

COROLLARIVM.

COlligitur hinc. Quadratum circumscriptũ esse duplum quadrati inscripti; Eo quod latera inscripti sint diagonales quatuor quadratorum, in quæ diuisum est circumscriptum punctatum. Vnde illa ex prop.34 lib.1. diuidunt bifariam. Cum ergo quadratum inscriptum occupet quatuor medietates circumscripti solummodo: Circumscriptum erit quatuor medietatibus maius, Propterea erit duplum.

EXPENSIO IV.

De Pentagoni, circuliq; mutua inscriptione, & circumscriptione.

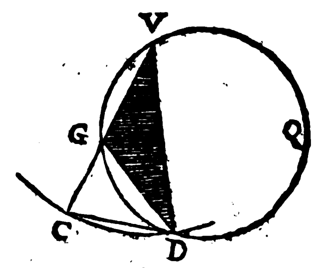
DIfficilior est hæc quæstio, quam præcedens; sed cum maiori vtilitate coniuncta est, siquidem fundamentum est Icosaedri sphera inscribendi, & inueniendi chordas, quamplurimas, vt suo loco docebimus, in trigonometria necessarias.

LEMMA. PROPOS. X.

Isosceles triangulum constituere, quod habeat vtrumque eorum, quæ ad basim sunt, angulorum duplum reliqui.

LInea quæcumque mediâ, & extremâ ratione secetur, vt docet 11. prop. secundi; ita vt rectangulum sub segmento, & tota cóprehensum CG, & CV æquale sit quadrato ex maiori segmento facto, nimirum GV. In hoc itaque extremo maioris segmenti V facto centro describatur circulus ad interuallum totius VC, & ab extremo C accomodetur in hoc circulo æqualis linea maiori segmento VG, quæ sit CD coniunganturq; extrema V, & D crure VD. Factumque erit *triãgulũ, cuius duo anguli ad basim C, & D. reliquo V el insistenti erunt duplicia.* Quod reposcit propositio.

Quod vt ostendatur ducenda est DG puncta, & per tria puncta V nimirum O, & D ducendus est circulus, ex 5. propos. huius.



Probatur anguli ad basim C, & D in omni triangulo æquicruro sunt æquales ex 14. propos. primi, Sed vnus ex istis, nimirum D est duplus anguli V. Ergo, & alter.

Probatur minor. Quod D sit duplus anguli V. Siquidem angulus V est æqualis parti albæ anguli D. Sed pars alba est medietas anguli totius D: Ergo angulus V est minor dimidiò angulo toto, vtpote eius medietati æqualis.

Si neges maiorem propositionem. Nempe angulũ V esse ęqualem parti albę D. anguli, ita ostenditur.

Linea CD tangens est. Quare angulus albus ad D à tangente CD, & secante GD factus ex propos. 29. tertij ęquabitur angulo V. alterni segmenti GVQD (siquidem DG peripheria remanet pro alio segmento) Quare erit ęqualis ei. Quod verò CD tangens sit, non est dubitandum ex propos. 37. tertij. Quoniam rectangulum sub tota secante VC, & segmento exterius assumpto GC est ęquale quadrato facto, ex CD. Nam DC fecimus ęqualem lineę GV, quę talis est, vt eius quadratum sit ęquale rectangulo sub tota VC, & portione CG comprehensum.

Si vero neges minorem; nimirum albam partem esse medietatem totius anguli D.

Probatur. Triangulum nigrum est ęquicrurum; Ergo anguli nigri V, & D ad basim sunt ęquales. Sed angulus ad D. albus est ęqualis angulo V, vt diximus. Ergo est medietas totius anguli D, & pars nigra alia medietas: Cùm tum pars alba, tum nigra anguli D, ipsi angulo V ęquentur, & ideo inter se.

Quod verò triangulum nigrum, sit ęquicrurum; probatur. Angulus C est ęqualis angulo D, vt diximus, ãgulus D est ęqualis suę parti nigrę & angulo nigro V, vt probauimus. Sed angulus albus G vtpote exterior, est ęqualis ex propos. 17. primi istis duobus nigris interioribus, & oppositis ad V, & ad D. Ergo est etiam ęqualis angulo C quamobrem ex prop. 15. primi, angulus C, & angulus G, tanquam ęquales, habebunt bases ęquales CD, & GD. Sed CD est ęqualis cruri VG ex effectione; Ergo, & GD erit crus eidem ęquale.

CO-

COROLLARIVM.

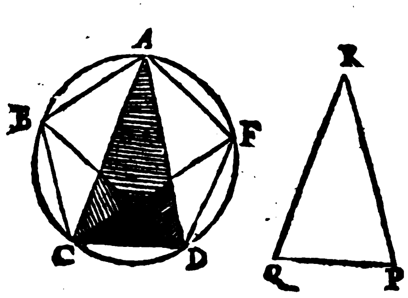
QVare si partiamur duos rectos angulos in 10. partes angulus v duas partes sibi vsurpabit. Reliqui verò ad basim quilibet ex eis continebit quatuor partes. Quia omnis trianguli tres anguli duobus rectis sunt æquales, ex prop. 17. primi. Quare cum C, & D ad basim contineant duplum, vt ostensum est; si angulus ad A assumat duas partes; reliqui, vt 10. partes duorum rectorum compleant, quilibet quatuor partes sibi vsurpare debebit.

PROB. I. PROP. XI.

In dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum inscribere.

AD describendum in dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum construatur triangulum Isosceles R Q P habens duos angulos ad basim duplos reliqui iuxta præcedentem propos. & in circulo ABCDF dato triangulum fiat habens angulos omnes ei æquales, vt ex propos. 2. huius efficere potes, & secundum documenta propos. 4. primi diuide angulos C, & D bifariâ rectis CF, & DB coniungeque puncta rectis AB, & BC, & rursus alia rectis AF, & FD. *Eritq; hæc figura pentagonum æquilaterum, & æquiangulum.*

Pars 1. Probatur, nempe quod sit æquilaterum. Duæ partes anguli D nigra, & nigerrima, sicut, & aliæ duæ anguli C nigra, & nigerrima sunt æquales nigro angulo ad A: Siquidem ambæ sumptę simul duplę ei sunt. Ergo ex propos. 26. tertij, & arcus, super quos insistunt. Vnde, & rectæ hos arcus subtendentes, nempe latera pentagoni AB, & BC & cæt. sunt inuicem æquales.



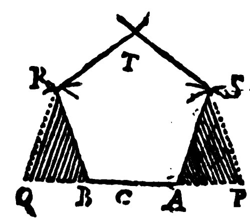
Probatur 2. Pars de angulis. Nam æqualibus quoque perispherijs insistunt. Ergo ex propos. 27. tertij inter se sunt æquales. v. g. angulus pentagoni A clausus lateribus AB, & AF insistit perispheriæ constanti tribus partibus FD, & BC, & CD, quæ est æqualis perispheriæ ABCD; cui insistit angulus pentagoni F quoniam æqualibus circuli portionibus AB, BC, DC, vt dictum est in prob. primæ partis insistit.

COROLLARIVM I.

COlligitur angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli complecti sex partes ex decem, in quas duo anguli recti diuiderentur. Nam tres anguli ad D niger nigerrimus, & albus æquales sunt inuicem, vt æqualibus arcubus insistentes. Quare cum ex coroll. propos. præced. duo nigerrimus, & niger quatuor ex decem partibus occupent, albus additus duas superaddet, vt fiant sex: vnde totus sex partes occupabit, in quas anguli duo recti diuiderentur.

COROLLARIVM II.

SI quis tamen velit construere pentagonum facilius super datam rectam AP; diuidatur, vt superius in C iuxta documenta propos. 15. secundi, deinde prolungetur, & sit ista additio æqualis maiori segmento AC, ita vt punctatæ additæ ei sint æquales; Interuallo denique datæ AB facto centro in punctis extremis Q, & B, duo arcus describantur; qui se intersecent in R, sic eodem interuallo facto centro in A, & P duo alij arcus se intersecent in S; factoque centro in ijs intersectionibus R, & S eodem interuallo manente describantur duo alij arcus, qui se intersecent in T; coniunganturque rectis puncta intersectionum T, S, R, B, & A. Eritque constitutum pentagonum.



Quod erit quidem æquilaterum, eo quod omnia latera sint protracta eodem interuallo B A, Insuper, cum duo triangula A P S, & Q R B sint æquicrura, & A P, vel Q B basis sit maius segmentum iuxta 10. propos. huius angulus P, V. g. continebit duplum, quam angulus S. Quare angulus exterior A, albus, qui est pentagoni continebit ex propos. 17. primi duos internos, & oppositos S P. Propterea continebit 6. partes ex decem, in quas duo recti diuisi essent, quibus 6. partibus æquantur, vt in corolli dictum est, duo anguli P, & S. Quare A angulus erit angulus pentagoni. Et si hic est, reliqui quoq; erunt, quod debeant istis æquales esse. Nam si non essent, possent fieri; Et si fierent, latera eorum, vel caderent supra, vel infra lineas R T, & T S. Quamobrem, ex propos. 21. primi, essent maiora, vel minora lineis R T, & T S: Vnde deinde pentagonum non esset ęquilaterum.

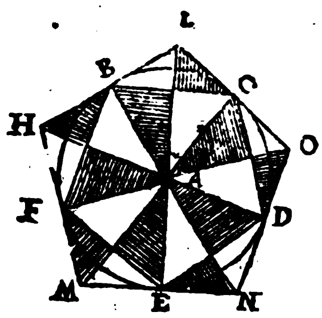
PROB. II. PROPOS. XII.

Circa datum circulum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.

NOn potest circumscribi circulo pentagonum; Nisi priùs in eo inscribatur: Quare dato circulo C E B D, in quo sit, ex antecedenti propos. inscriptum pentagonum, poterit deinde circa illum ita pentagonum circumscribi.

Reperto eius centro A ad angulos pentagoni ducantur semidiametri AB, AC, AE, AD &, A F, & eis ducantur perpendiculares circulum tangentes. Nam hæ productæ hinc inde se mutuò occurrent ex defin. 12. primi, cum anguli albus F & niger E, &c. sint rectis minores, quos facit linea V. g. F B incidens in duas H L, & H M, & sic de cęteris. *Quæ de re constituent pentagonum requisitum æquilaterum, & æquiangulum*; vt autem id probetur ducendæ sunt rectæ à centro ad puncta H, & L, &c. in quæ postremò ductæ conueniunt. Pro-

Probatur itaq; prima pars, quòd sit æquilaterum. Nam, quadratum factum super AH est ex prop. 11.l.2. æquale duobus quadratis factis ex FA, & FH; similiter quadratis AB, & HB propter angulos rectos nimirum B, & F semialbos. Sed quadrata semidiametrorum BA, & FA sunt ęqualia inuicem. Ergo, & quadrata ex HB, & HF, & consequenter ipsę quoque lineæ BH, & HF. Et hoc pro prima parte probationis.



Nam modo ostendendum est, has lineas BH, & HF esse medietates laterum, quorum portiones sunt, & consequenter omnia latera HL, & HM, & cetera esse æqualia, vtpote ex medietatibus æqualibus confecta.

Triangula tota seminigra HBA, & HFA habent æqualia latera, quæ sibi correspondent, ergo ex prop. 8. primi, & anguli correspondentes ęquales sunt. Ideo anguli in eis albus, & niger ad centrum A erunt æquales, sicut, & anguli albus, & niger ad H, & sic in omnibus alijs. Angulus autem ad centrum A totus albâ, nigrâque portione integratus est ex propos. 27.l.3. ęqualis omnibus quatuor alijs ad centrum; cum insistant æqualibus basibus, & peripherijs FB, & BC, & cæt. pentagoni inscripti. Quare, & eorum portiones inuicem ęquales tum nigræ, tum albæ erunt. Proptereaque angulus V. g. ad centrum HAF niger, qui probatus est æqualis angulo albo ad centrum HAB, est ęqualis etiam angulo albo ad centrum FAM. Sed anguli quoque ad F in triangulis HFA, & MFA, vtpote recti à radio tangente quæ effecti sunt ęquales; radiusque AF est crus commune ambobus triangulis adiacens. Ergo ex propos. 27. primi, etiam latus MF erit ęquale lateri FH.

Idem quoq; argumentum valebit in triangulo BLA, cuius latus BL erit ęquale lateri BH. Quare totum latus HL erit ęquale toti HM; Sicq; probabitur de alijs successiuè. quapropter pentagonum circumscriptum erit ęquilaterum.

Probatur quoq; esse ęquales angulos. Ablatis ęqualibus, quę remanet, sunt ęqualia: sed in triãgulis quibuscunque HFA, & FAM, & cęt. omnes anguli ad centrum A tum albi, tum nigri ostensi sunt ęquales in probatione primę partis. Anguli quoque F, & B, & C facti à radio AF tangenteque FH, & cęt. sunt recti, & ideo æquales: ergo ablatis istis, reliqui ad M, H, &c. tum albi, tum nigri sunt ęquales. Quoniam omnes trianguli tres anguli sunt inuicem ęquales, cùm omnes ex prop. 17. pr. sint duobus rectis ęquales. Et ideo cum omnnes anguli H, & L, & O, &c. sint compositi ex medietatibus albis, nigrisque equalibus, omnes inuicem erunt ęquales.

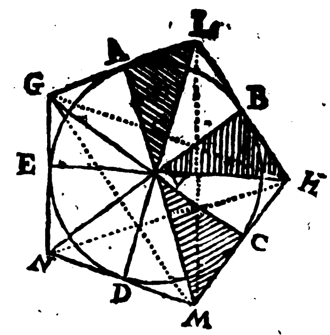
COROLLARIVM.

SEquitur hinc illud. Si in circulo quæcunque figura æquilatera, & æquiangula descripta sit, & semidiametri de centro ad angulos singulos ptotrahantur, hisque perpendiculares ducantur circulum tangentes describi figuram similem inscriptæ æquilateram, & ęquiangulam. Siquidem probabitur ductis ad earum mutuum concursum à centro rectis, vt in pentagono factum est eius angulos, & latera inter se esse æqualia.

PROB. III. PROPOS. XIII.

In dato pentagono æquilatero, & æquiangulo circulum describere.

PEntagoni dati duo latera bifariam diuidantur in A, & B, & à punctis perpendiculares rectę trahantur, quæ se mutuo intersecabunt in V. Ibi ergo facto centro, si vsque ad intercapedinẽ perpẽdicularium V. g. VB, extendatur interuallum, & describatur eo interuallo circulus: Is circulus erit inscriptus, & tanget latera in punctis ABCDE.



Quod vt probetur cæteræ quoq; à dimidijs lateribus C, D, E ducendæ ad centrum, vt CV, DV, & deinde ad angulos GV, & VL, &c. Et rursus punctatæ GH, & LM, &c.

Pro probatione obseruandum est, nos hic adibuisse eandem regulam: quam supra dedimus propos. 5. huius ad circumscribendum circulum triangulo, velut triangulo GLH. Ideoque tres ductę GV, & VL, & VH erunt ex probatione propos. 5. æquales. Latera quoque AL, & BH sunt æqualia, vtpote dimidia æqualium laterum pentagoni, anguli vero adiacentes nigri A, & B æquales, quòd recti sint: Ergo triangula nigra ALV, & VHB erunt æqualia ex propos 22. lib. 1. & crus VA crūri VB.

Idem argumentum valebit in triangulo LHM. Quare VC erit æqualis lineæ VB, & consequenter æqualis, vt ostensum est lineæ VA, Idem quæ argumentum in alijs vrgebit. Cum ergo omnes lineę, quas fecimus perpendiculares, nimirum VD, & VE, & prædictæ inuicem sint æquales poterit fieri centrum in V, & interuallo vna earum V. g. VB circulus circumduci, qui lambat puncta ABCDE.

COROLLARIVM I.

COllige primò: quomodo etiam circulus possit circũscribi. Nam cum ex 5. prop. lineę VG, & VL, & VH sint æquales ad apices trianguli GLH ductę, & eadem ratione MV, & HV, & VL ductę ad apices trianguli LHM, sequitur; vt omnes sint æquales, & consequenter; quòd facto centro in V interuallo vna earum V. g. VH transeat circulus ductus per vertices L, H, & alios.

COROLLARIVM II.

COlligitur secundo hoc valere, ne dum in pentagono; sed etiam in qualibet alia figurâ ęquilaterâ, & ęquiangulâ; quod valeat idem argumentum in omnibus facta eadem operatione ob latera ęqualia, & angulos ęquales, quę con-

constituunt omnia triangula, in quę per operationem diuiditur, ęqualia.

PROB. IV. PROPOS. XIV.

Circa datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum circulum describere.

INspice figuram præcedentis propositionis. Si reperiatur pentagonum, circa quod necesse sit describere circulum. Diuidemus omnes eius angulos bifariam rectis H V, & M V, &c. quas dicimus futuras esse æquales. *Quare facta centro in V interuallo V H poterit describi circulus, qui transiens per apices H, L, G, N, M, pentagonum circumscribet.*

Probatur vero, quod Q V, & cæteræ ductæ debeant esse æquales alio modo, ac in coroll. præcedenti. Nam anguli niger ad L est æqualis nigro ad H; cùm sit dimidium æqualium angulorum pentagoni, angulus verò A, & B sunt recti; Crus autem A L cruri B H æquale cum sint dimidium æqualium laterum: Ergo ex propos. 27. lib. 1. triangula ad A, & B nigra æqualia erunt, & erit L V æquale crus cruri V H. Idem dicetur de triangulo nigro V M C, quod erit æquale eadem ratione triangulo V B H, & crus V M cruri V H, & ideo cruri V L, & sic de alijs N V, & G V: cum ergo sint omnes æquales V L, &c. ad angulos pentagoni pertingentes, circulus per earum extrema duci poterit.

COROLLARIVM

HInc ellicies idem valere in qualibet alia figura æquilatera, & æquiangula. Vnde eadem arte circa eam circulus describetur.

EXPENSIO V.

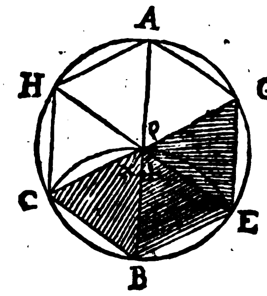
De Exagoni, & Quindecagoni in circulo inscriptione.

CIrcumscriptionem exagoni circulo, & circuli inscriptionem, & circumscriptionem pretermitit Euclides, & per accidens agit de quindecagono, vtpote de figura consurgente, ex triangulo æquilatero, & Pētagono: de alijs autem figuris plurium laterum non agit: Nam quæ vtiles sunt, ex prædictis facile colliguntur; quæ vero difficiles, aut fortè inuentu impossibiles, aut inutiles, vt figura septem laterum, prætermittuntur; sed de istis cum de sinubus ampliora agemus: suffecit Euclidi rudimenta primarum figurarum tradere.

PROB. I. PROPOS. XV.

In dato circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.

OPorteat in dato circulo hexagonum describere. Ducto diametro AB eodem interuallo, quo descriptus est circulus facto centro in circumferentia in B portio circuli ducatur, quæ in C, & E circumferentiam secet, à quibus punctis per centrum transeuntes duo diametri ducantur. *Si ergo extrema horum diametrorum rectis coniungas, vt sunt B E, & B C, &c. erit hexagonum inscriptum æquiangulum, & æquilaterum.*



Prob. Primo, quod omnia latera sint æqualia. Tres anguli nigri ad Q centrum, ab insistentibus Q E, & Q B super diametrum C G effecti, sunt inuicem æquales. Ergo ex propos. 26. tertij circumferentię, quibus insistunt sunt inuicem æquales: Vnde ex propos. 33. tertij subtentæ C B, & B E, & E G sunt inuicem æquales. Sed istis, quælibet suæ oppositæ, lineæ A G, & A H, & H C sunt æquales. Ergo omnes æquales, & æquilaterum est hexagonum. Id autem ostenditur, quia insistunt arcubus æqualibus. Et arcus ęquales sunt. Quia super eos ascendunt anguli tres albi ad centrum Q æquales, Sunt autem æquales: Quia ęqualibus nigris æquantur, quilibet suo, cui est ad verticem ex prop. 12. primi. Remanet itaque ostendendum, quod tres anguli nigri ęquales sint. Id autem

Probatur. Nam sunt facti super diametrum C G ab insistentibus Q B, & Q E, & ideo ex propos. 13. primi æquantur omnes duobus rectis, sed duo ex istis nimirum ✠ notati quilibet occupat tertiam partem duorum rectorum, ergo tertius reliquus tertiam partem reliquam, quare omnes æquales erunt.

Quod verò duo cruce insigniti tertiam partem duorum rectorum occupent ostenditur. Quia quodlibet triangulum C Q B, nempe, & B Q E est æquilaterum, vtpote quorum latera sunt semidiametri. Ideoque ex propos. 14. primi, & æquiangulum. Sed omnes tres anguli cuiuscunq; trianguli sunt duobus rectis æquales; Ergo quilibet angulus tertiam partem duorum rectorum occupabit, & sic anguli cruce notati quilibet erit tertia pars duorum rectorum.

COROLLARIVM I.

HInc manifestum est hexagoni latus æquale esse semidiametro. Nam C B latus est semidiameter circuli C Q E; & ideo æquale semidiametro Q B.

COROLLARIVM II.

COllige quomodo possit inscribi triangulum æquilaterum, & æquiangulum in dato circulo. Nam si coniungas vertices C, A, E, id erit factum; erit enim æqualis quilibet angulus, & latus. Quia circunferentijs æqualibus ille insistit, hoc subtentitur, vt sunt C B E, & E G A, &c.

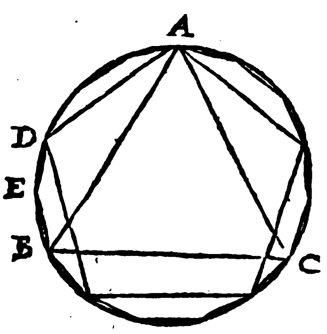
PROB.

PROB. II. PROPOS. XVI.

In dato circulo quindecagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.

DEscribatur in circulo triangulum æquilaterum, & æquiangulum ABC, vel ex Coroll. præcedenti, vel ex 2. huius propos.

Rursusque describatur pentagonum æquilaterum, & æquiangulum ex propos. 11. huius applicando eius angulum aliquem vertici trianguli cui placuerit, V. g. A. Deinde arcus interceptus inter primum latus pentagoni incipiendo ab A, & primum latus trianguli, nempe inter AD, & AB, qui est arcus BD, diuidatur in duas partes æquales. Ducanturque rectę DE, & EB, *& duo latera quindecagoni habebimus; quorum alios 13. capiet circumferentia, vt 15. latera compleantur.*



Probatur tres arcus, quibus anguli trianguli insistunt, vel quibus latera ęqualia subtenduntur, ex propos. 26. vel 32. tertij sunt ęquales. Ergo si circumferentia tota sit diuisa in quindecim partes quilibet arcus, vt AB quinque earum comprehendet, vtpote eius tertia pars.

Sed, & arcus quibus quinque latera pentagoni subtenduntur sunt ęquales, ergo ex ijsdem partibus 15. tres quilibet arcus comprehendet, vtpote quinta pars totius circuli; quapropter arcus AD tres partes totius peripheriæ continebit, at AB quinque. Vnde arcus AE intermedius duas continebit. Quare eius medietas vna ex quindecim partibus erit. Recta, itaque DE subtendet decimam quintam partem totius circumferentię. Propterea que cęterę quoque applicatę quęlibet decimam partem subtēdet, & anguli omnes erunt ęquales, vtpote in ęquali segmento, insistentes, nempe in segmento DEB, qui duas totius peripherię partes ęquales comprehendit.

COROLLARIVM.

COllige hic cum Clauio: Quod tali modo possumus reperire figuras multilateras, æquilateras, & ęquiangulas; Quia enim AB denominatur à ternario, quod sit latus trianguli, & AD à quinario, quod sit latus pentagoni possumus describere figuram 15. laterum; nimirum consurgentem ex multiplicatione ternarij cum quinario; Et quia ternarius exceditur à quinario duabus vnitatibus, ideo arcus interceptus inter extremum lateris trianguli dat duo latera quindecagoni. Tali quoque ratione in alijs lateribus aliarum figurarum idem eueniet.

Nam latera pentagoni, & hexagoni facient figuram 30. laterum; nimirum consurgentem, ex multiplicatione 5. cum 6. & quia sexagonus excedit quinarium vnitate, ideo arcus interceptus inter extremum lateris pentagoni, & hexagoni subtendet lineā, quę erit latus figurę laterum 30.

Sic latus quadrati, & sexagoni relinquet arcum, qui subtendet duo latera figurę 24. Quoniam 4. multiplicatus cum 6. reddit 24. & differentia inter 4. & 6. est 2. Sic latus quadrati, & pentagoni relinquet inter sua extrema arcum, cui subtendetur vnicum latus figurę 20. laterum, & sic de ceteris.

TRACTATVS VIII.

ARITHMETICA SIMPLEX,

& Generalis integrorum numerorum.

CVM iam de quantitatis continuæ æqualitate satis cognitionis, quæ ad elementum sufficere possit, ediderit Euclides in 1.2. & 3. libro, & Lineas æquales, Angulos æquales, Triangula æqualia, Parallelogramma æqualia, Linearum quoque potentias æquales, tum laterum parallelogrammorum, tum triangulorum tradiderit; Insuper ex quarto libro docuerit figurarum inscriptionem, quæ pluribus, quàm duobus triangulis constabant. Iam aliam prouinciam aggreditur, & *Proportionem Inæqualitatis* præcipuè considerare, vel saltem iam ab æqualitate præscindere incipit.

Verùm; quia Arithmetica ita miscetur Geometriæ, vt alrera sine altera claudicet, & manca euadat; ideo antequam ad vlteriora progrediamur, Arithmeticam generalem tradere oportuit, quòd proportiones inæqualitatis rationales meliùs explicentur numeris, quàm quantitate continua: Vnde; quia adhibendi erant numeri in proportionibus declarandis; proinde hic de Arithmetica generali primùm agere oportuit, tanquam primus aditus ad proportiones quascumque benè cognoscendas; cum ipsa faciliùs proportiones explicet, & maximè si de numeris integris agitur.

EXPENSIO I.

De principijs.

QVod sit numerus vidimus, & ipsius essentiam iam speculati sumus Tract. 2. præliminari. Vnde hic solùm numerorum Definitiones sunt explicandæ, & illæ sunt, quas Euclides 7. libro exponit; siquidem, cum ad præsentem tractatum deseruiant, hic transcribere oportuit.

DEFINITIO I.

VNitas est, secundum quam vnumquodque eorum, quæ sunt, vnum dicitur.

In qua aduertendum, quòd, sicut punctum abstractum est indiuisible, sic vnitas abstractiuè sumpta vnum est. Nam quodlibet, quod dicitur vnum, semper consideratur abstractè, vt vnum in se, & diuisum à quocumque alio: alioquid, si acciperetur, vt à parte rei, iam, cùm nihil sit plures, seu partes, seu rationes non obtinens, plurificatum esset.

DEFINITIO II.

NVmerus est ex vnitatibus composita multitudo.

Hinc euenit; quòd omnis numerus sit commensurabilis; cùm habeat partes assignabiles, secundùm quas vnumquodq; numerus dicitur; V. g. 8. componitur ex octo vnitatibus, & 7. ex septem. Vnde vnitas omniũ numerorum erit communis mensura, quâ omnes mensurari poterunt.

DEFINITIO III.

PArs est numerus minor ipsius maioris numeri, qui metitur ipsum maiorem.

Significat, quòd minor numerus sit appellandus pars numeri maioris, qui multiplicatus totum metitur; ita vt nihil supersit, neque deficiat. Sed ex æquo illi commensuretur. Sic 6. metitur numerum 18. quia multiplicatus per 3. euadit in numerũ eundem, nihil addendo, vel diminuendo. Omnis verò pars assumit nomen ab eo numero, per quem multiplicata metitur maiorem, vt 6. dicitur tertia pars numeri 18. quia 6. multiplicatus per 3. metitur numerum 18.

DEFINITIO IV.

P*Artes autem; cùm non metitur.*

Numerus, qui alium maiorem adamuſsim non metitur; ſed aliquid remanet, dicitur non pars, ſed partes; quia ſcilicet ſaltem comprehendit tot vnitates ipſius, quæ ſunt omnium numerorum communes partes, V. g. 5. erit non pars, ſed partes numeri 18. quia comprehendit quinque vnitates, quarum quęlibet eſt decima octaua pars numeri 18. Partes verò nomen accipiunt ab eis numeris, qui, & partes, & totum adamuſsim metiuntur per eundē numerum, V.g. 6. eſt partes numeri 10. &, quia 2. metitur 6. per 3. & totum per 5. indè 6. dicetur eſſe tres quintas partes numeri 10. quia tres metiuntur 6. numerum, & quinque numerum 10. per eandem menſuram, quæ eſt 2.

DEFINITIO V.

M*Vltiplex autem maior minoris, cum minor metitur maiorem.*

Sicut numerus minor dicitur pars maioris; ſic maior dicitur multiplex minoris. Sed tantùm, cùm minor fuerit maioris pars, non verò partes. Sic 18. dicitur multiplex numeri 6. quòd ex ęquo menſuretur ab eo: Non autem numeri 5. quia, licet illius vnitates, quæ numeri 5. partes ſunt contineat, non tamen à numero 5. adamuſsim menſuratur.

DEFINITIO VI.

N*Vmerus par eſt, qui biſariam diuidi poteſt.*

Vt numerus 2. 4. 6. 8. ſunt pares, quia in duas partes æquales diuidi queunt.

DEFINITIO VII.

I*Mpar verò, qui biſariam non diuiditur, vel qui vnitate differt à pari.*

Vt numeri 11. 13. 17. 7. quia non poſſunt diuidi biſariam, vel quia differunt à paribus 10. 12. 18. 6. ſolâ vnitate, dicuntur impares.

DEFINITIO VIII.

P*Ariter par numerus eſt, quem par numerus metitur per numerum parem.*

V. G. 8. quia 2. & 4. metiantur, ipſum 8. dicitur pariter par: Nam 4. eſt par, qui paribus vicibus acceptus, nempe duabus, facit 8. ideoq; dicitur numerus 8. pariter par.

DEFINITIO IX.

P*Ariter impar numerus eſt, quem impar numerus metitur per numerum parem.*

Numerus 30. quem 15. impar numerus metitur multiplicatus per 2. numerum parem dicetur pariter impar. Aduertendum eſt autem, quòd idem numerus poteſt eſſe pariter par, & pariter impar, vt 12. Nam metitur, & numero 6. multiplicatus per 2. & ſic eſt pariter par, & numero 3. multiplicatus per 4. & ſic eſt pariter impar.

DEFINITIO X.

I*Mpariter autem numerus impar eſt, quem impar numerus metitur per numerum imparem.*

Vt numerus 15. quem metitur 3. & 5. ambo impares numeri dicitur impariter impar.

DEFINITIO XI.

P*Rimus numerus eſt, quem vnitas ſola metitur.*

Si detur namque numerus, qui neque à pari, neque ab impari patiatur dimenſionem, ſed à ſola vnitate ille numerus dicetur primus, vt 2. 3. 7. 11.

DEFINITIO XII.

P*Rimi numeri inter ſe ſunt, quos vnitas ſola metitur.*

Licet enim quilibet poſſit dimetiri per parem, ſeu imparem, niſi ille numerus menſurans ſit communis dimenſor vtriuſque, dicentur illi numeri inter ſe primi, V. g. 8. & 9. Quamuis etenim 2. multiplicans 4. numerum 8. menſuret, & 3. multiplicans 3. menſuret 9. quia tamen, nec 4. nec 2. menſurat alterum 9. nec 3. huius numeri 9. menſura, illum numerum 8. menſuret: ideo illi numeri primi inter ſe dicendi.

DEFINITO XIII.

C*Ompoſitus numerus eſt, quem numerus quiſpiam metitur.*

Silicet exceptâ vnitate, quam Euclides non vocat numerum. Perſpicuum autem eſt omnes numeros pares præter binarium eſſe compoſitos; quia ſaltem binarius eos metitur, ex quò etiam euenit omnes numeros primos, rempto binario, eſſe impares. Nam ex paribus binarius ſolus eſt primus.

DEFINITIO XIV.

C*Ompoſiti numeri inter ſe ſunt, quos numerus aliquis communis menſura metitur.*

Igitur ſunt compoſiti inter ſe illi numeri, qui ad differentiam primorum inter ſe, aliquam habent communem menſuram, vt 24. & 18. pro communi menſura ſortiuntur numerum 6.

DEFINITIO XV.

N*Vmerus numerum multiplicare dicitur; cùm toties compoſitus fuerit is, qui multiplicatur, quot ſunt in ipſo multiplicante vnitates, & procreatus fuerit aliquis alius.*

Vt

Vt numerus 5. dicetur multiplicare numerum 6. cum toties sumitur numerus 6. quot sunt vnitates in numero 5. & 6. quinquies acceptus producat alium, nempe 30.

DEFINITIO XVI.

NVmerus numerum diuidere dicitur, cùm numerus alius acceptus fuerit, indicans suis vnitatibus vices, penes quas diuidens numerus in diuiso continetur.

Vt Numerus 6. dicetur diuidere numerum 18. cum accipitur alius numerus, V. g. 3. indicans suis vnitatibus vices iuxta, quas 6. continetur in 18. nempe tribus vicibus.

DEFINITIO XVII.

RAtio est duorum numerorum mutua in ratione mensurantis, & mensurati relatio.

V. g. quia 4. metitur 4. vnica vice acceptus, & 2. metitur 4. gemina vice, & 3. vnica vice, & $\frac{1}{3}$, ideo dicuntur numeri isti Rationem habere. Omnis autem numerus obtinet Rationem cum quocunque alio, etiam rationalem; quia, vt diximus, alium saltem per vnitates, quæ in ipso sunt, metitur.

DEFINITIO XVIII.

PRoportio similis, seu ratio inter numerot est, cum primus ad secundum in simili mensura sunt, ac tertius respectu quarti.

Proportio similis, & Ratio est quædam similitudo, non numerorum; sed ipsarum Rationum in ratione continentis, & contenti, seu metiti, & mensurantis. Si ergo duo numeri sint; qui se contineant, vel mensurentur, vt duo alij. Eg. 2. metiatur 4. vt numerus 3. metitur 6. dicetur ita 3. ad 6. in proportione, ac 2. ad 4. quia sicuti 4. dualitatem gemina vice continet, sic, & 6. ternarium gemina vice complectitur.

Vnde hinc colligas; quòd numerus multiplicans habet eam proportionem ad vnitatem; quã genitus habet ad multiplicatum, V. g. multiplicati 2. per 4. faciunt 8. numerus itaque multiplicans 2. ita se habet ad vnitatem, vt 8. genitus ad 4. multiplicatum; quia ex def. 15. tot vicibus genitus continet multiplicatum, quod multiplicans vnitatem.

Secundo, quod numerus diuisus habet ad diuidentem eam proportionem, quam quotiens, seu diuidens habet ad vnitatem, quia quot vicibus diuidens continet vnitatem, tot quoque diuisus diuidentem complectitur ex definitione 16.

DEFINITIO XIX.

NVmerus numerum metiri dicetur per illum numerum, quem multiplicans, vel à quo multiplicatus illum metitum producit.

Postponitur ista definitio prædictis; cùm debuisset anteponi, quia definiuimus multa per mutuam commensurabilitatem; sed quia, & hæc illas supponebat; nempe definitionem multiplicationis saltem, ideo postposita est, cùm hoc liceat in Mathematicis definitionibus, quæ non probantur.

POSTVLATA.

Postuletur cuilibet numero, quoslibet posse sumi æquales, vel multiplices.

Secundò quolibet numero posse sumi maiorem.

AXIOMATA.

I.

Qui numeri, vel æqualium numerorum, vel eiusdem æquè multiplices sunt, inter se sunt æquales.

II.

Quorum idem numerus æquè multiplex est, vel quorum duo multiplices sunt æquales, illi inter se quoque sunt æquales.

III.

Qui numeri, æqualium numerorum, vel eiusdem, eadem pars, vel eædem partes fuerint, inter se sunt æquales.

IIII.

Quorum idem numerus, vel numeri æquales fuerint pars, vel partes eædem, illi inter se æquales sunt.

V. g. quia 5. est eadem pars numeri 10. ac numeri cuiusdam Equorum, numerus Equorum erit æqualis numero 10. Quod si 5. numerus sit dimidia pars, tum numeri 10. tum numeri Equorum, numeri Equorum, & 10. erunt æquales. Sic si 5. & numerus quidam Ouium, sit tertia pars numeri 15. numerus Ouium, & 5. sunt æquales numeri. Et si numerus 10. & numerus Ouium sint eædem partes nempe 2. ex tribus partibus numeri 15. numerus Ouium, & 10. erunt æquales.

V.

Vnitas omnem numerum per vnitates, quæ in ipso numero sunt metitur.

VI.

Omnis numerus seipsum metitur per vnitatem.

VII.

Si numerus numerum multiplicans aliquem produxerit, metietur multiplicans productum per multiplicatum; multiplicatus autem eundem per multiplicantem.

Si namque 4. multiplicet 3. producet 12. & 4. per 3. nempe tribus vicibus acceptus, & 3. si-

3. similiter per 4. idest quatuor vicibus acceptus producet 12.

VIII.

Si numerus numerum metiatur, numerus vices numerans, eundem quoque mensuratum numerum metietur, & numerus metiens, vices huius numerabit per suas vnitates.

SIc si 4. mensuret 20. vices numerabit numerus 5. quinquies enim numerus 4. continetur in numero 20. & hoc per suas vnitates nempe per 5. vnitates. Et iste numerus 5. vices numerans mensurabit quoque ipsum 20. sed alter primo metiens nempe 4. numerabit vices huius, iuxta quas continetur in 20. quia quater capit 5. in numero 20; Et hoc per suas vnitates, quæ in numero 4. quatuor sunt.

IX.

Numerus numeros metiens, compositum quoque ex ipsis metietur.

V. g. si 2. mensuret 4. & 6. mensurabit quoq; 10. qui componitur ex 4 & 6.

X.

Numerus numerum metiens metitur, quoque omnem numerum, quem ille metitur.

V. g. si 2. mensuret 4. mensurabit quoque numerum 12. 16. & 20. quos 4. metitur.

XI.

Si numerus numerum metiens, eum per quem metitur multiplicet, vel ab eo multiplicetur, producet eum, quem mensurat.

Sit Eg. 4. qui mensuret 24. per 6. dicit, quod si 4. multiplicet 6. vel à numero 6. multiplicetur, producet 24. quem mensurat per numerum 6.

EXPENSIO I.

De integrorum numeratione.

EXprimere quantitatem numerorum multorum, non quilibet sine aliqua regula facilè potest: Vnde de hoc primo agendum.

THEOR. I. PROP. I.

Omnes numeri procedunt, & continuantur per proportionem decuplam.

PRobatur ea est proportio numeri; quando toties vicibus sumitur, quot in numero proportionem denominante sunt vnitates, V. g. illa est proportio; quam habet 3. ad 1., quæ assumit alium numerum, V. g. 4. toties, quot in 3. sunt vnitates, vt est numerus 12. vt ex 18. definit. colligimus: sed in dispositione numerorum assumitur toties 1. quot vnitates sunt in 10. & faciunt 10. Iterū assumitur 10. toties quot vnitates sunt in 10. & faciunt 100. Iterumque assumitur 100. toties, quot vnitates sunt in 10. & fiunt 1000. Iterum assumitur tot vicibus 1000. quot vnitates reperiuntur in 10, & faciunt decem millia: Ergo crescit, & propagatur per proportionem decuplam omnis numerus naturalis.

PROBL. I. PROP. II.

Cognitis vicibus proportionum, & nominibus earum, facilè quilibet numerus exprimi potest.

PRæsuponendum est *locum*, in quo numerus est, vices proportionum ex instituto hominum significare, V. g. si sint 124. numerus 4. primo loco existens (dexter enim apud Arithmeticos primus locus est) significat vices vnitatum, quę acceptæ sunt. Nempe vnitates quatuor esse acceptas. Secundus locus n. 2 significat vices decimarum; nempe pro vnitatibus acceptas fuisse decimas vnitatum, ita vt 2; quia est secundo loco non duas vnitates, sed duas decimas vnitatum exprimat. Tertius verò locus numeri 1. est centū multiplicati per 10. idest significat, non iam acceptas fuisse pro vnitatibus decimas; sed centesimas vnitatum; ita vt 100. vnitates pro vna vnitate accipiantur. Numerus autem ipse significat vices, quo vnitates, vel decimæ, vel decimæ decimarum, idest centesimæ acceptæ fuerint. Quod si sola zifra adsit, significat nullas proportionum vices illi loco couenientes exprimēdas reperiri, sic si adsit numerus 200. nihil erit vnitatum, nec decimarum; sed solum numerus erit centesimarum, & quia est 2. duæ erunt centesimæ.

Secundò nomina proportionum cognoscere necesse est; hoc autem ex hac serie cognoscetur.

Si vnitas accipiatur decies, decem vocatur.
Si decem accipiatur decies, centum vocatur.
Si centum accipiatur decies mille vocatur.
Si mille decies assumantur, decē millia dicitur.
Si mille centies sumatur, centū millia dicitur.
Si mille millies sumatur, millio vocatur.

Deinde assumuntur iterum milliones, tanquā vnitates, & incipimus iterum à capite.

Si millio decies sumatur, decē milliones dicunt
Si millio centies sumatur, centum milliones.
Si millies assumatur, mille milliones.
Si millio sumatur decem vicibus millies, decem millia millionum dicuntur.
Si millio centum vicibus millies, decem millia millionum dicuntur.
Si millio sumatur mille vicibus millies, duellio vocatur, & ita dueliones, triliones, quadriliones incipiēdo rursus ab vnitate in infinitum.

Ita ergo legendus est numerus 10000. quia 1. est in quinto loco, & cęteri omnes non sunt numeri, sed zifrę; ideo non significant, nisi locum numeri; & hoc deseruit, vt numerus suo loco positus significet vices proportionum, quæ illi loco conueniunt. Igitur 1. quinto loco positus significat 4. ordines proportionum præcedere primus numerorum simplicium in primo 0. secundus decimarum in secunda zifra, tertius centesimarum in tertia zifra, quartus decimarum cētesimarum nempe milliarium in quarta zifra quibus locis licet numeri non adsint, adest tamen zifra; quę locum seruat, & operatur, quòd 1. vim quinti loci obtineat, & ideo, quòd 1. significet decimas milliariorū, nempe decē millia, quòd si esset 2. essent viginti millia, si 3. triginta millia.

Et quia, vt dictum est, primus locus in quo numerus existit, significat vnitates ad decimas ascendentes. Secundus verò numerus significat decimas vnitatum acceptas tanquam, si essent

vnitates

vnitates ascendentes ad centesimas, & quia, vt potest videri in serie superposita, placuit hominibus ad quamlibet proportionē tricies acceptam, mutare nomina proportionum; ideo faciliorem regulam ad legendum reddere possumus, dispositis per ordinem numeris, primo incipiendo ad dexteram, & ad omnes tertios duobus intermissis applicare punctum, vt vides in hoc exemplo

2 1

3456480104900712. & deinde super quodlibet secundum punctum incipiendo ab vnitate applicare numerum tali ratione, vt primo nihil apponatur, neque secundo puncto, tertio apponatur vnitas, & vno intermisso puncto, quinto apponatur 2. & sic consequenter. Nam hoc modo sciemus, vbi primum punctum reperitur esse numerum simplicem. Vbi secundum esse milliaria accepta tanquam vnitates. Vbi numerus esse milliones accepti tanquam vnitates, & vbi duo esse duelliones, & sic consequenter augendo in infinitum. Et ita numerus superpositus pronunciabitur. Nimirum

3 4 5 6
Tria millia, & quatercentum quinquaginta sex duel-
4 80 10
liones, quatercentum octuaginta millia, & centum
4 900 7
quatuor milliones, nongenta millia, & septingenta
12
duodecim vnitates.

Vbi iterum aduertendum, quòd nullum nomen zifris attribuitur; quia non significant; nisi locū numeri, vt numerus suo loco positus vices proportionū significet, quibus vnitas est assumpta. Vt in hoc numero 100. duæ zifræ, quæ vnitatem præcedunt, solùm demonstrant illam vnitatem non significare vnitatem simplicem; sed neque significare vnitatem decimarum, sed vnitatem centesimarum expromere, nempe proportionem 10. gemina vice acceptam. Nam si vnitatem multiplico per 10. facit 10. quam decimam, si adhuc multiplico per 10. facit centum. Ecce gemina vice assumpta proportio. Quare, si omnes numeri præcedentes essent o nihil significarent, at si ante sequeretur eos sola vnitas ad sinistram significaret iuxta locum, in quo reperitur. V. g.

2 1

1000000000000. iste numerus significat duellionem, quia nimirum zifræ antecedentes reiciunt illam vnitatem ad decimum tertium locum, qui est locus duellionis: & hæc de numeratione.

EXPENSIO II.

De integrorum collectione;

QVatuor præcipuæ operationes, & vniuersalissimæ circa numeros integros, & naturales exercentur, quæ omnes sub vno nomine *Algorhythmi* cōprehenduntur; atque istæ sunt *additio, subtractio, multiplicatio*, & *diuisio*. Hic agimus de additione, quæ datis pluribus numeris eos in vnam summam redigit, atque aliás appellatur *collectum*, & *totum*.

THEOR. I. PROP. III.

Cuilibet numero quilibet alius numerus competens addi potest.

PRob. Nam iam concessum est in postulato secundo numerum posse sumi alio numero maiorem. sint ergo numeri simul addendi 3. & 4. summo ergo numerum æqualem istis duobus simul nimirum 7. & iam facta est additio, namque 7. continet 4. & 3. Probatur vero, me duobus numeris posse sumere æqualē, nā ex 2. Post posū sumere vni illorū vtlibet maiorem, & ex 1. Post cuilibet æqualem, ergo possum sumere maiorem tribus vnitatibus, ita vt hæc maioritas sit æqualis numero 3. & iam duobus numeris 3. & 4. sumpsi æqualem.

THEOR. II. PROPOS. IV.

Numeri dissimiles dissimilibus nō addendi.

SInt numeri decimas significantes 40. & sint significantes numeros simplices 5. Dico 5. numero 40. addi non posse; Nam si fieri potest, addatur: Erit ergo vel 9. vel 90. zifra apposita, sed nec 9. nec 90. esse potest; ergo neque addi potest, quod verò neque 90. neque 9. esse possit probatur. Nam non 90. quia quinque vnitates super quadraginta vnitates non addunt, nisi id quod sunt; nempe quinque, ergo erit 45. & non 90. Sed nec 9. quia quatuor decimæ sunt magis, quam quatuor numeri simplices, sed quatuor simplices additi 5. simplicibus faciunt nouem: ergo quatuor decimæ magis, quam nouem.

PROB. I. PROPOS. V.

Si similes numeri, & eandem proportionem significantes addantur similibus numeris, eandem proportionem significantibus erit optimè facta additio.

CVm ergo certum sit ex præced. addendos numeros accipiendos esse eiusdem proportionis; iuxta eorum proportionem ita disponendi sunt, vt singulæ proportiones addendæ loco correspondeant, & dignitate vt videre est in hoc exemplo.

$$\begin{array}{r} 1945 \\ 7329 \\ 405 \\ \hline 9679 \end{array}$$

Nam omnes, qui sunt in primo loco ad inuicem sibi, & per rectam lineam respondent, & ita, qui in cæteris locis. Quo facto lineola subducta distinguendi sunt numeri addendi à numeris additis supponendis. Postea addantur simul tres primi ordinis 5. 9. & 5. incipiendo ab inferiori, & faciunt 19. & quia habes duos numeros, quorum primus 9. est eiusdem speciei, cum illis, qui erant addendi; ideo sub ipsis rectà pono 9. tanquam ad primum collectum ordinem pertinens; & trasfero 1. qui est decimarum, tanquam ad secundum ordinem spectans; & addo simul hoc 1. & deinde cæteri secundi ordinis 0. 2. 4. & faciunt 7. (nam 0. nihil addit,) & quia est numerus simplex decimarum, pono sub hoc secundo ordine, spectans ad ad decimas. Deinde assumo 4. 3. 9. tertij ordinis, qui simul additi faciunt 16. & quia obtinui duos numeros, primum 6 eiusdem ordinis, quare illum pono apud 7. sub tertio, ad quem spectat ordine; & trasfero secundum 1. ad ordinem altiorem, & sequentem: addo igitur simul 171. & faciunt 9. apud 6. ponendum. Habeoque numerum collectum 9679. æquiualentem illis tribus ordine positis. Quod promissum est in problemate, & ex antecedentibus Theorematibus sequitur.

EXPENSIO III.

De subductione numerorum integrorum.

SVbductio, aut subtractio est, cùm duobus numeris datis minor aufertur à maiore ad obtinendum residuum, qui numerus etiam appellatur *Quæsitus*, & *Reliquus*.

THEOR. I. PROPOS. VI.

Quilibet numerus minor à quolibet maiori correspondenti extrahi potest.

CVm namq; ex defin. omnē numerū vnitates mensurent; in numero maiori erunt tot vnitates, quot in numero minori, & ampliùs. Sed ex 1. post. cuilibet numero licet accipere æqualem. Sumam igitur ex numero maiori æqualem alicui numero minori, V. g. à 5. possum sumere numerum æqualem numero 4. quo ablato, quod residuum erit, numerus à subtractione residuus erit, qui exquiritur.

COROLLARIVM I.

QVòd, si simul addantur 4. & 1. efficient, quod erat; cum sint partes ipsius 5.

THEOR. II. PROPOS. VII.

Numerus à numero similis proportionis subducendus est.

PRobatur. Nam si possunt diuersæ proportionis numeri auferri, minor à maiori auferantur. V. g. 5. à 70. Quia ergo abstuli 5. à 70. residuus erit numerus 20. Sed addantur simul rursus iuxta dicta prop. 5. anteced. 20. & 5. faciūt 25. Sed debebant efficere, quod prius erat, nempe numerum 70. ex Coroll. præced. Ergo non potest fieri subductio numerorum: nisi sint eiusdem dignitatis.

PROBL. I. PROPOS. VIII.

Si à numeris maioribus, & eandem proportionem habentibus numeri minores, & eandem proportionem habentes, ac ipsi, demantur, fiet optimè subtractio.

SIt subtrahendus numerus æqualis huic 678. à numero 1257. Quia proportionales à proportionalibus sunt auferendi, ita collocandi sunt vt loco, ideoque proportione respondeant, vt in hoc exemplo. Et subducta lineola distinctionis gratiâ, deinde assumatur à superiore numerus æqualis numero primo 8. & si non possit id fieri, quòd 7. minor sit; à numero secundo proximo accipiatur vnitas decimarum, & sint 17. deducaturq; ab eo numero 8 æqualis, & residuus erit 9. Qui, vt numerus vnitatum, sub vnitatibus scribendus. Iamque accedimus ad secundum numerum subducendum, & quia substulimus à 5. vnitatem decimarum; ideo euasit 4. Videatur ergo; an 7. secundus subducendus à numero 4. auferri queat, & cum non possit, iterum à præcedenti assumatur vnitas decimarum, & sint 14. ex quibus 7. ablatus relinquit 7. igitur subscribo 7. numeris secundi ordinis apud 9.

```
1257
 678
----
 579
```

Et quia à præcedenti 2. abstuli 1. ideo remansere 1. à quo 6. auferri nequeunt; igitur vnitas præcedens, quæ est centesimarum addatur, & fiant 11. ablatus 6. restituit 5. itaque residuus erit 579. subducto 678. à maiore numero 1257.

Quòd si in præcedenti non reperiretur, nec quidem vnitas, sed zifra: tunc accipienda est adhuc vnitas, non quidem ab illo loco, sed à superiori saltem virtualiter, vt in istis terminis. Si enim volo subducere 8. à primo 0. nequeo; quia numerus non est, accipio itaque vnitatem decimarum ab antecedenti; sed nequeo; quia est 0. Accipio ergo ab antecedenti; qui licet sit 1. est tamen numerus vnius decimæ decimarum, idest centesimarum; ideoque subduco 8. à 10. residuus erit 2. at verò 10. iam non erit 10. sed 9. quod vna decima ablata sit; Ideoque residuus erit 92.

```
100
  8
---
 92
```

Poterit quoque facilitatis gratia vnitas ablata numero sequenti restitui, V. g. si sic fiat 2. à 0. nequit fieri, sed mutuo accepta vnitate à maiori fiet, 10. à quo subductus 2. residuus erit 8. sed quia ab antecedenti abstuli vnitatem, ideo secundo 7. ei addo, & fient 8. demo itaque 8. à 10. eodem modo, & fiunt 2. & quia abstuli vnitatem; ideo eam subduco à residuo 10. & fiunt 9. & sic habetur residuus 928. Illud enim augmentum, quod subtrahendo numero fit, æquiualet diminutioni factæ in numero, à quo aufertur. Nam ita est, si auferantur 8. à 10. quam, si auferantur 7. à 9. In prima verò regula cogitauimus numerum, à quo subducitur diminutum; hic verò numerum subtrahendum augemus vnitate; vt idem relinquat; ibi cogitatur iam ablata vnitas; hic tanquam, si non esset ablata, cum numero subducendo aufertur.

```
1000
  72
----
 928
```

Potest etiam fieri alio modo, vt si auferendi sint à numero 2081. numeri 479. dispono, vt supra, & quia 9. ex 1. auferri nequit, ideo differentiam, quæ est inter 9. & 10.; nimirum 1. assumo, & eam addo numero superiori silicet numero 1. & fiunt 2. quos subscribo. Ita 7. secundum aufero à 7. & numero superiori (est enim 7. non 8. ob vnitatem ablatam) & nihil remanet: Vnde scribo 0. ad hoc, vt seruetur locus. Deinde quia 4. nequit deduci à 0. assumo differentiam inter 4. & 10. remanent 6. quam numero superiori non addo, cùm zifræ non possit fieri additio, & ideo scribo 6. & deinde scribo 1. ita enim remansit, quòd vnitas ablata sit à numero 2. propter 10. mutuò assumptos prius. Qui omnes modi in idem recidunt.

```
2081
 479
----
1602
```

EXPENSIO IV.

De numeris multiplicandis.

MVltiplicatio est duplex, alia simplex, alia composita. Simplex est, cùm vnus simplex numerus per alium multiplicatur, composita verò, cùm vel plures numeri per vnum multiplicantur, vel plures per plures. Agemus priùs de prima, vtpote de faciliori.

THEOR. I. PROP. VIIII.

Quilibet numerus potest multiplicari.

PRobatur multiplicare est sumere toties alium numerum, quot numerus multiplicans habet vnitates; cumque liceat alteri numero addere quantum quisque vult ex post 1: si V. g. assumam 4. licebit mihi addere, quantum volo. Addam ergo ei rursus 4. & rursus 4. toties quot vnitates sunt in 3. & sic habebo 4. ter acceptos. Quod est multiplicare ex definit. 15.

THEOR. II. PROPOS. X.

Si sit numerus, vel medietas decimæ, vel medietatem decimæ excedens, multipliceturq; per alium excedentem vnitatem, cum fuerit multiplicatus, vel æquabit decimam, vel decimam superabit.

PRobatur facilè; quia minus, quàm 2. assumi nequit; nec minus 5. pro numero multiplicando, quæ faciunt 10. Quare, si alij assumantur, patet decimam superaturos.

THEOR. III. PROPOS. XI.

Si sint duo numeri se se mutuo multiplicantes; quorum vnius medietas simul cum toto alio posita sit magis, quam medietas decimæ, illi numeri multiplicati decimam superabunt.

PRobatur facilè. Nam, iste numerus 4. adiunctus numeri multiplicantis 3. medietati quę sit 1. $\frac{1}{2}$ facit 5. $\frac{1}{2}$. Quare si tantùm addatur iterum 4. & 1. $\frac{1}{2}$ multiplicando per 2. facient magis, quam 10. Quia gemina vice accipientur. Ergo tanto magis si multiplicatur 4. per 3. aut quemlibet alium maiorem.

COROLLARIVM

HInc habes numeros tales generare numeros ad duas proportiones pertinentes, vel ad vnam tantùm; sed semper superiorem. Sic 3. & 4. generant duos numeros 12. quorum primus 2. est eiusdem proportionis, ac multiplicati, secundus verò 1. proportionis immediatè sequentis decimarum. Sic si 5. multiplicentur per 6. generabunt numerum 30. qui ternarius non erit numerus simplex: sed ternarius decimarum, nempe ordinis immediatè sequentis.

THEOR. IV. PROPOS. XII.

Numerus simplex multiplicans numerum simplicem non potest generare numerum; nisi proportionis altioris immediatè sequentis.

PRob. Quia numerus maximus simplicium est 9. qui multiplicatus per 9. maximum item simplicium producet numerum, nouies numerum 9. continentem; sed proportio altioris ordinis, quā proportionis immediatè sequentis numeros simplices continet decimas decies. Maior autem est numerus continens partes plures, & maiores, quàm qui continet pauciores, & minores. Ergo erit minor numerus continens nouies nouem; quàm decies decem. Ergo non poterit efficere proportionem istā tertiam. Quod si maximus simplicium id nequit. Ergo nec cæteri.

COROLLARIVM

HInc est, quòd, etiam si numerus multiplicans alium significet decimas, vel decimas decimarum; quòd eadem ratio erit, & producere nequibunt numerum pertinentem; nisi ad proportionē immediatè sequentem, vt patet, quià eadem ratio sit de numeris, vel sumptis, vt vnitates simplices, seu, vt vnitates decimarum, seu vt centesimarum, &c.

THOR. V. PROPOS. XIII.

Omnes numeri se se multiplicantes faciunt numerum, qui comprehendit, tum vnius, tum alterius partes.

PRobatur. Quia id vnumquodque continet, ex quo componitur: Ergo cùm numerus sit compositus ex multiplicatione, tum vnius, tum alterius, debet eorum partes in se habere.

THEOR. VI. PROPOS. XIV.

Si numerus simplex multiplicet non simplicem, numeri geniti simplices non erunt: sed eius proportionis, cuius est multiplicatus, vel immediatè sequentis.

SIt 3. numerus, qui multiplicet 5. numeri 250. Dico, quòd in genito 15. numerus 5. non est simplex; sed eius proportionis, cuius est 5. in numero 250.

Prob. Nam in numero 150. numerus 5. qualibet vnitate decimam significat. Ergo quælibet eius vnitas tricies accepta decimarum erit. Igitur etiam, si toties 5. simul sumatur genitus decimarum erit ex propos. 12. Coroll. numerus uero 1. in genito 15. ex propos. 11. Coroll. significabit proportionem immediatè sequentem.

THEOR. VII. PROPOS. XV.

Si numerus non simplex multiplicet non simplicem producet eam proportionem, quæ tum unius, tum alterius ab vnitate distantiâ conficitur.

SIt numerus 7. in numero 70. & numerus 5. in numero 50. qui se inuicem multiplicent. Dico quod numerus genitus erit eius proportionis, quæ ex distantiâ, tum unius, tum alterius à primo numero uersùs sinistram recedit; & quia loca per zifras notata sunt. Ideo dico recedere zifris, tum huius, tum alterius numeri nimirum duabus zifris, eritque 3500.

Probatur. Quia ex antecedenti numerus simplex primus multiplicans secundum generat numerum secundo loco ponendum. Ergo secundus multiplicans secundum generabit numerum tertio loco ponendum, & ideo secundus multiplicans tertium generabit numerum quarto loco ponendum, & hinc tertius multiplicans tertium generabit numerum quinto loco ponendum, & sic de cæt.

ABC
Quod, ut magis pateat, sit numerus 323. &
DEF
222. Quia 3. A est tertio loco, si illum multiplicet F 2. erit genitus ex 2. tertio loco ponendus ex propos. anteced. & ostendet tres centesimas, ut unitates fuisse acceptas. Quod si multiplicet 2. E numerum A 3. eundem, significabit tres centesimas non iam bis acceptas, sed dualitate decimarum, idest uigesies acceptas. Ergo genitus non iam significat unitates centesimarum; sed decimas centesimarum. Ideo secundo loco post primum collocandus, idest quarto loco ponendus; Et si illum D 2. multiplicat; iam non erunt decimæ centesimarũ. Sed centesimæ centesimarum, ideo numerus genitus tertio loco ponendus post primum, idest quinto loco collocandus; & sic, si alij adsint argumentabitur.

PROB. I. PROPOS. XVI.

Si omnes numeri simplices in quadratam seriem ita disponantur, vt prima series sit continua additio vnitatum, secunda dualitatum, & sic consequenter vsque ad 10. Tabula talis ordinata erit, quæ numerorum simplicium multiplicationem exibebit.

DVcantur lineæ æquidistantes undecim, & istas decussantes aliæ undecim. Deinde ascribantur numeri in prima serie ponendo unitates sibi inuicem additas; in secunda dualitates sibi superadiunctas; in tertia triadas, & sic de cæteris. Nam tabula erit confecta, quæ à Pythagora primò inuenta est, & ab eius nomine Pythagorica uocatur: Quam dico numerorum simplicium exibere multiplicationem.

Probatur multiplicare est sumere numeros multiplicandos tot uicibus, quot sunt in numero multiplicante unitates: cum ergo quilibet numerus simplex additus sit alteri tot uicibus, quot numeros habet ipsa decima, V. g. unitas unitati 10. uicibus addita est, dualitasque dualitati, trias triadi, &c hæc erit numerorum simplicium multiplicatio.

							A		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
			D				C		
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Vsus etiam clarus est. Nam, si reperio à latere sinistro numerum multiplicantem, & in superiore parte multiplicatum in eo quadrangulo, ubi series inuicem concurrunt, erit numerus genitus. Sic 8. per 3. multiplicatus erit 24. ubi series A, & B occurrunt in C. Obseruaque ex propos. 11. numerum tabulati D excedere simplices numeros, & proportionem sequentem inducere.

* Verum quia non semper hæc tabula in promptu est, & quandoque in multiplicationibus numerorũ maiorum potest suboriri difficultas; ideo hæc regula poterit obseruari ad facilitatem secandam.

Volo Eg. cognoscere 8. multiplicatum per 9. quem numerum gignat: Video, quot numeris distet minor numerus 8. à 10. & video esse 2. differentiam. Accipio ergo 9. gemina vice, & subduco à 9. addito 0. nempe à 90. & residuum 72. est numerus quæsitus; Sic 7. per 6. differentia est 4. quam multiplico per 7. & faciunt 28. subduco à 70. & dant 42. numerum genitum ex multiplicatione 7. in 6. Et ratio est; quia 70. est 7. decies acceptus. Quòd, si auferatur ab eo 7. quater acceptus, clarum est, quòd remanet 7. sexties acceptus, nempe per 6. multiplicatus: hęc autem regula comodior est in magnis numeris: cum differentiæ à 10. paruæ sunt, & in illis deseruit.

PROB. II. PROPOS. XVII.

Datis duobus numeris non simplicibus inuicem multiplicandis, si quilibet numerus per alium multiplicetur, & seruetur proportionum locus vbique, & summa cuiuslibet multiplicationis colligatur, erit facta multiplicatio compositorum numerorum.

VIsa facili multiplicatione numerorum simplicium, videndum est quomodò ex eis numeri maiores multiplicentur. Sint ergo multiplicandi 254. per 43. cùm sit seruandus proportionis locus, debet minor sub maiore subscribi tali modo,

254
vt numerus vnitatum sub vnitatibus, 43

 de-

decimarum sub decimis, & omnes alij numeri correspondenter collocentur. Et quia quilibet per alium multiplicari debet, & iam cognosco quomodo multiplicentur numeri simplices. Ideo multiplico 3. per 4. & faciunt 12. scilicet ex propos. 10. & 11. numeros geminę proportionis, primum simplicium vnitatum, secundum numerorum decimarum, & proportionis immediatè sequentis: ideo 2. vnitatibus subscribo, at 1. decimis. Postea 3. per 5. sequentem numerum multiplico, & faciunt 15. quorum primus 5. locum ex propos. 14. proportionis eiusdem, quæ est numeri 5. debet occupare nempe secundum. Vnde numero 1. subscribendus, vt vides, & 1. numeri 15. ad tertium locum pertinebit, cum sit proportionis immediatè sequentis. Deinde multiplico 3. per 2. & faciunt 6. numerum tertij loci.

254
43
————
12
15
6
————
16
20
8
————
10922

Itaque iam prima figura inferioris numeri multiplicata est per omnes figuras numeri superioris: Modo multiplicanda est secunda figura; ideoque accipio 4. & multiplico per 4. & faciunt 16. & quia 4. est secundi ordinis in numero 43. ideo genitus ad eundem locum spectat ex propos. 14. nempe secundum. Quare ipsius 1. ad tertium deuenit ex propos. 15. Postmodum iterum multiplico 5. per 4. & faciunt 20. cuius primus 0. ex propos. 15. debet occupare tertium locum, & ideo subscribo tertio loco 0. & 2. quarto. Deinde 2. per 4. & faciunt 8. qaarto loco ponendus. Tandem congrego omnes simul, eritque summa numeri ex multiplicatione geniti 10922.

Practici tamen breuitatis gratia non omnes numeros distinctè scribunt; sed transferunt ad alios anteriores, V. g. in præcedenti exemplo, non scribent numerum 12. sed 2. quidem scilicet numerum verò 1. mente retinebunt, donec multiplicent sequentem 5. per 3. & producant 15. cuius numero 5. addent illam vnitatem mente retentam, & scribent 6. & alterum 1. mente conseruabunt, donec iterum per 3. multiplicent 2. & faciunt 6. cui addent 1. mente seruatum, & sic scribent 7. & sic in secunda multiplicatione numeri 4. efficiunt vt hic videre licet Nam solum scribet 6. & 1. coniungent cum 20. vt sint 21. & scribent 1. & 2. coniungent cum numero 8. vt sint 10. quem tandem scribent. Deinde, vt priùs, summa colligitur

254
43
————
762
1016
————
10922

Si quando numerus zifris constat, sufficit ponere tot zifras, quot sunt in numero, tum multiplicato, tum multiplicante, & deinde vltimum numerum multiplicare inferioris, cum superiori, & erit facta multiplicatio, V. g. sint multiplicandi 20000. per 300. Quia sunt 6. zifræ in vtroque eas omnes scribo, deinde multiplico 3. cum 2. & vltimo loco pono 6. & erit sine summa confecta multiplicatio.

20000
300
————
6000000

Quod si numerus alter constet zifris, at alter nequaquam; alter per alterum multiplicandus est: Et confecta multiplicatione summæ eius addendæ sunt tot nullæ, quot sunt in altero ipsorum, vt vides in exemplo.

33000
35
————
165
99
————
1155000

EXPENSIO V.

De numerorum integrorum diuisione.

DIuisio est inuentio numeri, qui suis vnitatibus demonstret, quoties numerus minor continetur in maiore; & metiatur maiorem. Duplex est autem, alia enim est numeri simplicis quemcunque alium diuidentis, alia numeri compositi alium pariter diuidentis.

THEOR. I. PROPOS. XVIII.

Quilibet numerus maior cuiuslibet proportionis per quemlibet alium numerum partiri potest.

SIt numerus proportionis decimarum 80. Dico quod per quemlibet alium numerum minorem, seu æqualem diuidi queat.

Probatur primo de minori, qui sit V. g. 4. Vtique ego possum assumere huic numero 4. ęquè multiplicem, vt mihi placet, ex post. 2. Accipiam ergo numerum multiplicem, qui 80. non excedat proximè, ita vt, si semel adhuc multiplicem, excedat; Iterum possum exprimere numerum multiplicitatis, idest quot vicibus assumpserim. Si enim assumo multiplicem, etiam quot vicibus assumpserim ignorare non debeo. Si ergo exprimam, expressus numerus erit ille, qui quæritur, & appellabitur Quotiens, idest indicans, quot vicibus contineatur 4. in 80. qui numerus vicium erit 20.

Probatur etiam de ęquali; quia, si est æqualis cõmensuratur ipsi, ergo vnica vice capiet in ipso.

Quare patet. Quod numerus cuiuslibet proportionis per quemlibet diuidi possit, cum per minorem, & æqualem, vt libet diuidatur.

THEOR. II. PROPOS. XIX.

Quilibet numerus minor, vt minor, per maiorem partiri nequit.

PRobatur ex definitione 16. Minor nullis vicibus continet maiorem; Ergo vices secundum quas continet, exprimi nequeunt. Quare nec diuidi.

Dixi autem, *numerus minor, vt minor*, quia numeri minoris, vtpote quantitatis in partes designabiles plures secari poterit quælibet vnitas, & sic augeri numero. Quare auctus numero, diuidi poterit.

THEOR. III. PROPOS. XX.

In qualibet figura numerica, non potest eiusdem proportionis maior numerus capere, quam 9.

PRobat. Nam capiat maior numerus. Iam euadit 10. idest alterius proportionis, nempe vnitas decimarum.

THEOR. IV. PROPOS. XXI.

Non omnis numerus per alium, ita diuidi poteſt manendo eiuſdem rationis, vt non ſuperſit aliquid.

PRobatur diuidere eſt cognoſcere, quot vicibus numerus datus contineatur in diuidendo: ſed non omnis numerus ex æquo omnem numerum metitur, cum non ſit eius pars, ſed multoties partes ex defin. 4. Ergo tunc aliquid remanere debet.

THEOR. V. PROPOS. XXII.

Illud, quod remanet, ſemper eſt aliqua pars numeri diuidentis.

PRobatur. Nam ex Axiom. 6. omnis numerus ſeipſum per vnitatem metitur: Ergo quemlibet alium ex Axiomate 9. per vnitatem metietur, quia numerus quemcũq; numerũ metiẽs metitur etiam omnem numerum, quem ille metitur. Quare, cùm vnitas metiatur omnem numerum ſaltem per vnitatem, numerus remanens metietur numerum diuiſorem ſaltem per vnitatem. Propterea hoc erit exprimendum.

COROLLARIVM

QVoniam numerus reſiduus à diuiſione eſt pars numeri diuidentis. Ideo erit numerus fractus, ideſt non erit totum; ſed aliqua pars. Vnde hìc neceſſariò docendum erit; quomodo fracti ſcribantur, & quomodo partes eorum nominentur: Numerus itaque fractus neceſſariò exprimendus duobus numeris; quia ex præced. prop. cùm nõ ſit numerus abſolutus; ſed relatiuus, & ſe habeat tanquam pars ad totum. Relatiua verò ex Ariſt. ſint ſimul cognitione conſequenter exprimendum erit totum, & pars tali modo $\frac{3}{6}$ cognoſcetur enim 3. numerum ſuperiorem concludere in ſe tres partes numeri 6. Ideoque 3. numerus ſuperior dicetur numerator, quòd numeret partes: at inferior denominator, qui exprimit totum, & indicat, cuius totius partes ſint ſuper lineolam numeri deſcripti, lineola vero interijcitur diſtinctionis gratia. Superior quoque numerus poteſt eſſe maior, & inferior minor; quia aliquando neceſſe eſt exprimere habitudinem, & relationem numeri ſuperioris ad inferiorẽ, vt $\frac{3}{2}$ vnde more fractorum id fit: quòd in fractis exptimatur relatio totius, & partis.

THEOR. VI. PROPOS. XXIII.

Reſiduum numeri alicuius vnitatis maioris poteſt habere tot vnitates in minori proportione acceptas, quòd poſſit diuidi per eundem numerum, quo prior diuiſus eſt.

SIt diuidendus numerus 90. per 8. Iam certum eſt 8. in 9. vnica vice capere, & reſiduam eſſe vnitatem, quæ non capit 8: ſed, quia illa eſt vnitas decimarum, ſi decima accipiatur tanquam numerus ſimplex, & proportionis immediatè inferioris, iam habebit numeros 10. capaces ſemel numeri 8. cum reſidua vnitate.

PROB. VII. PROP. XXIV.

Si videatur quoties numerus minor contineatur in numeris maioris cuiuſlibet proportionis: Deinde ſucceſſiuè in alijs minoris proportionis cum reſiduo remanente à diuiſione numeri maioris, & hæ vices ſcribantur per ordinem erit facta diuiſio.

QVoniam, vt dictum eſt propoſ. 18. in hac operatione proportio non eſt ſeruanda. Sed quilibet numerus alium diuidere poteſt, cuiuſcumque proportionis ſit: Ideo ponemus numerũ diuidentem. V.g. 34. ſub numero diuidendo 7828. abſque reſpectu loci, & quia reſiduum maioris numeri poteſt iterum diuidi ex prop. 23. in minori ſequenti proportione: ideo ponemus numerum diuidentem ſub maiore numero diuidendo, ad hoc vt ex eo diuiſo remaneat reſiduum iterum diudendum, ſed acceptum in minori proportione tali modo, & ducatur lineolà. Video quot vicibus numerus primus diuiſor 3. capiat in 7. & cognoſco vicem eſſe duplicem, ſimulque etiam aſpicio, ſi eadem gemina vice numerus 4. poſſit capere in numero ſequente 8. cum eo, quod remanet à primo numero 7. Sed hic poteſt capere; ideo ſcribo 2. ſeorſim. Et ad hoc, vt ſciam numerum ſubtrahendum multiplico 2. per 3. & faciunt 6. quos ſubduco à 7. & remanet 1.

7828
34

Scribo itaque 1. reſiduum ſuper 7. deleoque 7. tali modo, vt poſſit cognoſci, lineolâ ſuper 7. ductâ. Iterumque multiplico 4. per 2. & faciunt 8. quos ſubduco ab 8. & nihil remanet. Quare ſcribo ſuper 8. zifrã, & deleo 8. Deleoque etiam totum numerum 34. vt nihil iam amplius eo loco deſeruiens, quòd numeri illius proportionis iam ſint diuiſi. Quamobrem ſcribo loco immediatè inferiori ſub reſiduo numeri diuiſi ad diuidendam proportionem inferioris ordinis, & conſidero, quot vicibus capiat 3. in reſiduo 10. tanquam numerum inferioris proportionis acceptum; & video tricies. Scribo ergo 3. apud 2. ſeorſim, & eodem modo multiplico 3. per 3. & faciunt 9. quos ſubduco à 10. & remanet 1. Deleo igitur 1. in numero 10. & zifræ deletæ ſuperpono 1, quæ cum 2. facit 12. multiplico itaque 4. per 3. rurſus, & faciunt 12. ſubduco itaque 12. à 12. & nihil remanet: Vnde deleo 1. & 2. & ſuperpono 0. eoquòd nihil remaneat. Deleo quoque numerum diuiſorem, tanquam non amplius eo loco deſeruientem, ſed ad vlteriorem locum promouendum. Quare ſcribo ſequenti loco numerum diuiſorem; hac enim mutatione loci fit, vt accedat ad numerum reſiduum acceptum in minori proportione ex præced. propoſ. 23. & ideo diuidi poſſit: Si tamen aliquid remaneat ſufficiens. Hic autem nihil remanet ſufficiens, cùm tantùm relinquatur 8. numerus

10
7828 | 2
34

1
190
7828 | 2308
3444
33

primus

primus simplicium vnitatum, in quo numerus 34. capere nequit, & ideo in quotiente apud 3. pono o. eò quòd in vltimo numero vltimi loci nulla diuisio potuerit fieri, quòd semper seruandum est, quotiescumque occurrerit numerum diuisorem in aliqua proportione non capere: sed diuisorem esse promouendum adhuc ad minorem numerum.

Residuum verò 8. est pars numeri diuidentis ex propos. 22. ideo scribendus est apud alios, sed vt minutia, nempe superiùs 8. & interiecta lineola numerus diuisor 34. quare diuiso numero 7828 per 34. quotiens erit 230. $\frac{8}{34}$ nempe 230. & insuper ex triginta *quater partibus in quibus vnitas diuisa est 8. partes*.

Quod si aliquando occurrat in vltimo ipso numero versùs sinistram, qui primus omnium diuidendus est non capere numerum diuisorem, vel vltimum capere: sed non penultimum, vel antepenultimum; tunc ad secundum locum inferiorem prououendus est.

Sit numerus diuidendus 7930. per 794. quia 4. primus diuisoris non capit in 3. ideo assumenda est proportio minor, & prima diuisione non debeo diuidere 793. quia nequit. Sed numerum 7930. Considero itaque quot vicibus capiat 7. in 79. & video; quod nouem vicibus, (neque enim amplius capere potest, vt supra propos. 20. quam 9. in qualibet proportione, licet aliquando minus) ideoque multiplico per 9. diuisorem 794. & fiunt 7146. auferendi à diuidendo 7930. & facta erit diuisio. Quod si iste defectus eueniat non in principio, sed in medio, vt si 7945. diuidantur per 73. Tunc apposita apud quotientem zifra, ad locum inferiorem diuisor promouendus. Sic semel 73. capit in 79. ideoque quotiens est 1. & residuum est 6. qui cum 4. numero sequentis proportionis facit 64. in quo deberet capere diuisor numerus 73. Cum ergo non capiat, ad aliam proportionem transeundum est, priùs appositâ zifrâ apud quotientem, vt significet 10. Et est deinde diuidendus numerus 646. per 73. Et quia 7. capit in 64. nouem vicibus, & 3. non capit in residuo 16. nouem quoq; vicibus; ideo dico octo vicibus capere, & pono 8. apud quotientem; vt sit 108. & facta multiplicatione eueniunt 584. quos subduco à 646. & fiunt 62. residui pro fractis ponendi. Quare quotiens erit 108. $\frac{62}{73}$

Alius modus tutissimus diuidendi erit. Multiplicare priùs sensim numeros diuisoris per numeros simplices, vsque quo eorum summa eueniat maior, quam correspondentis figuræ numeri diuidendi: deinde extrahere summam proximè minorem à numero diuidendo.

V. g. sit diuidendus numerus 993470 per 247. Priùs per numeros simplices multiplico diuisorem 247. hoc modo hic lateraliter apposito priùs per 1. deinde per 2. &c. vsque quò perueniam ad numerum 1235. maiorem numero 993. constante tribus vltimis figuris diuidendi, quæ debent primo diuisori correspondere.

247	1
494	2
741	3
988	4
1235	5

Quo facto video; an reperiatur 993. in his numeris ita multiplicatis: Et si non reperio, summo proximè minorem; nempe 988. deducoque à 993. & remanent 5. & quia 4. apposui apud 988. notando quod 988. est 247. quater acceptus; Idcirco appono pro quotiente 4.

993 | 4
988
5

Deinde assumo aliam figuram à numero diuidendo, nempe sequentem 4. & pono apud 5. & considero in numeris multiplicatis, & genitis à diuisore per numeros simplices ducto; an adsit hic numerus, & video non adesse, nec quidem proximè minorem, sed omnes maiores, vnde apud 4. quotientem pono zifram, & assumo aliam figuram nempe 7. & video, an in serie numerorum adsit hic numerus 547. & video nec hic quidem reperiri: sed proxime minorem 494. ergo quotienti 40. appono 2. lateralem, & deduco à prædicto 547. numerum 494. & residuum est 53. deinde vltimam figuram assumo, nempe o. à diuidendo, & appono ad 53. & faciunt 530. Reperioq; numerum proximè minorem esse 494. quem deduco à 530. & apud quotientem, item 2. lateralem appono & facta subtractione residuum est 36. quam more residuorum apud quotientem adscribo. Eritque quotiens 4022 $\frac{36}{247}$

547 | 40
547 | 402
494
53
494
530 | 4022
494
36

Sed licet tutissima sit hæc regula; Attamen prolixa est. Quare poterit deseruire in aliquo magno numero diuidendo per alium aliquem magnum numerum; cùm enim ibi error fit maximi dispendij temporis, & laboris; opportuniùs erit hoc modo operationem contutari; Et nota ex præced Prop. 20. multiplicationem numeri diuisoris non esse continuandam vltra 9. quia magis, quàm nouem vicibus non potest contineri figura diuidens in diuidenda.

Tertius modus apud Italos vsitatus est talis; Sit diuidendus numerus 4680. per numerum 37. Posito numero diuisore seorsum, trahatur infra ipsum lineola. Deinde video, vt supra feci, quot vicibus 3. capiat in 4. nimirum quòd vnica vice; ideo pono 1. pro quotiēte super lineolā, & per illum 1. multiplico diuisorem, & numerum genitum sub duabus vltimis figuris diuidendi subscribo.

Et ex inde subduco, & residuum noto sub lineola. Multiplicatis ergo 37. per 1. generat 37. quos deduco à 46. & reliquunt 9. Assumo deinde aliam figuram, nempe 8. à diuidendo, & pono apud 9. Et video, quot vicibus capiat 37. in 98. Cognoscoque capere bis; quia licet 3. capiat ter in 9. non tamen capit 7. in 8. ter: quare dico bis, & sic 7. capit in 8. cum residuo ex 9. etiam bis, & licet capiat magis; nil interest. Ergo apud quotientem 1. appono 2. & multiplico per diuisorem 37. & faciunt 74. quos deduco à 98. & residuum est 24. Assumo rursus vltimam figuram o. & appono apud 24. faciuntq; 240. Video igitur, quot vicibus capiat 3. in 24 & cognosco, quod octies: Verùm 7. in o. nullo modo capit. Assumo itaque minus, & dico 3. in 24. capere septies, remanentq; 30. in quibus 7. septies non capit. Assumo itaq; rursus minus, & dico capere 3. in 24. sexties, & residuum est 60. in quibus sexties vtique 7. capit; quia 7. multiplicatus per 6. facit solum 42. Ideo

4680 | 1
37 | 37
98

4680 | 12
37 | 37
98
74
240

apud

apud quotientem 12 adscribo numerum 6. significantem sex vicibus numerum diuisorem in diuidendo contineri: multiplicoque per 6. diuisorem 37. & genitus est 222. quos deduco à 240. & residuum est 18. quem numerum more residuorũ apud quotientem scribo. Estque quotiens $126.\frac{1}{3}\frac{8}{7}$

	126
4680	
37	37
98	
74	
240	
222	
18	

EXPENSIO VI.

De Probationibus.

QVoniam in calculandis numeris non rarò eueniunt errores; nunc modus tradendus est, quo in vnaquaque regulâ operationes factæ examinentur.

THEOR. I. PROPOS. XXIV.

Ablato 9. ex qualibet proportione integra remanet numerus simplex denominans eam proportionem.

DEtur numerus 70. à quo auferatur 9. quoties auferri potest. Dico quod remanebit numerus denominans eam proportionem, & quia denominabatur à 7. Ideo remanet numerus 7.

Probatur. Nam V. g. 70. significat septem decimas; si autem ex decima qualibet dematur 9. in qualibet decima supererit 1. cùmque sint 7. decimæ, erunt residuæ septem vnitates, quę constituunt numerum 7.

COROLLARIVM.

HInc est, quod siue numeri assumantur, vt significantes decimas, siue decimas decimarum, &c. semper æquali modo idem remansurum simplicem proportionis denominatorem; ac si, vt numeri simplices accepti fuissent. Nam ex qualibet ablatione cuiuscumque proportionis semper remanet vnitas; vt si ex 102. auferatur 9. tot vicibus, quot potest auferri, remanet numerus 12. à quo deductus 9. relinquitur numerus 3. ille ipse; qui restaret, si numerus 1. & 2. tanquam simplices vnitates in numero 102. acceptæ fuissent. Item à numero 730. aufero 9. quoties fieri potest, idest vicibus 80. residuum erit 10. à quo si aufero 9. remanet 1. idem numerus, qui remanet à 7. & 3. vt simplicibus acceptis.

THEOR. II. PROPOS. XXV.

Si numerus decimarum multiplicetur per numerum quemcumque, & à multiplicato auferatur 9. quoties fieri potest, relinquetur numerus, ac si simplices numeri fuerint inuicem multiplicati.

SI numerus 80. multiplicatus per 3. & generet 240. Dico, quòd si à 240. auferatur 9. quantùm fieri potest, relinquetur numerus talis; ac si 8. simpliciter per 9. fuerit multiplicatus.

Probatur. Nam relinquitur numerus denominans eam proportionem, & anteced. ideoq; à 100. auferatur 9. quantũ fieri potest remanet 1. & à 200. restat 2. & à 40. remanet 4. Quare ablato 9. à 240. quantũ fieri poterit remanet 24. nempe numerus ille, qui factus, & genitus fuisset; si 8. fuisset multiplicatus per 3. Sed sit numerus multiplicans, & multiplicatus decimarum V.g. 80. & 30. adhuc idem succedet. Nam producet 2400. à quo ablatus 9. relinquit numerum 24. quem produxissent, si fuissent simplices.

COROLLARIVM

HInc est: Quod, si à numero aliquo genito à simplicibus auferatur 9. quantùm fieri potest; quod relinquetur idem residuũ; ac si fuisset numerus genitus à numeris decimarum; si à 24. relinquitur 6. & à 2400. relinquitur adhuc 6.

Quòd, si sit coniunctus cum aliquo simplici, idem eueniet; si ab eis priùs auferatur 9. quantũ fieri potest; nimirũ à 75. octies remanent 3. & ab 86. nouies, remanent 5. qui simplices numeri inuicem multiplicati generabunt talem numerum, à quo ablatus 9. quantùm fieri potest, idem residuum relinquet; ac si in sua specie, & ab illorum genito ablatus 9. fuisset. quantùm fieri potuisset. Sic 3. & 5. inuicem multiplicati faciunt 15. & ablato 9. relinquũt 6. quod residuum à genito 6450. ex numeris 75. & 86. restat. Ratio est; quia assumptus 7. & 5. vel 8. & 6. vt simplices, idem relinquunt, ac assumpti; vt decimas significantes, sic 7. & 5. faciunt 12. & ablato semel 9. remanet 3. quòd remanet ablato 9. octies à 75. & ab 8. & 6. vt simplices; nempe à 14. idem residuum remanet ablato semel 9. ac remanet ab 89. nouies ablato 9.

Quare ex præced. multiplicatis inuicem istis residuis 3. & 5. si à genito dematur 9. idem residuum dabit, ac si à genito ab eorum primitiuorũ 75. & 86. mutua multiplicatione 9. quoties fieri potest auferatur. Oportet verò ab illis priùs auferre 9. quantùm fieri potest, alioquin, si semel posset auferri, non essent simplices; sed decimas significantes.

THEOR. II. PROPOS. XXVI.

Si à numero collecto in vnam summam auferatur aliquis numerus, & à colligendo idem numerus auferatur debent residua, tum collecti, tum colligendi remanere æqualia.

	A
Probatur. Nam sit summa B 169. &	42
numerus colligendus sit priùs 42. & 37.	37
& 81. & 9. qui sunt notati litera A, & au-	81
feratur idem numerus ab vtrisque, V. g.	9
81. *Dico quod residua erunt æqualia.*	
Probatur. Nam si ab æqualibus æqua-	169 B

lia demas; quæ remanent sunt æqualia, sed numerus colligendus A, & collectus B sunt æquales: Ergo ablato eodem numero 81. ab vtrisque erunt adhuc residua æqualia.

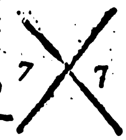
PROB.

PROB. I. PROPOS. XXVII.

Collectionem; an sit benè facta, examinare.

AVferatur à numero collecto, & colligendo 9. quantum fieri potest, numeris, vt simplicibus ad secandam facilitatem assumptis, ex coroll. propos. 24. Nam, si idem numerus remanet, facta, tum à collecto, tum à colligendo, ablatione, bona erit collectio.

	A
39	
51	
15	
19	
124	B



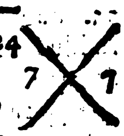
Sit numerus colligendus A, & à primo 39. auferatur 9. quoties potest, remanent 3. qui cum 5. faciant 8. & cum 1. faciunt 9. qui abijciatur; & deinde assumatur 1. cum 5. faciunt 6. & cum 1. faciunt 7. & cum 9. eueniunt 16. à quibus abijcio 9. residuum est 7. quem scribo seorsum.

Deinde ad summam B accedo nimirum 124. & addo 1. ad 2 faciunt 3. & 3. ad 4. & faciunt 7. æqualis nimirum numerus alteri 7. iam scripto. Vnde benè erit facta diuisio.

Dices aufertur maior numerus à numero colligendo ab A, quàm à collecto B: nam ex numero A multoties aufertur 9. at à collecto nulla vice: quare non possunt residua remanere æqualia ex propos. 26.

Respondetur posse occurrere quandoque errorem illo solo casu, si error in colligendo commissus sit intermisso, aut superaddito 9. vt patet in numero C, & eius summa C, quę falsa est; eò quia 9. sit intermissus, & tamen idem numerus 7. remanet.

49	C
51	
15	
19	
9	
C 124	



Cęterum, cum hic error raró occurrat, hinc est; quòd regula sit bona; quia licet 9. auferatur pluribus vicibus à numero colligendo A, quàm à collecto B, nihil tamen interest; cùm idem sit auferre 9. à numero A, & non auferri à numero B, vt simplex, dum tamen auferri possit in sua proportione acceptus, vt Corol. prop. 24. Et patet. Nam idem numerus remanet, si auferatur 9. ab 80. octies, ab 8. sumpto, vt 8. nulla vice. Semper enim remanet 8. propter proprietatem numeri 9. quæ ostensa est Propos. 24.

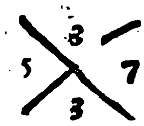
PROB. II. PROPOS. XXVIII.

Subtractionem examinare; vtrum bene fuerit confecta.

AVferatur 9. Quantum fieri potest à subtracto, & residuo, & id quod remanet notetur, & similiter à numero, à quo deducitur, subducatur 9. quantum fieri potest. Nam, si residua sint æqualia, bona erit subtractio. Sit numerus A, à quo facienda est subtractio, numerus subductus B residuum verò sit C.

3675	A
439	B
3236	C

Accipio residuum C; & aufero 9. quoties fieri potest, dicendo 3. & 2. faciunt 5. & 3. faciunt 8. & 6. faciunt 14. à quibus ablato 9. remanet 5. & scribo seorsum ad latus crucis. Deinde assumo numerum B subductum, nempe 4. cum 3. faciunt 7. & 9. abijcio scribo 7. ad alterũ latus crucis. Addo hoc 7. cum numero priori seorsim scripto 5. & faciunt 12. à quibus deductus 9 restant 3. & scribo super crucem. Deinde accedo ad numerum A, & 3. addo numero 6 & faciunt 9. quem abijcio, & 5 & 7 faciunt 12. à quo abijcio, 9. & remanent 3. vt priùs. Ideoque subtractio optima est.



Ratio est. Quia numerus subtractus cum residuo æquatur numero, à quo fit subtractio. Vnde 9. ab vtrisque æqualiter deductus debet relinquere idem residuum.

PROB. III. PROPOS. XXIX.

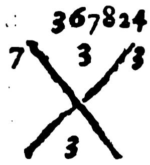
Multiplicationem explorare: an bene sibi constet.

AVferatur 9. tum à numero multiplicante, tum à numero multiplicato, quoties fieri potest, & à residuis quoq; inuicem multiplicatis 9. auferatur quoties fieri potest, & residuum notetur. Iterumque à numero genito auferatur 9. quantùm fieri potest. Si residuum sit ęquale residuo præcedenti iam notato, multiplicatio benè se habebit, & absoluta consistet: Pro exemplo sit numerus 3792. multiplicandus per 97. Aufero 9. assumendo priùs 3. & deinde 7. & faciunt 10. abiecto 9. remanet 1. abijcioque sequentem 9. & 1. cum 2. faciunt 3. quem scribo.

Abijcioque à multiplicatore 97. semel 9. & residuum est 7. multiplico quoque 7 per 3. & faciunt 21. abiectis 9. relinquitur rursus 3. quos scribo, vt vides 7. ad partem crucis, 3. ad alteram partem, & vltimum 3. super crucem.

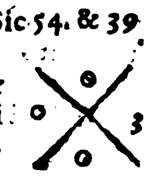
3792
97
26544
34128
367824

Deinde accedo ad numerum genitum; & dico 3. & 6. faciunt 9. quem abijcio; hinc 7. & 8. faciunt 15. & abiecto 9. sunt 6. & cum 2. sunt 8. & cum 4. faciunt 12. à quo abiecto 9. remanet 3. numerum infra crucem collocãdum quia ergo 3. infra crucẽ cũ 3. supra crucem æquales numeri sunt ideo multiplicatio bene se habet.



Probatur: Nam si assumpsimus numerum multiplicatum, & multiplicantem, vt numeri simplices: Numeri verò simplices inuicem multiplicati producunt ex coroll. propos. 25. numerum, à quo ablatus 9. quoties potest demi relinquit numerum æqualem residuo; quod à genito restat, si ab eo similiter 9. auferatur.

Quòd, si occurreret ipsum 9 relinqui; abijciatur tamen, & ad latera crucis, & super crucem o. ponatur. Nam, & o. infra crucem collocabitur genito, ablato 9. nihil relinquente. Sic 54. & 39 inuicem multiplicatis faciunt 2106. Ablato itaque à 54. 9. remanet o. & ablatò à 39. idem 9. remanet 3. qui multiplicatus cum o. producit o. zifrã supra crucem ponendam. Quare, & genitus 2106. ablato 9. relinquit o.



PROBL. IV. PROP. XXX.

Diuisionem examinare.

EOdẽ modo fit, ac in multiplicatione, & eadẽ ratio valet. Sit V. g. 7945. diuisus per 35. & quotiens sit 227. Auferatur à 35. numerus 9. quo-

quoties fieri potest, & sunt 8. & à 227. remanent 2. multiplicentur inuicem fiunt 16. à quibus ablatus 9. relinquit 7. Deinde à numero diuidendo 7945. auferatur 9. vt supra dictum est, & relinquet 7. Quare bene stabit diuisio. At si adsint minutiæ V. g. si diuidendus numerus esset 7950. & diuisor 35. & quotiens 227 $\frac{5}{35}$; tunc numerator 5. cum quotiente sumendus, & ab eo 9. quoties fieri potest demendus, & relinquetur 7. qui multiplicatus dum 8. residuo diuidentis, dat 56. à quo subductus 9. quantùm fieri potest, relinquit 2. & à numero diuidendo 7950. reiectis 9. prout fieri potest, relinquitur 2. Vnde facta diuisio benè se geret.

	7	
8	×	2
	7	

	2	
8	×	7
	2	

PROB. V. PROPOS. XXXI.

Cuiuscumque regulæ operationem per aliam examinare.

SVmma numerorum subtractione collectorum probatur. Sic summa 117. examinatur subtrahendo 39. & 42. & 117. Nam si remanet 36. erit bene facta collectio. Et è contra subtractio numerorum collectione examinatur; sic, si residuum 17. à subtractione numeri 32. à 24. remanens colligatur cum numero 32. qui à maiori subducitur, & efficiat 49. vt prius, subtractio recta erit.

36
42
39
117

49
32
17

Ratio patet. Quia si auferatur id, quod additum est, quod est subducere relinquitur necessariò id, quod erat, & si addatur id, quod ablatum est, idem, quod erat, integratur. Quare si benè erit facta collectio, subtractione idem restituetur, quod priùs; & si bona est subductio, additione, quod priùs erat, integrabitur.

Multiplicationem numerorum ex diuisione experimur. Nam si multiplicationis summa per numerum, vel multiplicatum, vel multiplicantem diuidatur, necesse est alterum ex ipsis prouenire, quòd; si non proueniat, signum est collectionem, vel multiplicationem non fuisse exactam.

Partitio quoque examinatur multiplicatione: Nam si numerus quotiens cum numero diuidente multiplicetur, additis, si fortè fuerint, reliquijs, debet summa multiplicationis æquare numerum diuisum; quòd si non æquet, signum est diuisionem non esse perfectam, sed in aliquo deficere.

Ratio est, quia diuidere est numerum in tot partes secare, quot sunt in diuidente vnitates, & multiplicare est numerum integrare ex alio numero, tanquam pars assumpto toties, quot sunt in multiplicante vnitates, ex def. 15. & 16. Vnde dato multiplicante, qui quotiens erat, & multiplicato, qui erat diuidens, necesse est, vt idem numerus rursus integretur. Sicut dato eodem genito, & integrato, & eodem diuidente necesse est, vt idem quotiens numerus restituatur, qui multiplicatus fuerat.

TRACTATVS IX.

IN V. LIBRVM EVCLIDIS PARS PRIMA.

De Proportionum Notione.

CVM definitiones, quas ad initium Quinti libri tradit Euclides multa luce indigeant, vt percipiantur, visum est earum explicationem profusiùs prosequi, & ne dum eas, vt Mathematicorum mos est, tanquam nomina explanare; sed proportionum, quam explicant, essentiam probare, diuisiones, modumq; eas cognoscendi, & in eis argumentandi exponere: vt hac cognitione præuia, quæ deinde 5. libro ostenduntur genericę proportionum habitudines faciliori captu comprehendantur.

EXPENSIO I

Quid sit Ratio.

RAtio est quædam quantitatiua relatio. Relatio secundùm nostra principia philosophica expens. 4. de relatioe concl. 5. & expens. 7. concl. 3. est quædam dependentia obiectorum in eis cognoscendis, quæ fundatur in aliqua positiua, seu dependentia, seu saltem applicatione vnius rei ad aliam. Ideoque Ratio erit quædam relatio quantitatis ortà ex applicatione reali, aut possibili ad minùs quantitatis ad aliam quantitatem; vt inuicem commensurentur, vel saltem inuicem se contineant, aut se superent, & hæc possibilis quantitatum commensuratio, vel actualis est illa, ob quam intellectus considerat alteram quantitatem dependenter ab altera, & inter eas respectum, & relationem recognoscit. Cum ergo Ratio in relatione partis, & totius consistat, & commensurationis, operæ prætium est priùs partis, & totius definitionem declarare.

DEFINITIO I.

P*Ars est magnitudo minor alia magnitudine, quæ multiplicata eam adeo mensurat, vt nihil mensuratæ maioris magnitudinis supersit.*

Duplex ex pars alia *Aliquota*, alia *Aliquanta*. Aliquota hic definitur, quæ talis est, vt tot vicibus capiat in maiori, sint illæ vices, quot, quot sint, vt nihil supersit tale, quod illi adamussim nõ commensuretur: Sed totum multiplicatis illis vicibus penitùs correspondeat. Sic vncia, seu digitus metitur lineam 4. digitorum quater acceptus, & lineã sexdecem digitorum sex decies acceptus: sed si aliquid supersit in toto, quod mensuranti quantitati non adæquetur, sed eius alicui parti, tunc dicitur pars aliquanta, de qua definitio non est: Sic digitus, lineæ 4. digitorum, & $\frac{1}{4}$ dicetur pars aliquanta; quia id quod superest quatuor digitorum, & vnica quarta pars ipsius digiti mensurantis.

DEFINITIO II.

M*Vltiplex est autem maior minoris, cùm minor metitur maiorem.*

Esse partis est relatio minoris quantitatis ad maiorem; Multiplicitas verò est relatio *maioris* quantitatis ad minorem; Intelligitur verò multiplicitas nõn respectu partis aliquantæ, sed aliquotæ ita, vt vices quibus mensura adhibetur æquent pluries replicatæ tandem maiorem, & sibi multiplicem.

DEFINITIO III.

Æ*Quèmultiplices illæ magnitudines dicuntur cum æqualibus numero vicibus à minori quãtitate mensurantur.*

Duæ lineæ quatuor palmorum dicuntur æque multiplices vnius palmi; quia palmus quatuor vicibus adhibitus successiuè, & hanc, & alias mensurat.

DEFINITIO III.

R*Atio est duarum magnitudinum eiusdem generis secundùm quantitatem habitudo.*

Quùm duæ quantitates; sint illæ, seu lineæ, seu superficies, seu solida inuicem comparantur, & sunt eiusdem generis secundùm quòd vna maior est, quã alia, seu minor, seu æqualis; tunc illæ magnitudines inter se Rationem consequi dicuntur, & hæc collatio, seu comparatio dicitur Ratio, ab aliquibus etiam Proportio; Quare patet; cur debeant esse eiusdem generis: quia scilicet, vt inquit Arist. 10. Methaph. tex. 4. *mensura eiusdem generis est, magnitudinum* namque *magnitudo, & secundum vnumquodque longitudinis longitudo, latitudinis latitudo, vocum vox, grauitatis grauitas; &c.*

&c. Cum ergo magnitudines inuicem referātur prout vna excedit, vel æquat, vel ab alia deficit, hinc est, quod debeant eiusdem generis esse: alioquin inter ea, quæ diuersi generis sunt, nec maius quid, nec minus, nec æquale est; sique dem numerus non potest dici æqualis alicui superficiei, aut maior, aut minor: cùm in eodem genere non reperiatur, & ratio fundamentalis est, quia inter ea, quæ diuersi generis sunt non potest fieri realis applicatio; vnde habitudo, quæ in reali, seu possibili applicatione fundatur, inter ea reperiri nō potest. Maximè quòd mēsura debet nos inducere in cognitionem rei mensuratæ; at quomodo id eueniet, si quod mensuratur alterius generis est; nec suæ mensuræ conforme reperitur.

Dicitur quoque secundum quantitatem: quia comparatio penes qualitatem Ratio non vocatur; nec lineæ referri Ratione, quòd ambæ, V. g. sint albæ, aut nigræ. Sic dicitur *habitudo* in genere, nec explicatur, in quo consistat ista relatio; an in ratione mensurantis, & mensurati: quia licet hanc proportionem dicant inuicem aliquæ quantitates, quæ dicuntur rationales: non tamen omnes id habitudinis assequuntur, cùm quædam dictæ irrationales nullam commensurationem adipiscantur, sed earum proportio in eo consistat: quòd ampliùs non sint respectu alterius, quam quod sunt, & nihil vltra quantitatis obtineant ad alteram collatæ; quàm quòd consequuntur.

Verum fundamentum huius relationis dicitur à Mathematicis antecedens terminus verò consequens. Sic linea 3. palmorum collata ad lineam 6. palmorum dicetur antecedens; & linea 6. palmorum subsequens, & è contrariò quoque linea 6. palmorum relata ad lineā trium palmorum dicetur antecedens, sicut illa trium palmorum consequens.

DEFINITIO IV.

Proportio est rationum similitudo.

Proportio dicitur etiam analogya; ab Euclide autem vocantur quoque proportio, & est in ratione continentis, vel contenti, vel maioris, & minoris, aut æqualis similitudo. Ita quod fundamenta huius relationis non sint quantitates ipsæ: sed quantitatum habitudines.

Cum ergo reperiuntur duæ magnitudines, vt 2. ad 6. quæ se respiciant in ratione maioris, & minoris, vel æqualis, vt aliæ, V. g. vt 4. ad 12. tunc duæ illæ 2. & 6. dicentur consequi eandem analogyam, & proportionem, quam 4. & 12. Dixi autem in ratione maioris, & minoris, vel æqualis, non in ratione mensurantis, & mensurati: quia sunt aliquæ quantitates, vt innui supra, & sequenti expens. pleniùs dicam, quæ irrationales nulla cōmensuratione inuicem referantur: Quare similitudo earum ita erit, vt V. g. quantitas A collata ad quantitatem B sit tanta, & non amplius, vt quantitas C respectu quantitatis D, ita quòd licet vices, quibus A mensurat B, aut vices, quibus C, mensurat D, non possint exprimi, adhuc tamen similes sint: sed ad pleniorem huius rei declarationem videamus. Vnde dignoscatur in quantitatibus Analogya.

EXPENSIO II.

In quantitatibus quænam sint proportionis notiones.

Sciendum est quantitates respectu alterius, alias irrationales esse, alias rationales. Rationales quantitates sunt duę, vel plures, in quarum vna reperitur aliqua pars æqualis alteri parti alterius, quę mensuret ambas seu per æqualem replicationē illius partis mensurantis, seu per inæqualē. V. g. rationales dicentur lineæ duæ, quarū vna sit 7. palmorū altera 20. palmorū: quia palmus in vtrisq; est pars ęqualis, per quam ita metiri potest linea 7. palmorū, vt nihil remaneat ex ea, cum tota longitudo 7. palmis æqualis sit, sicut, & linea 20. palmorum vigesies multiplicatos palmos cōplectitur, vt nihil remaneat. Irrationales verò sunt tales quædam, lineæ, vel quantitates, in quibus pars nulla reperitur, quæ sit æqualis parti alterius quantitatis; per quam ita metiatur, tum vna, tum alia; vt nihil remaneat. V. g. diameter quadrati, & latus sunt lineæ incommensurabiles; Quia nec palmus, nec semipalmus, nec quarta pars palmi, nec aliqua alia mensura; quæ ex æquo mensuret vnam V. g. latus, vt nihil ex eo superfit, mensurabit, & alteram: quia semper, aut aliquid superabit, aut aliquid deficiet, &. (quia faciliora sunt antè proponenda.) ponemus primò definitionem habitudinis rationalis vnius quantitatis ad aliam.

DEFINITIO V.

Rationem habere dicuntur rationales magnitudines, cùm vna alterius partes aliquotas continet.

Partes aliquotas appellamus eas, quæ multiplicatæ totam quantitatem æquant, vt diximus.

Cùm ergo aliqua quantitas continet partes alterius, illa respectu alterius dicitur habere rationem, & habitudinem. Diximus verò partes, non assignando quot sit; quia siue partes, quas continet, prima quantitas A, mensurent quantitatem alteram B per eundem numerum, seu eam superent; seu minus sint, nihil interest; & ita linea 7. palmorum habet Rationem lineæ 6. palmorum, & lineæ 7. palmorum, & lineæ 20. palmorum, seu 30. licet tamen non eiusdem speciei.

DEFINITIO VI.

Irrationales quantitates inuicem habitudine referuntur, & relatione, cùm multiplicatæ se inuicem continere possunt.

Ratio huius definitionis est, quia per continentiā partium nequaquam poterat definiri; cùm nulla pars in vna sicut nec in altera detur; quę pro communi mensura deseruire possit. Vnde præcedens definitio non poterat deseruire: licet enim, & hæc definitio rationalibus quantitatibus quoque conueniat; non tamen illas per hanc definitionem, quæ parum obscurior est, definire cōueniens visum est ob facilitatem sectandam; licet Euclides id fecerit.

Quod autem quantitates, quorum vna multiplicata superare potest aliam V. g. duo latera diametrum vnum, sicut diametri duo latera duo, & sic continuè, habitudinem dicant, patet. Nam secundum magis, & minus se inuicem excedunt,

& ideo habitudinem talem habent; vt saltem quoad multiplicationẽ comparabiles sint: Nam multiplicatæ saltem poterunt esse fundamentum proportionis, & ita speculationi Mathematicæ subijci. V. g. circumferentia ad diametrum proportionem habet, sed irrationalem; ideoque potest esse fundamentum proportionis. Nam poterit dari aliqua alia linea recta irrationalis ad quam se habeat diameter, vt ad circumferentiam. Si verò multiplicata non superet aliqua quantitas, aut non superetur, habitudo inter illas non est. Sic infinita quantitas non habet relationem aliquam quantitatiuam ad alteram quantitatem infinitam; quia infinitum, quantumuis multiplicatum, infinitum non superat. Quòd autem hic mutuus excessus proportionalium quantitatum sit fundamentum similitudinis alicuius patet. Quia quantitates duæ A, V. g. ad B in omni multiplicatione quantitatis A, quæ adhibeatur possunt inuicem se habere, ac duæ aliæ C, & D, si & ipsæ tot vicibus multiplicentur nimirum fundamenta, vel termini æquo numero vicium multiplicata assumantur: nam potest esse, quòd si fundamentũ A multiplicatũ 20. vicibus minus inueniatur quam B terminus suus; quòd sic quoque fundamentũ C 20. vicibus multiplicatum minus inueniatur, quàm suus terminus D: Vel si multiplicetur fundamentum A 21. vicibus, & maius inueniatur quã suus terminus B: Quod sic quoque fundamentum C 21. vicibus assumptum suo termino D maius inueniatur.

At si è contra termini multiplicentur duabus vicibus, & fiat maior B fundamento A, & deinde terminus alter D multiplicetur duabus vicibus, quòd similiter euadat maior quam C, & sic semper in omni multiplicatione æquis vicibus adhibita; aut fundamenti, aut termini succedat. Omnino in hoc A, & B quantitates se respicient similiter, ac C, & D, & fundamentũ primum habitudinis ad suum terminum habebit similitudinis relationem eandem, quam fundamentum secundum ad suum terminum; quia simili

A B
C D

modo in omni multiplicatione, quæ possit fieri fundamentum primum excedit suum terminum, sicut aliud secundum fundamentum excedit quoque suum: Vel si æquatur primum, æquatur quoque secundum, vel si primum fundamentum termino suo sit minus, hoc quoque secundum fundamentum relationis suo termino est minus. Ecce ergo in istis fundamentis, quæ multiplicata superant suos terminos, vel superantur ab ipsis, aliqua in hac mutuâ termini, fundamentiq; superatione, similitudo: cùm, & aliud fundamentum æquali multiplicatione multiplicatum superet quoque suum terminum.

At si daretur aliqua quantitas, V. g. angulus contactus tanquam fundamentum, qui ad suum terminum angulum rectilineũ comparatus semper minor inueniretur, hæc habitudo alteri habitudini, V. g. alterius anguli contactus cum altero angulo rectilineo comparari nequit. Nam angulus primus contactus nunquam potest, aut æquare, aut superare suum terminum rectilineum, sicuti nec alter angulus contactus potest vnquam superare suum; & ideo nullam aliam habent fundamenta, cum suis terminis similitudinem, nisi quòd minus sunt; at si sint minus eodem modo, & simili ratione, seu habitudine dissimili dignosci nequit: cùm nec sint quoad suas partes comparabiles, eò quòd sint irrationales; neque earum similitudo proportionum quò ad omnem, multiplicationem, & genericam similitudinem probari possit.

Patet itaque, cur habitudo duarum proportionum irrationalium definiatur per earum mutuã superationem; si multiplicentur: Quia hoc tantùm præbet fundamentum similitudinis ipsarum proportionum. Et hæc similitudo proportionum est illa, quæ speculationi, & argumentationi Mathematicæ deseruit.

EXPENSIO III.

Quænam quantitates proportionem consequantur.

OPeræ pretium est cognoscere, quænam sint illæ quantitates, quæ proportione, & ideo analogya gaudeant; ne aliquando sumamus eas quantitates, quæ nulla proportione assimilari possunt, tanquam in ea similes; & sic ab euidentia in manifestos errores incidamus.

CONCLVSIO I. PROPOS. I.

Infiniti ad infinitum nulla est proportio.

PRobatur, quoniam infinitum multiplicatum non potest superare aliud infinitum; neque illud continere. Siquidem infinitum, vt voluere antiquiores est illud, quod in se continet, quid quid est conceptibile illius; si vero multiplicaretur, iam esset aliud infinitum, cum quo multiplicitatem constitueret.

Deinde iuxta Arist. est illud infinitum, in quo est semper aliquod vltra accipere; si autem infinitum non adæquaret infinitum multiplicatum, in eo iam non esset vltra quid acciperetur; siquidẽ acceptũ esset quid quid eius esset dum aliũ adæquare nequit, ergo infinitum non potest habere aliud infinitum maius se, & ideo multiplicatum ierit.

CONCLVSIO II. PROPOS. II.

Finitum nullam dicit rationem cum infinito.

PRobatur, quia finitum, si maneat finitum nũquam aut æquabit, aut superabit infinitum; sed illæ quantitates inuicem dicunt proportionẽ; quæ se mutuo possunt superare, ergo finitum infinito nulla proportione conformatur.

CONCLVSIO III. PROPOS. III.

Puncta, quæ sunt in aliqua quantitate nullam dicunt proportionem Mathematicam, & cognoscibilem, cum punctis, quæ sunt in alia.

PRob. Ea enim, vel finita sunt, vel infinita. Si infinita ex præcedenti nullam dicunt inuicem rationem, si finita; vel sunt indistinguibilia, & indetermina, vel non. Si indetermina iam tam nequeunt se inuicem superare: Nam quòd indeterminatum est multiplicari nequit, cùm eius neque hæc, neque illa pars adsit, nec si multiplicetur, quantitas illius multiplicationis agnoscitur.

Si determinata sunt, vel sunt æqualia quantitate, & hoc est falsum: Nam omnes lineæ essent cõmensurabiles, vel quantitate inæqualia: At earum quantitas non agnoscitur, nec determinata est. Nam quantitas puncti saltem sub indiuisibilitate sensibili latet: Ergo multiplicata, incertum erit, an se superent, aut æquent, siue non.

2. Probatur. Nam demostrationi Mathematicę deseruire non possunt; cùm ad hoc lis inter Phylosophos pendeat; an sint puncta, vel partes; an sint finita, vel infinita; an distincta, seu indistincta; an æqualia, seu inæqualia. Quare nec vlla proportio, si qua esset, certa reperiretur, & indubitabilis, quæ fundamentum demostrationi Geometricæ firmum præberet.

CONCLVSIO IV. PROP. IV.

Inter puncta, & lineas. Inter lineas, & superficies. Inter superficies, & corpora nulla proportio intercedit.

PRobatur. Nam nec punctum quantumuis multiplicatum lineam adæquare potest, nec linea superficiem, nec superficies corpus, cùm vel infinitæ sint, vel indeterminatæ, nulloque certo numero comprehendantur: Quare ęquè multiplicari non possunt, cum earum numerus non agnoscatur.

COROLLARIVM

HInc habes, quòd ea Geometria; quæ in indiuisibilium proportionibus fundatur omnino suspecta sit; licet enim conclusiones, quas deducit verè reperiantur; non inde tamen hinc illa certitudinem acquirit, vel in principijs, vel in illationibus; cum à præmissis falsis verùm sequi possit, vt Logici fatentur, vt patet ex hac omnis homo est bellua, omnis bellua est viuens, ergo omnis homo est viuens.

EXPENSIO IV.

De diuisione Rationum.

RAtio apud Mathematicos vocatur etiam proportio: quia sumunt fundamentum proportionis pro ipsa proportione. Vnde diuisiones, quæ sequuntur Rationum, vocantur etiam proportionum.

CONCLVSIO I. PROPOS. V.

Proportio rationalis diuiditur in duas, inæqualitatis, & æqualitatis.

PRobatur: Quia aliqua quantitas ita continet aliam, vt ab ea contineatur, vt duæ lineę 7. palmorum se inuicem commensurant. Alia verò continet magis aliam, quàm quòd contineatur ab ea: vt linea 7. palmorum continet lineam 3. palmorum, & ampliùs: at linea trium palmorum non continet lineam septem palmorum: nisi secundũ quid, & quoad aliquos palmos.

CONCLVSIO II. PROP. VI.

Ratio inæqualitatis quæcumque etiam irrationalis; quæ semper inæqualitatis est, diuiditur in proportionem maioris inæqualitatis, & minoris inæqualitatis.

PRob. Nam quantitatũ inæqualium, vel maior confertur ad minorẽ, & hæc maioris inæqualitatis est, vel minor ad maiorem, & hæc est inæqualitatis minoris. Neque tibi videatur maior ad minorem eâdem relatione referri, quâ minor ad maiorem; est enim diuersa relatio, & proportio. Quoniam quantitas maior V.g. quinque palmorum linea ad minorem triũ palmorum habet maiorem proportionem, quàm minor ad se, cũ eã contineat semel, & insuper ipsius duas tertias partes: & minor ad maiorẽ collata minorem proportionem habet, cum minus ipsius contineat; siquidem nec totam quidem continet; sed tantum tres partes ex quinque, quibus constat.

Cum ergo maioris ad minorem maior proportio sit, quam minoris ad maiorem patet esse diuersas, & ideo distingui.

CONCLVSIO III. PROP. VII.

Ratio rationalis maioris inæqualitatis secatur in sex genera. Si proportionem Æqualitatis multiplicem, superparticularem, superpartientem *in* multiplicem superparticularem, *&* multiplicem superpartientem. *At minoris inæqualitatis in easdem species quoque se recipit verùm ad distinguendum, & indicandum; quòd sit minoris inæqualitatis additur particula* sub: *ita dicitur submultiplex, subparticularis, sub partiens, &c.*

PRobatur, & simul singulæ proportiones assignatæ explicantur.

Nam maior continet minorem, aut semel, aut pluries. Si maior continet minorem pluribus vicibus ex æquo, vt nihil supersit, ita vt minor maioris pars aliquota sit, vt palmus est pars decima lineæ, quæ sit decem palmorum; dicitur multiplex. Multiplicaturque secundùm vices, quas continet minorem V. g. dicitur dupla, tripla, quadrupla, quæ continet minorem bis, ter, quater. At si minor conferatur ad maiorem, dicitur subdupla, subtripla, subquatrupla; quòd minor contineatur, à maiore bis, ter, quater, &c. At si continet pluribus vicibus, & aliquid insuper remaneat; tunc, aut id, quod remanet, facit vnã partẽ aliquotã minoris, aut nõ, sed plures partes, si facit vnam partem aliquotam minoris; tunc dicitur multiplex super particularis; Sic 9. ad 4.

ad 4. habet proportionem multiplicem super particularem; quia bis 4. continet, & insuper quartam ipsius partem. ita 26. ad 6. habet rationem multiplicem super particularem; cùm quater sex contineat, & insuper 2. nimirum tertiam eius partem.

At si ne dum pluries contineat; sed insuper plures partes eius, quæ non conficiant vnam partem aliquotam. Tunc est multiplex super partiens V. g. 27. ad 5. comprehendit enim quinquies 5. & insuper duas eius partes, quæ aliquotam partem non conficiunt, cum non mensurent numerū 5. ex æquali; si autē conficerent vnam partem aliquotā, iam illa esset Ratio multiplex superparticularis propter vnicā partem aliquotam, quę superesset, vt est 26. ad 6. nam 2. qui supersunt tertiam partem numeri 6. conficiunt.

Facessunt autem hæ duæ Rationes in diuersas species, quæ denominantur iuxta partes, quas cōtinent E. g. si multiplex sup particularis talis sit, vt maior bis contineat minorē, & remaneat pars dimidia dicitur dupla sesquialtera, si bis, & tertiam partem minoris, dicitur dupla sesquitertia; si ter, & insuper quartam partem, dicitur tripla sesquiquarta, &c.

Cęterum si Ratio esset minoris inæqualitatis tunc adderetur particula *sub*; & diceretur subdupla sesquialtera subtripla sesquiquarta.

At si de multiplici superpartiente loquamur, hęc quoq; denominatur iuxta vices, quas maior cōtinet minorem, & iuxta id, quod insuper continet V. g. Si quinquies minorem contineat, & insuper 3. ex quatuor partibus, quibus minor constat, vt est 23. ad 4. dicitur Ratio quintupla super tripartiens quartas, sic si esset 22. ad 5. diceretur quadrupla superbipartiens quintas, &c. Et hoc quoad multiplicem proportionem maioris inæqualitatis. Verùm si sit minoris inæqualitatis idem dicendum prorsus; nisi quòd particula *sub* est addenda pro *super* V. g. quadrupla subbipartiens quintas, Tripla sub tripartiens octauas, &c.

At si maior contineat minorem semel tantùm; tunc est ęqualitatis. Verùm si contineat semel, & insuper vnam eius partem aliquotam; tunc dicitur superparticularis, V. g. 8. ad 9. habet Rationem superparticularem; quia 9. continet 8. semel, & insuper octauam eius partem; sic 10. ad 8. Rationem superparticularem tenet; quia 10. semel continet numerum 8. & insuper eius quartam partem, quæ est 2.

Quæ in species multas secatur iuxta diuersas partes, quas insuper maior continet minoris quātitatis: Nam si minorem quantitatē contineat semel, & eius dimidiam dicitur superparticularis sesquialtera, si tertiam partem, dicitur sesquitertia, &c.

At si semel contineat, & insuper aliquas partes amplectatur vnam aliquotam non integrantes, vt 9. continet 7. semel, & insuper duas partes, quæ 7. non diuidunt ex æquo, nec sunt eius partes aliquotę; tunc est Ratio superparticularis partiēs.

Quæ, & habet diuersas species iuxta partes, quas continet maior minoris vltra continentiam totalem ipsius maioris; Sic si contineat maior minorem semel, & 3. partes, ex 10. vt se habet 13. ad 10. dicitur Ratio superparticularis tripartiens decimas, & ita de alijs. Et hę sunt Rationes maioris inęqualitatis: at minoris inęqualitatis sūt ipsæ eędem, nisi quòd pro particula *super* additur particula *sub*. Sic Ratio 2. ad 3. erit subparticularis sesquialtera, sic 8. ad 10. erit proportio subparticularis sesquiquarta. Sic 5. ad 7. erit Ratio subparticularis bipartiens quintas, &c.

PROB. I. PROPOS. VIII.

Datis duobus numeris reperire, quam Rationem ex assignatis dicant.

Dentur primo 5. & 20. de quibus volumus agnoscere, in quā Ratione inuicem sint; diuidatur maior per minorem, & quotiens erit 4. quia ergo est numerus plurium vnitatum, & nihil remanet. Dico quod est Ratio multiplex, & dicitur quadrupla, quia 5. numeri 20. est quarta pars aliquota: Igitur 5. ad 20. erit Ratio multiplex subquadrupla, & 20. ad 5. erit Ratio multiplex quadrupla.

Detur secundo 15. & 35. Diuido rursus maiorem per minorem, & quotiens est 2. remanentq; 5. diuido rursus per hoc residuum numerum minorem, & quotiens est 3. Quia itaque primus numerus quotiens est 2. dico esse rationem multiplicem duplam; quia verò secundus est 3. pars aliquota numeri 15. dico esse duplam sesquitertiam.

Verum si aliquid adhuc remaneret V. g. si esset datus numerus 16. & 35. tunc primus quotiens esset 2. & ideo Ratio esset dupla, & residuum essent 3. per quod diuisus numerus minor 16. aliquid remanet nempe 1. ideo dicitur Ratio tertij generis multiplex, & superpartiens, nec secundus quotiens quæritur, cùm residuum numeri minoris pars aliquota non sit, sed vterque numerus minor, & residuum exprimitur, & dicitur *dupla tripartiens* ob 3. residuum, *decimas sextas* ob 16. numerum minorem. Vnde 35. ad 16. habet proportionem multiplicem duplam tripartientē decimas sextas, idest complectentem *bis minorem*, & insuper tres partes ex 16. quas numerus minor continet.

Eodem modo agendum est; si est Ratio superparticularis, vel superparticularis partiens. Sic si quæratur, quę sit Ratio 10. ad 8. diuidendus est numerus maior 10. per 8. & quotiens est 1. remanentq; 2. quo diuisus 8. dat per quotientem 4. dico itaque proportionem 10. ad 8. esse superparticularem sesquiquartam; at si numerus minor non diuideretur ex æquo, & aliquid remaneret: tunc non esset superparticularis; sed superpartiens, vt si quæratur Ratio 10. ad 7. Iam quia 7. diuidit 10. semel, & quotiens est 1. dicitur superparticularis, at quia 3. remanent, per quem ex æquo non diuiditur 7. & aliquid remanet: Ideo est superparticularis tripartiens ob 3. residuum, septimas, quod inuit numerum minorem 7.

COROLLARIVM

Si quis volet exprimere Rationes per numeros. Si sint maioris inæqualitatis multiplicis eam exprimet eo modo, quo solent fractiones exprimi, ponendo tamen si sit maioris inæqualitatis numerum maiorem super lineam, & minorem infra eam, V. g. scribet proportionem duplam, sic $\frac{2}{1}$ triplam $\frac{3}{1}$ quadruplam $\frac{4}{1}$

At, si sit multiplex super particularis, exprimet per integrum, & fractionem, vt quintupla sesquiquarta $5\frac{1}{4}$ vel reducendo totum numerum in fractionem $\frac{21}{4}$

Si

Si autem sit multiplex superpartiens exprimetur nihilominùs per integrum, & fractionem eodem modo vt 2. & $\frac{1}{7}$ exprimit Rationem duplam tripartientem septimas, vel etiam poterit exarari reducendo totum in fractionem scribendo $\frac{17}{7}$. Et ita agendum est in superparticulari exprimendo eam per vnitatem tanquam per integrum, & per fractiones, vt Ratio 8. ad 10. nempe superparticularis sesquiquarta exprimitur, vel numero 1 $\frac{1}{4}$, vel per $\frac{10}{8}$ vel per $\frac{5}{4}$.

Idem obseruabitur in exprimendo superparticulari multiplici, & efficietur 1 $\frac{3}{7}$ vel $\frac{17}{7}$ quæ est Ratio superparticularis tripartiens septimas.

At sit exprimenda Ratio, quam habet numerus minor ad maiorem numerus minor ponetur super lineolam, & maior infra.

Sic submultipla erit $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$, &c. multipla subparticularis erit $\frac{1}{2\frac{1}{2}}$ Multipla subpartiens $\frac{1}{2\frac{2}{7}}$ subparticularis $\frac{1}{1\frac{1}{8}}$ subpartiens $\frac{1}{1\frac{2}{5}}$

EXPENSIO V.

De rationum compositione.

CVm proportiones, Rationumque similitudines debeamus declarare præmittenda est earum compositio; quæ eam immutat similes proportiones, vel dissimiles componendo.

Obserua aliam esse proportionem duplam, triplam, &c. aliam duplicatam, triplicatam, aliam compositam.

Proportio tripla, quadrupla, &c. est, cùm quantitas maior continet maiorem ter, quater, quinquies, &c. vt 2. continetur à 4. vel 6. vel 10. At proportio duplicata, triplicata, quadruplicata est; cùm numerus, vel quantitas multiplicat se, & suum productum, & productum producti, & sic successiuè: Quoties enim interuenit hæc multiplicatio, tot vicibus dicitur multiplicata, sic si semel fiat est simplex; si gemina vice, est duplicata; si ter, est triplicata; vt 2. multiplicet se, & fiat 4. hæc est proportio simplex: at si iterum 2, multiplicet 4. & fiant 8. est duplicata, & si iterũ 2. multiplicet 8. & fiant 16. est triplicata, & 32. quadruplicata est proportio huius numeri ad 2. At si hæc multiplicatio non per eandem proportionem fiat dicitur composita, V. g. si 2. ad 6. dicat proportionem, & 6. ad 9. proportio 9. ad 2. dicitur composita ex proportione 2. ad 6. & 6. ad 9. in nulloque alio differt à duplicata; nisi quod illa semper eadem est, & continua hic verò proportio non continua: sic 3. 9. 27. sunt numeri, qui continua proportione progrediuntur; ideoq; 27. ad 3. dicitur habere proportionem duplicatam. Nimirum gemina vice repetitam; At 3. 6. 9. sunt numeri, qui continua proportione non corresspondent; neque enim similis Ratio est 3. ad 6. quam 6. ad 9. cùm prima sit subdupla, nempe 1. ad 2. Secunda verò subparticularis sesquialtera nimirum 2. ad 3. & ideo 9. dicitur habere ad 3. proportionem compositam.

Itaque proportio tripla: quadrupla, &c. est propriè Ratio: at verò duplicata, triplicata; vel etiam composita est Proportio possibilis: nempe inter 2. V. g. & 16. possunt intercipi, & interseri duo proportionales numeri dicentes inuicem similem proportionem, & Analogiam silicet 4. & 8. inter 2. & 16. & erunt 2. 4. 8. 16. & triplex similitudo intermediabit nimirum 2. ad 4. prima, 4. ad 8. secunda, 8. ad 16. tertia. Sic composita est proportio possibilis, quæ potest intercepi inter duos numeros; sed dissimilis, & diuersa, si inter eos plures numeri interijciatur. Sic 2. ad 10. habet proportionẽ cõpositã: quia duo intermedij diuersam proportionem dicent, vt 2. 4. 6. 10. Nam proportio 2. ad 4. est differens ab ea, quam habet 6. ad 10. cùm hæc sit subparticularis quadripartiens sextas, at illa subdupla.

Aduerte autem vnius quantitatis ad alteram non esse vnicam compositam proportionem; sed multis posse eam respicere compositis proportionibus pro vt sunt quantitates, quæ inter vnam, & alteram mediant, quæ sunt infinitæ, ita 9. dicit proportionem compositam ad 3. eius; quã habet 6. ad 3. sed etiam erit composita quam 4. ad 3 & quam 5. ad 3. Sic inter 100. & 5. multæ, multæque proportiones interponi possunt, ex quibus omnibus dicitur componi proportio 100. ad 5. vt 100. 20. 5. 100. 50. 5. 100. 30. 5. 100. 10. & 5. sic tot erunt compositæ proportiones, quot numeri possunt interponi inter 100. & 5.

Vnde proportio composita est etiam simplex; prout eam animaduertes: Nam, si V. g. 10. compares ad 5. erit simplex; at respectu 5. & 7. erit composita ex proportione 5. ad 7. & 7. ad 10.

Ratio verò; cur inter vnam quantitatem, & aliã positâ quantitate intermediâ extrema ex illâ dicãtur componi est: quia cum V. g. 100. habeat in se eas partes, quas 50. possidet tot vicibus contentas prout continetur in 100. V. g. duabus vicibus necesse erit; quod, & obtineat omnes partes secundum quas numerus ipse 50. continet 5. quę sunt 10. ideoque 5. decies acceptus componit 50. & etiam in duplo maiore proportione sumptus; nempe secundùm eam, quã 100. respicit 50. componet numerum 100. Sic proportio 10. ad 5. componitur ex proportione alicuius numeri intermedij, vt 8. Nam 5. ad 8. est vt 1 $\frac{3}{5}$ vel $\frac{8}{5}$ nimirũ quãtitas 5. cum tribus vnitatibus, vel partibus accepta æquat 8. at 8. est ad 10. ut $\frac{4}{5}$ nempe; si ad 8. addatur quarta eius pars æquat 10. Ergo quantitas 5. aucta tribus partibus ipsius 5. nempe 3. & quarta parte ipsius 8. nempe 2. æquabit 10. Quare proportio 10. ad 5. constat ex proportione; seu partibus, quibus 8. continet 5. & his quibus ipsa quantitas 10. continet 8. comparata ad 5. & 8. secùs verò si ad vnum simplicem numerum.

Et hinc licet definitiones harum proportionum colligere.

DEFINITIO VII.

PRoportio replicata est; cum trium magnitudinum, vel plurium, eadem est ratio prima ad mediam, quæ media ad tertiam, & tertia ad quartã prima enim dicitur duplicatã habere proportionem ad tertiam; triplicatam ad quartam, & sic consequtiuè donec termini extiterint.

DEFINITIO VIII.

RAtio composita est, cum rationum quantitates aliquam effecerint rationem inter se multiplicata.

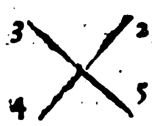
Rationum quantitates sunt denominatores Rationum V. g. rationis A B $\frac{2}{6}$ denominator est 3. quia indicat suis vnitatibus quomodo 6. contineat 2. vel quot partes ipsius 6. in se contineat 2. nempe tertiam. Si ergo denominatores multiplicentur

centur inuicem alicuius proportionis nimirum 3. denominator proportionis A B $\frac{2}{6}$ & C D $\frac{3}{12}$ denominator, qui est 4. producunt 12. denominatorem; qui denominat proportionem compositam ex A B, & C D nimirum H F $\frac{6}{72}$ & exprimit quod 6. in 72. contineatur vicibus duodecim, quia ergo denominator proportionis $\frac{6}{72}$ est 12. Et 12. producitur ex multiplicatione denominatorum 3. & 4. qui denominant proportionem; 3. quidem rationis A 2. ad B 6. & 4. rationis C 3. ad D 12. ideo proportio H F $\frac{6}{72}$ producitur à proportionum compositione A B, & C D.

PROB. I. PROPOS. IX.

Datis duabus proportionibus quatuor numeris, expressis reperire tres terminos easdem proportiones habentes.

Sit data gemina proportio, nimirum 3. ad 4. & 2. ad 5. Oporteatq; reperire tres numeros eandem proportionem exprimentes. Disponatur, vt vides. Deinde fundamenta Rationum 3. & 2. inuicem multiplica & fient 6. Postea fundamētū vnius, cum termino alterius multiplicetur, vt 3. cum 5. & fient 15. Tandem ipsi termini multiplicentur inuicem, & fient 20. Dico quod 6. 15. & 20. habent eandem proportionem, quam 3. ad 4. & 2. ad 5.



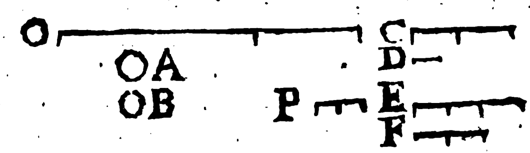
Probatur. Nam cùm numero 3. multiplicauerimus 2. & 5. producti 6. & 15. constabunt tot ternarijs, quot vnitates erant in 2. & 5. ex defin. 15. Tract. 8. Ideo dicent eandem proportionem ex defin. 5. huius, quam 2. & 5. Deinde quia 5. multiplicauit 3. & 4. productis 20. & 15. constabit tot quinarijs, quot vnitates erant in 3. & 4. ex cit. defin. Ideoq ex defin. 5. huius dicent 15. & 20. eandem proportionem, quam 3. & 4. quòd tot quinarij sint in vtroque multiplicato, quot priùs erant in multiplicandis vnitates: Quare ita erit in proportione 6. ad 15. vt 2. ad 5. quòd sicut 5. continet 5. vnitates, & 2. duas, sic 15. continent 5. ternarios, & 6. duos, & sicut 4. continet quatuor vnitates, & 3. tres: sic 20. continet 4. quinarios, & 3. tres quinarios: Quare ita erit 2. ad 5. vt 6. ad 15. & 15. ad 20. vt 3. ad 4. quod erat præstandum.

PROB. II. PROPOS. X.

Datis duabus proportionibus, quibus proportio alicuius quantitatis erga aliam constat, cognoscere; quænam sit ipsius ad aliam proportio.

Sit data proportio quantitatis A ad quantitatem B, quæ dicatur composita ex duabus proportionibus; quam nimirum habet linea, vel numerus 3. ad 2. & linea, seu numerus 4. ad 1. vt cognoscatur quænam sit A ad B quantitates quascumque proportio: Inueniantur ex præcedenti tres numeri eiusdem proportionis, vt sunt 2. 3. 12. vt sit 12. ad 3. vt 4. ad 1. & 3. ad 2. vt priùs erant. Dico, quòd ea est proportio quantitatis A ad quantitatem B, quæ est 12. ad 2. nihil curando de intermedio 3.

Probatur. Quia 12. numerus habet proportionem compositam eam, quam 12. ad 3. & 3. ad 2. quæ est ea, quam habet 4. ad 1. & 3. ad 2. sed hęc est gemina proportio, ex qua componitur proportio quantitatis A ad quantitatem B ex suppositione. Ergo proportio quantitatis A ad quantitatem B est illa quam habet 12. ad 2.



COROLLARIVM I.

Hinc ergo elucet: Quomodo proportio composita dignoscatur: nimirum si comparentur extrema relictis medijs: Vnde neque erit necesse reperire tres numeros; sed solum duos extremos inter quos composita proportio reperiatur, hoc autem fiet ex præced. 9. propos. si multiplicemus simul, Rationū antecedentia, seu fundamenta, V. g. 2: Et 3. & 4. & 5. terminos: Nam numeri producti 6. & 20. habebunt proportionem compositam, quam 3. ad 4. & 2. ad 5. Ita quoque in lineis poterit fieri. Nam si detur proportio E ad F, & C ad D non eadem; & multiplicetur C fundamentum tot vicibus, quot partes aliquotæ sunt in antecedenti, seu fundamento E, & fiat O iterumque consequens D multiplicetur, seu terminus secundum partes; quę sunt in consequenti, seu termino F, & secundum quas dicit proportionem, & fiat P; dico O ad P habere proportionem compositam; cum idem fiat quod in numeris effectum est. Vnde si quantitas A dicatur habere proportionem compositam ad B lineæ C ad D, & E ad F habebit eam proportionem quam O ad P.

COROLLARIVM II.

Hinc etiam est: Quod si dentur plures proportiones; quam duæ ex quibus aliqua alia proportio componatur, idem agendum sit multiplicando fundamenta inuicem, deinde terminos, vt si sit proportio 3. ad 4. & 1. ad 5 & 2. ad 7. & 4. ad 5. multiplicabimus omnia antecedentia ducendo primum in secundum, deinde tertium in productum ex primis vt fiant 24. deinde eodem modo consequentes terminos, & fient 700. Ergo proportio 700. ad 24. est composita ex proportionibus assignatis omnibus; quod etiam potest fieri reperiendo quantitates, quæ continuè sint proportionales.

COROLLARIVM III.

Idem prorsus agendum, & faciliùs, cùm proportio est eandem, quæ multiplicanda sit, vt inueniatur proportio replicata, sic 2. ad 4. & 5. ad 10. inuenietur proportio duplicata 10. ad 40. vt patet in istis numeris 10. 20. 40. inter quos est eadem proportio primi ad medium, quæ medij ad vltimum.

EXPEN-

EXPENSIO VI.

Quænam quantitates proportionem consequantur, & quam obtineant.

CVm acturi simus de modo argumentandi de vna proportione ad alteram, & vis argumentationis in earundem similitudine consistat; ideo priùs quænam sit, & inter quas quantitates reperiatur proportio cognoscere oportet.

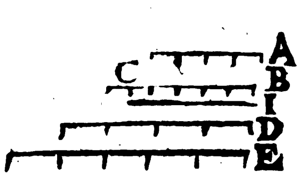
DEFINITIO IX.

IN eadem ratione magnitudines dicuntur esse; cùm prima, & tertia, idest fundamentorum æquè multiplicia à secunda, & quarta, idest terminorum æquè multiplicibus, aut æquantur, aut superantur, aut superant iuxta omnem multiplicationem, quæ adhibeatur.

Quia dantur quædam quantitates, nempe irrationales, vt supra diximus, quæ nulla communi mensura possunt mensurari, & ideo neque earum proportio indiuidua manifestari; cùm non cognoscatur: ideo in hac definitione proportio tantùm generica exprimitur, quam omnis proportio possidet, seu rationalis, seu irrationalis: nempe, quòd si multiplicentur fundamenta ęquè idest per eundem numerum, & termini æquè idest per eundem numerum; non tamen necessariò, quem adhibuimus in fundamẽtis, & reperiatur; quòd fũdamenta semper simul excedunt, aut æquent, aut minus sint, adhibitâ quacumque multiplicatione, dicendum esse fundamenta ad suos terminos simili proportione referri.

Ratio est. Quia impossibile est, quod fundamenta cum terminis non sint in eadem proportione, deinde semper æquo pacto respectu terminorum se habeant data qualibet multiplicatione possibili.

Nam sit maior A, quàm B particulâ C, quæ deberet abesse, vt esset similis proportioni D ad E: ita quòd, si illa deficeret, tunc proportio A ad B esset similis proportioni D ad E. Certum est, quòd si A, & D fundamentorum æquè multiplicia sumantur, & etiam B, & E terminorum. Quod terminus B crescet magis; quàm E respectu fundamentorũ; & non simili augmento, quia semper C particula abundans, & similitudinem auferens



etiam ipsa multiplicabitur. Cùm ergo crescat magis B; quàm E, & non similiter augeatur, necessariò aliquando eueniet, quòd si E proximè ęquetur suo fundamento D in aliquâ multiplicatione, vt clarum est posse euenire, data qualibet multiplicatione; ita vt deficiat solùm pars C, vel minus, quam C, eueniet inquam, quòd BC iam ęquabitur suo fundamento A, vel etiam superabit: Quapropter, tũc terminus BC æquabitur suo fundamento A, vel illud superabit; dum terminus E non est maior, nec æquat suum fundamentum D. Exemplum sit in numeris, & dicantur

esse fundamenta	4 ad 6	vt	3 ad 5	terminos

Sumanturque æquè multiplices fundamentorum, 8. fundamenti 4. & 6. fundamenti 3.

Sic quoque terminorum 12. termini 6. & 10. termini 5. Videtur, quòd sit proportio, quòd terminorum ambo æque multiplicia superent pari consensu fundamentorum æquè multiplicia. Verùm alia multiplicatio adhibeatur, & fundamenta quinquies accipiantur, eruntque multiplicia fundamentorum 20. & 15. Termini verò sumantur tricies; eruntque terminorum æquè multiplicia 15. & 18. Vides ergo iam quomodo multiplex 15. termini 5. tricies acceptus æquet multiplicem fundamenti 3. quinquies accepti: at termini 6. tricies accepti multiplex 18. fundamenti sui multiplicem 20. quinquies accepti non æquet; igitur inter hos numeros similis proportio non erit, eo quia inuentum sit aliquando fundamentum esse maius suo termino, cùm aliud fundamentum suo termino non sit maius, cùm fundamenta ęqualibus vicibus, tum termini æqualibus vicibus licet non eiusdem numeri, ac fundamentorum, fuerint multiplicati.

Dices omnis possibilis multiplicatio est infinita. Ergo numquam possumus scire: an in aliqua multiplicatione contrarium eueniat; cum omnis multiplicatio adhiberi ob suam infinitatem non possit.

Respondeo in vnaquaque materia suppetere tales probationes, quæ ostendunt: quòd idem eueniet in omnibus possibilibus multiplicationibus, quod euenit in multiplicationibus de pręsenti adhibitis, & quòd semper res ita procedet. Quoniam par sit ratio de omni multiplicatione possibili, ac de illis, quæ in præsentiarum adhibentur.

DEFINITIO X.

EAndem verò habentes rationem magnitudines proportionales dicũtur. Hæc per se clarum est.

DEFINITIO XI.

CVm fundamentum primum iuxta aliquam multiplicationem excedit suum terminum, & fundamentum secundum suum terminum non excedit; tunc primum fundamentum habet maiorem proportionem ad suum terminum; quam secundum ad suum terminum.

Ratio huius rei est. Quia si aliquando contingat, quòd fundamentum B. crescat, ita quòd superet terminum A, altero fundamento E suum terminum D non superante, in aliquo erit maior B V. g. in C, quam requireretur ad hoc, vt diceret eandem proportionem ad A; quàm E ad D ex anteced. Linea autem maior dicit maiorem proportionem ad aliam, quam linea minor eò, quòd requiritur, vt similes sint. Namque sit linea I ad A, vt E ad D illa erit minor, quam B: cùm B deberet detruncari, vt supponitur, si ad similem proportionem E ad D deberet reduci. Cùm ergo B sit maior, quàm I dicet etiam maiorem proportionem, quam I, quia linea maior B continet plus, vel plures partes lineæ A, quàm linea I, & ideo continebit etiam magis de linea A, quàm E contineat de linea D, quę tantũ de ea continet, quãtũ I de A.

P CO-

COROLLARIVM.

CVm ergo duæ quantitates inæquales comparantur ad maiorem V. g. Pes 12. vnciarum palmus 6. & passus 72. Pes dicitur habere maiorem rationem ad passum, quam palmus eo, quòd plures partes eius contineat; nempe 12. cum palmus solum 6. contineat ex vncijs 72. At si passum compares cùm pede, & palmo, nempe cum minoribus, passus habet minorem proportionem, cùm maiori nempe cum pede, quàm cum minori, nimirum cum palmo; quia pedem continet solum sex vicibus, at palmum 12. vicibus; & ideo est maior proportio passus ad palmum; quàm ad pedem; minor, verò ad pedem, quam ad palmum.

Si verò duas quantitates inæquales compares cùm minori V.g. passum, & pedem cum palmo. Maior est proportio maioris, quam minoris ad eam; quia plus continet maior de ea V g. passus de palmo, quàm minor, nempe pes de ipso palmo. At è contra minor comparata cum duabus inæqualibus, se maioribus; Minor hæc ad minorem V. g. palmus ad pedem maiorem proportionem habet, quam ad maiorem, cùm de illa minori contineat magis, quòd palmus pedis contineat medietatem; at verò passus 12. partem.

Si tandem mediocris comparetur, cum maiori se, & cum minori, vt pes cum palmo, & cum passui mediocris magis continet de minori; cum eam totam contineat, & insuper aliquid ampliùs quã de maiori, quam nec totam continet. Vnde habet maiorem proportionem cum minori, quam cum maiori. At, si minor, & maior ad mediocrem comparentur, maior dicet ob eandem causam maiorem proportionem ad mediocrem; quàm minor ob continentiam maiorem, quam habet cum totam eam contineat; non autem minor mediocrem.

DEFINITIO XII.

P*Roportio in tribus terminis ad minus consistit.*

Quia cùm sit proportio Relationum quantitiuarum, & Rationum similitudo, & ad relationem requiratur fundamentum, & terminus ad hoc, vt inuicem comparentur relationes, & similes inueniantur, oportebit assignare fundamentum, & terminum hinc, inter quæ reperiatur vna relatio; & fundamentum, & terminum inde; in quibus consistat alia relatio, quæ relationes, & habitudines, deinde similes dicantur. Verum, quia eadem quantitas potest respectu vnius esse fundamentum; vt 4. ad 8. & respectu alterius terminus, vt 2. ad 4. in quo 4. est terminus respectu minoris, & fundamentum respectu maioris: ideo proportio, & rationum similitudo in tribus terminis ad minus consistit.

DEFINITO XIII.

H*Omologæ, seu similes ratione magnitudines sunt, antecedentes quidem antecedentibus, idest fundamenta fundamentis, & consequentes consequentibus, idest termini terminis.*

Docet ne dum dari similitudinem rationum, seu habitudinum vnius quantitatis ad aliam, quæ relationes sunt fundamenta proxima similitudinis, sed etiam fundamenta remota, idest ipsas quantitates Rationem dicentes in similitudine cum alia proportione conuenientem, dici, & ipsa similia in hoc; quod duæ quantitates deseruiant pro fundamentis, & in ratione fundamentorum conueniant, & duæ pro terminis deseruiant, quę non est simplex denominatio: sed necesse est fundamenta in hoc conuenire, quòd aut ambo sint æqualia terminis, aut ambo maiora, aut ambo minora, alioquin si vnum esset maius, aliud minus suo termino non esset eadem proportio cum vna esset maioris inæqualitatis, altera minoris.

DEFINITIO XIV.

O*Rdinata proportio est; cùm in duplici serie quantitatum proportionem dicentium eædem quantitates mediæ deseruiunt pro fundamento, & termino Rationis.*

Sint duæ series quantitatum proportionalium,

Prima	2	3	4
Secunda	4	6	8

Referaturq; 2. ad 3. vt refertur 4. ad 6. & rursus 3. ad 4. vt 6. ad 8. ita quòd termini 3. & 6. deseruiant etiam pro fundamentis: Et sint quidem termini respectu proportionis antecedentis; fundamenta verò respectu sequentis: Quamuis proportio antecedens non sit eadem, ac sequens; sed diuersa; nihil interest, dicit quod hæc erit ordinata proportio. Quoniam eodem ordine dispositi termini inuicem se respiciunt procedendo versùs extremos terminos 4. & 8.

DEFINITIO XV.

P*Erturbata proportio est; cùm in duplici serie quantitatum proportionem dicentium medius terminus vnius deseruit pro fundamento respectu extremæ quantitatis; at fundamentum alterius deseruit pro termino respectu primæ quantitatis.*

Sint duæ series quantitatum proportionalium,

Prima	2	3	4
Secunda	6	8	12

Ordo verò earum perturbatus sit, & referatur 2. ad 3. vt 8. ad 12. Deinde referatur 3. terminus, vt fundamentum sumptus ad 4. vt alia quantitas 6. refertur ad fundamentum 8. Ita quòd terminus primæ seriei 3. deseruiat pro fundamento ad aliud tertium; at fundamentum secundæ seriei 8. deseruiat pro termino ad aliud sumptum, vt fundamentum. Si ergo ita sint ordinati termini vocabitur proportio perturbata; & oportebit ponere illud aliud in prima serie pro vltima quantitate, vt in secunda pro prima. Vocatur autem proportio perturbata, quòd non seruetur idem ordo, cùm in prima serie media, & secunda quantitas sit terminus, & fundamentum: respectu quidem primę quantitatis terminus; respectu verò assumptæ extremæ fundamentum. At in secunda serie secunda quantitas solum terminus est respectu primæ; at prima est fundamentum, & terminus; terminus quidem respectu antepositæ assumptæ, fundamentum verò respectu secundæ suę quantitatis.

EXPEN-

EXPENSIO VII.

De modis arguendi in proportionibus.

PRius agendum est de modo arguendi in genere; deinde de singulis modis in specie.

Præsupponendum ex Logica. Solùm syllogismum inter argumenta à Logicis enumerata efficaciter concludere: Vnde, vt argumenta in proportionibus fundata vim adstrictiuam adipiscantur, & intellectum euidentiâ conuincant, oportet, licet Enthymematis modo prolata; quòd tamē ad syllogismum reduci possint. Syllogismus verò constat tribus propositionibus: Primæ duæ dicuntur Præmissæ, & earum prima est Maior, secunda Minor, vltima dicitur Conclusio. Præmissę verò constant ex Subiecto, & Prædicato terminis, & Copula: Et terminus, qui replicatur in maiori, & minori dicitur, *Medius terminus*. Sic, si dicatur *omnis homo est animal*, hæc est maior propositio, & *homo* est subiectum *est* copula *animal* Prædicatum, cui additur minor. *Sed omne animal est viuens;* quæ, vt prima componitur ex ijsdem partibus, sed subiectū est medius terminus nempe *animal*; quod replicatur in maiori, & minori; & ambæ hæ propositiones dicuntur *Præmissæ*. Tandem deducitur Conclusio euidens. *Ergo omnis homo est viuens*. Quæritur itaque in argumentis proportionum, quænam sint partes ad syllogismum necessariæ?

CONCLVSIO I. PROPOS. XIII.

Argumenta proportionum duo extrema, & medium terminum possident ipsas Rationes; copula est proportio asserta, quæ particula vt *explicatur.*

PRobatur Sit argumentum Mathematicum *numerus* 1. *est ad* 2. *vt* 3. *ad* 6. *Sed vt* 3. *ad* 6. *ita est* 4. *ad* 8. Ergo 1. ad 2. est vt 4. ad 8.

Numeri ipsi non sunt termini: nā, tunc argumentum consequeretur sex terminos, vt sunt sex diuersi numeri: argumentum verò constans pluribus terminis; quam tribus, non concludit ex Logicis; sed fallax est, & deficit in forma. Quare erit terminus ipsa proportio, quæ inter duos terminos reperitur.

Confirmaturque. Nam propositiones modales pro terminis integra propositione gaudent vt *necesse est hominem esse animal*, illud enim *necesse* est subiectum, at hominem esse animal, est prædicatum. Sic, & hic 1. *est* ad 2. subiectum est, & 3. *ad* 6. est Prædicatum, nempe duæ relationes altera, quæ est inter 1. & 2. altera verò, quæ militat inter 3. *&* 6. medius verò terminus erit proportio media 3. *ad* 6. quæ reperitur in maiori, & minori.

Probatur secunda pars. Nam copula est illa, quæ semel est in maiori, semelque in minori, & in consequentia. Sed talis est particula *vt* si sit assertiua, vel negatiua, nempe iuncta cum verbo *est*, vel *non est*; quoniam reperitur in omnibus tribus propositionibus. Ergo, *vt est* erit copula.

Probatur secundò. Quoniam tota vis argumenti ex proportionibus deducti, vt propos. 16. huius consistit in identitate similitudinis proportionum: Et ex eo, quòd proportiones duæ sint similes alicui tertię, arguitur, esse idem similitudine inter se. In hoc enim probauimus vniuersaliter in nostris Placitis Phylosophicis vim syllogisticam statuendam: Sed *vt est* significat hanc relationem similitudinis, & indicat proportiones esse idem in similitudine; Ergo in eâ particulâ copula latebit; cum copula sit illa, quæ significat identitatem Prædicati, & Subiecti.

Sed iam accedamus ad particulares modos explicandos, quibus vtuntur Mathematici; qui sex sunt *Alternatio, Inuersio, Compositio, Diuisio, conuersio*, *Æquatio*. Et licet sint alij modi, vt explicabimus, hos tamen particulariter proprijs definitionibus illustrauit Euclides, vtpote dificiliores, & in quibus, vt plurimùm termini, & fundamenta sedes mutarēt, & alterum vices alterius in deductione conclusionis subiret. V. g. antecedens, & fundamentū A in prēmissis ponitur in conclusione, tanquā terminus, & consequens. At nos alios etiam modos, in quibus nulla terminorum, fundamentorūmque vicissitudo reperitur, perspicuitatis gratia explicabimus.

Modi itaque argumentandi sunt quædam enthimemata constantia ex duplici propositione perfectâ, & affirmatiuâ; quorum consequentiâ semel probatâ, ex inde efficaciam syllogisticam consequuntur, & euidenter ostendunt. Quia omne Enthymema, cuius consequentia probata sit, vim syllogisticam consequitur; vt *iste angulus est in semicirculo, ergò rectus est*. Si aliùde constet, omnem angulū esse rectū in semicirculo, erit ac si integrum syllogismum conficeres, & diceres *Omnis angulus in semicirculo rectus est. Iste in semicirculo reperitur: Ergò rectus erit.* Quapropter, & modi arguendi Mathematici in proportionibus sunt efficaces, quia licet sint Enthymemata, eorum tamen consequentiam esse bene deductam in 5. libro Euclid. ostenditur.

Istis itaque perceptis, obseruandum est, duplicem esse modum argumentandi: Alium absolutum, cùm quantitates dicunt quidem proportionem similem, sed non se habent inuicem, vt continens, & contentum; vt pars, & totum. Alium verò esse relatiuum, in quo quantitates sumuntur, tanquam dicentes relationem totius, & partis. Primò itaque explicabimus modos argumentandi absolutos à respectu partis, & totius. Deinde relatiuos.

DEFINITIO XVI.

A Lterna, seu permutata ratio est sumptio antecedentis, seu fundamenti, & termini vnius proportionis tanquam fundamenta in conclusione, vt se referentia ad fundamentum, & terminum alterius proportionis, tanquam ad suos terminos.

Iste modus est: Cùm ponitur fundamenti ad suum terminum similis proportio, quæ est alterius fundamenti ad suum terminum: Et deinde infertur. Quod fundamentum, ad fundamentum eâdem simili habitudine refertur, vt terminus ad terminum. Sic si ponantur esse.

2 ad 4
vt
3 ad 6

Deinde poterit deduci, Ergo erit etiam Fundamentum 2. ad fundamentum 3. pro termino sumptum, Vt terminus 4. pro fundamento sumptum ad terminum 6.

Qui modus argumentandi efficaciter concludens demonstratur propos. 19. lib. 5. Quod intelligitur, si fundamenta, & termini sint eiusdem generis. Non enim rectè inferetur ex eò, quòd linea A ad lineam B esset in proportione, vt numerus 2. ad numerum 3.; quod deinde esset etiã linea A ad numerum 2. vt linea B ad numerum 3. vt clarum est; cum nulla sit proportio lineæ ad numerũ. Hanc verò argumentationẽ Doctores exprimunt, cum eâ vtuntur, dicendo; si 2. ad 4. vt 3. ad 6. ergo permutando 2. ad 3. vt 4. ad 6.

DEFINITIO XVII.

INuersa ratio est, cùm fundamenta, antecedentiaque proportionum assumuntur pro terminis, & termini, seu consequentia assumuntur in conclusione pro fundamentis.

Si aliquis argueret: Quoniam est fundamentum 2. ad suum terminum 4. vt fundamentum 3. ad terminum 6. Ergo etiam erit terminus 4. ad fundamentum 2. vt terminus 6. ad fundamentum 3. vsurpando in conclusione terminos pro fundamentis, & fundamenta collocando pro terminis; hic modus dicitur *inuersa ratio*, & hunc modum esse demonstratiuum constabit ex Coroll. pr. 4. par. sequentis. Exprimiturque dicendo. Ergo permutando, &c.

DEFINITIO XVIII.

ARguere ex æqualitate est, cum sunt plures quantitates, quam duæ ordinatam, seu perturbatam proportionem dicentes, & arguitur, esse eã proportionem inter fundamentum, & vltimum terminum vnius seriei, ac inter fundamentum, & terminum alterius vltimum, relictis intermedijs.

Dentur plures magnitudines; quàm duæ dicentes proportionem, veluti aliæ eiusdem numeri, seu proportione pturbatâ, seu ordinatâ, & sint

Ordinata 1. 2. 6. Perturbata 4. 8. 12.
vt 3. 6. 18. vt 2. 3. 6.

Si ergo relinquantur media assumptis extremis in conclusione, & primum fundamentum 1. dicatur referri ad vltimum terminum 6. vt fundamentum 3. ad vltimum terminum 18. ex eo, quod sint 1. ad 2. sic 3. ad 6. & 2. ad 6. sic 6. ad 18. bona erit illatio in ordinata proportione; & bona quoque in perturbata; & ex eo, quod sit 4. ad 8. vt 3. ad 6. & 8. ad 12. vt 2. ad 3. efficaciter deducetur conclusio, esse quoque 4. ad 12. vt 2. ad 6. In qua proportione, vt valeat, ritè ordinandi sunt termini: nam si 2. poneretur vltimo loco post 6. in secundâ serie, tunc vltima relictis medijs, vt patet, non sumerétur. Quod si sint plures termini, quàm tres, valet adhuc argumentum; sic si sint.

Ordinata 1. 2. 6. 8. Perturbata 4. 8. 12. 18.
3. 6. 18. 24. 2. 3. 6. 9.

Licebit adhuc in proportione ordinata arguere, vt 1. ad 8. sic 3. ad 24. & perturbata vt 4. ad 18. sic 2. ad 9. Hunc verò modum esse efficacem in omni proportione etiam irrationali; licet sint series diuersi generis ostenditur pr. 24. & 23. lib. 5. & eam significant in arguendo. Ergo *ex æquo*, vt, &c.

MODI ADDITI.

DEFINITIO XIX.

ENumeratio rationis potest dici, cùm pluribus quantitatibus ordinatis, quæ dicant eandem proportionem, assumuntur omnia fundamenta, vt dicentia eam proportionem ad omnes terminos, vt vnum ad vnum.

Si dentur multæ proportiones ordinatæ, & sint

1. vt 3. 4. 5.
ad ad ad ad
2. 6. 8. 10.

Et illis positis, deinde inferatur esse 13. nempe omnia fundamenta ad 26. omnes terminos simul, vt fundamentum aliquod, V. g. 3. ad terminum suum 6. iste modus potest vocari Enumeratio; eo quia ad similitudinem enumerationis Dialecticæ positis pluribus particularibus proportionibus cõclusio deducatur, quę concludat omnes; & probatur propos. 17. lib. 5.

DEFINITIO XX.

COllectio est, cum plurium quantitatum proportionem ordinatam dicentium assumuntur fundamenta, & termini vnius simul, vt fundamentum, & antecedens ad fundamenta, & terminos alterius proportionis tanquam ad consequentem, & terminum, & arguitur, ita esse omnia ad omnia; vt fundamentum aliquod ad aliud fundamentum.

Sit proportio ordinata proposita

1. ad 2. & hoc ad 6. & hoc ad 8.
vt 3. ad 6. & hoc ad 18. & hoc ad 24.

Si hac positione inferatur. Quod etiam omnia fundamenta, terminique 1. 2. 6. 8. nempe 17. sint ad alterius seriei fundamenta, terminosque 3. 6. 18. 24. nimirum 51. vt aliquod ipsorum 2. ad aliud correspondens 6. bona erit illatio, & ostendetur Coroll. 2. propos. 19. Potest verò hæc illatio esse integra, & dimidiata: Nam omnia fundamenta, & termini possunt colligi, vel eorum aliquot in prima serie; dummodo colligantur correspondentia in secunda serie.

Sic si colligantur extrema 8. & 1. in prima serie, & fiant 9. & item in altera serie correspondentia 3. & 24. & fiant 27. erit eadem proportio 9. ad 27. quæ 2. ad 6. vel 1. ad 3. vel 6. ad 18.

Verùm hic quoque fundamenta, & termini debent esse eiusdem rationis, & speciei alioquin sicut in permutata, rectè illatio non fieret.

DEFINITIO XXI.

REsiduatio est modus argumentandi, in quo totum ponitur, ad totum proportione respondens, vt pars ad partem, & deinde arguitur ex hoc quoque, esse residuum ad residuum, vt totum, ad totum.

Sit V. g. proportio 15. ad totum 3. vt pars 5. primi totius ad partem alius 1: Erit quoque residui 10. primi totius, proportio similis proportioni, quæ est ad alteram partem residuam 2. alius.

Iste verò modus arguendi est diuersus ab ijs, de quibus acturi sumus, qui se referunt; vt totum, & pars. Nam hic pars non confertur cum toto suo; sed cum parte alius totius. Propterea, quę non est proportio partis, vt partis propriè; cùm non respiciat suum totum; sed partem alteram, non sibi compartem, alterius totius. Iste verò modus ostenditur propos. 22.

DE-

DEFINITIO XXII.

REplicati op otest dici modus arguendi; cùm terminus, & fundamentũ replicata æquè sumuntur, & ad fundamentum, et terminum conferuntur, vel æquè replicatos, vel simplices, alterius combinationis.

Sit V. g. 3. ad 4
Vt 6. ad 8

Possum arguere esse quoque multiplex 3. nempe 9. ad suum terminum 12, multiplicem æquè numeri 4. quemadmodum est 6. ad suum terminum 8, quod ostendetur propos. 18. lib. 5. Idemq; argumentum valebit, si quoque combinationis alterius æquè multiplicia sumantur, V. g. 24. numeri 8. & 18. numeri 6. erit namque 9. ad 12. vt 18. ad 24.

DEFINITIO XXIII.

DEtractio potest dici modus argumentandi, cùm ex antecedenti, et consequenti partes proportionales detrahuntur, et arguitur esse residuum fundamenti ad residuum termini, vt aliud fundamentum ad alium terminum, vt priùs erat totum fundamentum ad suum terminum totum.

Dicatur quod 8. sit ad 24.
velut 1. est ad 3.

Si ex 8. & ex 24 detrahantur partes proportionales 3. & 9. remanebunt 5. & 15. Si ergo arguatur, quòd 5. sit ad 15. vt 1. ad 3. iste modus poterit vocari *Detractio*; & ostenditur valere in proportione multiplici propos. 6. lib. 5. In quacumq; proportione Coroll. prop. 25. eiusdem.

DEFINITIO XXIV.

REflexio potest dici modus argumentandi, cùm duo fundamenta; seu antecedentia seorsum referuntur ad vnicum terminum, simili proportione, vt alia duo fundamenta, seu antecedentia ad suum terminum, seu consequens; Deinde fundamenta prima simul sumũtur, & arguitur obtinere eandem proportionem; quam alia duo fundamenta simul sumpta ad suum terminum.

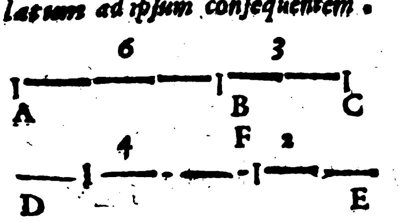
Dentur duo fundamenta 3. & 2. qui referantur ad terminum 6, & alia duo 6. & 4. qui referantur simili proportione; ac prædicta ad suum terminum 12. Si deinde arguatur esse quoque duo fundamenta simul, seu antecedentia 3. & 2. nempe 5. ad suum terminum 6. vt fundamenta 6. & 4. nempe 10. ad suum terminum 12.; erit bona deductio, & efficaciter concludet.

Probatur verò iste modus propos. 25. lib. 5.

Modi, qui inuoluunt rationem totius, & partis.

DEFINITIO XXV.

COmpositio rationis est sumptio antecedentis cum consequente, seu vnius; & hoc totum collatum ad ipsum consequentem.



Sit proportio A B partis ad B C partem; vt proportio alterius partis D F, ad alteram partem F E, & colligatur, eam quoque esse proportionem totius A C; nempe antecedentis cum consequente, fundamenti, & termini proportionis simul ad ipsam consequentem, seu terminum B C; vt aliud totum D E fundamentum, terminusque alterius proportionis ad suum terminum E F; dicetur huiusmodi argumẽtum Compositio rationis eo, quod ex consequente, & antecedente componatur aliud nouum antecedens, seu fundamentum. Demonstraturque hic modus argumentandi propos. 18. lib. 5. Euclid. & quando illo vtuntur Mathematici; ita arguunt, vt A B ad B C; sic D F ad F E, ergo *componendo*, vt A C ad C B; sic D E ad F E. Sed forte explicabitur meliùs iste modus argumentandi; Quod sit: à proportionis partis ad cõparte totius eiusdem similitudine proportioni alterius partis ad cõpartẽ alterius totius, deinde deducere, quod etiam totum prius sit ad partem suam, sicut totum posterius ad partem suam, quæ partes fuerint ambæ, vel termini, vel fundamenta, & è contrà.

V. g. sit pars 1. ad partem 2. totius A;
Veluti pars 1. ad partem 2. totius B;

Erit etiam componendo totum A ad suam partem 2; vt totum B ad suam partem 2.

Vel; si sit pars 1. ad partem 2. totius A,
Velut pars 1. ad partem 2. totius B:
Erit quoque totum A ad suam partem 1;
Vt totum B ad suam partem 1,
Vel è contrario.
Si sit pars 1. ad partem 2. totius A;
Vt pars 1. ad partem 2. totius B,
Erit quoq; pars 1. ad totum suum A;
Vt pars 1. ad totum suum B;
Vel etiam erit pars 2. ad totum suum A.
Sicut pars 2. ad totum suum B.

DEFINITIO XXVI.

DIuisio rationis est sumptio excessus, quo consequentem superat antecedens, ad ipsum consequentem.

Sit proportio, vt in præc. figura, A C totum ad B C partem vt D E totum ad F E partem, si deinde arguatur, quod excessus quoque A B, quo antecedens; nempe totum A C superat consequens, sit ad suam partem B C consequentem. Velut excessus D F, quo item antecedens D E superat consequentem F E, nimirum totum suam partem, ad ipsam F E consequentem, iste modus arguendi appellabitur diuisio rationis, eò quod diuidantur antecedentia, seu fundamenta proportionum in suas partes, & ostenditur iste modus propos. 20. lib. 5. Eucl. In diuisione autem rationis, dum deducunt conclusionem, ita loquuntur auctores *ergo diuidendo*, &c.

Diuisio itaq; rationis ad hoc, vt rem clariùs explicemus, est cũ à similitudine proportionis partis cum toto suo ad proportionẽ partis cum alio toto suo, quæ partes sint ambæ homologæ scilicet, vel fundamenta, vel termini, deducitur similitudo proportionis compartis alteri parti eiusdem totius ad proportionem compartis alteri parti alterius totius.

V.g. sit totum A ad suam partem 1.
Vt totum B ad suam partem 1.
Erit ergo *Diuidendo* compars 2. ad suam compartem 1. totius A.

vt

vt compars 2. ad suam compartem 1. totius B.

Vel vt totum A ad suam partem 1.

Sic totum B ad suam partem 1.

Ergo erit, vt 1. pars ad compartem 2. totius A;

Sic 1. pars ad compartem 2. totius B:

Vel etiam sic vt 1. pars ad A suum totum;

Sic 1. pars ad B suum totum:

Ergo vt pars 1. ad partem 2. totius A;

Sic pars 1. ad partem 2. totius B.

DEFINITIO XXVII.

Conuersio rationis est sumptio antecedentis ad excessum, quo superat antecedens ipsum consequentem.

Veluti in præcedenti figura ex eo, quod sit AC. ad BC, vt DE ad FE; Ergo eadem tota AC ad excessum AB; sic altera tota DE ad excessum DF; iste modus arguendi dicitur *Conuersio rationis*, & ostenditur propos. 19. lib. 5. & cum illo vtuntur Mathematici, sic inferunt; Igitur per Conuersionem rationis, &c.

Itaque Conuersio rationis propriè est arguere à similitudine proportionis totorum cum suis partibus, ad similitudinem proportionis totorum cum reliquis suis partibus.

V.g. vt totum A ad suam partem 1.

Sic totum B ad suam partem 1.

Ergo conuertendo vt totum A ad reliquam partem suam 2.

Sic totum B ad reliquam partem suam 2.

Tandem aduerte, quod præter compositionem rationis assignatam datur etiam alius modus argumentandi, qui est compositio ipsarum proportionum, & differt propter hoc ab allata; quòd illa sit compositiò ipsarum quantitatum proportionem dicentium; hæc verò ipsarum rationum. Si enim sint duæ proportiones $\frac{2}{3}$ & $\frac{4}{5}$, & duæ aliæ istis similes $\frac{4}{6}$, & $\frac{8}{10}$, & ex primis modo, quo docuimus propos. 11. vnica proportio componatur $\frac{8}{15}$, item ex secundis, & fiant $\frac{32}{60}$ erit adhuc eadem proportio 8. ad 15. quæ 32. ad 60. vtpote ex iisdē proportionibus cōposita; si ergo prob. proportionem A ad B esse compositam ex iisdem proportionibus ex quibus est composita proportio quantitatis C ad D; bene arguetur esse A ad B, vt C ad D. Vnde dabitur quoque alia diuisio rationis, nempe; ablatis rationibus similibus à similibus, quòd etiam residua habebunt eandem proportionem; sic ablata proportione $\frac{2}{3}$ à proportione $\frac{4}{5}$; & item proportione $\frac{4}{6}$ à proportione $\frac{8}{10}$, remanebunt residuum primæ $\frac{10}{12}$; residuum secundæ $\frac{40}{48}$ qui similem proportionem dicent ad inuicē; eritque 10. ad 12. vt 40. ad 48. Vnde si quis probet, ablatas fuisse à similibus proportionibus A ad B, quæ est C ad D proportiones similes; residua quoque (poterit deducere) esse inuicem similia: quod ostendemus agentes de proportionalitatibus Rationum.

TRACTATVS IX

IN V. LIBRVM EVCLIDIS PARS SECVNDA.

De Proportionibus in genere.

COgnitis Rationum, Proportionumque definitionibus, modumq; illas tractandi, & in illarum cognitione se exercendi, ad proprietates earum genericas, & vniuersalissimas accedimus. Estq; hic tractatus veluti Metaphysica apud Phylosophos. Nam sicut illa entia vniuersalissimè accepta cognitione intuetur; Sic iste liber proportiones, atque earum similitudines sub tota vniuersalitate animaduertit. Primòque agit, vtpote notiori de proportione multiplici: secundò de proportione plurium quantitatum ad vnam comparatarum, tertiò de pluribus quantitatibus ad plures collatis in ordine ad cognoscendam earum in proportionibus dissimilitudinem, & tandem de plurium quantitatum ad plures in Rationibus similitudine, in quibus modi argumentandi fundantur. Iste verò Tractatus à primis quatuor libris nullatenùs dependet; sed tantum ab antecedenti Tractatus parte: verùm, quia eius cognitio ad sextum necessaria est, cui, & primus, & secundus liber deseruiunt; conueniens erit primum, secundumque librum legisse saltem, vt mens illis libris exercitata faciliùs per huius propositiones excurrat.

EXPEN-

EXPENSIO I.

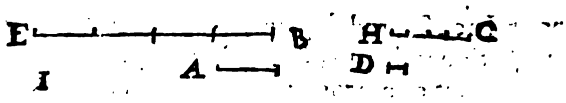
De similitudine multiplicium quantitatum.

QVoniam proportio multiplex facilis est, conueniens fuit, vt ipsa ad percipiendam similitudinem cuiuscumque proportionis aditum sterneret.

THEOR. I. PROP. I.

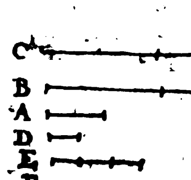
Si sint quotcumque magnitudines quotcumque magnitudinum æqualium numero, singulæ singularum, æquè multiplices; Quàm multiplex est vnius vna magnitudo; tam multiplices erunt, & omnes omnium.

SI dentur quotcumque magnitudines; nimirum duæ; A quidem vnius palmi; at D vnius digiti, & dentur deinde æqué multiplices aliæ æquales numero, V. g. B E ipsi A, & H C ipsi D. Dicit propositio, *quòd si omnes simul ponatur, multiplices nempe hinc* E B, *&* H C, *& simplices inde* A, *&* D *quòd adhuc illa composita simul, istis simul compositis, erunt æquè multiplices, vt erant prius.*



Nempe; quod vt quatuor palmi continebant priùs *quater* lineam palmarem; sic nunc quatuor palmorum linea, & quatuor digitorum *quater* continet lineam palmi, & digiti vnius.

Probatur ex defin. 3. præc. Tract. Illæ dicuntur æquè multiplices quantitates; cùm æquis numero vicibus vna continetur in alia. Quaexse A quater continebitur in B E, & D quater in H C. Si ergo diuidatur, in suasque partes distribuatur E, B, & H C singulæ partes palmares erunt ex E B effectæ, singulæ digitales ex H C. Addantur itaque singulæ partes digitales palmaribus singulis; hæ singulæ lineis simplicibus compactis simul A, & D, æquiualebunt. Ex 2. enim pronunc. l. 1. æqualia addita æqualibus æqualitatem non tollunt. Quapropter A, D simul singulis palmis, digitisq; æquiualebit, cumque sint quatuor digiti, & quatuor palmi ex hypotesi, quòd sint æqué multiplices. Ergo A, & D vnitæ lineæ continebuntur quater in lineis multiplicibus E B; & H C simul. Vt priùs continebantur sumptæ seorsim in singulis seorsim sumptis.



2

THEOR. II. PROPOS. II.

Si prima secundæ æquè fuerit multiplex, ac tertia quartæ; fuerit autem, & quinta secundæ, atque sexta quartæ; erit & composita prima cum quinta, æquè multiplex secundæ, sicut est tertia cum sexta quartæ.

SIt duplex ordo linearum; Prior, in quo sint tres magnitudines, nimirum prima, & antecedens palmorum A. sequens palmorum 4. subsequens C palmorum 8. Deinde sit posterior series trium quoque magnitudinum; quæ antecedenti suæ D sint æquę multiplices; vt sunt prioris ordinis magnitudines antecedenti suæ A. V. g. si antecedens D est digitus, erit E sequens duorum digitorum, & F subsequens quatuor digitorum. Dicit propositio *compositas quoque subsequentem* C *extremam, & sequentem* B primæ A primi ordinis, esse *æquè multiplices*, vt in posteriori ordine cū mediā E, & sequenti *extrema* F *composita, est* primæ D.

Probatur, Nam linea A mensurat lineam sequentem B bis: Quater verò subsequentem C. Ergo si addantur simul B, & C bis, quaterque nimirum sex vicibus eadem A. ambas mensurabit.

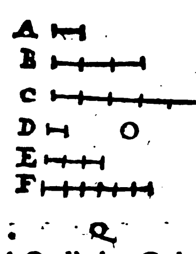
Sed in posteriori ordine antecedens D ex hypothesi mensurat quoque bis sequentem E, & subsequentem F quater. (quia mensurat suas sequentes, vt in priori ordine antecedens suas sequentes mensurabat) Ergo hìc quoque antecedens D suas sequentes E, & F simul positas bis, quaterq; mensurabit, nimirum sexties; vt faciebant sequens, & subsequens compositæ in priori ordine, quod erat ostendendum.

Aduerteque primam esse B, secundam A, quintam C; tertiam E, quartam D, & sextam F, sed, quia iste modus explicandi videtur non adeo perspicuus, illum vitauimus; licet alioqui laudatissimus.

THEOR. III. PROPOS. III.

Si sit prima secundæ æquè multiplex, ac tertia quartæ; Sumantur verò æquemultiplices primæ, & tertiæ erunt ex æquo sumptarum multiplex, altera quidem secundæ, altera verò quartæ.

SIt duplex ordo magnitudinum, Prior, In quo sit prima B, & sequens pal. 3. multiplex secundæ A, quæ sit 1. palmi; huic verò sumatur subsequens C, quæ sit sequenti multiplex, & eam V. g. contineat bis.



3

Deinde Posterior Ordo sumatur magnitudinum eadem multiplicitate continentiarum conformis priori Ordini. Cuiusque sequens E sit trium digitorum respectu primæ D vnius digiti. Illi autem sequenti E sumatur æquemultiplex F, nempe bis, vt in priori Ordine.

Dicit propositio *has subsequentes* C, *&* F, *tum prioris, tum posterioris ordinis esse etiam æquemultiplices suis antecedentibus* A, *&* D.

Pro-

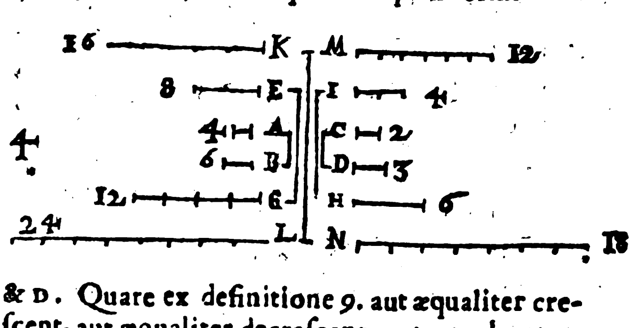
Probatur. Nam si C subsequens primi ordinis, & F subsequens ordinis secundi ex hypothesi bis multiplicant suas partes æquales super sequentes B, & E, quælibet ex illis, veluti FQ, æquabitur suæ sequenti E, & CO suæ item sequenti B. Sed istæ sequentes ex hypothesi quoque sunt æquę multiplices antecedentium A, & D, & quælibet V. g. B multiplicat tot partes æquales super A, quot E multiplicat partes æquales super D. Ergo etiam partes subsequentium CO, & FQ, vtpote sequentibus æquales: Sed aliæ partes residuæ in his lineis subsequentibus C, & F sunt prædictis CO, & FQ, æquales. Ergo additæ istis adhuc facient totam lineam, quam complent, æquè multiplicem ex ant. propos. 2. Vnde C toties continebit A, quoties F continebit D; quę sunt multiplices primæ; & tertiæ; quod erat probandũ.

THEOR. IV. PROPOS. IV.

Si prima ad secundam eandem rationem habuerit, quam tertia ad quartam: etiam æquè multiplices ipsarum quantitatum iuxta quamuis multiplicationem eandem habebunt rationem; si prout inuicem respondent; ita sumptæ fuerint.

Sint duæ combinationes magnitudinum A C prior, B D posterior, sitque A ad C, vt B ad D; nempe A in C contineatur, veluti continetur B in D. Sitque A prima, C secunda, B tertia, D quarta. Sumãturque horum fundamentorum A, & B æquè multiplices quantitates E, quę contineat A tricies, & G, quæ contineat B tricies. Terminis quoque C, & D, iuxta quamuis multiplicationem à prima fundamentorum diuersam sumantur duæ aliæ æquè multiplices inter se nimirum I, quę bis continet C, & H, quæ bis continet D. Dicit itaque propositio, *quòd istæ multiplices inuicem respondentes dicunt eandem proportionem inter se, quam dicebant quantitates simplices.* Et sic, quod ita referatur E multiplex magnitudinis A, ad I multiplicẽ magnitudinis C veluti multiplex G magnitudinis B refertur ad multiplicẽ H magnitudinis D. Itaq; multiplicia fũdamẽtorũ, vt fũdamẽta referentur ad multiplicia terminorum tanquam terminos. Quod, vt probetur; istis quoque assumendæ sunt æquemultiplices, fundamentis quidem F, & G multiplices K, & L, & terminis H, & I, aliæ æquemultiplices M, & N.

Probatur modo propos. Secundum par combinationum E, & G est æque multiplex fundamẽtis A, B, & I, H est æque multiplex terminis C



& D. Quare ex definitione 9. aut æqualiter crescent, aut æqualiter decrescent, aut æquabuntur; Multiplicia fundamentorum, respectu multiplicium terminorum: Itaque crescente E super I, crescet & G super H: at deficiente E, ab I; deficiet quoque G ab H, & si æquentur E. & I æquabuntur G, & H, eo quia ex hypothesi simplices quantitates, quibus multiplices sunt, inuicem proportionem dicant, & ex def. 9. illæ quantitates, quæ proportionem dicunt, habent suas multiplices hac conditione crementi, decrementi, & æqualitatis præditas.

Tertium verò par K, L est quoque multiplex respectu fundamentorum A, B, & aliud M, & N respectu terminorum C, & D, ex anteced. prop. Quod quælibet linea in his tertijs paribus multiplex sit suæ correspondenti in secundo pari. (& quælibet harum correspondentium secundarum parium sit æque multiplex fundamentis, & terminis sibi correspondentibus. Vnde K erit multiplex A, & L ipsius B, at M ipsius C, tandem N ipsius D.

Propterea que etiam ipsæ magnitudines tertiæ eam conditionem consequentur crementi, decrementi, vel æqualitatis in omni multiplicatione, quam secundę multiplices E, G, & I, H. Crescenteque N respectu M crescet L super N, & decrescente decrescet, se æquante æquabitur.

Cum itaque ipsę secundę multiplices Sil. fundamenta E, & G termini quoque H, I habeant tertias multiplices K, L fundamentorum; M N terminorum illius conditionis, quæ requiritur in def. 9. ad similitudinem proportionum, crementi, decrementi, æqualitatis, erunt proportionales, & ita erit E ad I, vt G ad H.

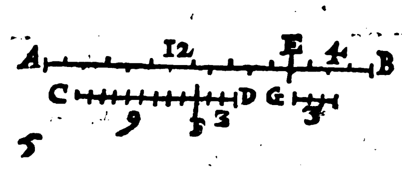
COROLLARIVM

Hinc est quod si quantitatum duæ combinationes dentur, & antecedens A ad sequentem C dicat eam proportionem, quam antecedens B dicit ad sequentem D; quod dicent etiam proportionem è cõtrariò C ad A, vt D ad B. Ratio est: Quia si E, & G multiplices fundamentorum A, & B, vel simul superant, vel simul æquant, vel simul deficiunt, à multiplicibus terminorum iuxta quamuis multiplicationem, & ideo est A ad C, vt B ad D: Pariter quoque multiplices terminorum I, & H simul deficiunt, vel simul æquant, vel simul superant iuxta quamcumque multiplicationem multiplices fundamentorum E, & G: Vnde eadem ratione C erit ad A, vt D ad B.

THEOR. V. PROPOS. V.

Si magnitudo magnitudinis æquè fuerit multiplex, vt ablata ablatæ; etiam reliqua reliquæ erit multiplex, vt tota totius.

Si sint duæ magnitudines AB maior, & CD minor, quibus singulis auferantur duæ par-



tes AE, & CF, quæ inuicem eam multiplicitatem dicant, quam totæ inuicem dicebant; Licet cum suis totis non essent illæ partes commensurabiles, aut certè ijsdem partibus non componerentur;

rentur; Multiplicitas enim attendenda est vnius partis respectu alterius, sicut, & totius ad aliud totum, non totius respectu partis. Sint itaque ablata pars A E, ita multiplex respectu C F ablatæ, vt est multiplex B A totum respectu C D totius. Asserit propositio. *Quod etiam residuum maioris erit multiplex respectu residui minoris, vt erat totum maius multiplex A B respectu totius minoris C D.*

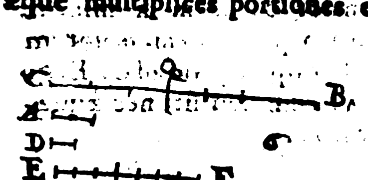
Ad id probandum assumitur aliqua alia quantitas G, cui sit multiplex E B residuum, vt est residuum multiplex maius A E respectu minoris residui C F. Certum est; quod, si addatur hæc quantitas G portioni ablatæ CF totius minoris, ita erit multiplex totum maius A B ad totum hoc compositum denuò, vt est pars ablata maioris A E respectu ablatæ minoris CF. Sed hoc totum maius AB est ex suppositione, ita multiplex ad totum minus CD, vt erat ablata portio A E à maiori toto respectu ablatæ portionis C F à minori. Ergo hoc totum minus C D & rursus eius pars ablata C F associata cum assumptâ G, inuicem æquabuntur; vtpote quibus sit totum A B æque multiplex ex 6. pronunc. Aufer itaque ablatâ portione CF; & id quod remanet F D, & G quantitates remanebunt æquales, vtpote, quòd ab vtraque eadem C F ablata fuerit, quæ priùs quidem cum C D totum minus integrabat, at cum G associata fuerat.

Sed huic assumptæ G, ita est multiplex residuũ E B totius maioris, vt ablatum A E ad ablatum CF, ex hypothesi, Ergo, & huic residuo D F, ita est multiplex E B residuum maioris, vt ablatum A E ad ablatum C F, & consequenter, vt totum A B ad totum C D.

THEOR. VI. PROPOS. VI.

Si duæ magnitudines duarum magnitudinum sint æquè multiplices, & quædam detracta sint earum æquè multiplices, & reliquæ earundem, aut æquales erunt, aut æquè multiplices.

SI sint duæ magnitudines C B, & E F, quarum prima sit æquè multiplex alicui A, sicut, & altera E F est multiplex alteri alicui D, V.g. septies. Et auferantur, tum à prima Q B, tum ab altera E P æquè multiplices portiones earundem A, & D, nimirum Q B, & P F. Dico *residua* C Q, & E P *eisdem* A, & D *remanere aut æqualia, aut æquemultiplicia, quòd libet sua correspondenti* Q C *ipsi* A, & E P *ipsi* D.



Probatur. Quoniam propos. 2. probatum est, quòd si duæ æquemultiplices duarum, vt C Q multiplex A, & E P multiplex D, & aliæ duæ Q B, & F P earundem A, & D æquè multiplices componantur duæ, & duæ, quæ respectu eiusdem quantitatis multiplices sunt, etiam compositæ C B, & E F remanebunt æquè multiplices respectu earundem A, & D. Ergo etiam detractæ æquemultiplices Q B, & P F ab æquè multiplicibus totis, quæ remanent erunt æquè multiplices, aut saltem æquales, cum quælibet pars multiplicium sit æqualis eis quantitatibus, quibus sunt multiplices. Vnde detractis æquè multiplicibus Q B, & P F, aut plures partes restabunt in C Q, & E P, ideoque erunt æquè multiplices residuæ E P, & Q C, aut vna, & ideò erunt æquales ipsis A, & D, quibus priùs ante detractionem erant æquè multiplices.

EXPENSIO II.

De proportione ad vnicam quantitatem relata.

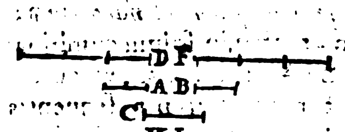
HIc agimus de pluribus ad vnicam comparatis, & ipsas quantitates, vt se habent, ad aliquam quantitatem examinamus: Si quidem facilius est duarum quantitatum ad vnicam collatio (cùm multiplicitas sæpè sæpiùs confusionem inducat) quam plurium quantorum inuicem comparatio. Agemus autem primò de similitudine deinde de dissimilitudine in duabus quantitatibus ad vnam conferendis, vt magis ex dissimilitudine ipsa similitudo nota euadat.

THEOR. I. PROP. VII.

Æquales ad eandem eandem habent rationem, & eadem eandem rationem consequitur ad æquales.

SInt A, & B æquales. Dicit *consequi eandem rationem ad aliam* C. Quod vt probet recurrit ad æquè multiplices, quæ V.g. eas contineant ter, vt D, & F. Lineæ verò C assumantur æquè multiplices duæ H, & L, quæ erunt æquales, vtpote eiusdem æquè multiplices, ex pronunc. 6.

Probatur. Nam, cùm multiplices D, & F æqualium sint inuicem æquales simul crescent, decrescent, & æquabuntur respectu multiplicium vnius C secundò assumptarum H, & L inuicem quoque æqualium, & hoc iuxta omnem multiplicationem. Quapropter, quantitates, quibus multiplices sunt, eandem dicent proportionem, & A ad C proportionabitur; vt B ad idem C. Pariterque etiam C ad A eandem habebit rationem, quam idem C ad B; quia eiusdem multiplices H, & L ad multiplices D, & F habent conditionem, quam multiplices quantitatum in proportione similium requirunt, vel æqualitatis simultaneæ, vel diminutionis, vel augmentationis.



THEOR. II. PROPOS. VIII.

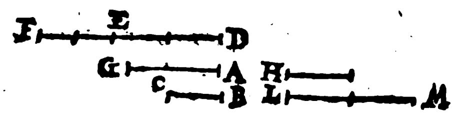
Inæqualium magnitudinum maior ad eandem maiorem rationem habet, quàm minor, & eadem ad minorem maiorem rationem habet, quàm ad maiorem.

MAiorem rationem habere est magis de quantitate æquali alterius quantitatis in se continere, quam de alia V. g. 6. palmi continent 4. palmos, ideoque ad lineam 4. palmorum maiorem proportionem habent, quam ad 5 palmos

mos, cum 4. palmos contineat semel, & dimidio, non autem 5. palmos.

Duas verò partes habet hæc propositio. Prima est: *si dentur duæ lineæ, quarum vna sit maior vt A alia minor, vt B: & comparentur ad aliam, quamlibet, vt H: Maior dicetur habere maiorem rationem ad eam H, quàm minor B.*

Diuidatur A ita vt CA sit æqualis minori quantitati B: Sumaturq; parti minori, siue sit C A, siue reliquum G C, multiplex F E, adeoque replicetur, vt euadat, vel maior, vel saltem æqualis ipsi H, & eidem multiplici F E addatur multiplex D E tot vicibus replicata, quot est ipsa F E, quæ tamen replicet, & multiplicet maiorem partem C A, eritq; D E maior, quam F E, & consequenter maior, quam H, quòd F E ei, vel æqualem fecerimus, vel maiorem. Sumatur verò quantitatis H multiplex talis L M, quæ sit proximè maior, quam E D, ita vt E D, non excedat, nisi ad summum quantitate H; tunc enim M L non poterit superare D F, quia excessus, vel æqualis ipsi H, vel minor non potest superare F E, quæ æquat, vel superat H, & sic D F multiplex A G non erit minor, quam M L, & E D minor, quam M L. Linea D F verò



ex I. huius est multiplex quantitatis A G; eo quia componatur ex multiplici ipsi C A, & ex multiplici ipsi G C. Sic E D est multiplex quātitatis A C ex effectione, & ideo quantitatis B ei æquali. (Vel si mauis F E erit multiplex G C, quæ æquabitur ipsi B; si B fuerit taliter assumpta, quæ relinquat C A maiorem, quàm B.)

Probatur. Multiplex antecedentis A G, nimirum D F excedit multiplicem L M suæ sequentis H in prima combinatione. At multiplex D E antecedentis B multiplicem L M quantitatis H iterum pro sequente sumptæ in posteriori combinatione non excedit. Ergo est maior proportio A G ad H, quàm B ad H ex def. H. præc. part. quia contingit aliquando quod multiplex antecedentis A G excedat multiplicē sequētis L M, quādo multiplex E D anteced. B eandē multiplicē non excedit.

Probatur quoque secunda pars; *quòd H dicat maiorem proportionem ad minorem B; quàm ad maiorem A G*, mutando solum combinationem.

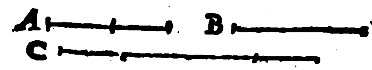
Nam L M multiplex H, vt antecedens sumpta maior est multiplici D E sequentis minoris B, quum eadem multiplex L M eiusdem H, etiam hic pro antecedente sumpta, non sit maior in hac posteriori combinatione multiplici D F sequentis A G. Ergo H dicit maiorem proportionem ad B, quam ad A G ex def. II. præc. part.

THEOR. III. PROPOS. IX.

Quæ ad eandem possident eandem rationem, æquales sunt inter se: Et ad quas eadem eandem habet rationem; istæ quoque sunt inter se æquales.

HÆc propositio ostenditur per reductionem ad impossibile, & conuertit vtramque partem Theor. I. huius.

Assumantur itaque duæ lineæ A, & B, quæ dicant eandem proportionem ad C. Dicit propositio, *quòd A, & B sunt inuicem æquales.*



Quòd, si non sunt æquales.

Sit A maior, & B minor. Erit ergo ex præced. propositione maior proportio maioris A, quàm minoris B ad eandem C contra hypothesim.

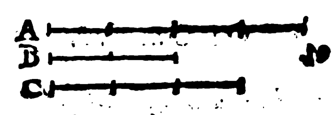
Probatur quoque secunda pars. Quoniam, si C respicit per eandem proportionem A, & B, & non sunt ęquales: Ergo ex 2. parte præced. prop. C diceret maiorem proportionem ad B, quàm ad A contra hypothesim.

THEOR. IV. PROPOS. X.

Ad eandem magnitudinem rationem habentium, quæ maiorem rationem habet, illa maior est; Ad quam verò eadem maiorem rationem habet, illa minor est.

HÆc propos: conuertit duas partes propos. 8. & ipsa quoque probatur per reductionem ad impossibile.

Sit A, quæ maiori ratione refertur ad B, quàm C refertur ad ipsam B, Dicit A esse quoque maiorem; quàm C.



Probatur. Nam, si forent æquales A, & C, haberent ex præmissa propos. eandem rationem ad B, quòd est contra Hypothesim. Si verò A, quæ maiorem rationē habet esset minor, quàm C, consequeretur contra præsuppositum minorē rationem ad B, quàm C ex propos. 8. Ergo erit A maior, quàm C.

Secundo; si eadem B respicit proportione maiori C, quàm A. Dicit esse minorem C, quàm A. Quod ostenditur: Nam non erunt æquales, quoniam B ad easdē ex 9. propos. eandē rationem haberet. Rursus non maior C, quàm A minor; quia tunc ad A minorem quantitatem, maiorem rationem haberet ex 8. propos. quàm ad C: Ergo erit C minor, quàm A: cum non sit, nec æqualis ipsi A, nec maior ipsâ.

EXPENSIO III.

De plurium quantitatum ad plures quantitates dissimili comparatione.

VTilis admodum euadit hæc speculatio ad ostendendos modos argumentandi in omni genere proportionum etiam irrationalium; ita vt huius propositiones sint veluti quædam Lemmata ad propositiones de plurium quantitatum proportionalium similitudine ad aliam item plurium quantitatum proportionalium similitudinem percipiendam, per quam, deinde veritatem, & firmitatem argumentorum Mathematicorum cognoscimus.

THEOR. I. PROPOS. XI. Euc. 13.

Si prima ad secundam eandem rationem habuerit, quàm tertia ad quartam; tertia verò ad quartam maiorem rationem habuerit, quàm quinta ad sextam: prima quoque ad secundam maiorem rationem habebit; quam quinta ad sextam.

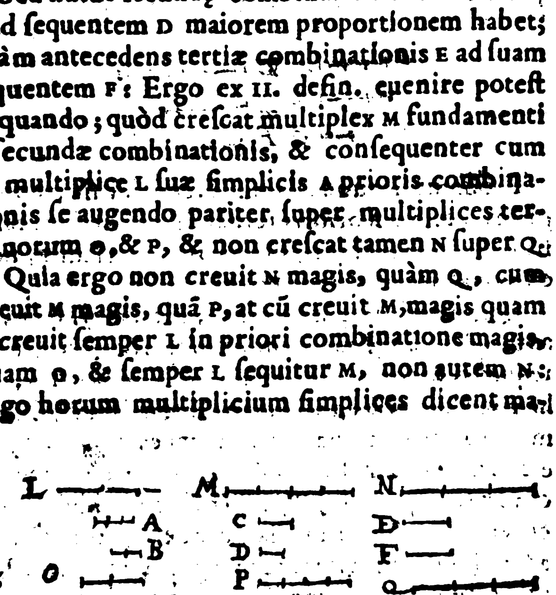
ASsumantur tres combinationes quantitatum A, B, & C, D, & E, F, quarum duæ nimirum A, B, & C, D, dicant proportionem; ita vt A, quæ dicitur prima, & antecedens ad B suam sequentem cōparata, ita se gerat in eâ continēda, vt secundę combinationis C antecedens ad D sequētem relata. Hæc verò antecedens secundæ combinationis, nimirum C ad sequentem suam D collata maiorem proportionem dicat, quam tertię combinationis antecedens E ad sequentem suam F. Asserit, *quòd, & antecedens primæ combinationis A dicet maiorem proportionem ad sequentem suã B, quàm combinationis tertiæ antecedens E ad suam sequentem F.*

Probatur. Accipiantur multiplices antecedentium, seu fundamentorum in singulis combinationibus L M N, & multiplices sequentium idest terminorum O, P, Q, quæ singulæ fundamentorum sint sibi æqué multiplices; sicut etiam terminorum sint sibi æqué multiplices, licet differant à multiplicitate priorum.

Si itaque antecedens secundæ combinationis C ad suam sequentem D dicit eam proportionem, quam primæ combinationis antecedens A dicit ad suam sequentem B; Ergo multiplices earum antecedentium ex 9. defin. pr. p. huius crescent simul semper decrescent, æquabuntur adhibitâ qualibet multiplicatione respectu sequentium; ita vt, cùm superat vna antecedens sequentem suam, superet, & alia antecedens sequentem suam; si æquat, æquet; si vna deficit, deficiat, & alia.

Sed huius secundę combinationis antecedens C ad sequentem D maiorem proportionem habet; quàm antecedens tertiæ combinationis E ad suam sequentem F: Ergo ex II. defin. euenire potest aliquando; quòd crescat multiplex M fundamenti C secundæ combinationis, & consequenter cum eo multiplice L suæ simplicis A prioris combinationis se augendo pariter super multiplices terminorum O, & P, & non crescat tamen N super Q.

Quia ergo non creuit N magis, quàm Q, cum creuit M magis, quã P, at cū creuit M, magis quam P, creuit semper L in priori combinatione magis, quam O, & semper L sequitur M, non autem N: Ergo horum multiplicium simplices dicent ma-



13

iorem proportionem, & si dicit maiorem proportionem C ad D. quam E ad F, etiam ex II. definit. dicet maiorem proportionem A ad B, quam E ad F: quòd multiplex L simplicis A simul, cùm multiplici M simplicis C maior inuenta sit aliquã-do, quam multiplex O, & P terminorum suorum; non autem N multiplex E maior inuenta sit multiplici Q termini sui F.

COROLLARIVM

HOc etiam argumentum demonstrat, quòd si secundæ combinationis fundamentum C ad terminum D dicat minorem proportionem, quàm dicat E ad F; eam quoque dicere A ad B: cùm sicut M multiplex minor sit, quam P, sic, & L multiplex minor sit, quam O; cùm tamen N aliquando maior sit, vel æquet Q.

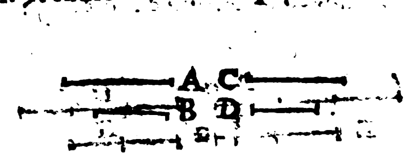
THEOR. II. PROPOS. XII. Eucl. 14.

Si prima ad secundam eandem rationem habuerit, quam tertia ad quartam; Prima verò, quàm tertia sit maior; etiam secunda maior erit, quàm quarta: Quod si fuerit æqualis prima tertiæ, erit etiam æqualis secunda quartæ, si fuerit prima minor, quam tertia erit etiam secunda minor, quam quarta.

TRes partes propositio enumerat, quæ tamen singulæ faciliter probantur. Si sint duæ combinationes, quarum antecedens A, quam dicit primam ad sequentem B, quam vocat secundam ita comparetur in proportione, vt alterius combinationis C tertia ad sequentem D quartam. Dicit propositio; *Quòd qualis altera antecedentiũ fuerit respectu alterius antecedentis: Etiam altera sequentium respectu suæ sequentis* talis erit, si maior antecedens A antecedente C; maior erit quoque sequens B sequente D, si æqualis, æqualis; si minor A, quàm C, minor quoque erit B, quàm D.

Quoniã ponitur maior A ãtecedēs antecedēte C, erit maior proportio A ad B, quã C ad B. Itaq; sunt tres cōbinationes quantitatum; prima est C ad D, quę ita refertur, vt in secūda cōbinatione A ad B: Verùm hæc secunda A ad B nō ita refertur, vt tertia C ad B: sed maior est proportio A ad B secundę combinationis, quam C ad B tertiæ, vt in principio dixi: Ergo ex præcedenti maior erit quoque proportio in prima combinatione C ad D; quam in tertia C ad B. Cum ergo eadem C dicat maiorem rationem ad D, quam ad B; ideoque minorem ad B, quàm ad D, ideo ex 8. propos. maior erit B, quàm D.

Probatur secunda pars. Quia ponitur æqualis antecedens A antecedenti C, erit eadem proportio A ad B; quam C ad B: Cùm ergo ex hypothesi sit A ad B, vt C ad D, erit etiam eadem proportio C ad D; quam C ad B: Ideoque D, & B ex propos. 9. inuicem erunt æquales.



Tertia quoque pars patet ex Coroll. propos. præced. Nam si minor est A, quam C, erit minor proportio A ad B, quam C ad B. Itaque instituemus tres combinationes: Eritque prima C ad D in eadem proportione, quam A ad B; sed hæc secunda A ad B non erit in eadem proportione, quã in tertia C ad B: Verùm minor erit proportio A ad B; quàm C ad B: Ergo ex præced. Coroll. minor quoque erit proportio C ad D, quam C ad B, Ideoque C ad B habebit maiorem proportionem, quàm ad D, quare ex 9. propof. B erit minor quàm D.

COROLLARIVM I.

Clarum autem est ob æqualitatem proportionum; Quod si antecedens A sua sequente B sit maior; quòd etiam antecedens C sua sequente D futura sit maior: Quia alioquin si A esset maior, quàm B, & C minor quam D, aut æqualis ipsi D illa quantitas A diceret proportionem maioris inæqualitatis ad B, at quantitas C diceret ad D proportionem, aut minoris inæqualitatis, aut æqualitatis. Et idem asseras si A sit minor, quàm B, etiam C futuram esse minorem, quàm D, & si æqualis sit A, & B, & alias quoque quantitates C, & D eadem æqualitate potiri.

COROLLARIVM II.

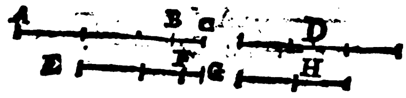
Colligitur quoque, Quod si B, & C sit eadem, vel sint æquales; quòd, si A ponatur maior, quàm C, ipsa C etiam erit maior, quàm D, dummodo sit A ad B, vt C ad D; quia, cùm B sit maior, quam D ex prop. 12. & est ei B æqualis, erit etiam ipsa C maior, quam D.

THOR. III. PROPOS. XIII. Eucl. 25.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint; maxima, & minima reliquis duabus maiores erunt.

Sint duæ magnitudines A C, & D, quæ se inuicem proportione ea respiciant, quâ aliæ duæ E G, & H. Sitque A C maxima earum, & H minima. Dicit; quod, si istæ simul addantur; facient quantitatem maiorem, quàm reliquæ mediocres simul compositæ, nimirum D, & E G. Nam si ex A C maxima detruncetur pars A B æqualis lineæ D, & ex media E G portio æqualis E F lineæ minimæ H, cùm sint æquales additæ simul A B, cum H pro primo toto, & D cum E F pro secundo toto æqualia erunt. Siquidem ipsi H prioris totius æqualem detruncauimus E F partem additam ipsi D, & ipsi lineæ D posterioris æqualem fecimus A B additam partem ipsi H.

Sed portiones residuæ B C maximæ, & F G mediæ sunt inæquales, maiorque est maximæ residuum, quàm mediæ; Ergo, si hæc residua addantur, residuum nempe B C priori toti A B, & H, & mediæ F G posteriori toti E F & D, maius erit prius compactum ex maximâ, & minimâ, quàm posterius totum compositum ex medijs.



Remanet itaque ostendendum, quod residuum maximæ B C, sit maius, quàm mediæ F G. Id verò probatur. Tota A C maxima, est ad suam mediocrem E G, vt D mediocris ad minimam H: Ergo partes ablatæ à maximâ pars A B, & ex mediâ E F eandé dicent proportioné; quia medio@ri D, & minimæ H sunt æquales: Quare ex prop. 6. residua B C, & F G eandem dicent proportionem, quàm sua tota. Totum verò A C maius ponitur eò, quod sit maximum; quam E G; ergo, & residuum BC, erit maius, quàm FG. Alioquin si esset æquale, aut minus non diceret B C ad F G eandem proportionem maioris inæqualitatis quam A C ad E G, sed vel æqualitatis, vel minoris inæqualitatis.

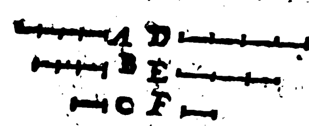
Propositio autem verificatur pro nunc tantùm de proportionalibus multiplicibus ob propos. 6. in qua fundantur; sed infra extendetur ad quascumque proportionales Coroll. propof. 22.

THEOR. IV. PROPOS. XIV. Eucl. 20.

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales, numero, quæ bina, & in eadem ratione sumantur; ex æquo verò prima maior fuerit, quàm tertia, etiam quarta maior erit, quam sexta; si fuerit æqualis, erit quoque quarta sextæ æqualis; si fuerit illâ minor, hæc quoque istâ minor erit.

Svmantur tres magnitudines A, & B, & C, & aliæ tres D, E, & F, quarum combinationes in eadem ratione sint A ad B prioris ternarij, vt D ad E posterioris, & B ad C prioris, vt E ad F posterioris. Dicit primo; quòd si prima A, sit maior tertia C in priori ternario, quòd etiam prima D erit maior, quàm tertia F in posteriori.

Probatur. Nam, quòd A ex hypothesi ponatur maior, quàm C, erit ex propos. 8. maior proportio A ad B, quàm C ad B; & quia eadem est proportio B ad C, quam E ad F, & ideo ex Coroll. propos. 4. C ad B, quam F ad E; dicet quoque A ad B maiorem proportionem, quàm F ad E. Sed A ad B est eadem proportio, quam D ad E ex hyp. Ergo D quoque dicet maiorem proportionem ad E, quàm F ad E: Ergo ex prop. 10. erit maior D, quam F.



Probatur secunda pars: Nempe, si sit æqualis prima A tertiæ B prioris ternarij; quòd etiam talis sit posterioris ternarij prima D ad tertiam F, hoc est æqualem, eodem argumento.

Quoniam sunt æquales A, & C, ex 7. huius A antecedens ad sequentem primi ternarij B erit, vt sequens, & tertia C ad ipsam mediam B: sed, vt hæc media B est ad vltimam, & tertiam C; sic est media alterius ternarij E ad suam extremam F, & è contrà ex Coroll. propos. 4. huius, nempe vt C ad B, sic F ad E; Sed dictum est, quòd C ad B, est vt A primâ ad B mediam, & ex hypothesi, vt A ad B; ita D posterioris ternarij ad E mediam; Ergo, vt D prima ad E mediam, ita F tertia ad E eandem mediam. Quare ex 9. propos. erit D æqualis ipsi F, quod erat probandum.

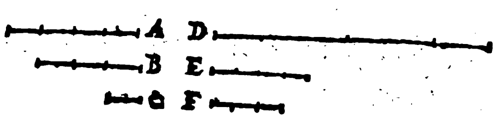
Probatur quoque tertia pars, eodem argumento, quo pars prima, nempe si sit minor A, quàm C, futuram esse quoque minorem D, quàm F.

THEOR. V. PROPOS. XV. Eucl. 23.

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur; fuerit verò perturbata earum proportio; ex æquo autem prima tertiâ maior fuerit, erit quarta maior, quàm sexta; Si æqualis prima tertiæ, etiam quarta sextæ erit æqualis; sin illa minor, & hæc minor erit.

SI ternarium linearum A, B, C, & aliud ternarium D, E, F; Quarum proportio sit perturbata nimirum relatio, & proportio, quæ intercedit inter primam A, & secundam B prioris ternarij imitetur proportionem, quæ est in posteriori secundæ E ad tertiam F. Quæ verò proportio reperitur inter secundam B, & tertiam C prioris ternarij similis sit proportioni, quam habet D primò posita ad secundam E.

Dico; quòd, si in priori ternatio prima maior erit, quàm tertia; etiam in posteriori prima, quã Euclides vocat quartam, maior erit, quàm tertia, quam vocat sextam.



Probatur hæc prima pars: Quoniam maior ponitur A prima, quàm C tertia: Ergo maior erit proportio primæ A ad mediam B, quàm tertiæ C ad eandem mediam B; Sed in eadem proportione reperitur B ad C, in qua D ad E, & ideo ex Coroll. propos. 4. C ad B, quàm E ad D. Ergo maior proportio A ad B, quàm E ad D: vt erat maior quã C ad B. Rursus eadem proportio reperitur A ad B, quã E ad F. Ergo est maior proportio E ad F; quàm E ad D. Igitur ex prp. 10. D erit maior, quã F.

Probatur secunda pars de æqualitate; nempe; si A ponatur æqualis ipsi C, quòd D erit æqualis ipsi F.

Quoniam A, & C sunt æquales: Ergo ex prop. 7. eandem rationem habent A, & C ad B; sed ratio, quâ B respicit C, est eadem, quâ D respicit E; & ex Coroll. 4. eadem quoque ratio est C ad B, quàm E ad D; Igitur eadem ratione A refertur ad B, quâ E ad D: Sed rursus A proportionem dicit ad B, vt E ad F. Ergo E refertur ad E eadem proportione, ac ad F: Ergo F, & D erunt æquales, ex propos. 9. huius.

Probatur quoque tertia pars eodem prorsus argumento, quo prima pars ostensa est; Quod scilicet posito A minori, quàm C in priori ternario, minor quoque in posteriori sit D, quàm F. Quia enim minor est A, quàm C dicet minorem proportionem ad B, quàm C ex 8. propos. Sed A ad B est, vt E ad F: Ergo E ad F dicet minorem proportionem, quàm C ad B. Sed vt est B ad C, ita est D ad E, & ex Coroll. prop. 4. C ad B, vt E ad D: Quare erit minor proportio E ad F, quàm E ad D; vnde D erit minor, quàm F.

EXPENSIO IV.

De modis argumentandi; seu similitudine proportionum.

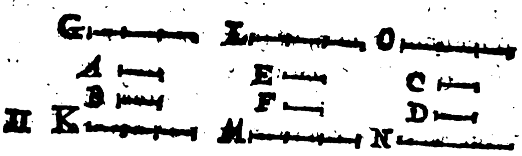
HVcusque comparauimus quantitates secundùm, quòd, aut maiorem, aut minorem proportionem dicebant, & semper dissimilem, & fundamenta proiecimus, quibus modos supra descriptos argumentandi in proportionibus ostendamus optimos, & euidentes: Nunc ad ipsas ostensiones horum modorum animus delegandus.

Obseruandum est. *Conuersionem rationis*, iam supra Coroll. 4. propos. fuisse ostensam: Nam fuit demonstratum; quòd si sint duæ combinationes quantitatum, in quarum prima sit A ad B, vt in secunda C ad D, quòd etiam è conuersò erit B ad A, vt D ad C. Vnde licebit arguere: si est A ad B, vt C ad D; erit etiam D ad C, vt B ad A conuertendo. Hic itaque alij modi erunt ostendendi.

THEOR. I. PROPOS. XVI. Eucl. 11.

Quæ eidem rationi sunt ædem rationes, & inter se sunt ædem rationes.

SInt proportionales inuicem quantitates A B in prima combi natione, & quantitates E F in secunda. Istisque quantitatibus E F sint item proportionales quantitates tertiæ combinationis C, D, ita vt similitudo proportionum; quæ est inter combinationes primam, & secundam non sit diuersa, sed eadem; quæ est inter proportiones secundæ, & tertiæ combinationis. Dicit propositio; quòd hæ proportiones quantitatum primæ combinationis sint similes proportionibus ter-



tiæ combinationis, & ponitur vniuersale fundamentum, & generale arguendi in proportionibus; siquidem omne efficax argumentum fundatur in hoc, vt proportiones sint similes alicui tertiæ proportioni, ex quo deducitur esse similes inuicem.

Ad id ergo probandum assumantur alia paria combinationum singulis istis combinationibus multiplicium, ita, vt multiplices fundamentorum æquali vicium numero constent; Terminorum quoque licet non cum primis, inuicem tamen sint æquè multiplices, itaque Fundamentorum, seu antecedentium A, E, C, sint æquè multiplices G, L, O; Terminorum verò sint æquè multiplices K, M, N.

Prob. Cum ponamus primam combinationem A, & B dicere proportionem eandem secundæ cõbinationis quantitatibus E, & F: Ergo ex defin. 9. Crescente multiplici aliqua G in omni multiplicatione ipsius fundamenti A super aliam correspondentem multiplicem K termini B, vel decrescente

ſcente, vel illi ſe æquante, creſcet decreſcet, æquabitur ſimul, & altera fundamenti E multiplex L ſuper ſuam correſpondentem M termini F.

Verùm, quia ponitur quoque eadem proportio inter quantitates tertiæ combinationis, & ſecundæ; eſtque E, ad F, vt C ad D, multiplices fundamentorum creſcent, decreſcent, æquabuntur pariter reſpectu multiplicium terminorum, & L, V. g. ſuperante multiplicem M, ſuperabit quoque O multiplicem ſuam N, vel hæc æquabitur, illâ ſe æquante, vel deſficiet illâ deſficiente.

Itaque multiplices G, O fundamentorum A, & C combinationum extremarum concordabunt ſimul in creſcendo, decreſcendo, & ſe æquando reſpectu multiplicium K, N terminorum B, & D: dum concordant in eodem cremento, decremento, & æquatione cum media L multiplici fundamenti E, reſpectu multiplicis M ſui termini F.

Itaque, cùm A, & C fundamenta habeant ſuas multiplices O, & L reſpectu multiplicium K, & N terminorum ſuorum B, & D creſcentes ſimul, ſimulque decreſcentes, & ſimul ſe æquantes, habebunt fundamenta ad ſuos terminos ſimilem proportionem, & A erit ad B, vt C ad D.

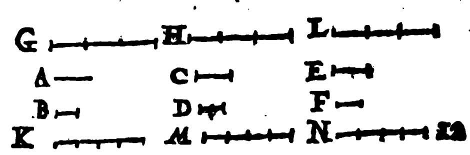
THEOR. II. PROPOS. XVII. Euc. 12.

Si ſint magnitudines quotcumque proportionales; quemadmodum ſe habuerit vna antecedentium ad vnam conſequentium; ita ſe habebunt omnes antecedentes ad omnes conſequentes.

IN prima huius demonſtratione hoc Theorema oſtenditur in proportione multiplici; Modo verò hìc oſtenditur in proportione quacumque etiam irrationali. Dicitur itaque, quòd ſi dentur tres combinationes, aut etiam plures; quarũ antecedens ad ſequentes ſuas, fundamẽtaq; proportionum terminis eandem obtineant proportionem, & ſit in prima combinatione A ad B, vt in ſecunda C ad D, vt in tertia E ad F, quæ omnes ſimilitudine proportionum correſpondeant. Dicit, quòd, ſi omnes antecedentes ſimul accipiantur A, C, E, & comparentur ad omnes ſequentes ſimul B, D, F, omnes antecedentes, ad omnes ſequentes ſimili proportione correſpondebunt, vt aliqua antecedens, ex ipſis V. g. C ad ſuam ſequentem D proportionatur.

Prob. Nam acceptis æquè multiplicibus G, H, L ad omnes antecedentes A, C, E, erunt omnes ſimul æquè multiplices ad omnes antecedentes A, C, E, ſimul ſumptas vt vna ſcilicet G vni earum A ex prima propoſ. huius. Acceptis quoque æquè multiplicibus K, M, N, ſequentium B, D, F, erunt omnes multiplices ſimul collectæ K, M, N, ad omnes ſequentes B D F item ſimul ſumptas, vt vna multiplex K ad vnam ſuã ſequentem B. Sed, & antecedentes ſingulæ proportionẽ conſequuntur eandem ad ſuas ſequentes ex hypotheſi. Ergo ex defin. 9 part. pr. huius æquabitur ſimul, decreſcet creſcetque multiplex vnius antecedentis A reſpectu multiplicis ſuæ ſequentis B cum multiplices omnes G, H, L, omnium antecedentium A, C, E, in omni multiplicatione conſimili gradu, vel decreſcunt, vel creſcunt, vel æquantur reſpectu multiplicium K, M, N, ſimul ſuarum ſequentium B, D, F.

Si itaque omnes multiplices G, H, L, omnium antecedentium A, C, E, relatæ ad multiplices omnes K, M, N, omnium ſequentium B, D, F, creſcunt, decreſcunt, æquantur quemadmodum vna V. g. G relata ad ſuã correſpondentem K. Igitur ex definitione 9. omnes antecedentes A, C, E, ſimul iunctæ ad omnes ſequentes B, D, F, ſimul vnitas dicent proportionem eandem, veluti vna antecedens, nempe A ad ſuam ſequentem B comparata. Quod erat probandum.

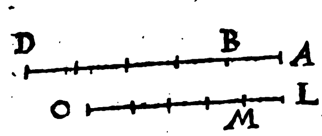


Hic oſtenditur modus argumentandi, quem addidimus, primus; cum enumeratis multis combinationibus, quæ eandem proportionem habeant, ex inde arguitur omnia fundamenta eſſe ad omnes terminos, vt vnum fundamentum ad ſuum terminum: & eſt Enthimemma, quod alia probatione non indiget, cùm remaneat hìc probatum, & redactum ad prima principia, & totalem euidentiam, vt patet.

THEOR. III. PROPOS. XVIII. Euc. 15.

Partes cum pariter multiplicibus in eadem ſunt ratione, ſi ſumantur pro vt inuicem reſpondent.

SInt ſuarum partium A B, & L M, æquè multiplices lineæ A D, & L O dicit ſingulas eſſe proportionales inuicem. Si ita ſumantur prout correſpondent, nempe ſi referatur pars ad partem, ita totum, ad totum.



Probatur. Nam ſingulæ partes lineæ A D ſunt æquales inuicem; Ergo ex 7. propoſ. omnes ad vnam earum V. g. ad A B eandem habent rationem, ſic, & in linea L O omnes, cum ſint æquales, ad vnam eandem earum V. g. ad L M habent eandem rationem.

Igitur, vt ſe habet vna antecedentium A B ad vnam conſequentiũ L M V. g. ita ſe habebunt omnes ſimul antecedentes, ideſt tota linea A D ad omnes conſequentes, nimirum L O, ex pr. 17.

THEOR. IV. PROP. XIX. Eucl. 16.

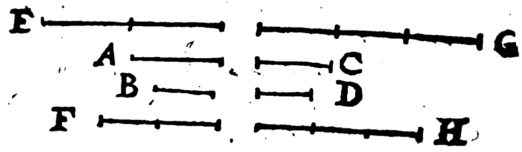
Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & vicißim proportionales erunt.

HIc demonſtratur alterna, ſeu permutata proportio, quæ tradita eſt def. 16. Si namque ſint duæ combinationes, quarum in vna antecedens A ad ſequentem B eam proportionem dicat, quam in ſecunda combinatione antecedens C dicit ad D.

Dico quoque eam proportionem dicere ambo antecedentes inuicem A, & C, quam ſequentes inuicem dicũt B, & D, quod tamen intelligendum, quũ proportiones ſunt in eodẽ genere, vt patebit.

Ad

Ad id vero probandum in prima combinatione antecedenti A, & sequenti B sumantur multiplices E F, quæ complectantur numerum partium equalem, & idem fiat in secunda combinatione assumendo multiplices G, & H, quæ licet non cum primis, adhuc tamen saltem inuicem partes equalis numeri habeant.



Probatur. Nam antecedentium multiplices E, & G crescent, equantur, decrescunt, vt sequentium multiplices F, & H. Ergo ipsę inuicem antecedentes A, & C proportionem dicunt eam, quam consequentes B, & D. Probatur, quod crescant, decrescant, equentur multiplices antecedentium, vt multiplices sequentium ex defin. 9. quia dicunt inuicem proportionem. Quòd verò dicant proportionem patet; quia eidem dicunt proportionem: nam ex propos. præced. ita proportionatur multiplex E multiplici F sequentis, sicut antecedens A proportionata est ad sequentem B; sed præsupponitur quod antecedens A ad sequentem B in prima combinatione dicant eam proportionem, quam antecedens secundæ combinationis C dicit ad D. Ergo, & multiplex E antecedentis proportionem dicit cum F multiplice sequentis, vt antecedens C secundæ combinationis ad sequentem D.

Sed idem quoque ex præmissa propos. de multiplici G respectu suæ antecedentis C, & de multiplici H respectu suæ sequentis D. in secunda combinatione asserendum nempe, quòd dicant eam proportionem, quę reperitur inter antecedentem C, & sequentem D huius ipsius secundæ combinationis. Ergo multiplices in prima combinatione inuicem, & multiplices secundæ combinationis inuicem eam proportionem dicunt, quam antecedens C, & sequens D. Quare dicent, ex 16. huius eandem proportionem inter se duę E ad F, vt duæ G ad H: Æquabuntur, itaque crescent, & decrescent æqualiter ex 12. propos. huius in omni multiplicatione. Vnde, & quantitates, quibus sunt multiplices, nimirum antecedentes A ad C, & sequentes B ad D inuicem dicent eandem proportionem ex defin. 9. part. primæ.

COROLLARIVM I.

VNde colligas posse mutari rationem alternè solum in proportionibus eiusdem generis, quia si essent diuersi generis non possent dici, multiplices primæ combinationis, & secundę vnquam æquari, vel esse maiores, vel minores; quia quantitates diuersi generis sicut æqualitatem non habent, ita nec possunt dici maiores, vel minores.

COROLLARIVM II.

HInc, & ex propos. 17. illum modum, quem assignauimus supernumerarium, & definit. 20. appellauimus Collectionem probare possumus. Nam dispositis terminis.

2	3	4
6	9	12

Ita vt sit 2. ad 3. vt 6. ad 9. & 3. ad 4. vt 9. ad 12. erit etiam permutando 2. ad 6. vt 3. ad 9. & 3. ad 9. vt 4. ad 12. Quamobrem ex propos. 17. poterimus colligere omnia fundamenta simul in hac proportione permutata 2. 3. 4. nempe 9. comparando ad omnes terminos simul 6. 9. 12. scilicet 27. & dicere, quòd, ità sit 2. ad 6. vt 9. ad 27. nempe vt fundamentum aliquod 2. ad suum terminum 6. ita omnia fundamenta 9. ad omnes terminos scilicet 27.

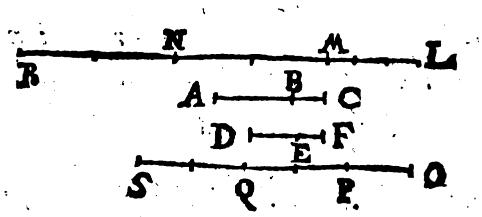
PROB. V. PROPOS. XX. Eucl. 17.

Si cõpositæ magnitudines proportionales fuerint, hæ quoq; diuisæ proportionales erunt.

DEmonstratur his modus argumentandi, in proportionibus, qui dicitur diuisio rationis. Namque si tota magnitudo AC, sit proportionata ad suam partem BA, veluti tota DF ad suam partem ED.

Dicit quoq; diuisas eandem seruare rationem, & adhuc esse, vt pars AB ad eiusdem partem alteram BC, ita pars DE ad eiusdem totius partem alteram EF.

Quod vt probetur assumendę sunt duarum partium AB, & BC æquè inuicem multiplices, quæ erunt LM, & MN. Deinde duarum partium alterius quantitatis DE, & EF æquè multiplices inuicẽ, & cũ primis OP, & PQ. Vbi considerandũ est, ex prima prop. huius, quòd istæ multiplices partium simul positæ, vt OQ, & LN, sunt quoque æquè multiplices totorũ AC, & DF: Quo notato, rursus accipiantur æquè multiplices partiũ AB, & DE, & addantur primis ipsarum met assumptis multiplicibus simulq; positę ex secunda prop. huius erunt adhuc æquè multiplices, nimirum MNR quantitati AB, & PQS, quantitati DE.



Quoniam NM prima in priori serie ex multiplex secundæ AB, vt in posteriori QP est multiplex secundæ DE: & NR tertia prioris seriei, ita est multiplex suæ secundæ AB, vt tertia QS in posteriori serie est multiplex suę secundę DE; ideo, vt ibi docetur, simul composita prima, tertiaque MR erit etiam ita multiplex secundæ AB prioris seriei, & posterioris prima cum tertia PS suæ secundæ DE.

Quo posito. Assumantur pro prima combinatione totæ quantitates AC, & DF, quæ vt supponitur dicunt similem proportionem cum suis partibus BA, & DE, quę pro secunda combinatione assumendæ sunt, & ita sit AC tota ad AB partem, vt DF tota ad DE partem; quare earum multiplices simul, æquantur, crescunt simul, atque decrescunt in omni multiplicatione ex 9. defin. nimirũ LN & OQ totorum, & fundamentorum respectu MNR, & PQS, quæ sunt multiplices partium, & terminorum, sed composita, vt diximus. Ablatis itaque partibus istis, ex quibus componuntur ab æquè multiplicibus MN hinc & PQ, inde, quæ sunt communes, tum multiplicibus totorum, tum multiplicibus partium; cùm crescunt, crescent

adhuc

adhuc, cùm deficiunt, deficient quoque, cùm æquantur, similiter æquabuntur remanentes multiplices hinc LM, & OP residuę totorum, respectu quantitatum similiter residuarum partium RN, & QS. Sed hæ remanentes sunt etiam multiplices partium, nimirum LM partis CB, & PO partis FE ex hypothesi, in prima combinatione; At in secunda RN ex ostens. est multiplex partis AB, & SQ partis ED. Ergo partes AB ad BC inuicem proportionem dicunt vt DE ad EF, ex 9. defin. cùm earum æquè multiplices simul crescant, decrescant, & æquantur iuxta quamlibet multiplicationem antecedentiũ respectu consequentium.

COROLLARIVM

Collige hinc posse argumentari, quòd, si pars ad totum proportionem dicit, vt alia pars ad suum totum, etiã pars ad partem, vt altera pars ad alteram partem dicat proportionem, tam rectè, quam conuersè argumentando; nimirum ne dum rectè dicendo, vt AC ad AB, ita DF ad DE: Ergo vt AB ad BC, ita DE ad EF; sed etiam conuersè, ergo, vt CB ad AB ita EF ad DE.

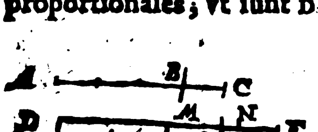
COROLLARIVM.

Deducitur secundò, nihil interesse, quod sumantur pro prima combinatione, partes maiores, aut minores; quia æquo modo valet argumentum, vt patet. Nec quòd assumantur priùs maiores partes; vt totis proportionales, ex quo arguatur; quod etiam partes eædem maiores sint residuis partibus proportionales, vt si dicatur vt AB, ad AC; ita DE ad DF. Ergo vt AB ad BC; ita DE ad EF.

THEOR. VI. PROPOS. XXI. Euc. 18.

Si diuisæ magnitudines sint proportionales; hæ quoque compositæ erunt proportionales.

Hæc propositio demonstrat illum modum argumentandi in proportionibus esse bonum; quo deducitur vt definitione 24. quòd, si diuisæ magnitudines sint proportionales, coniũctas quoque eandem proportionem seruare, qui modus arguendi apellatur *Compositio rationis*. Si dentur itaque diuisæ magnitudines; nimirum AB, & BC proportionales; vt sunt DF ad FE.



Dicit compositas quoq; esse simili proportione correspondentes, & totum AC, ad partem BC referri, vt totum DE ad partem FE.

Probatur. Si enim totum AC non est proportionatum parti suæ BC; vt alterum totum DE suæ parti FE; erit saltem in aliquo toto eorum aliqua pars, cui correspondeat totum suum, vt parti suæ alterum totum refertur.

Assignetur itaque, & sit in linea DE pars N minor; Sitque iuxta aduersarios AC totum ad BC partem, vt DE totum ad NE partem, quò posito sequitur absurdum tali modo.

Si enim est, vt AC totum ad BC partem, ita DE totum ad NE partem: Erit quoque diuidendo AB pars ad BC partem ex præced. vt AN pars ad NE partem: sed ex hypothesi, vt est AB pars ad BC partem; sic quoque est DF pars ad FE partem: Ergo ex 16. propos. huius pars DN ad partem NE assignatam obtinebit eandem proportionem, quã pars DF ad partem FE primo positam: quòd earum proportiones sint similes tertię proportioni; nimirum AB ad BC. Sed antedecens DN ponitur maior, quàm antecedens DF; ergo etiam sequens NE erit maior sequente FE ex propos. 13. hoc autem absurdum est, quia ponitur minor ab aduersarijs. Quod si pars EM maior statuatur ipsã FE, & velint aduersarii, quòd ED totũ ad ME partẽ, sit in eadẽ proportione, quã reperitur AC totum ad BC partem, incidimus adhuc in idẽ absurdum: Nam tunc erit minor ME, quam EF, quæ ME est assignata ab ipsis maior.

Et probatur simili argumento. Quoniam enim ex aduersarijs est AC totum ab BC partem; sic DE totum ad ME partem; poterimus diuidere ex antecęd. & assere, quòd AB pars sit ad BC partem; sic DM pars ad ME partem. Verum etiam pars DF est ad partem FE, vt pars AB ad partem BC ex hypothesi: qua de rẽ DM simili proportione consentiet ad ME; ac DF ad FE; quòd eorũ proportiones tertiæ proportioni, quæ militat inter BA, BC sint similes; Sed antecedens DM ponitur minor, quàm antecedens DF: Ergo etiam, & consequens ME minor esset sequente FE, & tamen maior EM ab aduersarijs constituta est quàm EF.

COROLLARIVM I.

Collige, quòd nihil interest; an arguas priùs, conuertendo terminos, & vtendo conuersione, V. g dicendo; si proportionem dicit AB ad sequentem partem in prima combinatione BC, quam dicit DF antecedens in secunda combinatione ad suã sequentem FE, igitur conuertendo terminos erit sequens BC ad suam antecedentem AB in prima cõbinatione, vt sequens FE ad antecedentem secundæ combinationis DF. Deinde sequatur, is arguendo compositione rationis; Ergo, & erit tota AC antecedens ad sequentem AB suam partem, vt est antecedens DE tota ad sequentem DF suam partem. Imo possum, & adhuc contrario modo sumere terminos, & arguere sequentem quoque, quæ est pars AB se habere ad totam AC antecedentem, vt pars DF sequens ad antecedentem totam DE.

COROLLARIVM II.

Collige hinc illum modum argumentandi in proportionibus cõfirmari, quo arguitur ex proportionis similitudine, quam habet prior linea AB cùm sua parte BC, comparata proportioni, quam habet tota posterior linea DE, cum sua parte FE, quod etiã tota prior AB ad suam reliquam partem AB simili proportione referatur, quam tota posterior DE ad suam reliquam partem DF. Quod ergo iste modus argumentandi bonus sit.

Probatur. Nam cum totã prior, AC se habeat ad suam partem BC, vt posterior DE tota ad suam partem EF, poterit quoque argumentari *diuidendo* ex 20. huius, & assumendo residua pro totis, quare reliqua pars AB, in priori linea erit ad ablatam CB; quo pacto est DF reliqua in posteriori linea ad ablatam FE; Quamobrem, & poterimus conuertere propositionem, & ẽ contra dicere, quod ablata CB in priori linea ad residuum AB est,

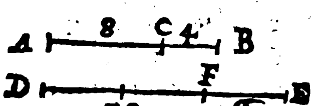
sicut

sicut ablata EF ad residuam DF. Iterumque Componendo ex propos. I. huius, quòd sicut se habet tota AC prior ad suã partẽ residuã AB, ita se habeat tota DE posterior ad DF suam residuam partem.

THEOR. VII. PROP. XXII. Eucl. 19.

Si quemadmodum totum ad totum, ita ablatum ad ablatum; & reliquum ad reliquum, vt totum ad totum se habebit.

SVpra id quoque ostensum est ab Eucl. in proportione multiplici, vt quid faciliùs, licet demonstratio ab illa nullo pacto dependeat, cùm tamen à multis antecedentibus, vel mediatè, vel immediatè dependentiam obtineat. Hic itaque generaliter ostendit, & dilatat propositionem etiam ad proportiones irrationales. Si itaque reperiatur aliqua quantitas AB, quæ tota ad aliam DE similis in proportione sit, vt eius aliqua pars BC, est proportionata alterius parti EF. Dicit quoque reliquum AC ad reliquum DF similem proportionem consequi.



Probatur. Nam ex propos. 16. si in prima cõbinatione tota antecedens prior linea AB ad sequentem posteriorem totam DE, vt pars à priori linea BC antecedens in secunda combinatione ad sequentem EF partem ablatam alterius posterioris, licebit permutare terminos; & affirmare ex propos. 19. *permutando;* Antecedentem quoque totam AB ad antecedentem BC, quæ est sua ablata pars, dicere eam proportionem, quam sequens tota DE dicit ad sequentem EF, quæ est sua à se ablata pars. Iterumque ex propos. 20. poterimus arguere *diuidendo*, & dicere; Quod si eandem proportionẽ, quam dicit tota antecedens AB, in priori linea ad antecedentem BC, quę est ablata sibi pars, dicit quoque tota sequens DE in posteriori linea ad ablatam sui partem EF; Quod etiam reliqua pars AC prioris lineæ ad BC residuum in eadem proportione sint; quam posterior DF ad posteriorem FE dicebat. Quare rursus *permutando* erit, vt AC fundamentum ad DF fundamentum, vt terminus BC ad terminum FE: hoc est, vt tota AB ad totam DE, quæ ex hypoth. vt BC ad EF comparatur.

COROLLARIVM.

HInc apparet propositionem 13. esse intelligendam vniuersaliter; cùm vniuersaliter sit verum, quòd, si sit totum ad totum, vt ablatum ad ablatum; etiam reliquum ad reliquum, ita erit vt totum ad totum; & ideo, quòd, cum sit AC maior, quam EG, quod etiam sit residuum BC maius quam FG adhibita figur. propos. illius.

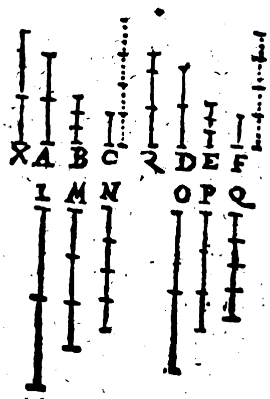
THEOR. VIII. PROPOS. XXIII. Euc. 22.

Si sint quotcumque magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero; quæ binæ in eadem ratione sumantur; etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

DEmonstrauit superius Euclides in propos. 14. quòd binæ sumptæ in eadem ratione quantitates essent, vel æquales, vel minores, vel maiores alijs quantitatibus sumptis, vt binæ pariter secundùm proportionem similem, ad primas: nunc demonstrat esse etiam proportionales, ex quo desumitur modus argumẽtandi ex Æqualitate vocatus.

Sint itaque magnitudines ABC, & aliæ tres DEF, Sitque prima, & antecedens A ad suam secundam, & sequentem B, in priori ternario, vt in posteriori prima D, & antecedens est ad secundam, & sequentem E. Sit quoque B modo, vt antecedens posita ad tertiam C suam sequentem in priori ternario, vt in posteriori secunda E sumpta, vt antecedens, est ad tertiam F sequentem suam. Dicit *ex æqualitate primã A ad tertiam* C in priori ternario *ita referri*, vt in posteriori *primã D ad tertiam* F intermissis medijs terminis B, & E.

Quod, vt ostendatur, accipit singulis quantitatibus prioris ternarij singulas lineas L, M, N, quarum quęlibet, ita multiplex suæ cuique lineæ assumantur, vt assumuntur in posteriori ternario multiplices O, P, Q, correspondentibus lineis. Lineæ itaque L, & O, sint æquè multiplices primarum A, & D, V. g. duplæ: M verò, & P sint æquè multiplices secundarum B, & E, V. g. triplæ; N Q tandem sint æquè multiplices tertiarum V. g. quadruplæ.



Probatur. Nam tum in priori, tum in posteriori ternario primarũ multiplices L, O, relatæ ad tertiarum multiplices N, & Q, crescunt decrescunt pariter ad quãcumque multiplicationem, vel etiam eis æquãtur. Ergo primæ A, & D quibus sunt multiplices ex 9. definitione in eadem proportione erunt respectu tertiarum C, & F.

Remanet antec. probanda. Probatur autem ex 14. propositione huius. Nam multiplices binæ in eadem proportione sumuntur, ita, vt in priori ternario multiplicium, ita respiciat prima multiplex L secundam suam M, sicut in posteriori multiplicium ternario prima multiplex O, respicit suã multiplicẽ P, & idẽ dicas de secunda multiplici M relata ad multiplicem tertiã N, quæ ita se habet ad eam, vt in posteriori ternario multiplicium secunda P ad suam tertiam Q comparata.

Ratio huius ex propos. 4. huius desumitur. Quòd multiplices antecedentes ad sequentes suas eam habeant proportionem, quam habent simplices antecedentes, quibus multiplices sunt ad suas sequentes simplices. Quare, cùm antecedens A ad sequentem B in priori simplicium linearum ternario

nario sit, vt in posteriori antecedens D ad sequentem E ex hypothesi, sequitur, vt tali quoque proportionis similitudine afficiantur earum multiplices ita, vt sit L ad M, vt O ad P. Rursus cum pariter ex hypothesi B ad C prioris ternarij sit, vt E ad F; quod earum multiplices quoque in proportione similitudinem dicant ita, vt sit M ad N, vt P ad Q. Cum itaque ita sit L ad M, vt O ad P; & M ad N, vt P ad Q erit perpetuus nexus, & simultas ex propos. 14. huius L, & O in cremento decremento, & æquatione respectu extremarum N, & Q. Quare ex defin. 9. simplices eandem dicent proportionem, & A erit ad C, vt D ad F.

COROLLARIVM I.

QVod si sint, seu maiores, seu minores eodem pacto probatur V.g. ponamus in priori ternario adesse X, quæ se habeat ad A, vt in posteriori Z ad D, erit quoque ex eodem argumento X sumpta vt prima ad B quæ tunc erit tertia, vt in posteriori Z prima habet ad E, quæ tunc erit tertia, & eodem modo de alijs quibuscumque; vel antecedentibus, vel sequentibus ostendetur.

COROLLARIVM II.

COlligitur secundo esse bonum illum modum arguendi, quo deducitur; quòd ex eo, quia proportionem similem habeant B ad C, vt E ad F, quod etiam similem proportionem linea B ad lineam punctatam ipsâ C quadruplo, vel vt libet maiorem habebit, ac altera D ad lineam punctatam quadruplo, vel vt libet equè maiorem, Maiores enim istæ, cùm sint in proportione multiplicè eâdem, possunt sumi, vt tertiæ; vnde ex æqualitatis argumentatione licebit inferre earum proportionem, cùm primis, & dicere: ex eo, quod C sit ad B, vt F ad E, multiplicem quoque C esse ad B, vt multiplex ipsius F ad E.

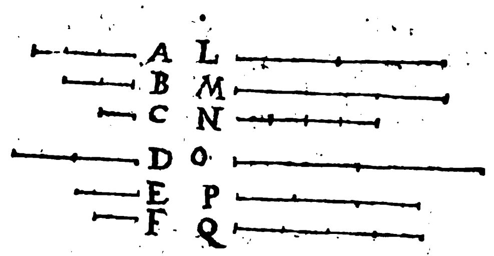
THEOR. IX. PROP. XXIV. Eucl. 23.

Si sint tres magnitudines, aliæque ipsis æquales numero, quæ bina in eadem ratione sumantur, fuerit autem perturbata earum proportio, etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

DEmonstratur hic argumentationem ex equalitate esse bonam, etiamsi proportio fuerit perturbata: Sit ergo ternarium prius linearum A B C, & aliud posterius D E F, in quorum priori proportio primę A ad secundam B assimiletur proportioni, quam habet secunda E in posteriori ternario ad tertiam F, at quàm proportionem habet prima D huius posterioris ternarij ad secundam suam E; habeat quoque secunda B prioris ternari ad tertiam C. Dicit; *quòd prima A ita proportione referetur ad tertiam C in priori ternario; sicut in posteriori prima D ad tertiam F refertur.*

Quòd vt probet, assumit æque multiplices in singulis ternarijs ita, vt primæ A, & D æquè multiplices habeant L, & O, V. g. duplas; secundæ verò B, & E æquè multiplices obtineant V. g. triplas M, & P: At tertiæ C, & F æquè multiplices nanciscantur N, & Q, V. g. quadruplas.

Probatur ternarium multiplicium cum alio multiplicium ternario in ratione perturbata conuenit; ita vt priori prima L ad secundam M referatur similiter, ac in secunda P ad tertiam Q in posteriori ternario: huius vero prima O ad secundam P referatur, vt in priori secunda M ad tertiã N.



Sed iam probatum est 15. propos. huius, quòd in ratione perturbata primæ V.g. O, & L crescunt decrescunt æquantur simul, & vnâ in qualibet multiplicatione & respectu quantitatum N, & Q inuicem in crescendo, & decrescendo, vel se æquando semper indiuisibiles comites eodem modo se gerunt.

Ergo lineæ simplices nimirum A prima dicet eam proportionem cum tertia C in priori ternario; qualem dicit prima D ad vltimam F in posteriori.

Probandum remanet itaque, quod multiplices tum huius, tum alterius ternarij in ratione perturbata conueniant, ex propos. 18. quia partes cum pariter multiplicibus in eâdem ratione sunt, si sumantur prout inuicem respondent: Cum igitur simplices sint partes multiplicium, quòd earum partibus sint æquales, patet, quòd si simplices in ratione perturbata sibi correspondent, eodem pacto, & multiplices sibi correspondebunt in eadem ratione perturbata: Vnde ita L erit ad M, sicut P ad Q, & O ad P, vt M ad N.

THEOR. X. PROPOS. XXV. Euc. 24.

Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam: habuerit autem, & quinta, ad secundam eandem rationem, quam sexta ad quartam: Etiam composita prima cum quinta, ad secundam, eandem habebit rationem, quam tertia cum sexta, ad quartam.

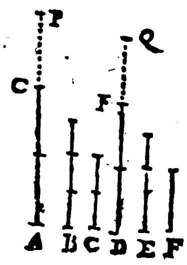
QVod demonstratum est 2. propos. de proportione multiplici, modò hic de omni proportione etiam irrationali ostenditur.

Si sint tres magnitudines in priori ternario, quarum prima A ad mediam B eam dicat rationem, quam in posteriori prima D ad secundam E, & rursus ad has medias nimirum ad B in priori ternario tertia C eam proportionem dicat, quam in posteriori tertia F ad mediam E habet: Affirmat *compositas quoque primam A, & tertiam C*, quod in pactis expressum est prioris ternarij simili proportione respicere B, sicut compositas primam D & tertiam F posterioris ternarij ipsam E.

Probatur itaque obseruando priùs; quòd cùm tertia dicat proportionem ad secundam tum in vno, tum in alio ternario ex hypothesi, *conuersè* arguendo etiam media in quolibet eorũ erit proportionalis tertię, ita vt B sit ad C eodem modo,

ac

E est ad F: quia ex hypothesi C est ad B, quemmodum B est ad F.



Quo supposito, iam possumus arguere ex æqualitate secundùm documenta propos. 23. quia habemus binas in vnoquoque ternario, tum priori, tum posteriori sibi proportione simili respondentes; namque ita est A ad B in priori ternario, vt D est ad E in posteriori, & ita B est ad C in priori, sicut E est ad F in posteriori.

Ergo ex *æqualitate*, ita prima A in priori ternario proportionabitur ad tertiam C, vt in posteriori prima D proportionatur tertiæ F. Et iam poteris arguere *componendo* ex documentis prop. 21. & addendo A primæ linea C, quod per punctatam exprimitur, dicere quod tota AP nimirum continua, & CP punctata ad C dicat similem proportionem; vt dicit tota DQ nimirũ continua cum FQ punctata ad F.

At ad hoc, vt tandem deueniamus ad conclusionem oportet constituere aliam argumentationem ex æqualitate. Iam enim habemus ex dictis vsque adhuc A primam cum C punctata s. AP proportionatam ad C sicut prima D Q proportionatur ad F; Sed ex hypothesi quoque C est ad B proportionata, vt est F ad E. Ergo ita erit ex æqualitate tota AP, nimirum continua AC cum CP punctata ad B; vt est proportionata tota DQ, nimirum continua DF cum FQ punctata ad E.

COROLLARIUM

Colligit hic Clauius; quod hoc modo argumentandi, quo vsi sumus posse, & demonstrari, id quod ostensum est propos. 6. de proportione multiplici conuenire omni proportioni. Nimirum, quod si duæ magnitudines ad duas eandem habeant proportionem, & detractæ quædam habeant ad easdem eandem proportionem, & reliquas, quę remanent, ad easdem eandem proportionem habituras. Nam positâ eadem figurâ assumes pro prima prioris ternarij totam AC cum punctata CP, & pro posterioris ternarij prima DF cũ punctata FQ. Si ergo auferatur C, & F, & ponantur rursus pro tertijs, ita quod ad secũdas suas B, & E eam habeant proportionem, quam habebant, quando erant coniunctæ. Reliquę AC, & DF ad easdem secundas B, & E eam proportionem habebunt, quam priùs habebant integræ ad B, & E. Pr. Nam C est ad B, vt F, ad E: Ergo conuertendo, vt fecimus priùs, B erit ad C, vt E ad F, Quare ex æqualitate tota ACP erit ad C, vt tota DFQ est ad F; Ergo diuidendo ita est AC ad C, vt DF ad F; Et quia ex hypothesi ita est C ad B, vt F ad E; Ideo AC, & DF poterunt poni pro primis C, & F pro medijs, & B, & E pro tertijs, & ex æquali argumentari, ita esse AC ad B, vt DF ad E, quod est propositum.

TRACTATVS X.

IN VI. LIBRVM EVCLIDIS

De proportione quantitatis continuæ.

VIsis proportionibus genericis ad particulares descendimus iuxta diuersitatem materiæ, quibus præcipuè applicantur; Nam alia est proportio numerorum, alia est quantitatis continuæ; Quantitatis verò continuæ duplex est, alia rationalis, alia irrationalis. Modò verò agimus de quantitatis continuæ proportione prout præscindit ab irrationali, seu rationali.

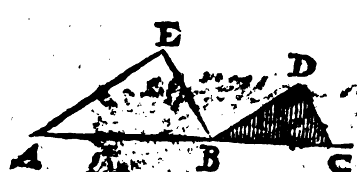
EXPENSIO I.

De principijs huic tractatui spectantibus.

PRincipia, quæ huic expensioni maximè deseruiunt sunt definitiones quædam figurarum, quę proportiones fundant.

DEFINITIO I.

SImiles figuræ rectilineæ sunt, quæ & angulos singulos singulis æquales habent, atque etiam latera, quæ circa angulos æquales proportionalia.



Figuræ illæ similes dicuntur, quæ angulos æquales habent, vt sunt B niger angulo A, & D angulo E, & C angulo albo, & latera proportionalia circa æquales angulos; ita vt sit trianguli nigri crus CD ad alterum BD eiusdem; Veluti crus BE albi ad crus AE eiusdem, quæ complectuntur angulum E album æqualem angulo D nigro, quem crura prædicta DC, & BD complectuntur, & sic de alijs cruribus. Quapropter quadratum, & figura altera parte longior non sunt similes figuræ; quia latera quadrati habent circa quemlibet angulum rectum proportione æqualitatis; at figuræ altera parte longioris proportionem inæqualitatis, licet alioquin, tum vnius, tum alterius figuræ, anguli sint æquales, vtpote recti. Vnde etiam constat omnes figuras, quæ rectilineæ sunt, æquilateræ, & æquiangulæ, & numero eodem, tum laterum, tum angulorum constant, esse inuicem similes, licet maximè sint inæquales.

DEFINITIO II.

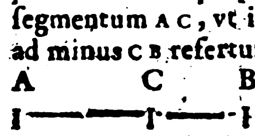
REciprocæ figuræ sunt, cùm in vtraque figura antecedentes, & consequentes rationum termini sunt,

Idest, cùm in prima figura fuerit fundamentum proportionis, & in secunda terminus proportionis eiusdem: in eadem verò secundâ fundamentum reperiatur alterius proportionis correspondentis, & huius terminus in primâ, ita vt duarum proportionum similium nulla sit tota in vnica figura; sed fundamentum sit in vna terminus in alia; hæ dicuntur figuræ reciprocæ. Sic in fig. præced. si sit AE ad BD, vt BC ad BA dicerentur illa duo triangula figuræ reciprocę, quia AE est fundamentum vnius proportionis, & BA terminus alterius in triangulo albo, sic & BD est terminus primæ proportionis, & BC fundamentum secundę proportionis in triangulo nigro.

DEFINITIO III.

SEcundùm extremam, & mediam rationem recta linea secta esse dicitur, cùm vt tota ad maius segmentum, ita maius segmentum fuerit ad minus.

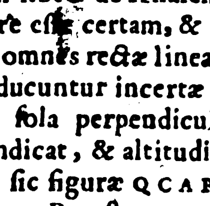
Si linea data AB, ita diuidatur in C, vt correspondeat eadem proportione simili tota ad maius segmentum AC, vt idem maius segmentum AC ad minus CB refertur; tunc dicitur secta in C extrema, & mediâ ratione.



DEFINITIO IV.

ALtitudo cuiuslibet figuræ est, perpendicularis à vertice ad basim deducta.

Ptolomæus in libro de Analemmate inquit. Mensuram debere esse certam, & determinatam. Propterea, cùm omnes rectæ lineæ, quę à vertice alicuius figuræ ducuntur incertæ sint, & indeterminatæ, meritò sola perpendicularis rationem mensurę sibi vendicat, & altitudinem cuiuslibet figuræ metitur; sic figuræ QCAP altitudo est PC cadens in latus QA. Potest tamen quodlibet aliud latus constitui pro basi, & linea perpendicularis à remotiori angulo deducta (acumen enim illius



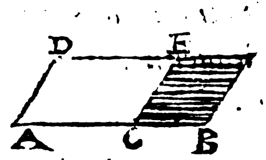
an-

anguli, vertex est) dicitur altitudo figuræ illius, sic V A in latus C Q demissa erit altitudo quoque figuræ. Nota definitionē de compositione Rationum, quam ponit hic Euclides esse supra explicatam Tract. 9. Exp. 5. Def. 7. part. 1.

DEFINITIO V.

Parallelogrammum secundùm aliquam rectam lineam applicatum deficere dicitur parallelogrammo; quando non occupat totam lineam; Excedere verò quando occupat maiorem lineam, quam sit ea secundùm quam applicatur; ita tamen, vt parallelogrammum, quod deficit, vel excedit illi applicato eandem habeat altitudinem, quam ipsum parallelogrammum applicatum; & constituat cum eo totum vnum parallelogrammum.

Sit data recta linea A B, super quam constituatur parallelogrammum A C D E, cuius latus A C totam longitudinem lineæ AB non æquet, sed desit C B; tunc parallelogrammum A E erit deficiens,



& si interrogetur, quo defectu? hic defectus erit parallelogrammum E B nigrum occupans reliquū lineæ C B, & eandem altitudinem cum deficiente A E obtinens, & cum eo parallelogrammum vnicum, vt D B constituens. Deinde sit linea A C, & ei applicetur parallelogrāmū maius B D, quod ipsā excedat latere AB in parte CB; tunc parallelogrammum erit abundans, aut excedens; Excessus autem erit parallelogrammum nigrum E B habens eandem altitudinem, cum prædicto BD, & cum eo idem parallelogrammum constituens DB.

DEFINITIO VI.

Homologa sunt quantitates, cùm, vna, fundamenta, & antecedentia proportionem, altera terminos continet, vel consequentes.

Cum itaque aliqua quantitas habet in se fundamenta, & antecedentia rationum, alia terminos correspondentes, illæ quantitates dicentur homologæ.

V. g. in fig. def. 1. Si sit crus AB albi ad crus BC alterius nigri, vt AE albi ad BD nigri, dicuntur triangula, figuræ homologæ, cum fundamenta ambo AB, & AE sint in albo, termini BC, & BD ambo in nigro.

EXPENSIO II.

De proportione laterum triangulorum.

Cum triangula principium figurarum sint, & ea ex quibus figuræ reliquæ constituuntur; Hinc est, quòd in primis de proportione laterum agatur, quæ ea ambiunt, atque constituunt.

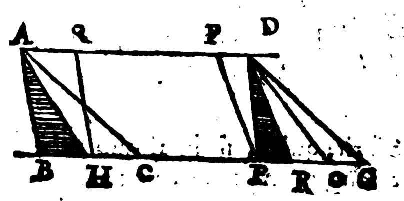
THEOR. I. PROPOS. I. Euc. I.

Triangula, & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita se habent inter se, vt bases.

Cum triangula, & parallelogramma ex def. 4. habeant altitudinem eandem, cum fuerint constituta inter easdem parallelas, ob eandem perpendicularem, quam consequuntur. Constituantur primo duo triangula nigra inter parallelas AD, & BG. Dicit, quòd hæc triangula proportionem similem ad inuicem possident, quam bases.

Quod vt probetur in parallela, quā bases insunt, assumendæ sunt basibus æquales, nimirum basi BH trianguli BHA vna æqualis, quæ sit H C, coniungendæque sunt C, & A, fitque triangulum H A C æquale triangulo nigro sibi contermino ex 1. Coroll. propos. 39. primi.

Rursusque alteri basi F R trianguli nigri assumendæ sunt æquales, V. g. duæ R O, & O G, coniungendæque sunt rectis O D, & D G; fientq; triangula ROD, & ODG ex Coroll. 2. prop. 40. primi æqualia nigro FDR.



Probatur. Bases triangulorum alborum æquales sunt basibus nigrorum triangulorum; ipsaq; triangula suis triangulis conterminis probata sunt ex Coroll. 1. propos. 40 primi æqualia: Ergo sunt æquè multiplicia basis, & triangulum album basi suæ contermina, & nigro triangulo B A H pro priori pari. Sicut trianguli duo, duæq; eorum bases RO, & OG sunt æquè multiplices eiusdem basis F R, & trianguli nigri F D R pro secundo pari: nimirum bases quidem basibus multiplices, sicut triangula triangulis.

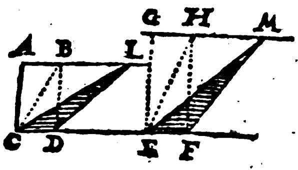
Cum ergo in quacunque multiplicatione basis BH, & trianguli BAH æquè multiplices in primo pari crescant, vel decrescant, vel æquentur pariter relatæ ad æquè inuicem multiplices basis FR, & trianguli nigri FDR in secundo pari; dicendum est ex defin. 9. tract. 9. triangulum nigrum BAH ad nigrum F D R eam habere proportionem, quam habet basis BH ad basim FR, & ideo, quòd basium ad bases, & triangulorum ad triangula sit proportio similis.

Probatur quoque de parallelogrāmis. Partes cum pariter multiplicibus in eâdem sunt ratione ex 18. lib. 5. Sed triangula sunt dimidia parallelogrammorum ex propos. 39. primi: Ergo cum triangulis in eadem sunt ratione; Sed triangula in eadem sunt ratione, vt bases; Ergo, & parallelogramma. Et erit parallelogrammum BQ ad parallelogrammum RP, vt basis BH ad basim FR.

COROLLARIVM

Colligitur ex Commandino; quòd, si triangula habeant æqualem, vel eandem basim se habere ad inuicem, vt altitudines, V. g. triangulum C D L nigrum, & triangulum E M P nigrum erunt inuicem, vt altitudines, nempe perpendiculares

lares punctatæ BD, & HF; Namque, si trahatur BH, & CB erunt triãgula punctata CBD, & HEF, vt altitudines BD, & HF pro basibus vsurpatę, siquidem erunt inter parallelas AC, & DB, & inter FH, & EG:



Sed triangula punctata sunt æqualia nigris ex prop 39. I. Coroll. vtpote inter easdem parallelas, & super eandẽ basim constituta: Ergo nigra triangula in eadem proportione sunt, ac altitudines, & vt altitudo BD ad altitudinem FH, sic CDL ad EMF; quòd & dicendum est de parallelogrammis, cùm sint dupla triangulorum, prout in probatione propositionis dictum est.

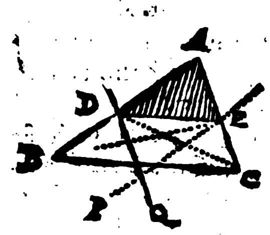
THEOR. II. PROPOS. II. Eucl. 2.

Si ad vnum trianguli latus parallela ducta fuerit recta quædam linea, hæc proportionaliter secabit ipsius trianguli latera; & si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ ad sectiones iuncta fuerit; recta linea, erit ad reliquum ipsius trianguli latus parallela.

ASserit; quòd, si in aliquo triangulo, vt in triangulo ABC ducatur parallela ad aliquod laterum V.g. DE, *hæc proportionaliter secabit crura reliqua* AB, *&* AC, & hoc pro prima parte.

Ad quod demonstrandum ducit lineas DC, & EB punctatas, quæ faciunt duo triangula minora super eandem basim DE constituta, & inter parallelas BC, & DE, nimirum triangulum DEB, & aliud DEC, quæ ex propos. 39. I. Cor. I. erunt æqualia.

Probatur triangulum nigrum est ad punctatum DEB, vt basis AD ad basim DB;



Rursus idem triangulum nigrum est ad aliud punctatum DEC in eadem proportione veluti est basis AE, ad basim EC ex prop. I. huius.

Sed, vt triangulum nigrum se habet ad vnum ex triangulis punctatis V. g. BDE, ita se habet ad aliud DEC, ex propos. 7. quinti, cum vt dictum est hæc triangula sint æqualia; Ergo vt se habet basis trianguli nigri DA ad basim punctati DB; ita se habet eiusdem trianguli basis AE ad basim punctati EC. Quare crus AB est sectum proportionaliter in D eã proportione, quã sectum est crus AC proportionaliter in E.

Secunda verò pars conuertit priorem, & dicit, quod si trianguli latera ABC secta fuerint proportionaliter in D, & E *linea, quæ puncta coniunget erit parallela.*

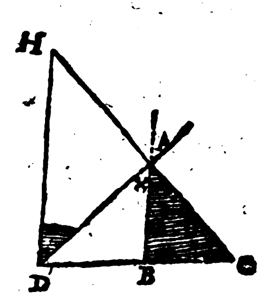
Probatur verò ex eò, quòd triangula DEC, & DEB sint æqualia; Ergo ex Coroll. 2. propos. 39. primi inter easdem parallelas DE, & BC sunt autem æqualia ex 9. quinti; quia eidem triangulo nigro sunt proportionalia. Sunt etiam proportionalia eidem nigro ex prima huius propos. quia habent bases eiusdẽ nigri, basibus similiter proportionales, & est DA ad DB, vt AE ad EC ex hyp. & insuper sunt inter easdem parallelas AB, & PE, & inter AC, & DQ; siquidem cum desinant in eundem verticem; etiam inter parallelas easdem erunt. Ergo vt basis DA ad basim DB; sic triangulum nigrum ad triangulum BDE: & vt AE ad EC bases; sic triangulum nigrum ad triangulum DEC: Ergo albi DEC, & BDE erunt inuicem æquales ex 9. quinti. Quare ex Coroll. 2. propos. 39. erunt inter parallelas.

THOR. III. PROPOS. III. Eucl. 3.

Si trianguli angulus bifariam sectus fuerit; secans autem angulum recta linea secuerit, & basim; basis segmenta eandem habebunt rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera.

Et si basis segmenta eandem habeant rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera; recta linea, quæ à vertice ad sectionem deducitur, bifariam secat ipsum angulum.

SIt triangulum ADC; diuidaturque aliquis angulus eius V. g. A bifariam per rectam AB, affirmat primò, *quod hæc in* B *puncto secat basim* DC *in duas portiones, quæ inuicem ita proportionatæ sunt, vt sunt connexa sibi crura,* V. g. ita est DB ad BC, vt DA ad AC. Quòd, vt probet, ad AB à puncto D ducit parallelam DH; deinde prolungat latus AC vsque quo coeat in H. Probat autem coituras has lineas, quia anguli niger, albusque simul ad D, ęqualis angulo B nigro ob parallelas ex prop. 30. & niger ad C ex Coroll. 6. prop. 17. sunt minores duobus rectis, (vt in omni triangulo euenit) deberent verò esse æquales ex propos. 29. ad hoc, vt DH, & HC essent parallelę, & ideo non possent coire.



Ad hoc autem, vt propositio immediatè probetur, probandũ est priùs, quòd crura DA, & AH sint inuicem æqualia.

Id ostenditur ex æqualitate angulorum. Nam, cùm crus DA incidat in parallelas DH, & AB, faciet angulos alternos ęquales; nimirum nigrũ ad D, & album cruce signatũ ad A ex propos. 30. primi. Rursusque cùm crus HA incidat in easdem parallelas HD, & BA faciet angulum externum nigrum ad A opposito, & interno H æqualem ex propos. 30. primi. Sed angulus niger, & cruce notatus ex hypothesi facti sunt æquales; Ergo, & angulus H, & D niger erunt æquales. Quare ex propos. 15. primi latera hos angulos æquales subtendentia erunt æqualia; Quo supposito probatur propositio.

Eam proportionem, quàm habet portio AH ad AC eandem habet, cum sit crus ei æquale, DA ad AC ex propos. 7. quinti. Sed pars basis DB, vtpote inter parallelas DH, & AB interceptã, parti alteri BC simili proportione refertur, quã HA ad AC ex 2. huius propositione. Ergo BD ad CB dicit etiam similem proportionẽ, quam dicit crus DA ad AC.

Se-

Secunda pars est opposita primæ, dicitque è contrariò, quòd si basis secta sit in partes proportionales eâ proportione, qua latera inter se habent, *quòd angulus* A *sectus erit bifariam*, suppositaque praxi antecedenti trahendi parallelam HD, & prolungandi latus AH, ita probat. Angulus ad A cruce signatus est equalis angulo alterno nigro ad D, alterq; niger ad A est æqualis angulo H externus interno ex prop. 30. Sed isti niger D, & H sunt inuicem æquales: Ergo, & angulus cruce signatus, & niger ad A sunt inuicem æquales; Quare angulus ad A trianguli D A C propositi sectus est bifariam. Angulus autem H, (quòd probandum est) æqualis inuenitur angulo nigro ad D ex 14. prop. primi; Quia latera ijs subtensa DA, & AH æqualia sunt. Sunt autem æqualia ex 9. quinti; quia eidem AC eandem dicunt rationem: Eandem verò dicunt rationem ad AC ex 11. quinti: quia dicunt eandem rationem ad AC, quam pars basis DB ad partem BC. & linea DA quidem ex hypotesi, HA vero ex 2. huius, quod sit inter parallellas, vt pars DB; parallelæ enim sunt ex constructione DH, & AB.

THEOR. IV. PROPOS. IV. Euc. 4.

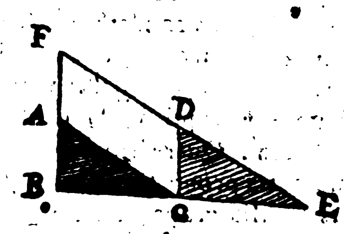
Æquiangulorum triangulorum, proportionalia sunt latera; quæ circum æquales angulos, & homologa sunt latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur.

AD probandam hanc propositionem aliqua priùs in ipso probationis apparatu, & praxi præsupponenda sunt, & etiam probanda. Itaq; si detur duo triãgula nigrũ nigriusq; quę habeant angulos correspondentes æquales V, g. angulũ ad A nigerrimum angulo ad D nigro, angulum ad C nigerrimum angulo nigro E, angulum verò nigerrimum B angulo nigro ad C. Dicit, quòd *crura, quæ claudunt æquales angulos, sint inuicem proportionalia*, pro prima parte propositionis: nimirum dicere V, g. crus BC ad AC similem proportionem, quam dicit quoque CE ad ED; quoniam claudunt æquales angulos nigerrimum ad C & nigrum E, & sic dicas de alijs. Quod, vt ostendatur ponenda sunt duo triangula super vnam rectam BE, & prolunganda sunt latera BA, & DE ad hoc, vt fiat triangulum maius BFE: namque supponit necessariò conuenire in F, eo quòd, præsupponat angulum B, & angulum E ambos non posse esse rectos, & consequenter ex propos. 29. primi non posse esse parallela prolungata crura BF, & EF. Anguli verò illi recti ambo esse nequeunt; quia cuiuscunque trianguli duo anguli sunt duobus rectis minores; si autem B ponatur rectus nigerrimus ad C erit minor recto, & consequenter angulus ei æqualis E.

Sed antequam probetur propositio probandum est primò quoque, rectas BF, & CD esse parallelas. Id verò ostendetur. Si consideretur EC, quæ incidit in eas, & facit angulum DCE nigrum externum angulo ad B nigerrimo interno, & ad easdem partes, vt ex hypotesi constat, æqualem; Quare ex probatis 29. primi BF, & CD parallelæ sunt; cùm incidens in eas BE faciat angulum externum interno, & easdem partes æqualem.

Probandum quoque est secundo lineas AC, & FE esse parallelas ob eandem prorsus causam. Nam eadem linea BE incidens in eas in punctis C, & E facit angulum ACB nigerrimum nigro E æqualem, vt ex hypothesi constat: Vnde spatium illud album FADC erit parallelogrammum, vtpote parallelis contentum. Quare, & latera correspondentia FD, & AC erunt æqualia ex 34. propos. primi, necnon, & latera FA, & DC.

Progres. 1. Probatur propositio, lineæ FB, & DC parallelæ sunt. Ergo ex 2. propos. huius DE antecedens ad DF sequentem, vt CE antecedens ad BC sequentem proportione referuntur. Quare *permutando*, vt ex 19. propos. quinti, vel ex



def. 16. ipsa crura triãguli nigri, quę fecimus antecedentia erunt ad inuicem, vt partes FD, & BC quas posuimus tanquam consequentes, & erit DE ad CE, vt FD ad BC: Sed pars FD æquatur ex prædictis cruri AC: Ergo crus DE erit ad crus CE nigri trianguli, vt crus AC cruri BC nigerrimi ambientia angulos æquales E nigrum, & C nigerrimum.

Progres. 2. Idem eodem argumento probabitur de cruribus AB, & BC, quæ inuicem eâ proportione consentiant, quâ CD, & CE. Nam AC est parallela ipsi FE: Quare portio cruris CE, vt antecedens ita respondebit proportione ad aliam BC sequentem, vt AF pars alterius cruris, vt antecedens ad aliam partem BA sequentem. Quare *permutando*, ita erunt antecedêtes inuicem CE ad AF, vt sequentes inuicem BC ad BA: sed AF est equalis cruri CD: Ergo CE eâ proportione respicit CD, quâ BC respicit BA. Etiam de cruribus angulos æquales C nigrum, & B nigerrimum ambientibus propositi ostensum est; probatur tandem de cruribus æquales angulos D, & A ambientibus. Vtendo argumento ex *æqualitate*, quod docet 23. propos. quinti.

Progres. 3. Nam istis habes primam quantitatem cruris DE habere ad secundam CE eam proportionem in priori triangulo nigro, quam habet prima quantitas CA ad secundam BC in secundo triangulo nigerrimo ex primo progressu. Et ex secundo, quòd secunda quantitas primi nigri triãguli CE respicit DC tertiam eâ proportione, qua secundi nigerrimi, trianguli quantitas lineæ CB respicit tertiam BA. Ergo ex æqualitatis argumento prima cruris quantitas nigri DE, ita refertur ad tertiam DC, vt trianguli nigrioris secundi quantitas AC relationem dicit ad AB.

Secunda verò pars patet ex definitione 6. homologarum quantitatum; nempe similium, similes enim quantitates dicuntur illæ, quæ geminæ in aliqua quantitate possunt summi; vt antecedentes, vel vt consequentes. Hoc autem habent latera triangulorum æquiangulorum, cum æqualibus angulis subtenduntur. Nam, vt potes considerare in processu probationis, latera, quæ vt antecedentia sumpta, vel consequentia sunt, fuere semper ea, quæ æqualibus angulis subtensa fuere, & ideo crus AC est simile cruri DE; quia considerata fuerunt, vt antecedentia; nempe, vt fundamenta proportionis, quę angulis æqualibus

ad C

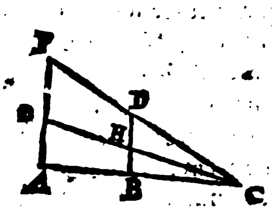
ad C nigro, & B subtenduntur. Sic CE, & BC sunt similia, homologa; quia vt sequentia possunt assumi; nempe, vt termini proportionis, sunt autem subtensa angulis A, & D æqualibus, & ita de alijs duobus DC, & AB.

COROLLARIVM I.

Hinc fit. Lineam rectam, quæ parallela ducitur vni lateri in triangulo, auferre triangulum toti triangulo simile. Nam in triangulo EBF, Cùm lineæ FB, & DC parallelæ sint, incidens in eas recta FE faciet angulum nigrum externum D interno F, & ad easdem partes ex 30. 1. æqualem. Rursus incidens BE idem præstabit faciendo angulum externum C nigrum æqualem interno B, & ad easdem partes; angulus verò E est communis. Ergo erit æquiangula pars nigra CDE toti triangulo FBE. Quare habebit latera æquales angulos ambientia proportionalia, & proinde ex def. 1. huius similia erunt triangula.

COROLLARIVM II.

Colligitur quoque: Quod si basi V. g. AP parallela BD agatur, & ab angulo C, cui subtensa est, V. g. recta ad basim ducatur, quæ parallelam diuidat, & basim ipsas diuidere in partes proportionales, esseque DH ad HB, vt PO ad OA. Nam ex præcedenti Coroll. triangulum totum CAP, & triangulum eius pars DBC sunt similia. Rursusque triangula OPC, & pars eius DHC. Et sic triangula HBC, & OAC similia sunt. Itaque ea proportione respiciet CD crus CP, quà DH refertur ad PO. Rursusque eadem CD ad eandem CP referetur, vt BD ad PA itaque ex 16. lib. 5. erit DH ad PO, velut DB ad PA. Quamobrem *permutando* fundamentum, & pars DH respiciet fundamentum, & totum DB, vt terminus, & pars PO respicit terminum, & totum PA. Quare diuidendo eādem proportionem dicet pars D H ad partem H B, vt pars PO, ad partem OA.

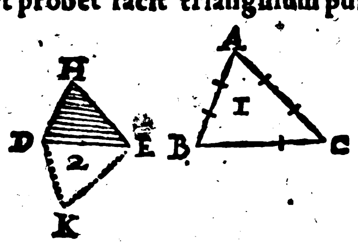


THEOR. V. PROPOS. V. Eucl. 5.

Si duo triangula latera proportionalia habeant, æquiangula quoque erunt, & æquales habebunt eos angulos, sub quibus homologa latera subtenduntur.

Sit triangulum ABC primum. Aliudque DHE nigrum, cuius latera sint lateribus primi proportionalia, idest sit DH ad DE, vt BA ad AC V. g. comprehendant duas tertias partes, quorumlibet correspondentium. Dicit, quod hoc triangulum nigrum erit primo æquiangulum.

Quòd, vt probet facit triangulum punctatum



DEK triangulo primo æquiangulum BAC.

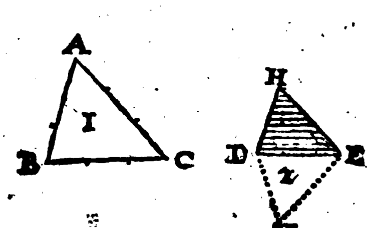
Probatur. Nam crus AB ex 4. huius dicit eam proportionem ad basim BC primi trianguli vt crus punctatum EK ad suam basim DE.

Sed ad eandem basim dicit quoque ex hypothesi eam proportionem, quam BA ad BC crus DH trianguli nigri. Ergo æqualia erunt hæc crura DH, & DK ex 9. quinti. Eodem modo argumentum procedet de crure punctato EK, quod erit æquale cruri HE trianguli nigri; quia dicunt eandem proportionem ad suam basim DE, quam crus CA primi trianguli ad basim suam BC. Ergo ex 21. prop. primi angulus K angulo H est æqualis; siquidem basis est communis, & crura correspondentia æqualia. Quare, & anguli ad basim correspondentes erunt æquales nimirum niger, & albus ad D, & niger, & albus ad E. Sed anguli trianguli punctati ex constructione sunt æquales angulis primi trianguli BAC: nimirum angulus D albus angulo B. Ergo, & angulus correspondens niger D. Item angulus E albus angulo C: Ergo & correspondens niger E eidem erit æqualis. Et tandem K angulo A quare, & angulus H niger eidem A erit æqualis vnde triangulū DHE nigrum angulos primo BAC eos æquos habet, qui homologis cruribus insunt.

THEOR. VI. PROPOS. VI. Eucl. 6.

Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia habuerint, æquiangula erunt triangula, æqualesque angulos habebunt sub quibus homologa latera subtenduntur.

Hoc est quasi idem Theorema, ac antecedens, siquidem eodem argumenti methodo probatur, similique praxi inititur. nihilque aliud diuersi habet, nisi quod diuersam conditionem supponit; nempe vnum angulum vni æqualem, lateraque proportionalia, quæ hunc angulum ambiunt. Si itaque triangulum BAC primum, & aliud nigrum, quod habeat angulum ad D nigrum angulo primi B æqualem; sintque latera illud concludentia DH, ad DE lateribus, BA, ad BC proportionalia. Dicit reliquos angulos reliquis esse æquales. Nam sic verificabitur quoque secunda pars, nempe similia, & homologa esse illa latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur: nimirum BA, & DH, qui subtendunt angulos æquales E nigrum, & C album esse similes, vt antecedentes proportionum, & BC, & DE bases, quæ angulo A, & H subtenduntur esse quoque similes, V. g. terminos proportionum. Vt autem id probetur, faciendus est punctatis lineis angulus ad D albus æqualis angulo B, & angulus ad E albus æqualis angulo C, vt in præcedēti propos. angulusque K ex Coroll. 2. propos. 17. primi erit æqualis angulo A: Quare triangulum punctatum erit æquiangulum primo triangulo BAC.



Probatur. Nam triangulum punctatum est æquiangulum triangulo primo. Sed triangulo huic

huic punctato est æquiangulum triangulum nigrum; Ergo triangulum nigrū est æquiangulum triangulo primo. Quod autem triangulum nigrum sit æquiangulum triangulo punctato, probatur eundo per singulos angulos sufficienti singulorum enumeratione, angulus ad D niger est ex hypothesi æqualis angulo B primi trianguli; vt eidem angulus albus punctati ad D ex constructione est æqualis; Ergo albus, & niger ad D inuicem æquales sunt. Reliqui verò anguli probabuntur æquales ex æqualitate laterum correspondentium. Nam ex 22. propos. primi, triangula habentia crura duo æqualia ambientia angulum æqualem, æqualia quoque sunt quoad basim, & reliquos angulos. Hæc autem triangula habent duo crura duobus æqualia. Crus enim DE in his triangulis punctato, & nigro est commune; quare remanet solum probandum de crure DK, & DH, quòd sint æqualia.

Probatur verò; quia DH eam proportionem dicit ad DE; quam dicit BA ad BC primi trianguli ex 4. huius propos. cum sint æquiangula: ex effectione: Sed eam proportionē, quam dicit BA ad BC, & ideo, quā DK ad DE ex 16. l. 5. imitatur quoque ex hyp. proportio DH ad DE in nigro triangulo. Ergo ex prop. 9. l. 5. equalia sunt inuicem DH, & DK, vtpote vni basi ED eandem proportionem dicentia.

Quapropter, cùm iam habeamus duo crura punctati; & duo nigri trianguli angulos ad D nigrum, & albū ambientia æqualia, anguli reliqui ad E niger, & albus, & angulus H, & K erunt æquales ex prop. 22. primi, & ideo duo triangula nigrum, & punctatum erunt æquiangula.

THEOR. VII. PROPOS. VII. Eucl. 7.

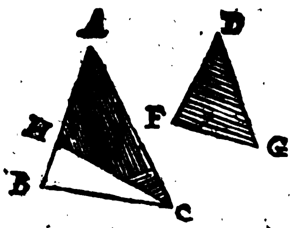
Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem; circa verò alios angulos latera proportionalia habeant, reliquorum autem simul vtrumque, aut minorem, aut non minorem recto: Æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, circum quos proportionalia sunt latera.

DEntur duo triangula semialbum, & nigrum, quę habeant angulos nigros æquales E. g. A, & D, & crura alios angulos C, & G ambientia proportionalia, scilicet BC ad CA in semialbo proportionetur, veluti FG ad GD in nigro. Reliqui verò anguli speciē non dissonent, sed sint aut simul minores recto, aut simul non minores.

Idest reliquus angulus albus B sit acutus, si F est acutus; aut si B sit obtusus, talis quoque sit F; aut si B est rectus, talis quoque sit F. Nam si specie dissentiunt, & vnus esset acutus, alter obtusus, hac sola vltima conditione defficiente propositio non verificaretur.

Probatur verò ostendendo datis ijs conditionibus duorum angulorum æqualium, & laterum proportionalium circa alios duos, & speciei eiusdem reliquorum, reliquos specie solum notos esse inuicem æquales, & consequenter ex propos. 27. lib. primi etiam reliquos duos proportionalibus lateribus septos, esse ęquales, & hoc ostendendo alterū eorū, nec maiorē esse posse, nec minorē.

Casus 1. Sit itaque angulus A angulo D æqualis, anguli B, & F specie noti, nimirum minores recto, & angulus C sit clausus cruribus proportionalibus, & sit AC, ad CB, vt anguli G crus DG ad crus FG.



Dico angulū C angulo G esse æqualem. Quod si non credatur: Sit, vt inquiunt aduersarij, semialbus angulus C maior; quam G, qui vt esset æqualis ipsi C, sufficeret pars nigra C. Igitur triangula nigra inuicem erunt æquiangula; quod habeant omnes angulos æquales, & quidem A, & D ex hypothesi; anguli verò G, & C ex aduersarijs; anguli H niger, & F ex necessariâ consequentiâ ob prop. 17. l. 1. Cor. 2. Quãobrem habebunt latera proportionalia ex propos. 5. huius, & CA erit ad CH, vt DG ad GF: Sed vt AC ad BC, ita proportionatur ex hypothesi DG ad GF: Ergo ex prop. 16. quinti, vt AC refertur proportione ad CH: Sic idem AC refertur ad BC; Quare ex 9. quinti, cùm eadē eis eandē dicant proportionem, crura HC, & CB erunt æqualia; ideoque ex propos. 14. primi H, & B anguli albi, vtpote æqualibus subtensi cruribus, æquales. Sed angulus B ex hypothesi est minor recto: Ergo H albus erit minor recto; & consequenter niger H maior recto: Sed ostensum est angulum nigrum H esse æqualē angulo F nigro, & ideo minorē recto. Ergo esset minor, & non minor recto, quod esse nequit.

Casus 2. Sit deinde ABC niger, & angulus A in ipso æqualis angulo D, & sit AC, ad CH; vt DG ad GF, & ponantur, vt priùs H angulus niger, & F, minores recto, & dicatur ab aduersarijs, angulum nigrum C esse minorem angulo G, qui, vt esset æqualis, deberet esse semialbus C. Tunc triangulū BAC semialbū nigro erit æquiangulū, & B angulo F ex prop. 17. l. 1. Cor. 2. ob angulos A, & D æquales ex hypothesi, & semialbum C, & nigrum G ex aduersarijs.

Ergo erit ex 5. huius AC, ad BC, vt DG ad GF. Sed ex hypothesi est etiam AC, ad CH, vt DG ad GF; Ergo erit AC ad BC, vt AC ad HC: Erunt itaque æquales ex 9 quinti HC, & BC. Sed angulus H niger est æqualis angulo F minori recto, ex hypotesi; ergo H albus maior recto, & B ei æqualis ob laterum, quibus insistunt æqualitatem ex propos. 14. maior quoque recto contra ostensa: Ostensus est enim æqualis angulo nigro F, qui ponitur minor recto.

Casus 3. Sint deinde angulus B, & angulus F non minores duobus rectis idest, vel sint recti, vel obtusi, & dicatur ab aduersarijs, angulum C semialbum esse maiorem angulo G, qui, vt esset æqualis, deberet esse niger C. Itaque vt priùs triangula nigra erunt æquiangula, ob angulum A ex hypothesi angulo D nigro æqualem, & angulum nigrum C ob dictum aduersariorum angulo G æqualem; & ideo angulus H niger erit æqualis angulo F: lateraque erunt proportionalia, eritque AC ad CH, vt DG ad FG, & ex hypothesi AC ad CB, ita DG ad GF. Igitur erit AC ad CH, ita AC ad CB: ex 16. l. 5. Erunt ergo ęquales ex prop 9 l. 5. CH, & CB. Ideoque angulus albus H erit æqualis angulo albo B. Sed angulus B ponitur, vel rectus, vel maior recto. Ergo talis esset angulus H albus, & sic cōtra propos. 17. duo anguli trianguli essent æquales duobus rectis, vel eis maiores, & angulus niger H esset minor recto, qui ostensus est maior.

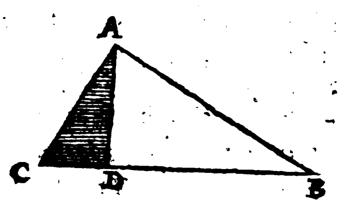
Casus 4. Sic quoque ostendetur propositio; si dicant aduersarij angulum ad c esse minorem angulo G, vt supra ostensum est in simili casu 2.

THEOR. VIII. PROPOS. VIII. Eucl. 8.

Si in triangulo rectangulo ab angulo recto in basim perpendicularis ducta sit, quæ fiunt à perpendiculari triangula, tum toti triangulo, tùm ipsa inter se similia sunt.

IN triangulo ABC angulus BAC sit rectus, à quo ad basim perpendicularis agatur AD. Dicit duo triangula, in quæ à perpendiculari CAB triangulum partitur album, & nigrum esse *similia toti semialbo, & etiam inuicem.*

Probatur. In triangulo toto angulus totus semialbus A rectus est; Et pariter rectus est angulus D albus trianguli penitùs albi: Angulus verò ad B est communis ergo ex Coroll. 2. propos. 17. reliquus niger C albo apud A erit æqualis: Vnde triangulum CAB totum erit æquiangulum suæ parti albæ DAB.



Cùm itaque hæc triangula sint æquiangula; homologa erunt ex propos. 4. huius ea crura, quæ angulis æqualibus subtenduntur. Ideoque sicut est BC basis angulo recto opposita, vt antecedens sumpta ad crus CA in semialbo triangulo: Sic est BA basis albi trianguli angulo recto opposita ad crus DA angulo B oppositum, & sicut BA crus ad AC crus maioris trianguli sic DB crus ad DA in minori. Quare latera, quæ æqualibus angulis opponuntur erunt homologa: Quia bases angulis rectis opposite deseruiunt pro fundamentis, dicitur enim, sic est CB basis ad crus CA, vt basis BA ad crus DA sicut etiam crura pro terminis.

Probatur quoque de parte nigra eodem modo. Nam si in triângulo nigro angulus D niger angulo A semialbo æquatur; cùm ambo recti sint: angulus C niger cómunis: Ergo reliquus niger apud A, reliquo angulo B ex Coroll. 2. prop. 17. erit æqualis. Cum ergo triangulum nigrum, & semialbum totum CAB sint æquiangula; patet esse similia. Vnde, cùm album, & nigrum sint similia semialbo toti; erunt etiam similia inuicem.

COROLLARIVM I.

MAnifestum hinc euadit perpendicularem ab angulo recto in basim cadentẽ esse mediam proportionalẽ inter duo basis segmenta, & eã proportionem dicere BD ad AD: quam AD ad CD. Siquidem, qualis est proportio AB ad AC, talis est proportio DB ad DA. Rursusque qualis est proportio BA ad AC, talis reperitur proportio DA ad DC: Ergo ex prop. 16. lib. 5. eadem proportione refertur DB ad DA quã DA ad DC, & id euenit, quod DA sit crus minus respectu albi, & respectu nigri sit crus maius, & duo munia obeat.

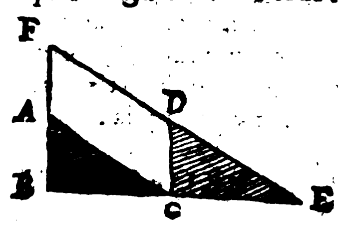
COROLLARIVM II.

FRuitur quoque; Crus quodlibet esse medium proportionale inter totam basim, & illam basis partem, cui vnitur. Nam ostensum est; quòd ita se habet BC basis ad crus BA in triãgulo maiori, vt eadẽ BA basis in minori ad DB crus. Sic quoq; se habet basis CB ad crus CA, sicut se habet idem crus CA, & basis ad crus CD. Et hoc euenit. Quia CA, AB crura sunt, simul bases, & duplici munere funguntur, ob quod possunt deseruire pro termino, & fundamento.

THEOR. IX. PROPOS. IX. Euc. 32.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, & secundùm vnum angulum componantur, ita vt homologa latera sint etiam parallela, tunc tertium vtriusque latus in rectam lineam coibit.

SIt triangulum propos. 4. BAC nigerrimum, & CDE nigrum, & ita collocentur, vt AB oppositum angulo apud C, sit parallelum cruri CD oppositum æquali angulo E. Sic crus AC parallelum



cruri DE, quæ æqualibus angulis nigerrimo apud B, & nigro apud C opponuntur. Et ita erunt crura homologa parallelè posita, quòd crura angulis opposita æqualibus sint proportionum, aut fundamenta, aut termini. Dico crus BC & CE, quæ remanent in vnam rectam extendi, quæ est BE.

Probatur: Angulus apud A nigerrimus, qui æquatur albo apud C, quòd AC incidat in parallelas BF, & CD ex 30. primi. Angulus item apud B nigerrimus, qui nigro apud C æqualis est. Angulus tandem nigerrimus apud C, hi tres faciunt, cũ sint anguli eiusdẽ triãguli duos angulos rectos, ergo nigerrimus apud C, & albus æqualis nigro A, & niger æqualis nigerrimo apud B etiam ipsi erunt æquales duobus rectis. Ergo ex prop. 14. l. 1. lineæ BC, & CE in directum erunt; cum efficiant, cum linea AC, vel CD angulos duobus rectis æquales.

EXPENSIO III.

De reciprocatione laterum in figuris.

LIcet hic solùm Euclides de parallelogrammis, & triangulis agat, cùm tamen sint hæ figuræ omnium figurarum initia, hæc expensio videtur ad omnes posse extendi, vtpote omnium reciprocationem pertractans. Reciprocatio verò est, vt diximus, cùm fundamentum proportionis est in vna figura, terminus verò eiusdem in alia, & in hac alia fundamentum similis proportionis reperitur, & terminus in priori, ita vt qualibet combinatio partim in vna figura sit, partim in alia.

THEOR.

THEOR. I. PROPOS. X. Eucl. 14.

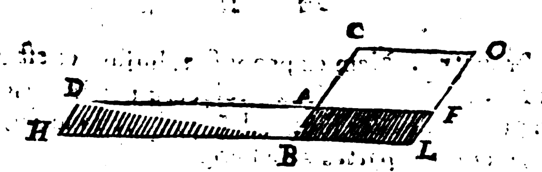
Æqualium, & vnum vni æqualem habentium angulum parallelogrammorum reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos.

Et quorum parallelogrammorum reciproca sunt latera, circum æquales angulos, & vnus angulus alteri æqualis, illa sunt æqualia.

DVas partes habet hęc propositio, & secunda primam conuertit. Prior itaque est, quod si dentur duo parallelogramma æqualia, quę insuper angulum angulo æqualem obtineant, hęc habitura quoque latera, quæ sunt circa æquales angulos reciproca.

Sint itaque rectangula duo albũ AO, & DO semialbum. Dicit latera horum esse reciproca, quæ ambiunt angulos æquales, & ita esse DA huius semialbi ad AF alterius albi, vt alterius latus AC est ad huius latus BA.

Ad probationem verò præsupponendum est, quòd, si duo parallelogramma vniantur in vertice æqualiũ angulorũ, ita poterũt cõstitui, vt latera in vnã rectã coeant, & latus DA v.g. parallelogrãmi DB semialbi vnam rectam faciat cum latere AF alterius albi. Hoc verò colligitur à propos. 12. lib. 1. vbi dicitur lineas rectas angulos æquales ad verticem efficere, cùm vnà coeunt. Ideoque cum anguli albi apud A huius sint æquales tum parallelogrammi DB, tum alterius AO, & latus DA, cum AF penes rectam lineam sit positum, necesse est, vt etiam aliud latus AC in directum sit cum latere AB;



alioquin sequeretur angulos ad verticem apud A esse æquales, & lineas in directum nequaquam positas esse.

Quo supposito, producendum est latus BH vsq; dum occurrat lateri OF producto in L, & iam habemus parallelogrammum nigrum AL.

Et sic Probatur propos. Parallelogrammum nigrum est eiusdem altitudinis, ac album AO. Ergo ex 1. propos. huius erunt inuicem vt bases, & ita erit parallelogrammum AO ad nigrum, vt AC basis ipsius ad AB basim nigri, & alterius DB communis. Eodem pacto philosophare de semialbo respectu nigri. Nam, cùm sit eiusdem altitudinis cum ipso nigro, respiciet illud, vt sua basis DA, nigri respicit basim albo parallelogrammo communem AF, eritque semialbum ad nigrum, vt DA ad AF.

Sed ex 7. quinti, cùm alba parallelogrãma æqualia sint inuicem, ex hyp. eidẽ nigro eandem dicunt proportionem. Ergo, & basis CA ad basim AB eandem dicet proportionem, quam basis DA ad basim AF. Quare latera reciprocè se respicient.

Secunda pars primam conuertit; asseritque, quòd si latera DA, & AF; sic AC, & AB circa angulos æquales apud A reciproca fuerint in proportione ita vt proportionem, quæ est CA, ad AB imitetur proportio, quæ est DA ad AF, rectangula ipsa fore æqualia. Supponitque probatio eandem constructionem, quæ peracta est.

Probatur ex 9. quinti, si parallelogramma albũ AO, & DB semialbum ad nigrum eandem dicent proportionem, æqualia erunt: sed eam dicunt: Ergo æqualia sunt. Minor verò argumenti constat: Quia parallelogramma eiusdem altitudinis eam dicunt proportionem, quam suæ bases ex 1. huius. Ergo parallelogrammum AO album, aliud nigrum eã proportione spectabit, quã sua basis AC, spectat basim AB nigri cùm sit eiusdem altitudinis, ac nigrum. Ideoque asseras de parallelogrammo semialbo DB, quòd cùm sit eiusdem altitudinis cum nigro eodem, eam dicet proportionem, quam sua basis AD ad basim AF.

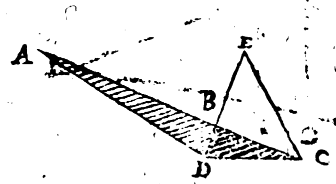
Sed basium DA, & AF proportio, quã se respiciunt ex præsuppositione eadem est, ac basium AC & AB, Ergo, & parallelogrãmma album AO, & semialbum DB eadem proportione respicient nigrum idem. Quare sunt æqualia ex propos. 9. lib. 5. citata.

THEOR. II. PROPOS. XI. Eucl. 15.

Æqualium, & vnum vni æqualem habentium angulum triangulorum reciproca sunt latera, quæ circa æquales angulos.

Et quorum triangulorum, vnum angulum vni æqualem habentium, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos, illa sunt æqualia.

DEntur duo triangula æqualia BEC album, & nigrum ADB habentia angulos, qui ad B æquales; Asserit, & crura fore reciproca in proportione; nimirùm esse albi crus EB ad crus nigri BD, vt crus AB eiusdem nigri ad crus BC trianguli albi. Quod, vt probet; collocandi sunt tali modo triangula se in verticibus tangentia, vt crura vnius, cum cruribus alterius vnam rectam efficiant V. g. AB, & BC sicut crus EB, & BD. Hoc autem poterit fieri, vt in pręcedenti diximus propter angulos æquales ad B album, & nigrum, Coniunganturque D, C, & fiat triangulum nigerrimum DBC.



Probatur. Nam nigrum, & nigerrimum triangulum sunt eiusdem altitudinis, cùm conueniant in vertice D, Ergo ex propos. 1. huius, eam proportionem, quam triangula dicunt ad inuicem nigrum ad nigerrimum, dicent, & bases AB ad BC. Idem dicas de triangulo albo, & nigerrimo sunt enim eiusdem altitudinis, quòd conueniant in puncto C: Quare ex eadem prima huius, basis EB albi ad basim BD nigerrimi eandem dicet proportionem, quam album triangulum ad nigerrimum. Sed tum triangulum album, tum nigrum ex prop. 7. quinti, eo, quòd ex hypothesi sint æqualia candem dicunt proportionem ad nigerrimum: Ergo,

&

& crus EB, ad crus DB eandem dicet proportionem, quam AB ad BC.

Secunda verò pars Theorematis est conuersa præcedentis, & dicit; quòd si crus EB ad aliud reciprocum BD, dicat eandem proportionem, quâ refertur AB ad BC, æqualia fore triangula: Nam vt bases ita ex prop. 1. huius erunt quoque triangula album, & nigrum ad nigerrimum, cum sint eiusdem altitudinis: Quare, cum ex prop. 9. quinti, quæ eidem eandem dicunt rationem æqualia sint, sequitur vt æqualia quoque sint triangula album, & nigrum cum bases AB ad BC, & BE ad BD ex præsuppositione eandem proportionem dicant.

EXPENSIO IV.

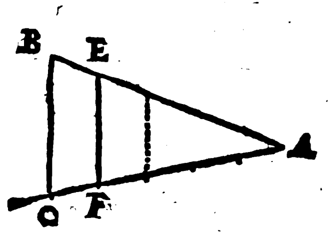
De lineis proportionaliter secandis.

VIdimus primo libro sectionem linearum in partes æquales: modo hic illam intuebimur in partes proportionales; nec tamen sectionum modi omnes hac expensione concludemus: plurimi enim sunt; qui, cum non sint elementares, & tanquam principia generalia nō se habeant, nec necessarij ad elementa ipsa percipienda sint: imo multorum cognitionem supponant non dum haustam, vt queant intelligi, ideo ea in proprium tractatum reiecimus. Fuit autem necessarium, vt primo lib. fecimus, agere priùs de triangulis; vt hę operationes secandarū linearū ostēderētur.

PROB. I. PROPOS. XII. Eucl. 9.

A datâ rectâ lineâ imperatam partem auferre.

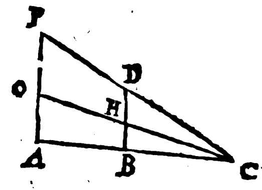
IMperetur, vt ex linea AB auferratur, V.g. quinta pars. Ex A ducatur recta AC, vtcunque, quę tamen angulum aliquem efficiat in A, & in hac linea AC tot partes ab A incipiendo signentur æquales assignatæ ad placitum magnitudini, quota pars est ea, quæ desideratur detruncari, vt in proposito exemplo, assumendæ sunt quinque partes, quia quinta detrahenda est, & ab vltima parte C ducenda est linea, quæ extremum alterius B coniungat, ita vt fiat triangulum ACB. Huic autem à puncto penultimo F parallela agatur FE, eritquę EB pars quinta lineæ AB abscisa.



Probatur. Nam ex propos. 2. huius ėa proportione, quâ refertur AE, ad EB, eâ ipsâ AF respicit FC. Ergo componendo, vt docuit argumentari 21. propos. quinti, ita respicit AB tota partem suam BE, sicut AC tota partem suam CF. Sed CF est quinta pars totius AC. Ergo & BE erit quinta pars totius AB.

COROLLARIVM

HInc deducitur, & à Coroll. 2. prop. 4. Posse quoque ab aliqua V. g. DB partes, quascunque placuerit, auferri. Si lineam ducas ei parallelam maiorem aliquam, quę sit AP, eamque diuidas in partes quascumque, E. g. in duas in O, de-

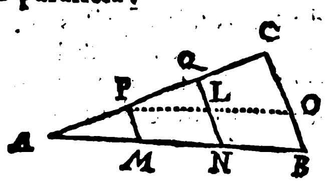


inde extrema, & omnia pūcta diuisionum ad idem quodcumque punctum C ducas, quod sit vltra lineam diuidendam minorem DB ita quòd in medio ipsa remaneat, & lineæ in punctum C conuenientes per eam transeant, vt sunt PC, & OC, & AC. Istæ enim diuident lineam propositam DB in partes proportionales ijs partibus, quas in PA fecimus: Eritque DH, & HB in linea DB, vt PO ad AO in linea PA; quod ostenditur in ipso Coroll. 2. propos. 4. cuius figuram hìc adhibemus.

PROB. II. PROPOS. XIII. Eu. 10.

Datam rectam lineam insectam similiter secare, vt data altera recta secta fuerit.

HÆc ferre est eadem, quæ superiori problemate, Sit recta AB secanda in tot partes, quæ proportionem eam inter se seruent, quam partes alicuius alterius datæ inter se conseruant. Constituatur itaque recta assignata AC tali modo, vt faciat cum diuidenda angulum A, & iunctis extremitatibus linea BC, ad hanc AB à pūctis diuisionū P, & Q ducantur parallelæ PM, & QN. Nam linea AB erit diuisa, vt propos. reposcit, in partes similes lineæ AC, vtque id probetur, ducatur PO punctata ad AB parallela.



Probatur. Nam ex propos. 2. huius, vt est AP ad PQ, ita se gerit pars AM respectu partis MN, ergo proportionales sunt eadem proportione AM, & MN, quá erant partes AP ad PQ.

Eodem modo valet argumentum de parte PQ, & QC, quæ inuicem eam proportionem seruabunt, quam in linea punctata partes PL, & LO ob eandem propos. huius 2.

Sed partes punctatæ PL, & LO sunt æquales partibus MN, & NB ex propos. 33. primi, quod in parallelis lineis signatæ sint, & à parallelis effectæ. Ergo etiam PQ, & QC ita sunt proportionales, vt MN, & NB.

COROLLARIVM

COlligitur hoc modo posse secari AB secundum proportionem quamcumque datam: Nimirum, si priùs signemus in AC indeterminata eas partes habentes eam proportionem, quam volumus, & cętera præstentur, vt priùs, quando linea AC vt in propositione, præsupponebatur iā diuisa.

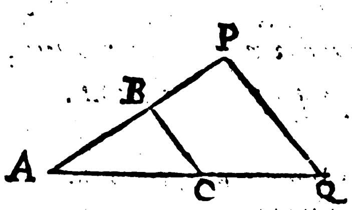
COROLLARIVM

COlligitur quoque lineas duas proportionaliter in geminis punctis diuisas habere quoq; inter medias sectionum proportionales V. g. diuisa AC in Q nimirum in duas tertias partes, & in P nimirum in suam tertiam partem intermedia sectionū erit PQ, quę eam dicet proportionē cum AP, seu QC, quam dicit intermedia sectionum MN ad ad AM, vel NB, si & AB similiter in easdem proportionales partes secetur in M, & N. Nam iunctis istis lineis, vt faciant angulum in A idem; quod in propositione explicauimus, valebit argumentum, vt patet, cùm sit eadem figura.

PROB. III. PROPOS. XIV. Eucl. 11.

Duabus datis rectis lineis tertiam proportionalem inuenire.

SInt duæ rectæ AB, & AC, ita dispositæ, vt angulum in A constituant, producaturque ea, quam volumus constituere pro antecedenti, V. g. AC, & in parte productâ capiatur CQ æqualis alteri AB, quam volumus esse sequentem. Ducta deinde recta ad extremitates BC, ei à puncto Q parallela agatur QP, quæ inueniat in P lineam AB productam. Affirmat propositio, BP *tertiam proportionalem esse*: nimirum eam dicere proportionem AC antecedentem ad AB sequentem quâ respicit ipsa AB sequens tertiam subsequentem BP.



Probatur. Nam ex propos. 2. huius; Ita proportione refertur AC antecedens, ad CQ sequentem in priori crure AQ, vt AB ad BP refertur in secundo crure AP; Sed antecedens AC ita refertur proportione ad CQ velut ad AB antecedens in posteriori crure (siquidem AB, & CQ ex constructione sunt æquales) Ergo eam proportionem ex 7. quinti, quam dicit antecedens AC ad AB, sequentem suam dicet quoque AB antecedens etiam ipsa ad BP sequentem, & sic AB erit media proportionalis: Nimirum sequens respectu AC antecedentis, & pariter antecedens respectu subsequẽtis BP. At PB tertia proportionalis, erit, vt vul. prop.

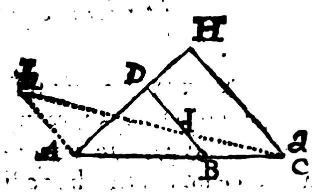
COROLLARIVM.

COllige eodem modo, & quartam proportionalem, & quascunque alias posse inueniri; nimirũ si posterioribus duabus tertia inueniatur proportionalis regulâ præced. Inuenta enim, cum tribus priùs inuentis, quatuor erunt proportionales, & sic si alias cupias semper eadem praxi vteris.

PROB. IV. PROPOS. XV. Euc. 12.

Tribus datis rectis lineis quartam proportionalem inuenire.

DVas habeas lineas AB, & BC, quas in directum collocabis ita vt vnam rectã constituant AC; reliqua verò AD ita collocetur, vt faciat angulum quemcumque in A cum prima AB. Sit verò reperienda quarta proportionalis ita, quòd, sicut AB proportionẽ habet ad BC, ita reliqua angulum faciens AD, cum aliâ reperiendâ proportionata existat. Coniunge itaque extremitates D, & B rectâ BD, & huic coniungenti à puncto C duc parallelam, quæ occurrat lineæ AD productam in H. Nam DH erit quarta, quæ quæritur ita, vt eodem modo, quo se habet antecedens AB prioris cruris ad sequentem eiusdem BC. Sic referatur antecedens posterioris cruris AD ad sequentem DH in proportione.



Probatur facillimè ex 2. propositione huius: Cum enim DB sit ex constructione parallela ad CH. Ergo sicut refertur AB ad BC in priori crure; Sic refertur AD ad DH in posteriori.

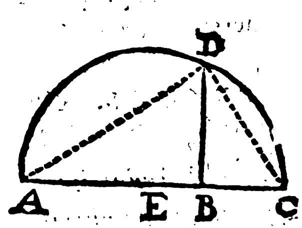
COROLLARIVM.

COllige cum Pappo. Quomodo reperire possis quartam proportionalem; quæ sit ad tertiam, vt prima ad secundam inuerso ordine. Nam inuerso ordine tertia AD erit coniungenda non ad extremum primæ A, sed ad extremum C a secundæ, vt per lineas punctatas factum vides, & literis minusculis notatũ; est enim eadem AD, quę a d. Nam tunc ex eadem propos. 2. sicut antecedens, & prima AB se habet ad B a secundam, ita quarta h, d se habet ad tertiam d a.

PROB. V. PROPOS. XVI. Eucl. 13

Duabus datis rectis lineis, mediam proportionalem inuenire.

SIt duæ rectæ AB, & BC, quibus media proportionalis inuenienda sit. Disponantur in directum ita, vt fiant vna linea AC, quam biparties in E, & in sectione E facto centro interuallo vsque ad



extremitatem alterutrius extenso V. g. A, semicirculus describatur ADC. Deinde super B erigatur perpendicularis BD. Nam hæc erit media proportionalis inter AB, & BC, quod vt probetur ducendæ sunt rectæ AD, & DC, quæ ex propos. 28. tertij facient angulum rectum in D.

Probatur verò propositio ex Coroll. propos. 8. Nam D B cadit super basim angulo recto toti D subtensam: quare inter duas eius portiones AB, & BC erit media proportionalis. Angulus verò D punctatis factum rectus est, quòd in semicirculo ex propos. 28. tertij existat.

COROLLARIVM

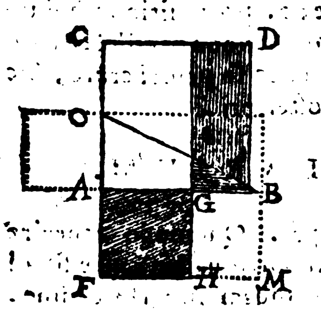
HInc est. Quòd perpendicularis excitata super diametrum à quocunque puncto eius, sit medium proportionale inter duo diametri segmẽta, vt clarè constat, cùm ex propos. 28. tertij semper ADC angulus rectus sit, quoquo puncto circumferentiæ vertex eius, reperiatur.

PROB.

PROB. VI. PROP. XVII. Eucl. 30.

Propositam rectam lineam terminatam extremâ, & mediâ ratione secare.

SIt recta AB; & ex 15. l. 2. sit secta in G ita, vt rectangulum sub totâ AB, & minori segméto GB contentum, sit æquale quadrato ex maiori segmento AG erectum. Dico hanc lineam extremâ, & mediâ ratione esse sectam, esseque AB totam ad segmentum maius AG, vt segmentum idem AG ad minus GB in proportione reperitur.



Probatur. Quoniã enim quadratum, seu parallelogrãmum nigrum ex maiore segmento AH est æquale rectangulo nigro ex minore segmento, & tota effecto GM erit AB tota reciprocè ex propos. 10. huius ad GH maius segmentum, vt GA, idest æqualis GH ad GB segmentum minus. Vnde cùm tota ita se habeat ad segmentum maius, vt segmentum maius ad minus, linea AB in G erit secta extremâ, & mediâ ratione ex huius def. 3.

EXPENSIO V.

De æquipotentia proportionalium linearum.

HIc agitur; datis lateribus proportionalibus, vel quatuor, vel tribus, quòd possint duo rectangula æqualia constituere, vel quadratum, & rectangulum licet inuicem sint inæqualia. Pertractatur itaque de linearum proportionalium æquipotentia in genere.

THEOR. I. PROPOS. XVIII. Euc. 16.

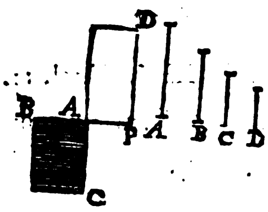
Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, quod sub extremis comprehenditur rectangulum est æquale illi, quod sub medijs comprehenditur, rectangulo.

Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquale fuerit ei, quod sub medijs continetur rectangulo, illæ quatuor rectæ proportionales erunt.

SInt quatuor rectæ proportionales A, B, C, D. Dico primò si ex A, & D extremis rectangulum componatur, vt est album DA, & ex medijs aliud rectangulum nigrum BC, hæc duo rectangula fore æqualia.

Probatur. Anguli sunt æquales niger, & albus ad A, vtpote recti. latera quoque reciproca proportionalia ex hypothesi, nempe simili proportione referuntur ex def. 2. huius PD ad AC, vt BA ad AP, quia sic in vtraque figura terminus, & fundamentum relationis est. Ergo ex 10. huius parte 2. rectangula album, & nigrum erunt æqualia.

Probatur secũda pars, quæ est conuersa prioris; nimirum, quòd rectangula æqualia habeant rectas sub quibus continētur proportionales. Colligitur verò probatio ex prima parte prop. 10. Nam cum hìc habeamus angulos ad A nigrum, & album æquales, & reciproca latera, nimirum se simili proportione respicientia PD lineam AC, vt BA lineam AP, patet lineas esse proportionales, & PD esse ad AC, vt BA ad AP.



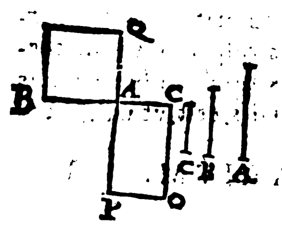
THEOR. II. PROPOS. XIX. Eucl. 17.

Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum, quod sub extremis comprehenditur, æquale est ei quadrato, quod comprehenditur sub media.

Et è contrario si sub extremis comprehensum rectangulum æquale sit ei quadrato, quod à media describitur, illæ tres lineæ proportionales erunt.

SInt tres lineæ A, B, C proportionales ita, vt qua proportione respicit A sequentem B, sequens quoque respiciat subsequentem C. Dico, quòd si ex extremis A, & C fiat rectangulum PC, & ex media G fiat quadratum QB; Quadratum, & rectangulum futura esse æqualia.

Probatur. Quia accipiam punctatam AQ æqualem mediæ B. Quare eam proportionem, quam dicit A ad punctatam, dicet, & B ad C. Cùm ergo sint iã quatuor proportionales, patet ex præcedēti propositione, rectangulum quadrati BQ ex punctatâ, & lineâ B, æqualibus, & medijs constitutum, esse æquale rectangulo ex extremis C, & A constituto exstant.



Secunda pars conuertit priorem eodem fundamento lineæ punctatæ præsupposito, & eodem argumento, quã secunda pars præced. Theorem. probata est; cùm enim æqualia sint quadratum, & rectangulum, erit proportio PA ad punctatam AQ, qualis est BA ad AC, sed punctata, & BA æquales sunt, ergo erit AP ad BA, vt BA ad AC, nimirum trium proportionalium A, B, C.

EXPENSIO VI.

De proportione duplicata, & composita, quam figuræ inter se possident respectu laterum homologorum.

COmparantur in hac Expensione latera figurarum, tum similium, tum dissimilium inuicem, & quam proportionem obtineant consideratur, vt ex inde cognito genere figuræ, & proportione laterum, facilliter etiam innotescat proportio ipsarum figurarum, vel è contrà.

THEO-

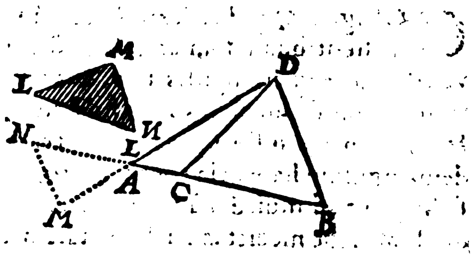
THOR. I. PROPOS. XX. Eucl. 19.

Similia triangula inter se sunt in duplicata ratione laterum homologorum.

DVo triangula, vel duas figuras habere duplicatam proportionem laterum homologorũ, nihil aliud est, quàm quòd ita sit figura ad figuram proportionata, sicut inter tres lineas proportionales prima linea proportionatur ad tertiã, ita enim proportio duplicatur gemina vice, nam dicitur sicut est antecedens ad sequentem, & ecce prima proportio, ita est sequens ad subsequentem ecce secunda: V. g. si basis, quæ ponitur antecedens triangulorum similium sint vt 1. ad 2. sequentem, triangula erunt inuicem vt 1. ad 4. nimirum repetendo proportionem gemina vice: nam sicut se habet 1. ad 2. ita proportionatur 2. ad 4.

Duplex autem potest esse casus. Nam vel latera homologa sunt æqualia, & sic etiam figuræ erunt æquales, cùm æqualia repetitis proportionibus semper æquo modo se habeant, & si volo reperire alium numerum, qui dicat proportionem, quam dicit 2. ad 2. non possum reperire; nisi 2. at cum proportio est inæqualitatis, tunc difficultas est, & id demonstrare oportet.

Sint ergo duo triangula similia nigrum, & album ADB, abscindaturque ex propos. 14. basibus AB, & LN tertia proportionalis ex latere AB, & sit AC, ducaturque recta DC, eritque triangulum ADC probandum priùs, & demonstrandum æquale triangulo nigro antequam ipsam propositionem probemus.



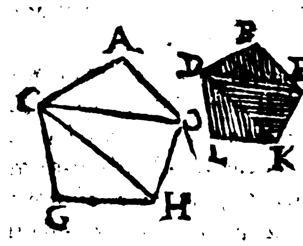
Probatur. Ex hypothesi, vt est AD ad AB, ita est LM ad LN ergo *permutando* ex 19. lib. 5. erit fundamentum AD ad fundamantum LM, vt terminus AB ad terminum LN; Sed vt est AB ad LN, ita fecimus LN ad AC proportionata crura. Ergo proportione correspondebit AD ad LM, vt LN ad AC. Ergo hæc triangula NLM, & ADC habebunt latera reciproca. Siquidem fundamentum primæ combinationis, & terminus alterius est in vno triangulo AD, & AC, & terminus primæ, fundamentumq; secundæ est in alio triangulo, nimirum NL, & LM. Quamobrem ex 11. huius erunt triangula æqualia punctatum, quod æquale fecimus nigro (claritatis gratia,) & triangulum ADC: quo supposito ita propositio

Probatur. Tres lineæ, nimirum AB basis, basi LN, & LN basi AC continuam dicunt proportionẽ; Vnde secundum superiùs explicata AB ad AC duplicatam dicet proportionem: Sed triangulum album maius ADB eam ad nigrum refertur proportione, quã basis AB ad basim AC: Ergo duplica ad illud proportione refertur. *Minor* vero *argumenti* ostenditur, nimirum quod triangulum ADB ad nigrum referatur, vt basis AB ad basim AC. Quia triangulum maius album dicit eam proportionem ad nigrum, quam dicit ad triãgulum ACD; quia iam hæc duo triangula nigrum, & ACD probata sunt æqualia, sed ad triangulum ACD dicit proportionem, quam basis AB, ad basim AC ex prima huius, quod in eundem verticem D finiant, Ergo refertur quoque ad nigrum eã proportione, quã basis AB ad basim AC duplicatã AB ad basim LN.

THEOR. II. PROPOS. XXI. Eucl. 20.

Similia polygona in similia triangula diuiduntur, & numero æqualia; & homologa totis, & polygona duplicatam habent eam rationem, quam habet latus homologum ad latus homologum.

SInt polygona similia album, & nigrum habentia angulos æquales singula alba singulis nigris, vt A angulo B, & C angulo D, &c. Sic & latera proportionalia circa angulos æquales V g. sit AC, ad BD, vt AQ ad BE. Dicit pro prima parte *hæc duo polygona diuidi in triangula similia, & numero æqualia.* Nam ducantur rectæ ab vno angulo ad alios oppositos, vt ab angulo D lineæ DE, DK, sic ab angulo C rectæ CH & CQ, eruntque triangula numero æqualia, vt patet. Probatur itaque, quòd hæc triangula sint similia: Nam primò DLK nigro est simile triangulum CGH albi polygoni. Ratio est quia angulus L niger est æqualis albo G, & circa illos latera, ex hypothesi sunt proportionalia. Ergo ex prop. 6. & def. 1. triangulum DLK, est simile triangulo CGH. Vnde etiam anguli reliqui erunt æquales V. g. apud K, & H in dictis triangulis, & ex propos. 4. huius latera DK, & CH, vtpote angulis æqualibus in æquiangulis triangulis opposita erunt homologa, ideo erit DK ad CH vt LK ad GH. Sed ob similitudinem polygonorum, vt est LK ad GH, ita est KE ad HQ: Ergo ex æquo erit vt DK ad CH, sic KE ad HQ. Sic quoque angulus apud K totus est æqualis angulo toti H; pars quoque anguli K versus L est æqualis parti H versus G. Ergo reliqua pars DKE erit æqualis reliquæ CHQ. Quare ex propos. 6. triangulum DKE nigrũ erit simile albo CHQ: quod angulum apud K habeat æqualem angulo apud H, & latera circa ipsos proportionalia, & sic de reliquis alijs argumentabitur.



Prob. 2. esse homologa totis. Nã triangula nigrum DLK, & CGH album sunt similia inter se, ideoque habebunt duplicatam rationem laterum homologorum DK, & CH ex prec. & etiam eandem habebunt duplicatam rationem triangula similia DEK nigrum, & CQH album, quod eodem latere DK, triangula nigra, & eodem CH triangula alba prædicta inexistant. Quare triangula DLK nigrum ad album CGH eam habebit rationem, quam triangulum nigrum DEK ad album CQH, vtpote eiusdem proportionis lateris ad latus duplicatam vt diximus Tract. 9. Def. 27. in fine, & idem fiet argumentum de reliquis. Cum ergo sint proportionalia triangula polygoni nigri triangulis albi, ita vt omnia fundamenta proportionum, seu antecedentia sint in vno, & consequentia, seu termini in altero. Ex propositione verò 17. quinti, vt est

vnum

vnum antecedens ad vnum consequens, sic sunt omnia antecedentia ad omnia consequentia, erunt omnia triangula nigri polygoni ad omnia albi, nempe totum ad totũ in eadem ratione, vt aliquod nigrum triangulum suo correspondenti albo.

Probatur tandem tertia pars; Quod polygonum ad polygonum sit in duplicata ratione lateris homologi ad latus homologum. Probatur inquam. Quia ita est polygonum nigrum ad album, vt triangulum V. g. DLK nigrum ad album simile CGH: Sed similia triangula laterum homologorum duplicatam habent rationem ex præced. Quare etiã polygonum nigrum ad album duplicatam habebit rationẽ laterum homologorũ V. g. KL ad GH.

COROLLARIVM

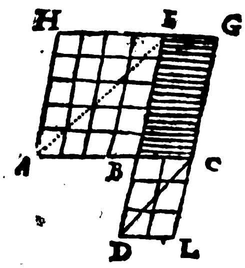
Hinc est, quod si fuerint tres lineæ proportionales, vt est prima ad tertiam, ita esse polygonum descriptum simile super secundã ad polygonum super tertiam descriptum, vel polygonum super primam ad polygonum simile super secundam descriptum; quia enim prima linea ad tertiam duplicatam habet secundæ rationem: Polygonum verò super primam delineatum habet duplicatam primæ lineæ rationem ad polygonum super secundam formatum; patet; cùm sit eiusdem proportionis lineæ primæ ad secundam duplicata proportio primæ eiusdem lineæ ad tertiam, & polygoni super primã ad polygonũ super secũdã duplicata quoq; quòd erit eadẽ lineę primę ad lineam tertiam, quam polygoni ad polygogonum proportio.

THEOR. III. PROPOS. XXII. Euc. 23.

Æquiangula parallelogramma inter se eam habent rationem, quæ ex proportione laterum componitur.

Qvantitas compositam respectu alterius habet rationem, cùm ne dum illam secundùm vnam proportionem respicit, sed secundùm plures, V. g. linea dicit proportionem ad aliam tanquam 10. ad 5. ita vt minorem superet medietate. Deinde hæc minor ad minorem se, dicit proportionem tanquam 5. ad 3. Illa itaque maior 10. partium ęqualium habet ad lineam trium partium rationem compositam; nimirum eam, quæ est inter 5. & 3. & inter 5. & 10. ita, vt respiciat illam, ne dum superando eam medietate, vt superat 5. sed insuper eam superando duobus quintis vt 5. superat 3. vt diximus tract. 9. pr. part. def. 7. Dicit itaque Euclides, quòd *parallelogramma æqualium angulorum eam proportionem habent*, quæ ex lateribus componitur: nimirum aream rectilinei ABHE; ne dum esse maiorem rectilineo DC paruo proportione, quæ est inter AB, & BC hoc est dupla: sed & ea, quæ est inter EB, & BD, quæ est E. g. 5. ad 3. Quamobrem, si DC minus rectilineum continet 6. Rhombos, ne dum AB continebit 10. Rhombos, quæ est proportio 5. ad 3. Sed insuper alios 10. nimirum 20. quæ est proportio 2. & 1. Et ita Rhombus AE, dicit proportionem multiplicem, quia bis continet Rhombum DC, & insuper proportionem superparticularem bipartientem sextas, idest semel, & duas ex eius sex partibus.

Potest etiam fieri comparatio inter AB, & BD latus pro vna proportione, & EB, & BC pro alia, & idem eueniet, vt sunt 20. 8. 6. vel 6. 15. 20. Primi namque proportionem habent, quam 5. ad 2.



& 4. ad 3. secundi vero proportionem habent, quam 2. ad 5. & deinde 3. ad 4. Vt autem propositionem demonstret, coniungit rectilinea ad apicem B, angulorum æqualium, ita vt in rectam vnam conueniant, vt fecimus supra propos. 10. latera reciproca AB, & BC sicut latus BD cum BE: prolungenturque eodem modo latera LC, & HE, donec sibi occurrant in G, & constituatur rectilineum nigrum BG.

Probatur rectilineum maius ex 1. huius dicit eam proportionem ad nigrum, quam dicit latus AB ad BC. Nigrum vero dicit eam proportionem ad minus, quã dicit EB ad BD, ob eandem altitudinẽ, sed ex pr. p. 5. def. 8. rectilineũ maius ad minus dicit proportionẽ compositam ex sua proportione ad nigrum, & nigri ad minus: Ergo dicit etiam proportionem compositam ex lateribus AB ad BC pro prima proportione componente, EB, ad BD pro secunda.

COROLLARIVM I.

Collige, Quod eadem est ratio in triangulis habentibus vnum angulum alteri æqualem, vt est videre in triangulis BDC, & ABE, cùm enim triangulum sit medietas rectilinei in eadem basi, & eiusdem altitudinis sequitur, vt triangula eundem angulum habentia eodem pacto, ac rectilinea se habeant ad inuicẽ, cùm ita se habeat duplum ad duplum, sicut medietas ad medietatem ex propos. 18. lib. 5.

COROLLARIVM II.

Colligitur quoq; quòd, cùm triangula omnia eiusdẽ altitudinis, & basis sint æqualia, sicut, & parallelogramma, sequitur; quòd triangulum V. g. BCD se habeat ne dum ad triangulum ABE; sed etiam ad quodcunque aliud eiusdem altitudinis, & basis, vtpote illi æqualibus eodem modo; sicut, & quæcunque triangula eiusdem altitudinis, ac triangulum maius ABE, quia sunt ipsi æqualia, respicient BCD triangulum minus, & quòdcunque illi æquale, vt sunt ea omnia, quæ cùm hoc minori eiusdem altitudinis sunt, & basis eãdem ratione: quare verum erit illud, quòd difficiliori argumento demonstrat Commandinus, triangula inter se rationem habere compositam ex proportione basium, & altitudinum, & idem dicas de parallelogrammis.

EX-

EXPENSIO VII.

De similium figurarum notione, & effectione.

TOta hæc quæstio de figuris similibus cognoscendis est, & id ex quadruplici principio, seu loco, scilicet, vel ex cognitione laterum; vel ex similis alterius comparatione, quòd duæ alteri sint similes, & ideo inter se; vel quòd pars similiter sit descripta, ac suum totum; vel tandem quòd figuræ ipse similes efficiantur, & ideo in primis docet eas efficere, & datam figuram imitari.

THEOR. I. PROPOS. XXIII. Euc. 18.

A data recta linea describere rectilineum simile similiterque positum, ac alterum rectilineum.

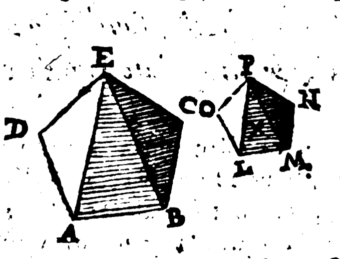
SIt rectilineum paruum x, cui oporteat super datam rectam AB describere rectilineum simile, similiterque positum, nimirum quod habeat angulos æquales, & latera proportionalia paruo rectilineo x.

Sic itaque faciendum est: resoluatur figura parua x in triangula nigrius, nigrum, & album, siue etiam in plura, si pluribus lateribus, quàm assignata, constet. Deinde super AB ad A fiat angulus niger æqualis angulo nigro L, similiterque ad B fiat angulus alius niger æqualis angulo nigro M, & ex 27. primi angulus E niger angulo nigro P æqualis erit.

Rursus idem fiat super lineam AE faciendo angulum album ad A angulo albo ad L æqualem: Pariterque angulum album ad E angulo albo ad P æqualem; reliquusque D reliquo O æqualis erit. Tandem idem efficiatur de angulis nigerrimis ad B, & E, quæ æquentur angulis nigerrimis M, P, & C eueniet æqualis angulo N. Et ita rectilineum AB, rectilineo x erit simile, similiterque positum.

Probatur. Nam anguli eodem ordine æquantur, & latera proportionalia sunt. Ergo sunt similia.

Probatur itaque de angulis; quòd æquentur.



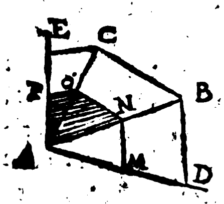
Nam, pars alba ad A parti albæ ad L, sicut nigra alia A, & L nigra æquales sunt; Ergo totus angulus A toti angulo L æqualis erit. Idem philosophare de partibus anguli E, quæ partibus anguli P æquantur, sic de partibus B partibus M æqualibus, & hoc ex constructione: iamque probatum est angulum D angulo O, & angulum C angulo N esse æqualem, quamobrem omnes anguli eodem ordine in vtraque figura æquales sunt.

Probatur quoque de lateribus. Nam æquiangula sunt triangula ex constructione Ergo, & latera erunt proportionalia ex 4. huius, prout æqualia ambiunt angulos. Quapropter, vt se habet in proportione AB ad BE, & BE ad BC, ita se habet in triangulo paruo LM ad MP, & MP ad MN. Vnde ex æquo ita proportionabitur AB ad BC, vt LM ad MN. Et ex 4. huius, vt est BC ad CE, ita MN ad NP: Ergo hæc tria latera AB, & BC, & CE inuicem similiter se habent ac tria correspondentia in figura x, quæ sunt LM, & MN, & NP.

Idē autē prorsus argumētū valet de alijs tribus AB, & AD, & DE figuræ maioris, quæ eodem ritu probabuntur proportionalia tribus figuræ x; nimirum lateribus LM, & LO, & OP; Ergo rectilineū maius minori est simile, similiterque positum.

COROLLARIVM.

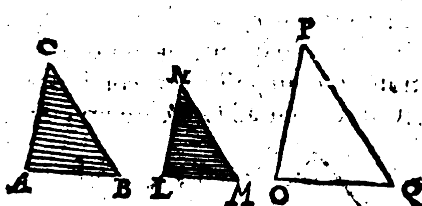
COllige ex Clauio angulos quoque æquales fieri diuidendo figuram in triangula, duo nigra, & album, & productis lineis diuidentibus AC, & AB sicut, & lateribus, anguli A, ex quo prodeunt AD, & AB singulis reliquis lateribus ON, MN, OP parallelas ducēdo DB, & BC, & CE. Ita enim triangula maiora inclusis, & minoribus (vt ex Coroll. propos. 4. erunt proportionalia. V. g. album maius ABD, albo minori, ANM, &c. consequenter tota figura maior constans ex tribus angulis similibus, similis erit figuræ minori inclusæ.



THEOR. II. PROP. XXIV. Eucl. 21.

Quæ eidem rectilineo sunt similia; & inter se sunt similia.

SInt duo rectilinea album, & nigrum nigerrimo LMN similia. Asserit *esse etiam inter se similia*.



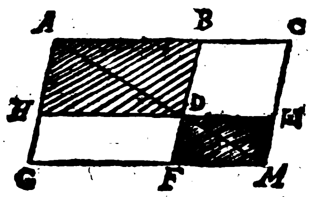
Probatur faciliter. Nam duo anguli correspondentes A, & O sunt æquales angulo L. Ergo & inter se. Item B, & Q angulo M; item C, & P angulo N: vnde & æquales inter se: lateraque angulos æquales amplexantia ex 4 propos. huius erunt proportionalia. Siquidem CA est ad CB, vt LN ad NM, & LN est ad NM, vt PO ad PQ. Ergo ex æquo CA erit ad CB, vt PO ad PQ. Eadem dicas de alijs cruribus; atque adeò per definitionem. Similia erunt triangula nigrum, & album, quòd sint similia nigerrimo LNM.

THEOR. III. PROPOS. XXV. Euc. 24.

In omni parallelogrammo, quæ circa diametrum sunt parallelogramma, & toti & inter se sunt similia.

ADsit parallelogrammum AGMC, in quo ducatur diameter AM, & per quodlibet eius pun-

punctum D ducantur duæ parallelæ ad latera GM, & MC; quæ sint BF, & HE. *Dicit parallelogramma, quæ circa diametrum sunt nigrum, & nigerrimum esse inter se similia.*



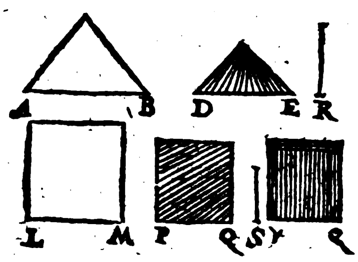
Probatur, quia constituuntur triangulis, quę parallelæ auferunt. Vnde ex Coroll. propos. 4. huius, triangula ea erunt similia triangulis totius, V. g. parallelogrammum maius nigrum constituitur duobus triãgulis æqualibus ex prop. 41. l. 1. sed quorũ quodlibet, vt ABD est simile vni ex duobus triangulis, ex quibus constituitur totum, idest triangulo ACM ob parallelam BD ipsi CM: triangulum quoque nigerrimum minoris DEM simile est eidem toti triangulo AMC. Ob parallelam DE, ipsi AC, Ergo parallelogramma quoque nigerrimum, & nigrũ, vtpote eis triangulis dupla erunt similia toti. Quare & similia inter se erũt ex preced. vel ex 16. lib. 5. quæ enim vni tertiæ sunt eędem rationes, & inter se sunt eædem rationes.

THEOR. IV. PROP. XXVI.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, & ab eis rectilinea similia, similiterque descripta proportionalia erunt.

Et si à rectis lineis similia, similiterque descripta rectilinea proportionalia fuerint, etiam ipsæ lineæ proportionales erunt.

PRima pars huius Theorematis est. Quod si sint quatuor lineæ, cuius antecedẽs AB in prima cõbinatione ad sequentẽ DE ratione referatur simili rationi, quâ in posteriori combinatione refertur LM antecedens ad sequentẽ PQ, & constituantur super rectas primæ combinationis duo rectilinea inuicem similia, similiterque posita V. g. duo triangula album, & nigrum. Rursusque super rectas secundæ combinationis alia rectilinea diuersi, etiam generis à primis; sed tamen inuicem similia, similiterque descripta V g. duo quadrata album, & nigrum. Affirmat, *quod hæc rectilinea erunt proportionalia*, ita, vt, sicut triangulum album ad nigrum referatur, ita quadratum album ad nigrum refertur, quod vt probetur.



Inuenienda est tertia proportionalis rectis primæ combinationis, quæ erit R. Sicut, & posterioris combinationis reperienda est tertia proportionalis S, secundum documenta 14. propos. huius hoc posito.

Probatur ex propos. 21. Coroll. vt est basis AB ad tertiam proportionalem R, ita est triangulum album ad nigrum.

Pariterque vt est latus LM ad tertiam proportionalem S ita ex eodem Coroll. est quadratum album ad nigrum.

Sed basis AB trianguli dicit ad suam proportionalem R similem proportionem, quam dicit LM ad S. Ergo, & triangulum album respicit nigrum eâ proportione, quâ quadratũ albũ respicit nigrũ.

Minor argumenti constat ex 23. quinti nimirum quod AB sit ad R veluti LM est ad S. Quoniam, cùm R, & S sint tertiæ proportionales, ex æquo argumentando, eam proportionem, quam dicet AB ad suam proportionalem R, eandem dicet LM ad suam tertiam proportionalem S: Quoniam dicebant eandem proportionem ad suas sequentes DE, & PQ, ex hypothesi.

Secunda vero pars vertit primam, & præsupponit ad probationem inueniendam tribus AB, nimirum DE, & LM quarta proportionalis YZ; super quam constituendum est rectangulum simile, similiterque positum; ac rectilineum LM, de quo probandum est priùs, quòd sit æquale rectilineo PQ, ad hoc, vt conuertatur propositionis prima pars, & probetur, quòd rectilinea rectilineis similibus, & similiter descriptis proportionalia, lineis constent proportionalibus.

Probatur autem, quòd sint æqualia duo quadrata nigra. Quia ad ipsa dicit eandem proportionem quadratum album; quam dicit AB ad DE, & quidem ad quadratum nigrum PQ ex suppositione; ad quadratum verò YZ ex eo quod sit super quartam proportionalem YZ. vt ex antecedenti probatione huius propositionis constat, vnde erit triangulum album ad nigrum, ita quadratum album ad nigrum eo quia sit AB ad DE vti LM ad YZ. Quare ex propos. 9. quinti cum eisdem quadratis nigris eandem dicat proportionem album quadratum, erunt æqualia quadrata nigra

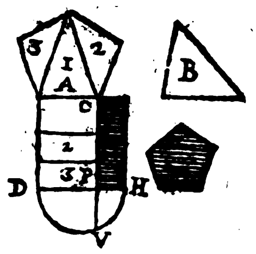
Probatur modo secunda pars propos. Duo quadrata nigra sunt in duplicata ratione suorum laterum ex 20. huius; sed hæc probata sunt æqualia; Ergo, & latera PQ, & YZ erunt æqualia. Sed latus LM dicit eandem proportionem ad latus YZ; quam basis AB ad basim ED. Ergo etiam eamdem dicit proportionem latus ML ad latus PQ, quam basis AB ad basim ED.

THEOR. V. PROPOS. XXVII. Euc. 25

Dato rectilineo simile, similiterque positum, rectilineũ & alteri dato æquale constituere.

SIt datum rectilineum A V. g. pentagonum, cui constituendum sit rectilineum simile, similiterque positum: sed alteri dato æquale V. g. triangulo B. Itaque secundùm doctrinam propos. 43. primi rectilineum parallelogrammum D C æquale rectilineo A cõstituatur super latus quodlibet eiusdem rectilinei imitandi A, & huic rectilineo parallelogrammo fiat aliud nigrum simile super latus alterum CP idest CH, sed æquale rectilineo B. Inueniatur ergo lateribus DP, & PH parallelogrammorum nigri, & albi, quæ æqualia non sunt, media proportionalis ex propos. 16. huius PV, & super hanc PV rectilineum constituatur nigrum simile priori iuxta regulas propos. 23. & hoc erit illud, quòd quæritur.

Nam pentagonum nigrum, iam fecimus simile, le, similiterq; constitutũ dato A. Quare solum remanet demonstrandum; quòd triangulo B sit æquale, id verò ostenditur. Nam est æquale rectangulo nigro CH, sed hoc est æquale *prout fecimus* triangulo B. Ergo, & pentagonum nigrum est æquale triangulo B.



Maior probatur. Nam dicit eandem proportionem pentagono A; quam dicit rectilineum CH, quæ verò eidem eandem dicunt proportionem, illuicem æqualia sunt ex propos. 9. quinti.

Quod verò nigrum pentagonum, & nigrum parallelogrammum dicant eandem proportionem pentagono A ostenditur: Nam dicunt eandem proportionem, quam parallelogrammo DC: Sed hoc pentagono A est æquale. Ergo, & pentagono A, ex 7. quinti eandem dicunt proportionem.

Probandum est. Quod parallelogrammo DC eandem dicant proportionem nigrum pentagonum, & nigrum parallelogrammum. Nigrum parallelogrammum ad parallelogrammum DC ea proportione refertur ex prop. 1. huius, cum sint eiusdem altitudinis, qua bases DP, & PH. Sed ea proportione, quã referuntur bases DP, & PH, pentagonum nigrum ad idem parallelogrammum refertur: Ergo refertur ad CD proportione eâdem pentagonũ nigrum, qua rectangulum nigrum CH.

Patet hæc *minor* figuræ similes, similiterque positæ super primam, & mediam lineam referuntur, vt refertur prima ad tertiam ex Coroll. prop. 21. Sed pentagonum nigrum est positum super mediam PV: ergo dicit ad pentagonum A, cui simile est, & similiter positum eam proportionem, quam dicit prima PH ad tertiam DP. Sed pentagonum A ex constructione est æquale parallelogrammo DC. Ergo ad hoc parallelogrammum dicit ex 7. quinti eam proportionem, quam prima, quæ est basis HP dicit ad tertiam, quę est basis PD; quod erat tandem probandum. Quare pentagonum nigrum ad parallelogrammum album referetur, vt PH ad DP, sed taliter etiam nigrum parallelogrammum ad albũ maius refertur: Ergo nigro parallelogrammo nigrum pentagonum erit æquale; quare, & ipsi B triangulo.

EXPENSIO VIII.

De similium figurarum additione, & subtractione.

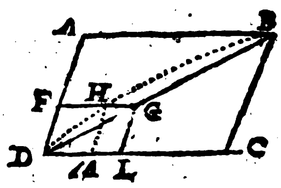
PRimo parallelogrammorum deficientium, vel abundantium proprietates ponit, ex inde docet addere, vel subducere alicui parallelogrammo, & applicare datæ lineæ, vel cum defectu, vel cum excessu, vt placet, deseruitque hæc doctrina maximè lineis irrationalibus, de quibus lib. 10. agit Euclides.

THEOR. I. PROPOS. XXVIII. Euc. 26.

Si à parallelogrammo parallelogrammum ablatum sit simile toti, & ei similiter positum, communem cum eo habens angulum; hoc circa idem diametrum, sicut totum, consistit.

DIcit. Quod, si à maiori parallelogrammo ABDC auferatur parallelogrammum minus DFGL, quod deinde ipsi accommodetur, vt angulus super æqualem angulum situs sit, vt vides in D. Dicit hoc paruum parallelogrãmum consistere circa diametrum totius DB; quod probat per reductionem ad impossibile.

Nam si dicatur. Quod DG, & GB in vnam re-



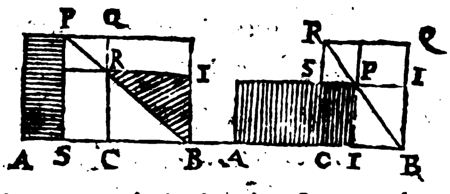
ctam non conueniant, & ideo, quòd non possit esse diameter idem trahatur diameter, & sit punctata, quæ transeat non in G, sed per aliquod aliud pũctũ. Itaque E.g. trãsibit per H, & tracta HM parallelogrammum FHDM erit simile toti DABC ex 25. huius, quia ex aduersarijs circa diametrum sunt: Quamobrem latera inuicem erunt proportionalia, ita vt quã proportione DA respicit latus totius DC, sic latus minoris DF respiciat DM: sed & idem latus DF respicit DL eadem proportione, quã DA respicit DC; quia parallelogrammum FGDL est simile toti ex 25. huius: Ergo cùm ad idem DF eandem dicant proportionem ex 9. quinti essent æquales DM, & DL pars, & totum. quod repugnat.

THEOR. II. PROPOS. XXIX. Euc. 27.

Omnium parallelogrammorum secundùm eandem rectam lineam applicatorum deficientium figuris parallelogrammis similibus, similiterque positis, parallelogrammum maximum est id, quod à dimidia describitur, dummodo defectus quorumcunque aliorum similes existant defectui, quo deficit parallelogrammum prædictum à dimidia descriptum.

DEtur recta AB, cui applicetur parallelogrammum nigrum AP deficiens ad complendam, occupandamque totam lineam AB portione PB. Asserit, quod, si huic deficientię PB super dimidiam CB constitutum sit simile parallelogrammum, quale est ex prop. 25. huius RB, cum sit circa diametrum BP deficientis superficiei. Asserit inquam istud parallelogrammum ex dimidia, sed deficienti superficiei simile, esse maius parallelogrammo nigro AP, & quocunque alio cum dictis conditionibus facto.

Probatur pars AS nigri parallelogrammi fig. ad dexteram est equalis parti CI parallelogrāmi BR ex medietate descripti BR: Reliqua verò pars C P



parallelogrammi nigri, cùm sit complementum æquatur, & suppletur per aliud complementū PQ, quod ex prop. 35. l. 1. ei est æquale, ergo rectilineū ex medietate BR superat parallelogrammum nigrum AP reliquo parallelogrammo RP. Ita etiam euenit; si parallelogrammum nigrum AP fieret altius paralelogrāmo ex medietate descripto BR, dummodo hoc parallelogrammum, vt supra dixi, esset simile defectui BP, nempe existens circa diametrum superficiei deficientis nigro rectilineo ad occupandam totam lineam AB, vt potes videre in altera figura.

Probatur eodem modo. Nam AQ est æquale parallelogrammo BQ; ablatis itaque ab vtrisque complementis æqualibus RQ, & SI remanebunt æquales adhuc residuæ partes, nimirum hinc seminigra BR, inde parallelogrammum AP nigrum adiuncto ei paruo rectilineo PR: Ergo nigrum parallelogrammum AP est minus seminigro RB, & deficit ab eius equalitate hac portione ei addita RP.

PROB. I. PROPOS. XXX. Eucl. 28.

Ad datam rectam lineam applicare parallelogrammum æquale dato rectilineo deficiens tali superficie parallelogrammâ, quæ sit similis alteri parallelogrammo dato. Dummodo datum rectilineum, cui æquale applicandum est, non sit maius eo, quod à dimidia describi quiret, simile defectui dato.

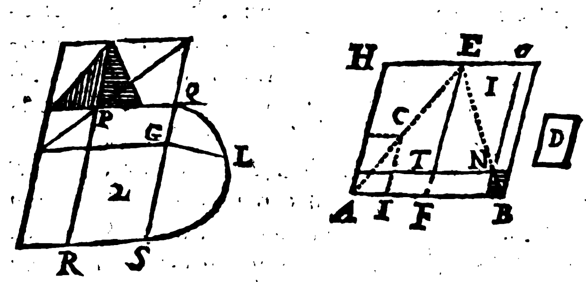
SI tibi exibeatur recta linea AB, ad quam applicandum sit parallelogrammum æquale triangulo nigro; sed quòd deficiat ad totam lineam cōplendam in sua superficie, portione tali, quæ sit similis alteri datæ D.

Est primo aduertendum, quod hoc triangulum non debet esse maius, quàm illud rectangulum, quod describeretur à medietate; namque deffectus deinde non posset similis rectilineo dato D constitui; quòd, vt probauimus in preced. propos. rectilinea applicata, quæ deficiunt simili defectu rectilineo dato ea, quæ sunt super medietatem, sunt maxima omnium. Vnde si esset rectilineum maius, quàm quod super medietatem posset fieri, deinde deffectus similis non esset rectilineo dato.

Præceptum I. Describatur itaque super AB rectilineum D, quod sit punctatum AC, tractoq; diametro EA indefinite, erigatur à puncto medio F parallela lateri punctato CI, quæ occurrat diametro EA in E, fiatque totum rectilineum AFHE super medietatem: de quo primo videndum est: an sit æquale triangulo nigro per operationem, quam vides, & quam docuit Euclides propos. 41. primi. Siquidem facto rectilineo PG in dato angulo A secundùm longitudinem lineæ AF, æquale triangulo nigro, prolungatisque lateribus RP, & QS, transferendum est rectilineum AE ex medietate super illud: nam si excedatur à rectilineo PG, operatio non potest fieri, vt dictum est: si eidem rectilineo commensuretur, & sit ei æquale, nihil aliud exposcitur, factum enim est, quod quæritur, & defectus EB erit similis rectilineo dato D, at si maius sit rectilineo PG.

Præceptum 2. Tunc ex doct. propos. 27. huius inueniatur excessui inuento GR parallelogrammum æquale EN, & ad id reperiatur inter QG latus rectilinei triangulo æqualis, & latus GS latus excessus media proportionalis GL, super quam translatam in EO fiat parallelogrammum EN simile, similiterque positum, ac defectus EB; producaturque latera ON, & NT. Iamque erit applicatum lineæ AB rectilineum AN æquale triangulo nigro; sed quod deficit rectilineo nigro NB similis rectilineo D.

De quo duo probanda sunt. Primum, quòd sit simile rectilineo D defectus niger NB: secundo, quòd rectilineum AN sit æquale triangulo nigro.



Prog. I. Similitudo itaque probatur. Quia figura deficiens EB est similis figuræ ex medietate AHEF, quæ est contermina. Sed hæc facta est similis figuræ D, Ergo etiam illa deficiens EB similis erit figuræ D. Sed huic quoque est similis deficiens figura minor inclusa TO, Ergo, & reliqua nigra BN. Patet consequens, quia ex prop. 28. h. est circa idem diametrum totius BE, quæ verò circa diametrum sunt ex propos. 25. huius, & toti, & inter se sunt similia.

Progress. 2. Quod verò parallelogrammum AN, æquale sit triangulo nigro; Probatur. Nam AN est æquale rectilineo PG, in 2. fig. Sed illud est æquale triangulo nigro ex constructione: Ergo, & rectilineum AN est æquale triangulo nigro.

Probatur maior propositio. Quòd parallelogrammum AN æquale sit rectilineo PG, nam est æquale gnomoni TBO. Sed hic est equalis rectilineo PG, quòd sint gnomon TBO, & PG residua ex æqualibus vt ex I. & 2. præcep. PS, & BE. Ergo AN est quoque ei PG æquale. Quod verò AN sit æquale gnomoni ostenditur. Nam pars FN, cùm sit complementum, est æqualis parti NO, ex prop. 35. primi. Pars autem AT, cum sit super equali basi, & inter easdem parallelas est æqualis ex prop. 37. primi alteri parti TB. Ergo AN æquatur gnomoni TBO. Quapropter, cum AN rectilineum, applicatum lineæ AB sit æquale gnomoni TBO; hic verò gnomon TBO sit æqualis rectilineo PG, quòd, vt dixi, ambo residua sint æqualium EN, & GR rectilineorum ab æqualibus EB, & PS ablatorum. Rectilineum verò PG sit æquale ex effectione triangulo nigro; Etiam AN rectilineum erit ei nigro triangulo æquale, applicatum autem erit lineæ AB, & deficiet rectilineo nigro NB simile rectilineo D.

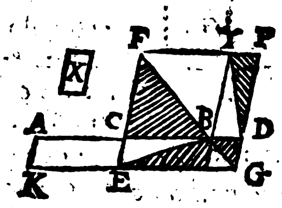
PROB.

PROB. II. PROPOS. XXXI. Eu. 29.

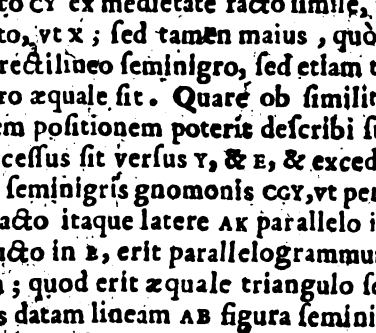
Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare excedens figura parallelogramma, quæ similis sit parallelogrammo alteri dato.

EXibita tibi sit linea AB, ad quam oporteat applicare æquale triangulo seminigro parallelogrãmum excedens ipsam figura parallelogramma, nimirum GB, quæ similis sit parallelogrammo alicui dato V. g. X.

Construatur itaque super dimidiam AB, idest CB parallelogrãmum CFYB, sed simile parallelogrãmo X, similiterque positum; quo facto reperiatur quadratum æquale huic parallelogrammo, simulque triangulo seminigro; quod exequemur, vt vides in secunda figura, primo ex doct. 44. primi constituendo in dato angulo rectilinei X super latus ZO æquale lateri CB rectilineum nigrum ZOIY æquale triangulo seminigro; & iuxta illud ponemus rectilineum YHMI simile, & æquale rectilineo CYFB. Hoc enim poterimus facere ex propos. 44. primi propter æqualitatem angulorum correspondentium, & lateris YI, quo facto OH totũ redigemus in rectangulũ punctatũ æquale ex propos. 37. primi, vtpote inter easdem parallelas, & super eandem basim. Huic verò rectangulo faciemus quadratum ęquale ONRS ex prop. 16. secundi. Tandemque huic quadrato fiat rursus parallelogrammum æquale ex prop. 37. vel ex prop. 43. primi; sed simile, similiterque positum, ac parallelogrammum X, scilicet QNRL.



Hoc itaque parallelogrammum simile est alteri seminigro CY ex medietate facto simile, similiterque posito, vt X; sed tamen maius, quòd ne dum huic CY rectilineo seminigro, sed etiam triangulo seminigro æquale sit. Quarè ob similitudinem, & similem positionem poterit describi super BF; Ita vt excessus sit versus Y, & E, & excedat tribus partibus seminigris gnomonis CGY, vt perspicuum est. Tracto itaque latere AK parallelo ipsi AB, & CF producto in E, erit parallelogrammum KD, requisitum; quod erit æquale triangulo seminigro excedens datam lineam AB figura seminigra BG simili rectilineo dato X.



Probatur, vt in anteced. propositione AG rectilineum est æquale gnomoni CGY; quoniam pars KC est æqualis parti EB, vtpote duo dimidia totius KB, & ideo complemento BP æquali ipsi EB. Sed gnomon CGY est ęqualis triangulo seminigro: Ergo AG rectilineum est æquale triangulo seminigro.

Quod autem gnomon sit æqualis triangulo seminigro, ostenditur: nam est æqualis rectilineo YO nigro, quod EP, & HO duo tota sint æqualia, & CY, MY duę partes eorũ sint æquales ex construct. Ergo gnomon CGP, & rectilineum YO partes remanentes ex totis æqualibus erunt æquales. Cum itaque gnomon CGY, & rectilineum YO sint æqualia. Rectilineum verò YO ex constructione sit æquale triangulo seminigro. Ergo, & AG rectilineum applicatum æquale gnomoni, & ideo rectilineo nigro YO erit tandem æquale triangulo seminigro.

Patet autem; quod excedat lineam AB datam, rectilineo BG simile rectilineo X; quod totum EP sit ex constructione ei simile; ergo talia erunt etiam rectilinea circa diametrum ex propos. 28. huius. Circa verò diametrum reperitur BG rectilineum.

EXPENSIO IX.

De laterum figurarum proportionali potentia.

HEc supra egerimus de potentia proportionalium linearum, quam habent ad constituendum alteri ęquale rectilineum; non tamen lineas considerauimus, vt in aliqua figura existentes ad constituendum rectilineum proportionale. Modo hic eas considerabimus, vt latera alicuius figurę proportionalis alteri quacumque proportione. Et primo considerabimus, tanquam latera trianguli rectanguli; deinde tanquam latera alicuius quadrati, vt fecimus secundo libro. Euclides quidem hoc 6. libro de sola potentia agit trianguli rectanguli, de potentia verò laterum alicuius quadrati lib. 12 tractat, sed nos existimauimus hic esse propriũ earũ propositionum locum.

THEOR. I. PROPOS. XXXII. Euc. 31.

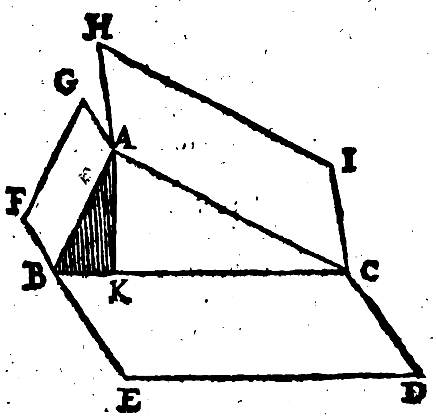
In rectangulis triangulis figura quælibet à latere angulum rectum subtendente descripta æqualis est figuris sibi ipsi similibus, similiterque positis, quæ à lateribus describuntur.

TRiangulum sit rectangulum ABC. Describatur que super BC quæcumque figura rectilinea BD, cui similes, similiterque positæ constituantur super crura BA figura BG, & CA figura CH. Dico figuram BD super basim *esse æqualem figuris super crura* BG, *&* CH.

Prob. Sicut est ex CA quadratum prima quantitas ad quadratum ex CB secundam quantitatem in prima serie; ita est rectilinem CH prima quantitas ad rectilineum BD secundam quantitatem in posteriori serie (debes autem imaginari super latera rectanguli descripta quadrata l. id. fig. non exprimat.)

Hoc autem patet; quòd similiter quadrata, & figuræ

figuræ ſe habeant, eo quòd ſit ex prop. 21. quadratum ad quadratum, vt figura ad figuram; quia ſunt

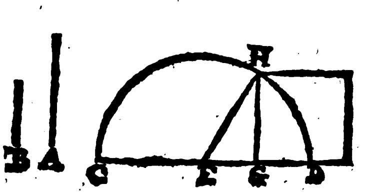


eorum proportiones duplicatæ eiuſdem proportionis laterum AC ad CB. Et ob hanc eandem rationem quadratum ex BA in prima ſerie tertia quantitas ad quadratum ex BC in eadem ſerie ſecundã quantitatẽ eſt, ſicut rectilineum BG tertia quãtitas ſeriei poſterioris ad BD rectilineum item ſecundam quantitatem eiuſdem ſeriei poſterioris. Quapropter ex propoſ. 25. lib. 5. Compoſita prima quantitas cum tertia prioris ſeriei, nempe quadrata ex CA, & BA erit ad ſecundam: nimirum quadratum ex BC, vt in poſteriori ſerie prima quãtitas rectilineum CH cum tertia quantitate rectilineo BG ſimul ſumpta ad rectilineum BD. Sed quadrata ex BA, & AC dicunt proportionem æqualitatis quadrato ex BC ex 11. l. 2; Ergo etiã rectilinea BG, & CH dicent proportionem ęqualitatis rectilineo BD ex BC.

THEOR. II. PROPOS. XXXIII.

Datis duabus lineis inæqualibus reperire, quid poſſit plus maior, quam minor in ordine ad ſimiles figuras conſtituendas.

DEntur duę lineæ A maior, & B minor. Accipiatur alia quædã dupla maioris, vt CD, & eã diuiſâ per medium in E, eo in puncto centro facto, interuallo eius medietatis ED, ducatur ſemicirculus. Inde à centro E menſurata longitudine minoris datæ B vſque ad G, ibi erigatur perpendicularis, & deducatur vſque ad circumferentiam, & punctum contactus H centro E rectâ EH coniungatur. Dico enim, quòd ſi fiat figura ex GH ſimilis figuræ ex A effectæ *illud eſt ſpacium, quò figura ipſa ex A effecta ſuperat figurã ſibi ſimilem ex linea B erectam*, & ideo quod A eſt in potentia maiori, quàm B ad quamcunque figuram conſtituendam cuiuſcunque formæ, ſeu magnitudinis tota linea GH.



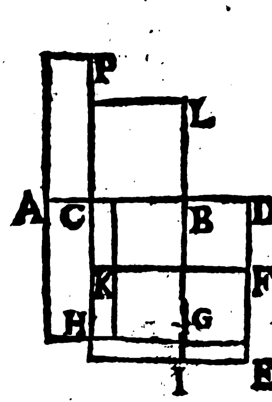
Probatur ex propoſ. præced. Subtenſa angulo recto G, ſcilicet HE, eſt æqualis lineæ datæ A, ideo quòd ſingulæ ſint æquales radio EC, & A quidem ex conſtructione; HE verò, quòd ſit radius. Quare eius figura ſimilis, ſimiliterque poſita, erit æqualis duobus figuris ſimilibus, ſimiliterque poſitis ex GH, & ex EG. Quamobrem figura ex A æqualis figuræ ex EH ſimilis, ſimiliterque poſita erit maior figurâ ex EG, & ideo ex B ſibi æquali totâ figurâ ex GH ſimili, ſimiliterque poſita; quod erat probandum.

THOR. III. PROPOS. XXXIV. Eu. 13.

Si recta linea ſecetur ſecandùm mediam, & extremam rationem, maius ſegmentum, cum dimidio totius iunctum, quintuplum poteſt efficere quadratum maius, quàm à dimidia totius deſcribitur.

SEcetur recta AB in C media, & extrema ratione. Sitque maius ſegmentum BC; Prolongetur in D, & ſit BD dimidia totius AB. Dico *quadratum ex* CD; *nimirum* CE *ex maiori ſegmento, & dimidio totius eſſe quintuplum maius, quàm quadratum ex ſola dimidia* BD, *quod eſt* BF.

Probatur. Quadratum AG, ex AB totâ effectum, & ideo dupla lineæ BD, eſt quadruplum quadrati ex ipſa dimidia BD, ex propoſ. 6. l 2. Et huic quadrato æqualia ſunt rectangula duo, vnum AH ſub tota, & minore ſegmento, alterum CG ex tota, & maiore ſegmento ex prop. 4. l. 2.



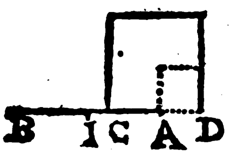
Primo quidem rectangulo AH, vel AP ex tota, & minore ſegmento ęquale eſt quadratũ ex maiore ſegmento CB, quòd eſt CL, vel KI ex propoſ. 15. l. 2. Alteri verò rectangulo CG, ex tota, & maiore ſegmento ſunt æqualia duo rectangula ex CB, & BD qualia ſunt BK, & KG ex maiori ſegmento, & dimidiâ totius effecta, & ideo æqualia inuicem. Loco tamen rectanguli KG ſubſtituamus æquale FI, quod ſit complementum rectanguli BK in quad. CF, & ideo ex prop. 35. l. 1. ei æquale, & hinc ęquale rectangulo KG. Igitur quadratum AG ex tota eſt æquale rectangulis duobus ex maiore ſegmento, & dimidia BK, & FI, & quadrato CL, ideſt æquali KI ex ſegmento maiori. Ideo hæc omnia erunt quadruplicia quadrato ex dimidia BF, vt eſt oſtenſum, tale eſſe quadratum AG, cui ęquantur. Adde omnibus iſtis ſimul rectangulis BK, & FI, & quadro KI quadratũ BF ipſum ex dimidia BD, & omnia erunt quintuplicia ipſius quadrati BF. Hæc autem omnia ſimul, nempe duo rectangula cum duobus quadratis, ex dimidia, & ex maiore ſegmento faciunt ex 6. l. 2. quadratum ex CD, ideſt CE erectum ſuper ſegmento maiori CB, & addita medietate BD; hoc eſt ſuper CD: Ergo hoc quadratum erit quintuplum quadrati BD.

THEOR.

THEOR. IV. PROPOS. XXXV. Eu.3.l.II.

Si recta linea secundùm mediam, & extremam rationem sit secta, minus segmentum dimidio maioris additum; quintuplum potest eius, quod à dimidio maioris segmenti describitur.

Sit data recta AB secta secundùm extremam, & mediam rationem in C; Sitque minus segmentū AC, cui adijciatur dimidium DA maioris CB Dico DC *posse efficere quadratum quintuplo maius, quàm* AD.



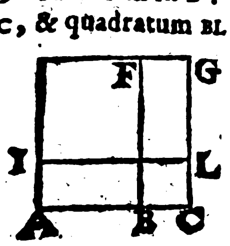
* Probatur. Ita proportionatur tota AB ad CB maius segmentum, vt CB ipsum ad AC.

Qua de re ex 18.l.5 etiam medietas totius ad medietatem segmenti maioris se habebit, vt segmentum maius CB ad minus CA, & ideo conuertendo minus CA ad maius CB segmentum se habebit, vt dimidiū AD segmenti maioris ad dimidium AI totius AB. Vnde ex 17.lib.5. minus CA cum dimidio maioris segmenti se habebit eodem modo ad maius CB cum dimidio AI totius AB, vt segment maioris dimidiū AD ad dimidium totius, AI. Ideoque etiam quadrata harum linearum taliter se habebunt ex prop. 26.h. Atq; adeo erit quadratum segmenti minoris simul, cum dimidio maioris segmenti, tanquam vna linea, & latere ad quadratum maioris segmenti cum dimidio totius lineæ, AB tanquā vno latere, vt quadratum dimidij DA segmenti maioris ad quadratū dimidiæ totius AI. Ergo etiā permutando erit quadratum minoris segmenti cum dimidio maioris, tanquam vno latere, ad quadratum dimidij segmenti maioris, vt quadratum maioris segmenti cum dimidio totius, tanquam vno latere ad quadratum dimidię totius: sed hoc quadratum ex precedenti est quintuplum quadrati dimidiæ totius. Ergo etiam quadratū ex DC minore segmento, & dimidio maioris effectum erit quintuplum quadrato segmenti DA. dimidij maioris, quod erat probandum.

THEOR. V. PROPOS. XXXVI. Eu.4.l.II.

Si recta linea secetur secundùm extremam, & mediam rationem; Quod à tota, quodque à minore segmento vtraque simul quadrata tripla sunt eius, quod à maiore segmento describitur quadrato.

Sit AC secta secundum mediam, & extremam rationem in B. Dico quadratum AG totius AC, & quadratum BL minoris segmenti esse tripla quadrato IF maioris segmenti.



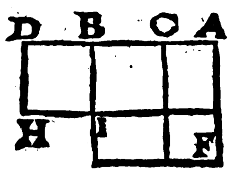
Probatur. Nam ex 15. lib.2. Rectangulum sub tota AC, & minore segmento BC, nimirum AL, est æquale quadrato maioris segmenti IF. Itaque IF, vtpote pars quadrati AG iam equat se met, vtpote quadratum maioris segmenti, & insuper quadratum AC ex tota continet rectangulum AL ex tota, & minore segmento ipsi IF quadrato maioris segmenti æquale. Et insuper FL rectāgulum cui, si addas quadratum minoris segmenti BL, erit æquale rectangulo AL, & consequenter AG quadratum cum BL iam tertio æquat quadratū IF maioris segmenti. Vnde quadratum totius CA cum quadrato BL minor triplum faciunt quadrati à maiore segmento descripti, quòd propositum fuit.

THEOR. VI. PROP. XXXVII.

Si recta linea secundum extremam, & mediam rationem secetur. Apponaturque ei æqualis maiori segmento; hoc fit minus segmentum respectu totius maioris, qua modo se habet tanquam maius segmentum.

Sit AB secta secundùm extremam, & mediam rationem in C; addaturque ei DB æqualis maiori segmento. Dico *quod* DA *est secta quoque secundùm mediam, & extremam rationem in* B: *esseq; minus segmentum* DB; *maius verò* BA.

Prob. Rectangulum IF contentum sub tota, & minore segmento ex 15.h 2 est æquale quadrato DI maioris segmenti DB additi. Adde itaque vtrisque spatium, quod eis est cōmune: Eruntq; æqualia rectāgulum AH, & quadratum BF. Rectangulum verò continetur sub tota DA, & maiore segmento DB addito. At quadratum ex linea BA, quæ erat à principio. Ergo ex 17. l. huius ita erit DA ad BA, vt BA ad BD; ideoque DA erit secta extremâ, & mediâ ratione.



COROLLARIVM

Quare ita potens erit AB, cum dimidio DA ad quintuplum quadrati dimidij DA ex pr.34. huius, & ex propos.35. dimidium AB cum DB simul quintuplum poterit dimidij AB, & ex præced. DA, & BD distinctæ poterunt duo quadrata simul triplum quadrati ex BA.

THEOR. VII. PROPOS. XXXVIII.

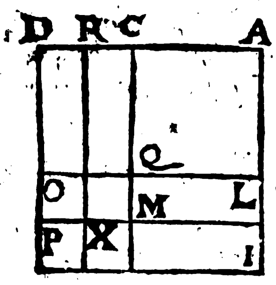
Si recta linea media, & extrema ratione secetur, & ei addatur minus segmentum; Quod tota cum hac additione potest efficere quadratum, quintuplum est eius, quod à maiore segmento efficitur.

Sit linea AB secta in C secundùm mediam, & extremam rationem, & addatur ei minus segmentum DA. Dico totum DA quintuplo maius efficere quadratum; quàm CA maius segmentum.

Probatur. Quadratum AQ, vt sæpius dixi, ex maiore segmento, & rectangulum CX ex tota BA, & minore segmento BC æquantur inuicem. Hoc

autem

autem rectangulum ter sumptum, vt CX, & XI, & PR cum quadrato AQ quater æquant AQ; adde tandem rectangulum ML cum quadrato PX, & addes æqualẽ vni ex prædictis partibus CX: Cùm LM æquet RQ, rectangulum, & PX quadratum XQ: vnde totum erit æquale rectangulo toti CX ex tota, & minore segmento; & propterà quinta quãtitas erit æqualis quadrato QA: Sed hæc omnia rectangula cum duobus quadratis æquant quadratũ AP totius AD, vt constat ex propos. 10. lib 2. Ergo quadratum ex DA quintuplum est quadrati ex CA.



EXPENSIO VIII.

De proportionibus circuli, & partibus ipsius.

QVamuis Euclides vnicam propositionem de Circulo solùm adferat, adhuc plures, illasque elementares esse necessarias, experimentum docet. Cum & ea, quæ de parallelis in Cosmographia, & de figuris Isoperimetris, & multa alia, hæc fundamenta exposcant. Et sanè cùm 3. lib. multa de æqualibus circulis, angulis, figurisq; circulo inscriptis dicta sint, hìc etiam de proportionalibus circuli partibus lautiùs agendum videbatur.

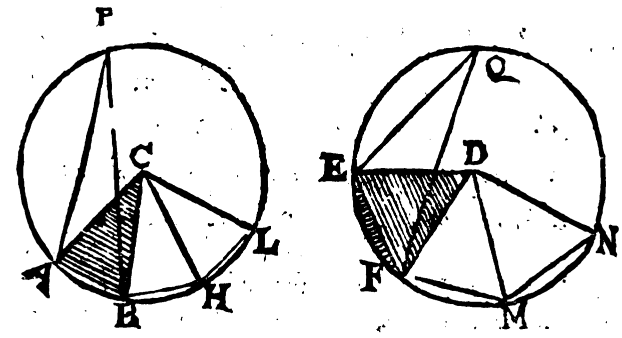
THEOR. I. PROPOS. XXXIX. Eucl. 33.

In æqualibus circulis anguli eandem habent rationem cùm peripherijs, quibus insistunt, siue ad centra, siue ad circumferentias constituti sint. Insuper, & sectores.

SInt duo circuli æquales, quorum centra C, & D, sintque in ipsis duo anguli nigri ad cẽtra subtendentes arcus, AB, & EF; sectoresque ACB, & EFD. Dicoque itaque *ita esse angulum nigrum apud C, ad angulum nigrum apud D, vt arcus AB ad arcum EF, & vt sector ACB, ad sectorem EDF.* Ducantur AB, & EF rectæ, & in circulo vtroque aliæ istis subtensis æquales accommodentur: in circulo C lineæ BH, & HL, &c. vsque dum placet, & in circulo D, aliæ tot numero, ac præcedentes; sed æquales EF, eruntque arcus subtensi, circuli quidem C æquales arcui AB ex 28. tertij, & ex 26. anguli quoque albi apud C nigro C, vt singuli albi circuli D erunt æquales nigro, D necnõ, & arcus subtensi FM, & MN erunt æquales arcui EF.

Probatur itaque propos. Quam multiplex est aggregatum angulorum apud C, quod est ACL, anguli nigri C, tã multiplex est arcus AL, arcus AB, & sector ACL sectoris nigri. Item quam multiplex est aggregatum angulorum EDN, anguli nigri D in circulo D, tã multiplex est arcus EN arcus EF, & sector EDN sectoris nigri.

Quare, si angulus ACL sit æqualis angulo nigro, etiam arcus subtensus AL arcui AB æqualis erit, si maior angulus, maior erit arcus, si minor angulus minor quoque arcus: Et ita dicas de angulo EDN, & arcu EN; si enim angulus EDN æquet nigrũ angulum D, arcus EN æquabit EF arcum, si minor sit, erit minor, excedet si excedat, vnde ex def. 9. Tract. 9 si angulus nig. C ponatur prima quãtitas, & D secunda & terminus in priori combinatione; At in posteriori, Arcus AB circuli C pro fundamento, & arcus EF circuli D pro termino: fundamenta, nempe angulus, & arcus circuli C. æquali passu excedent terminos, idest angulum, & arcum circuli D: æquabuntur, vel deficient, & hoc iuxta quamlibet multiplicationem. Quare ex illa definitione sicut est prima magnitudo ad secundam, nempe angulus niger apud C ad nigrum apud D, ita est arcus AB, ad arcum EF.



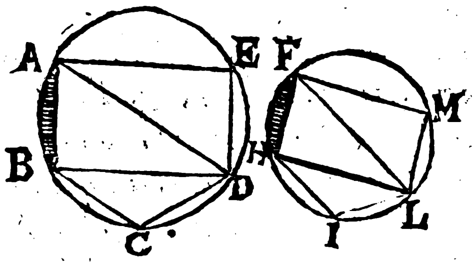
Et eodem argumento probabitur de sectoribus, quòd ita sit sector ACB, ad sectorem EDF, vt angulus niger in C ad angulum nigrum apud D quòd vt faciunt arcus, vnà cum angulis crescant, decrescant, & æquentur. Et quia anguli ad circumferentias dimidij sunt angulorum ad centrum, ex prop. 9. tertij ita erit ex 17. quinti, angulus ad circumferentiam P ad angulum ad circumferentiam Q; vt arcus AB, ad arcum EF, &c.

THEOR. II. PROPOS. XL.

Quæ in circulis similia polygona inter se sunt, vt à diametris quadrata.

SInt Polygonum in circulo ABCDE, & FHILM in minori circulo; Dico ita esse polygonum super AB ad polygonum super FH, vt quadratum ex diametro AD, ad quadratum ex diametro LF.

Ducto enim diametro AD, & FL, nec non, & BD subtensâ, & HL, erunt triangula BDA, & FHL similia, cùm sint in similibus segmentis ob similitudinẽ præsuppositam polygonorum. Quare BA erit ad AD diametrum ex 4 sexti, vt FH, ad FL; & permutando erit BA ad FH, vt diameter AD ad diametrũ FL, sed ex prop. 26. h cùm basium proportionem duplicatam habeant, vt est basis ad basim; ita polygona similia ex ijs basibus constituta: Vnde ita erit polygonum super BA ad polygonum super FH, vt quadratum ex AD, ad quadratũ ex FL.



CO-

COROLLARIVM

Hinc ellicies idem dicendum de quocumque alio latere comparatum ad aliud sibi correspondens AE V.g. ad FM.

THEOR. III. PROPOS. XLI.

Circuli inter se sunt, vt ex diametris quadrata.

PRobatur. Nam si polygona similia in circulis BCB, & FLM præced. propos. multiplicentur, vsque dum queant multiplicari, semper eorum latera æquè multiplicando erunt ad inuicem, vt quadrata diametrorum: sed circulus polygonum, cuius latera multiplicata sint quousque multiplcari queant, non excedit. Nam si excederet, adhuc in segmẽto circuli, vt est pars nigra BA. & HF possent latera delineari. Ergo erit etiã circulus BACDE, ad circulum FHILM, vt quadratũ ex diametro AD ad quadratum ex diametro FL.

THEOR. IV. PROPOS. XLII.

Ambitus similis Polygoni circulo inscripti est ad ambitum alterius, vt diameter vnius ad diametrum alterius.

PRobatur vtendo eadem fig. Nam BA prima quãtitas est ad AD secũdã; vt FH tertia ad FL quartam. Habet autem quinta BC ad secundam AD eandem proportionem; quam HI sexta ad FL quartam. Ergo ex propos. 25. quinti composita quoque BA prima cum quinta BC habebit eandem proportionem ad AD secundam, quam tertia FH cum sexta HI ad quartam FL, & ita dicas de omnibus alijs lateribus replicando idem argumentum. Sic quia quantitas prima ABC habet eandem rationem ad AD secundam, & diametrum; vt FHI tertia ad quartam, nempe diametrum FL: habet autem CD quinta eandem proportionem ad diametrum AD, nempe ad secundam quantitatem, quam IL, sexta ad quartam nempe ad diametrum FL: habebit etiam quantitas composita prima cum quinta ABC, & CD, ad diametrũ AD; nempe ad secundã eandem rationẽ quã IFH, & IL sexta cũ tertia ad quartam, nempe ad diametrum FL, & sic de ceteris lateribus argumẽtũ vrgebit donec totus ãbitus sit cõpletus. Cùm ergo ambitus poligoni sit ad diametrum circuli, in quo est, vt ambitus alterius ad suum diametrum; erit etiam *conuertendo* Ambitus polygoni circulo inscripti ad ambitum polygoni similis in alio circulo inscripti, vt diameter ad diametrum.

THEOR. V. PROPOS. XLIII.

Circulorum circumferentiæ inter se sunt, vt diametri.

PRobatur. Nam si polygona simisia in circulis fig. prop. 40. ABCDE, & FHILM multiplicentur, vsque dum multiplicari possunt; semper eorum latera similiter numero augendo erunt ad inuicem ex præced. vt diametri: Sed polygonus multiplicatus in suis lateribus, vsque dum multiplicari potest, æquat ambitum circuli: nam si non æquaret in segmentis circuli, quibus excedit poligonum, alius polygonus posset inscribi pluribus lateribus prædìtus contra hypothesim; quæ supponit vltimum, qui possit inscribi esse inscriptum: Ergo ambitus circuli ad ambitum alterius circuli est, vt diameter ad diametrum.

THEOR. VI. PROP. XLIV.

Chorda vnius circuli ad chordam similem alius alterius circuli est, vt diameter ad diametrum.

PRobatur ex prop. proximè preced. 40. Nam ibi probatum est AB esse ad FH, vt diameter A D ad diametrum FL ob similitudinem triangulorom ABD, FHL.

THEOR. VII. PROPOS. XLV.

Arcus cuiuslibet circuli ad arcum similem alterius circuli eandem habent proportionem; quam chorda ad chordam: Et è contra.

PRobatur. Qua vt in fig. propos. 40. arcus sunt similes: Erit arcus BA ad arcum HF, vt circumferentia ABCDE ad circumferentiã FHILM: Sed circumferentia ABCDE ad circumferentiam FHILM est, vt diameter AD ad diametrum FL ex prop. huius 43.: & chorda AB est ad chordam FH, vt diameter A D ad diametrum F L ex propos. 44. Ergo ex æquo erit, vt arcus BA ad arcum HF, ita chorda subtensa arcui BA ad chordã subtẽsam arcui HF; Quod argumentum facilè etiam ad probandum proportionem conuersam valebit.

COROLLARIVM

SEquitur hinc si arcus non sint similes, eos non habere inuicem, eandẽ proportionẽ: Si namq; eam haberent essent similes; *conuertendo*, vt chorda ad diametrum, ita arcus ad circumferentiam.

TRACTATVS XI.

IN VII. LIBRVM EVCLIDIS PARS PRIMA.

De proportionibus Numerorum in genere.

HIc agit Euclides de numeris. Diuiditurque in tres Expensiones: In prima agit de fundamento proportionis in numeris, quæ est ratio mutua mensuræ, & mensurati; Secunda agit de proportione numerorum, in qua modi argumentandi etiam in numeris veri demonstrantur, qui veri vniuersaliter demonstrati sunt lib. 5. Tertia agit de numeris minimis primis inter se, & hoc vt octauo libro, deinde agat de proportionibus numerorum primorum, sicut eodem libro agit de proportionibus planorum numerorum, & solidorum, quibus primi numeri sunt radices.

EXPENSIO I.

De principijs.

PAuca hîc principia ponenda sunt, cùm ferè omnia apposuerimus tract. 8. quādo de Arithmetica simplici egimus, & ea, quæ specialiter ad hunc tractatum spectant sunt sequentia.

DEFINITIO I.

PRoportio numerorum est habitudo quædam vnius numeri ad alium secundùm quòd continet, vel continetur, vel semel, vel aliquoties, & insuper aliquam illius partem vel partes.

Supra tract. 8. def. 17. breuiùs proportionem numerorum definiuimus dicendo esse habitudinem numerorum in ratione mensurantis, & mensurati. Verùm hæc definitio per omnia genera proportionum accuratiùs in ratione quâque mensurantis, seu mensurati progrediens, rem speciaiiùs aperit. Eas verò species proportionum exponit, de quibus supra egimus tract. 9. expen. 2. cor. 3.

Cùm dicit *continet, vel continetur*, explicat proportionem maioris, & minoris inæqualitatis, si adsit.

Cùm dicit *semel* explicat proportionem æqualitatis; cùm dicit *aliquoties* explicat proportionem multiplicem.

Cùm dicit, *& insuper aliquam eius partem* explicat super, vel subparticularem etiam multiplicē, secūdùm quòd cōtinet, & cōtinetur, vel semel, vel aliquoties, & insuper aliquam contenti partem.

Cùm verò dicit *partes* explicat proportionem superpartientem, vel subpartientem etiam multiplicem: nam si semel, & insuper aliquas partes est superpartiens, & si contineatur subpartiens: quòd si aliquoties, & insuper aliquas partes, tunc est super, vel subpartiens multiplex.

DEFINITIO II.

TErmini, seu radices proportionis sunt duo numeri, quibus in illa proportione minores sumi nequeunt.

DEFINITIO III.

CVm tres numeri proportionales fuerint, primus ad tertium duplicatam rationem habere dicitur, primi ad secundum. At cum quatuor numeri proportionales fuerint primus ad quartum triplicatam rationem habere dicitur primi ad secundum, & semper deinceps vno amplius, quam diu proportio extiterit.

Hæc definitio explicata est supra tract. 9. par. 1. def. 7.

Itaque si sint tres numeri eadem proportione gaudentes V. g. 2. 4. 8. proportio 2. ad 8. est duplicata proportionis 2. ad 4. & si sint quatuor est triplicata, V. g. 2. 4. 8. 16: numerus 2. ad 16. habet proportionem triplicatam, 2. ad 4. & sic consequenter si sint quinque, V. g. 2. 4. 8. 16. 32. numerus 2. ad 32. quatruplicatam proportionem habet eius, quam 2. ad 4. quod & intelligitur inuersè, quod numerus maior vltimus ad primum habeat proportionem repetitam, & replicatam, quam secundus ad primum. V. g. 32. ad 2. est quadruplicata eius, quæ 4. ad 2.

DEFINITIO IV.

QVotlibet numeris ordine positis, proportio primi ad vltimum componi dicitur ex proportionibus primi ad secundum, & secundi ad tertium, & tertij ad quartum; & ita deinceps, donec intermedij extiterint numeri.

Hæc quoque definitio explicata est par. 1. def. 8. tract. 9. Vnde breuiter: si ponantur ordine numeri crescentes, quoquo placuerit augmento V. g. 2. 8. 7. 9. 12. 16 vltimus 16. componitur ex proportionibus primi 2. ad secundum 8. & secundi 8. ad tertium 7. & tertij 7. ad quartum 9. &

& quarti 9. ad quintum 12. Et si inter istos libeat interponere numerum vel plures, V. g. 8. inter 7. & 9. dicetur quoque 16. ad 5. nouiter appositis proportionibus componi.

AXIOMATA.

Numerus metiens totum, & ablatum, metitur, & reliquum.

Sit V. g. numerus 9. qui metiatur 45. & ablatum 27. Dico, quòd metitur, & reliquum 18. Nam cùm metiatur totum diuidi poterit totum in partes ipsi 9. æquales; nempe in quinque nouenarios. Cumque metiatur ablatum quoque, hoc ablatum 27. diuidi poterit in partes ipsi 9. æquales, nempe in tres nouenarios, & remanebunt duos nouenarios ad æquandum totum. Ergo duo nouenarij mensurant reliquum vsque ad complementum totius 45. nempe 18.

Axiomata reliqua tract. 8. habentur.

EXPENSIO II.

De partibus numerorum alterum mensurantium.

Ad hoc, vt sternat iter ad numericas proportiones intelligendas Euclides incipit agere de partibus numerorum, quæ alium numerum possint mensurare, vtpote quòd in hac mutua mensura, vel totius, vel alicuius partis proportio eorum consistat.

THEOR. I. PROPOS. I.

Si duobus numeris inæqualibus detrahatur semper minor à maiore alterna quadam detractione, & semper supersit aliquid, donec peruenias ad vnitatem: Numeri primo assumpti primi inter se erunt.

17. 6.

Sit propositus numerus 17. maior, 6. minor, qui detrahatur à priori quoties fieri potest, nempe duplici vice, deinde alia detractione residuum à quo 6. auferri nequeat, V. g. 5. detrahatur vicissem à 6. si remaneat vnitas sola, vt hic remanet. Dicit propositio, *quòd de his numeris, & omnibus alijs simil. m proprietatem habentibus, pronunciandum sit, quòd sint inuicem primi, idest, quòd solam vnitatem pro communi mensura possideant.*

Progress. 1. Probatur. Nam si aliam obtinerent; hæc esset numerus maior vnitate, qui metiretur vtrosque nempe totum maius 17. & ablatum minus 6. sed ex axiom. 12. numerus metiens totum, & ablatum; metitur quoque reliquum. Ille ergo numerus maior vnitate metiretur, reliquum 5.

Progress. 2. Et rursus eodem ritu argumenti; quia 5. secunda detractione ablatum est à 6. & ex primo progress. numerus ille maior vnitate metitur totum 6. & ablatum 5. metietur, & reliquum 1. Ergo numerus maior vnitate ipsum vnitatem metietur, quod est absurdum. Vnde communis mensura nulla 17. & 6. numeris erit, nisi vnitas: Ergo erunt inuicem primi ex def. 22. tract. 8.

PROBL. I. PROPOS. II.

Duobus numeris datis non primis inter se maximam eorum communem mensuram reperire.

6. 22.

Dentur duo numeri, vt 6. & 22. Detrahatur que minor à maiore quoties fieri potest; remanebunt 4. Detrahatur rursus secunda detractione 4. à minore 6. & remanet 2. Detrahatur rursus tertia detractione 2. à 4. & nihil reliqui remanet. *Dico 2. esse cōmunem amborum mensuram.* Quod, si esset necesse aliam, & aliam detractionem reiterare, id fiat, donec nihil remaneat. Ille enim postremus numerus, à cuius detractione nihil remanet, erit communis assignatorum numerorum mensura maxima.

Progress. 1. Probatur primò; Quod hæc sit communis mensura V. g. 2. numeri 6. & numeri 22. ex pronunc. 10. tract. 8. Nam numerus numerum metiens metitur quoque omnem numerum, quem ille metitur; sed numerus 2. vltimo remanens metitur 4. cùm nihil ex eo, factâ detractione, quoties fieri potest, remanserit Ergo metitur quoque partes ei 4. æquales, quas numerus idem 4. per detractionem abstulit à numero maiori. Ergo metietur quoque numerum se maiorem 6. qui ex ijs partibus constabat; & se vltimo residuo V. g. ex 4. & 2.

Progress. 2. Sed numerus 6. & 4. metiuntur numerum primum 22. cùm 6. æquetur partibus detractis nempe tribus vicibus numero 6. & 4. æquetur residuo: Ergo vltimum residuum 2. metitur quoque numerum primo propositum 22.

Patet conseq. quia metitur ex primo prog. 4. & 6. qui numeri integrant numerum primo positum 22.

Probatur secundò. Quòd hæc sit mensura maxima. Nam si hic numerus 2. maxima mensura non est; erit aliquis maior, quam 2. qui metietur vtrosque 22. & 6. Quare ex pron. 1. huius metietur quoque primum residuum 4. quia metitur totum 22. & ablatum 6. Sed eadem paritate, quia metitur totum 6. & ablatum 4. metietur quoque residuum 2. Maior ergo numerus, quam 2. commensurabitur numero 2. quod est absurdum.

Quod si datis duobus numeris, & facta detractione nihil remaneat, numerus minor erit communis maxima mensura maioris, vt est 6. numeri 18. se enim metitur sua quantitate, & numerum maiorem sui replicatione.

COROLLARIVM.

Hinc manifestum est numerum metientem duos numeros, metiri quoque eorum communem maximam mensuram: Nam aut hic numerus est æqualis, aut minor. (maior enim esse non potest, cùm ijdem duo numeri duas maximas inæquales mensuras habere non possint.) Ergo ille numerus, si est æqualis, metietur quoque communem mensuram, cui æquatur; si est minor, idem valebit argumentum: nam maxima mensura est residuum vltimum: quare si metitur totum, & ablatum; metietur etiam omnia residua successiuè remanentia, & tandem maximam quoq; commtinem mensuram; Sic 6. est maxima mensura, & simul residuum numeri 42. & 12. quos si numerus 3. mensuret; dũ quaterdecies in numero 36. sexties in 12. inest, mensurabit quoque 6. quòd eorum residuum existat.

PROB. II. PROPOS. III.

Tribus numeris datis non primis inter se eorum communem mensuram reperire.

42. 18. 8. mensura 2.

DEntur tres numeri 42. 18. & 8. quorum communis mensura reperiri debeat.

Inueniatur primo maxima mensura duorum maiorum V. g. 42. & 18. ex 1. propos. quæ sit 6. si ergo hæc maxima mensura capiat in tertio numero ex æquo ita, quod nihil remaneat: hæc erit maxima omnium communis mensura: At si aliquid remaneat exerceatur per mutuam detractionem regula tradita præc. propos. quoties opus est; detrahaturque E. g. 6. ab 8. quoties fieri potest. Remanebunt 2, rursus si 2. ex 6. subducatur, nihil remanet.

Pronuntio itaque 2. esse trium numerorum 42. 18. & 8. communem mensuram maximam.

Probatur, quod sit trium communis mensura ex præc. prop. Post remum residuum 2. est maxima mensura numeri tertij 8. & maximæ mensuræ 6. duorum primo assumptorum numerorum. Ergo etiam ipsorum est mensura ex pronunciato 2. huius.

Probatur quoque secunda pars; Quod sit omnium trium maxima mensura. Nam, si non est, erit aliquis numerus maior. V. g. Nũmorum, qui cum metiatur duos numeros primo propositos 42. & 18. metietur quoque eorum communem mensuram 6. ex Coroll. præcedenti; sed ex hypothesi metitur quoque tertium numerum 8. Numerus ille Nũmorũ cũ ex aduersarijs dicatur triũ datorum numerorum communis mensura. Ergo metitur totum nempe 8. & ablatum 6. Qua de re metietur quoque reliquum 2. Sed ille Nũmorum numerus ponebatur maior, quam 2. Ergo numerus maior, quam 2. ipsum metietur, quod est absurdum.

COROLLARIVM

HInc ellicies idem, quod in præced. Coroll. numerum metientem tres numeros metiri etiam maximam eorum mensuram: Nam maior esse non potest ipsâ maximâ mensurâ; si sit æqualis clarum est cum numerus omnis se per vnitates suas metiatur. Si sit minor eodem modo, quo supra probatur. Quoniam maxima mensura est reliquorum trium numerorum. Ergo ea mensura minor, quæ metitur tres numeros, nempe totum primũ, & ablatos reliquos per mutuam subtractionem, metitur etiam vltimum residuum, nempe omnium trium maximam communem mensuram.

COROLLARIVM II.

SI verò aliquis cupiat plurium numerorũ, quàm trium communem mensuram, idem præstandum erit, & inuenta trium mensura, quarti, per mutuam detractionem inuentæ mensuræ ab ipso mensura maxima inuenietur; illa enim erit quatuor numerorum mensura communis.

THEOR. II. PROPOS. IV.

Omnis numerus est cuiuslibet dati numeri, aut pars, aut partes

PRobatur. Vel sunt primi inuicem, vt 7. & 5. & sic numerus minor est partes numeri maioris; Quia tot habet vnitates V. g. 5. quæ sunt partes maioris numeri, ex quibus, additis alijs, 2. componitur.

Vel duo numeri non sunt inuicem primi, & sic si minor maiorem metiatur, vt 4. metitur 8. tunc 4. est pars, vt per se patet, numeri 8. Quod si non metitur, reperiatur eorum communis mensura, qualis est 3. numeri 6. & 9. Assumanturque à minori numero ei communi mensuræ tot partes æquales, quot possunt sumi V. g. 3. & 3. Iam numerus minor est partes numeri maioris; quia eius plures partes comprehendit; cùm 3. 3. integrent numerum 6.

THEOR. III. PROPOS. V.

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars, & simul vterque vtriusque eadem pars erit, quæ est vnus vnius.

HÆc propos. est l. 5. propos. 1. vniuersaliter proposita; modo hic in numeris ostenditur.

Partes	3.	2.	compositi 5
Integri	12.	8.	20.

Dentur plures numeri, sed facilitatis g. duo, vt 2. & 3. quorũ primus 2. diuidat 8. In tot numero partes V. g. in 4. in quot 3. diuidit 12.

Dico, quod compositi 2. & 3. diuisores, vt faciant 5. diuident quoque compositos numeros 8. & 12. nempe 20. in tot numero partes, vt priùs diuidebant.

Probatur: Diuide numeros metitos 8. & 12. in partes æquales metientibus numeris 2. & 3. habebisque ex hypothesi æqualem numerum partium ex singulis metitis numeris, vt ex 8. erues 4. duenarios, ex 12. verò 4. ternarios. Adde itaque singulos duenarios æquales 2. metienti

2	3
8	12
2222	3333

5555
20

ternarijs æqualibus metienti 3. efficiesque 4. quinarios æquales metientibus 2. & 3. simul additis: Ergo reperitur quinarius metiens in simul additis quinarijs, nempe vicenario 4. quinarios, idest singulas partes cuiuscunque metiti 12. & 8. simul additas.

THEOR.

THEOR. IV. PROPOS. VI.

Si numerus numerj partes fuerit, & alter alterius eædem partes, & simul vterq; vtriusque eædem partes erit, quæ vnus vnius.

HÆc propositio eadem est, ac antecedens; solùmque vult, quòd numerus metiens comprehendat non vnam partem, sed plures partes metiti. Sint ergo plures numeri, sed pro nunc duo V.g. 6. metiens numerum 8. cuius comprendat 3. duenarios ex quatuor quibus 8. constat, & 9. metiens 12. comprehendat quoque ex eo 3. ternarios ex 4. quibus constat.

Partes	6. 9	compositi	15
Integri	8. 12		20

Dico: Quod, si componantur 6. & 9. & fiant 15. eandem tres partes comprehendent ex 8. & 12. simul additis, nempe Vicenario, vt prius simplices faciebant qualibet ex suo numero metito.

6 9
222 333
8 12
2222 3333
555
15
5555
20

Probatur. Diuide numeros metientes in partes, secundùm quas metiuntur suos metitos V.g. 6. in 3. duenarios, & 9. in 3. ternarios, quas simul addes idest duenarios cum ternarijs vt fiant 3. quinarij: Ergo metientes compositi, nempe 15. comprehendet tres quinarios. Sic est faciendum de metitis singuli enim distributi in partes metitas V.g. 8. in duenarios, & 12. in ternarios ex hypothesi, tum duenarij, tum ternarij æquales numero erunt, nempe 4 qui simul additi erunt quinarij 4: prout numeri metiti constabant singuli, vel 8. ex 4. duenarijs, vel 12 ex 4. ternarijs. Cum ergo, tum metiti compositi eundem numerum partium 4. quinarios, & metientes 3. quinarios, secundum quem in mensura priùs correspondebant, integrent; patet, quod etiam compositi alter alterius eædem partes erunt. Idē autem etiam eueniet, si aut fractos assumas, aut si plures.

THEOR. V. PROPOS. VII.

Si numerus numeri pars fuerit, vt ablatus ablati: & reliquus reliqui eadem pars erit.

SIt numerus integer 5. eadem pars numeri 20. quæ pars est ablati 2. numeri 8. ablati, hic à 20. ille à 5.

Pars	2	compars	3	totum	5
Pars	8	compars	12	totum	20

Dico reliquum 3. ex 5. esse eandem partem residui 12. ex numero 20.

Prob. Assume probationis gr. quemcumque numerum incognitum *Equorum*, cui residuum 3. sit eadem pars, nempe tot vicibus insit, quæ est ablati 2. ablato 8. & consequenter, quæ est totius 5. toti 20. idest quatuor vicibus ex hypothesi: Ergo metientes 3 & 2. simul vt faciant 5. inuenient tot partes ex 5. propos. huius in metitis 8. & numero *Equorum* incognito simul vnitis, quot 2. ablatus, & metitor, in 8. ablato, & 5. totum in toto 20. Ergo illi compositi numerus 8. & numerus *Equorum* facient 20. hoc enim aggregatum metitur eadem mensura 5. nempe 2. & 3. compositi per vices 4. replicatas easdem, quibus metiabatur mensura 5. totum 20 Quare incognitus Equorum numerus erit 12. nempe residuum numeri 8. ex 20. quem metietur residuum 3. vt 2. ablatus, ablatum 8. & 5. totus totum 20.

COROLLARIVM.

COllige, quod idem intelligitur in numeris fractis, & etiam de numero maiori, & multiplici respectu minoris. Sic si 8. ablatū sit tot vicibus numero 2. ablato, quot 20. totus numero 5. toti, erit etiam residuum 12. tot vicibus maior numero residuo 3. vt patet, cùm sit eadem ratio.

THEOR. VI. PROPOS. VIII.

Si numerus numeri partes fuerint, quales ablatus ablati, & reliquus reliqui eædem partes erit, vt totus totius.

Partes	6 9.	compars		15	totum
Partes	8 12	compars		20	totum

SIt numerus 6. ablatus à 15. eadem pars numeri 8. ablati à 20. scilicet eius tot vices contineat V.g. tot duenarios, quot 15. integer minoris numeri continet vices numeri 20. integri maioris V.g. quinarios.

Dico, quod residuum 9. integri 15. cum numerus 8. fuerit ablatus, est eadem partes, nempe tot vicibus contine[tur] aliqua eius pars in numero 12. residui maioris numeri 20. quot 6. in 8. vel 15. in 20.

Probatur. Assumatur aliquis alius *Equorum*, qui tot vices contineat numeri 12. quot ablatus 6. ablati 8. vel integer 15. numeri 20. Coniungaturq; iste numerus *Equorum*, cum residuo 6. At 12. residuum cum ablato 8. Isti vtique, vt priùs, facient 20. V.g. *Homines*. Ergo iste numerus *Equorum* iunctus cum 6. faciet 15. Nam, cùm incognitus Equorum numerus sit eædem partes 12. vt 6. numeri 8. Ergo etiam iuncti 6. & incognitus ex propos. 6. huius erit eædem partes numeri 8. & 12. coniunctorum, ac vnus vnius V.g. 6. respectu numeri 8. Sed numerus, qui sit ad 20. vt 6. ad 8. aliud non est; nisi 15. Ergo iste numerus *Equorum* cum numero 6. iunctus faciet 15. Ergo erit ille numerus *Equorum* 9. nempe residuum numeri 15. ablato 6. qui ita est ad 12. residuum numeri 20. vt ablatum 6. ablato 8. vel totus 15. toti 20. Quod & de numeris quibuscumque fractis intelligitur.

THEOR. VII. PROPOS. IX.

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars; Et vicissem, quæ pars est vel partes primus tertij, eadem pars erit, vel eadem partes secundus quarti,

I. 2. Hominum II. 8. Lapidum
III. 3. Equorum IV. 12. Nummorum
333 222

SIt primus numerus V. g. 2. *Hominum* numeri 8. secundi *Lapidum* eadem pars, quæ est 3. *Equorum* numeri tertij 12. *Nummorum*. *Dico, quod Hominum numerus numero Equorum eapars est, vel partes, quæ numerus Lapidum numero Nummorum.*

Probatur. Nam diuisis *Lapidibus* 8. secundum vices, quas *Hominum* continet, V. g. in duenarios, & numerus *Nũmorum* secundum vices, quas continet *Equorum* V. g. in tot ternarios, erunt ternarij *Nũmorum* tot vices, quot duenarij *Lapidum* ex hypothesi. Sed insuper erunt omnes duenarij eædem partes respectu ternariorum. Cum enim omnes tum duenarij inuicem, tum ternarij inuicem sint æquales fit, vt duenarius tot vnitates habeat respectu vnius ternarij, quot alius duenaris respectu alius ternarij. Ergo si coniungantur omnes duenarij simul, vt fiant 8. vt priùs numerum *Lapidum*, & ternarij quoque simul vniantur, vt fiant 12. *Nũmorum*, vt prius eadem pars, seu partes eædem manebunt ex 5. propos. & 6. huius, quæ vnus vnius, nempe quæ duenarij *Hominum* respectu ternarij Equorum.

THEOR. VIII. PROPOS. X.

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eadem partes, & vicissim, quæ pars est, aut partes primus tertij, eadem pars, aut partes est secundus quarti.

SIt primus numerus *Hominum* 6. qui sit partes secundi numeri 9. Sitque alter tertius numerus 8. *Equorum*, qui sit partes num. 12. quarti,

I. 6. Hominum II. 9.
III. 8. Equorum IV. 12.

Dico. Quod primus numerus Hominum tertio Equorum eadem pars est, seu partes, quæ 9. secundus numerus numeri 12. quarti.

Probatur. Nam diuisus in suas partes 6. numerus *Hominum* iuxta quas capit in 9. nempe in 2. ternarios, & 8. *Equorum* iuxta quas capit in 12. nempe in 2. quaternarios singulæ erunt sui totius pars, quia 6. *Hominum* numerum habet tot ternarios, quot *Equorum* 8. quaternarios, Et insuper erunt eadem pars, tam ternarius numeri 9. quam quaternarius numeri 12. ex hyp. Vicissim ergo ex anteced. eadem pars, vel partes duenarius erit quaternarij, quæ 9. numeri 12. Ergo si iterum iungas duos ternarios *Hominum*, vt sint 6. simulque iungas duos quaternarios *Equorum*, vt sint 8. vt priùs ita erunt ex 5. & 6. prop. hu. iuncti ternarij 6. ad iunctos quaternarios 8. vt vnus 3. ad vnum 4 & ideo, vt 9. ad 12.

Nam, vt ib. si numerus numeri fuerit pars, aut partes, & alter alterius eadẽ pars, seu partes simul vterque vtriusque eadem pars erit, vel partes, quæ vnus vnius.

EXPENSIO III.

De proportione numerorum.

LIcet modi argumentandi vniuersaliter supra ostẽsi sint l. 5. Quia tamẽ in quãtitate discreta specialibus rationibus comprobari poterant, noluit Euclides eos præterire; quippe, cum proprietates quãtitatis discretę ostendere apud se cõstitutum habuerit, & illi præcipuum locum inter passiones numerorum inueniant, ad eas penitùs ostendendas etiam modos ipsos demonstrationibus quantitatis discretæ naturæ addictos prosequi necessarium fuit.

THEOR. I. PROPOS. XI.

Si fuerit vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum, & reliquus ad reliquum erit, vt totus ad totum.

SIt numerus aliquis totus 21. ad 24. vt 14. ablatum à 21. ad 16. ablatum à 24.

Totus 21. ad totum 24.
Vt ablatum 14. ad ablat. 16.
Reliquum 7. ad reliq. 8.

Dico, quòd reliquum 7. erit in eadem proportione ad reliquum 8. vt 14. ad 16.

Probatur. Nam ex definitione erit totus pars, vel partes totius, vt ablatus ablati. Ergo, & reliquus reliqui ex 7. & 8. prop. erit pars eadem, aut partes ablatus ablati, vt totum totius. Ergo dicent eandem proportionem; cùm proportio numerica in eo consistat, quòd vnus respectu alterius sit eadem pars, vel partes, & cęt. vt ex definit. 1. constat.

THEOR. II. PROPOS. XII.

Si sint quicumque numeri proportionales, erit quemadmodum vnus antecedentium ad vnum consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes.

Series	I.	3	2	5	collecti	10
Series	II.	9	6	15	numeri	30

SInt duę numerorũ series, quorum numeri sint proportionales ex ordine V. g. in prima serie 3. 2. 5. in secunda 9. 6. 15. ita vt primus 3. referatur primo 9. vt secundus 2. secundo 6. & tertius 5. tertio 15.

Dico collectos numeros primæ seriei numeris collectis secundæ seriei eadem proportione referri, quam vnus eorum ad alium possidet.

Probatur. Numeri, qui dicunt proportionem sunt eædem partes, vel eadem pars ad inuicem, vt sunt numeri primę seriei, cum numeris secundæ sed ex 5. & 6. propos. numeri, qui sibi inuicem sunt eadem pars, vel eædem partes, si vniantur, & colligantur, sunt etiã eadẽ pars, vel eadem partes

tes vnū ad alterum sit collecti, vt erat vnus vnius: Ergo 10. numeri primę seriei collecti erūt eadem pars, seu partes numerorū 30. secundæ seriei collectorum, vt vnus 3. primæ seriei ad alterū correspondetem 9. in secunda. Igitur cum adhuc perseuerent eædem partes, seu pars collecti eadem proportione, quâ singuli se respicient.

THEOR. III. PROPOS. XIII.

Si quatuor numeri proportionales fuerint; & vicissem proportionales erunt.

4 6
8 12

SIt 4. ad 6. quemadmodum 8. ad 12. *Dico eos inuicem fore proportiales.*

Probatur, ex huius 9. vel 10. propos. Quia primæ combinationis antecedens numerus 4. & fundamentum relationis est eadem pars; seu partes ac 8. in secunda combinatione fundamentum itē, & antecedens; sicut terminus, & consequens in prima combinatione 6. est ad terminum, & consequentem 12. in secunda combinatione. Sed qui sunt vicissem eadem pars, seu partes dicunt proportionem ex definit. 1. Ergo cum sint vicissem eædem partes vicissem erunt proportionales, vicissem vero significat, quod fundamenta relationum dicant eam proportionem inuicem, quam termini.

THEOR. IV. PROPOS. XIV.

Si sint quotcunque numeri, & alij ijs æquales multitudine, qui bini sumantur, & in eadem ratione, etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

Series I.	3	5	4	Ergo vt	3	ad	4
Series II.	9	15	12		9	ad	12

SInt duæ series numerorum prima 3. 5. 4. Secunda 9. 15. 12. qui bini, & in eadem ratione sumantur, nempe primus 3. ad secundum 5. sit in prima serie, veluti 9. ad 15. in secunda serie: Sic in prima serie, sit 5. ad 4. vt in secunda est 15. ad 12. Dicit, *quòd etiam extremi, tum primæ, tum secundæ seriei in eadem ratione erunt*. Primusque 3. tertium numerum 4. eadem proportione respiciet, quâ 9. respicit 12.

Progress. 1. Nam ex hypothesi, vt primus 3. in prima serie ad secundum 5; sic in secūda primus 9. ad secundum 15. & vt 5. ad 4. sic ponitur 15. ad 12. Ergo permutando 3. erit ad 9. vt 5 ad 15 Rursusque vt 5. ad 15. sic 4. erit ad 12. Ergo ex 5. & 6. propos. erunt etiam eadem pars, vel partes 3. numeri 9. quæ 5. numeri 15. Sic quoque eadem pars, vel partes 5. numeri 15. quæ 4. numeri 12. Quapropter eadem pars, vel partes erit 3. numeri 9. quas 4. numeri 12. Siquidem sunt eadem pars, vel partes alter respectu alterius similiter, ac est 5. numeri 15. Propterea etiam similiter erit pars, vel partes 3. numeri 9. sicut 4. numeri 12.

Cum ergo sint inuicem numerus 3. eadem pars, vel partes numeri 9. quæ 4. numeri 12. sequitur ex definitione 1. quod 3. sit ad 9. vt 4. ad 12.

Progress. 2. Cum itaque 3. respondeat proportione ad 9. eadem, quâ 4. respicit 12. Ergo rursus permutando 3. erit ad 4. vt 9. erit ad 12.

COROLLARIVM

IN numeris itaque licebit argumentari *ex æquo*, & positis tribus numeris, vel pluribus, qui in eadem ratione bini, & bini; ac alij tres, seu plures sumantur, poterit argui esse primum proportionis fundamentum ad vltimum terminum in prima serie, vt primum fundamentum ad vltimum terminum in secunda serie in proportione respondet.

THEOR. V. PROPOS. XV.

Si vnitas numerum quempiam metiatur: æquè autem alter numerus alterum quēdam numerum metiatur, & vicissim vnitas tertium numerum metietur, ac secundus quartum.

LIcet vnitas numerus non sit secundùm multos, easdem tamen proprietates, ac numerus præter pluritatem possidet, & maximè, quòd sit pars alterius numeri V.g. 4. quemadmodum alter numerus 4 pars erit numeri 12. Quare idem verificabitur de vnitate, quod dictum est propos. 9. & 13. de numeris, absque eo quod eandem demonstrationem hic repetamus, & hoc ne dum intelligendum in hac propos. Sed in omni alia, vbi sit comparatio numeri ad numerum: Nam quilibet numerus numeri mensurati fit vnitas: V. g. 3. numeri 9. fiunt tres ternarij, sicut in ipso 3. sunt tres vnitates. Dicit itaque Euclides, quod si 1. metiatur 3. sicut 4. metitur 12. quòd vnitas quoq; metietur 4. sicut 3. metitur 12. Quòd est dicere, quod si sit 1. ad 3. vt 4. ad 12. quod etiam erit vicissem 1. ad 4. vt 3. ad 12. ex propos. 13.

THEOR. VI. PROP. XVI.

Si duo numeri mutuò se se multiplicantes fecerint aliquos, geniti ex ipsis æquales inter se erunt.

6 4
24

DVo numeri 6. & 4. se se mutuò multiplicantes faciant aliquem.

Dico, *quòd siue 4 multiplicet ipsum 6. siue ipse numerus 6. multiplicet 4.* numerum eundem prodire, vel duos numeros æquales V. g. 24. & 24.

Probatur. Tot erunt in producto 24. quaternarij, si 6. multiplicet 4 quot in numero 6, vnitates ex. def. 15. tr. 8. & ita vnitas metietur 6. sicut 4. metitur productum 24. Quare vicissim ex prac. ita vnitas metietur 4 sicut 6. numerum productū 24 Quia verò etiam 4. multiplicat 6. Ergo productus numerus V.g. Ouium cōtinebit 6. quoties sunt in 4. vnitates; cùm ergo in hoc posteriori producto Ouium genito à 4. multiplicatore numeri 6. toties contineatur senarius, quot in 4. vnitates, & cùm 6. multiplicabat 4. senarius quoq; continebatur toties in producto 24. quoties in 4. erant vnitates, vt ostensum est; Ergo senarius per æquales vices mensurat productum 24. & hoc productum Ouium: Quapropter hoc productum Ouium erit 24. ex pr. 3. tr. 8. THEOR.

THEOR. VII. PROPOS. XVII.

Si numerus duos numeros multiplicans fecerit aliquos; geniti ex ipsis eandem rationem habebunt, ac multiplicantes.

Est 6 ad 8
Multiplicans 4
Vt 24 ad 32

SIt numerus 4. qui multiplicet 6. & multiplicet 8.

Dico, quod producti 24. & 32. ita sunt inuicem in proportione, vt 6. ad 8. multiplicati, quos 4. multiplicat.

Probatur. Nam 6. continetur tot vicibus in 24. quot 8. in 32. cum tot vicibus contineatur, quot vnitates sunt in 4. ex hypothesi. Ergo ex defin. 1. dicent multiplicati cū suis productis proportionem eandem cum sint productorum eædem partes, & erit 6. ad 24. vt 8. ad 32. Ergo ex 13. propos. & ad inuicem, vicissemque dicent proportionem, & ita erit 6. ad 8. multiplicati, sicut producti 24. ad 32.

THEOR. VIII. PROP. XVIII.

Si duo numeri numerum quendam multiplicando fecerint aliquos; Geniti ex ipsis eandem rationem habebunt, ac multiplicantes.

Ita 6 8
Multiplicatus 4
Vt 24 32

SIt numerus 6. qui multiplicet 4. quem & 8. multiplicet.

Dico 24. & 32. productos esse ita ad inuicem, vt 6. & 8. qui multiplicauere numerum 4.

Probatur. Quia ex 16. h. producti erunt æquales etiam si 6. & 8. non essent multiplicatores sed 4. eos multiplicaret, sed ex anteced. si vnus numerus duos multiplicat productus ad productum; ita est vt multiplicatus ad multiplicatum. Ergo idem sequetur, si duo numeri vnum eundemque multiplicent, ideoque 6. erit ad 8. vt 24. ad 32.

THEOR. IX. PROPOS. XIX.

Si quatuor numeri proportionales fuerint, qui ex primo, & vltimo fit numerus æqualis est ei, qui fit à medijs.

Vel si numerus, qui emergit ex multiplicatione primi cum vltimo sit æqualis producto ex medijs, illi numeri erunt proportionales.

SIt numerus 2. ad numerum 3. vt numerus 4. ad numerum 6. in proportione refertur.

Dico primò; quod multiplicatus primus 2. cum vltimo 6. generat numerum æqualem genito ex multiplicatione mediorum 3. & 4.

2. ad 3. vt 4. ad 6. Genitus 12.

Id verò demonstratur. Etenim primus numerus 2, multiplicet 4. medium, & faciat numerum quendam *Ouium* V. g. 8. Cum ergo idem numerus multiplicet quoque extremum 6. ex hypothesi & generet V. g. numerum *Hominum* 12. erit genitus *Ouium* 8. ad genitum *Hominum* 12. ex prop. 17. huius, vt generantes 4. & 6. per eundem numerum 2. multiplicati, & ideo etiam vt 2. ad 3. cum ex hypothesi sit eadem ratio.

Rursus: quia ex hypothesi 4. multiplicat 3. & generat numerum *Equorum*, ex effectione autem 4. etiam multiplicat 2. & producit numerum *Ouium* 8. Ergo 8. dicet eadem proportionem ad numerum *Equorum*, ac generantes 2. & 3. ideoque vt 2. ad 3. ita 8. ad numerum *Equorum*. Cum numerus *Ouium* 8. dicat proportionem ad numerum *Equorum*, & *Hominum*, quam 2. ad 3. seu 4. ad 6. quæ ex hypothesi est eadem proportio. Et ideo, cùm dicat idem numerus ad eos proportionem eandem, erit eorū, vel pars, vel partes eædē: Quare geniti erunt æquales, ex 3. pr. tr. 8. cùmque genitus ex 2. & 6. sit 12. numerus *Hominum*, etiam numerus *Equorum* ex 3. & 4. genitus erit 12. cui est eædem partes numerus 8. *Ouium*.

Dico 2. Quod, si numerus productus à primo, & vltimo sit æqualis producto ex medijs, *eos producentes numeros fore proportionales, & multiplicantes esse inuicem, vt multiplicati*. Sic numeri Hominum, & *Equorum*, si sint æquales, erit 2. numerus multiplicans in genito *Hominum* ad multiplicantem 3. in numero *Equorum*, vt multiplicatus 4. in eodem ad multiplicatum 6. in numero Hominum ita, vt reciproca sit relatio.

Probatur. Nam idem numerus *Ouium* ad eosdem numerum inquam *Hominum*, & *Equorum*, vt pote ad æquales eandem dicit proportionem, & eam ipsam ex propos. 16. quam multiplicantes ad multiplicatos. quare ita erit 8. ad numerum 12. Hominum, vel Equorum, vt 2. ad 3. per numerum 4. generantes 8. Ouium, & Hominum numerum 12. vel vt 4. ad 6. per numerum 2. generantes 8. *Ouium*, & 12. *Equorum* numerum: Quare cum 2. ad 3. sit in eadem proportione, ac *Oues* ad *Homines*, & in ipsâ eâdem sit 4. ad 6. etiam inuicem erit eorū eadē proportio ex prop. 16. l. 5. h. & ita erunt 2. ad 3. multiplicantes, vt 4. ad 6. multiplicati.

THEOR. X. PROPOS. XX.

Si tres numeri proportionales fuerint, qui sub extremis continetur æqualis est ei, qui à medio efficitur.

SIt 2. ad 4. vt 4. ad 12. Medius numerus est 4. qui vt duplex æqualis vsurpatur. Vnde hæc est eadem propositio, vt prior eademque paritas. Nam in alio non differt; nisi quod medij numeri hic sunt æquales vt 4. & 4. ibi vero inæquales.

THEOR.

THEOR. XI. PROPOS. XXI. Eucl. 22.

Si fuerint tres numeri, & alij ipsis multitudine æquales; qui bini sumantur, & in eadem ratione, fuerit autem perturbata eorum proportio, etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

2	3	4	Ergo		2 ad	4
6	8	12		vt	6 ad	12

Sint duæ series numerorum Vna 2. 3. 4. & altera 6. 8. 12. quarum numeri bini sumantur: Reperiaturque eorum proportionem esse perturbatam: nimirum primos binos 2. ad 3. prioris seriei dicere inuicem eam proportionem, quam 8. ad 12. bini extremi secundæ seriei, & extremos binos prioris seriei 3. ad 4. dicere eam proportionem, quam duo primi 6. ad 8. posterioris seriei

Dico, quòd ex æqualitate in eadem ratione existunt.

Progress. 1. Probatur. Ponitur ex hypothesi 2. ad 3. vt 8. ad 12. Ergo ex 19. propositione, si multiplicentur inuicem extremi numeri 2. & 12. & medij 3. & 8. dabunt genitos æquales 24. & 24.

Progress. 2. Sic quia in hypothesi ponitur 3. ad 4. vt 6. ad 8. si eadem multiplicatio fiat extremorum 3. & 8. & mediorum 4. & 6. prodibunt numeri geniti æquales inter se. Ergo etiam cum priùs genitis.

Siquidem etiam hìc inuicem se multiplicant 3. & 8. in vna multiplicatione sicut progressu primo. Quare sicut ibi producebant 24. sic, & hìc producent, cui genitus numerus ex 4. & 6. erit æqualis, & consequenter genito primo ex numero 2. & 12. Ergo ex 19. propositionis parte secunda dicent proportionem ad inuicem generantes numeri, quæ vocatur ex æqualitate, & ita respondebit proportione 2. ad 4. in prima serie, vt 6. ad 12. in secunda medijs numeris posthabitis 3. & 8.

Quod si fuerint plures numeri, quàm tres V.g. 2. 3. 4. 8. pro vna serie, & 3. 6. 8. 12. ita vt sint etiam 4. ad 8. vltimi vt 3. ad 6. primi, idem prorsus sequetur: Nam cùm sit ostensum; ita esse 2. ad 4. vt 3. ad 8. relictis medijs 3. & 6. consequenter erunt solum tres numeri pro vna serie 2. 4. 8. & pro altera 3. 8. 12. quorum proportio perturbata erit 2. ad 4. vt 6. ad 12. & 4. ad 8. vt 3. ad 6.

2. 4. 8.
3. 6. 12.

Vnde eadem, quæ superiùs valebit demonstratio: Idem etiam ostendetur in quinque numeris, ac in quatuor etiam si numeri sint facti.

Et hæc Euclides de proportionibus numerorum. Verum adsunt etiam proportiones, quas libro 7. vniuersaliter probat de quacunque quantitate, & quas ex intimis principijs Arithmeticis Clauius hic adducit, qui modi cùm fundent argumenta, quæ ex proportionibus petuntur ob eorum vtilitatem, visum est non præterire.

THEOR. XII. PROPOS. XXII.

Si quatuor numeri proportionales sint, & conuertendo proportionales erunt.

Nam detur 4. qui sit ad 10. vt 12. est ad 30.

4 ad 10	Ergo		10 ad 4
vt 12 ad 30		vt	30 ad 12

Dico, Quod conuertendo 10. erit in eadem proportione ad 4. vt 30. ad 12.

Probatur. Ponitur 4. ad 10. in eadem proportione, quâ 12. refertur ad 30. Ergo ex 13. propos. & vicissim proportionales erunt. Eritq; 4. ad 12. vt 10. ad 30. Quia itaque refertur 10. ad 30. & 4. ad 12. Ergo rursus vicissim proportionales erunt; eritque 10. ad 4. vt 30. ad 12. Ita enim proportionem conuertimus: dum terminos pro fundamentis relationum sumimus, & consequentia pro antecedentibus.

THEOR. XIII. PROP. XXIII.

Si compositi numeri proportionales fuerint, & diuisi proportionales erunt.

Compositi numeri proportionales sunt, cùm totum refertur ad partem suam, vt aliud totum ad aliam partem suam. Sit ergo 9. qui referatur ad suam partem 3. vt 15. refertur ad suam partem 5. diuidantur isti numeri per easdem partes suas, auferanturque partes 3. à 9. & erit 6. Rursus 5. à 15. & erit 10.

	9 totum ad 3 partem		vt compars 6 ad 3
Vt		Ergo	
	15 totum ad 5 partem		sic compars 10 ad 5

Dico, quod pars 3. refertur ad reliquum 6. vt pars altera 5. refertur ad reliquum suum 10.

Probatur. Quia ex prop. 11. si totum ad totum se gerat vt ablatum ad ablatum, & reliquum ad reliquum, vt totum ad totum se habebit. Sed numeri V. gr. 3. & 5. sunt ablata 6. & 10. sunt reliqua: Ergo se habent prorsùs eodem pacto vnum ad aliud correspondens, 3. nimirum ad 5. & 6. ad 10. vt totum 9. ad totum 15. ergo, & inter se eodem pacto se habent, vt cum toto; quia quæ sunt eadem vni tertio sunt eadem inter se.

THEOR. XIV. PROP. XXIV.

Si diuisi numeri proportionales sint. Hi quoque compositi proportionales erunt.

Vt	pars 7	ad	compartem	3
Ita	pars 14	ad	compartem	6
Ergo vt	pars 14	ad	totum	20
Sic	pars 7	ad	totum	10

Dentur numeri quatuor partes duorum integrorum V.g 7. pars prioris totius 10. qui sit ad suam compartem 3. vt alterius totius 20. pars 14. est ad suam compartem 6.

Dico; quod etiam tota sibi inuicem proportionalia sunt ea proportione, qua partes, & quod componendo, si erit, vt 7. ad suam compartem 3. sic 14. ad suam compartem 6. hinc etiam erit consequenter totum 10. ad 7. partem, vt totum 30. ad 14 partem.

Prob. Ponitur proportio 7. partis ad 3. compartem prioris totius vt pars 14. ad 6. compartem in posteriori toto. Ergo ex propof. 13. huius erunt, & viciſſim, eritque 7. pars ad 14. partem fundamenta, vt 3. compars ad 6. compartem terminos: Quaderè ex propoſ. 12. huius, vt vnus antecedentium ad vnum conſequentium, ita omnes antecedentes ad omnes conſequentes, & ſic, vt 7. antecedens ad 14. conſequens, ſic omnes antecedentes 7. & 3. nempe totum 10. ad omnes conſequentes 14. & 6. ſimul, hoc eſt totum 20. proptereaque ex propoſ. 13. rurſus viciſſim erit 7. antecedens ad 10. antecedentem, vt 14. conſequens ad 20. conſequentem; nimirum pars ad ſuum totum, vt alia pars ad ſuum totum eadem proportione refertur; ex eò quod fuerit pars ad ſuam compartem, vt alia pars ad ſuam compartem, quod eſt arguere componendo ex definit. 25. lib. 5.

THEOR. XV. PROPOS. XXV.

Si compoſiti numeri proportionales fuerint; hi quoque per conuerſionem rationis proportionales erunt.

CONuerſioni rationis locus datur, cùm totum refertur ad partem, vt aliud totum ad ſuam partem: Nam tunc poteſt argui; quòd & altera pars ſit ad totum vt alia pars ad ſuum totum. V. g. ſit 9. pars numeri 15. & 12. pars numeri 20. & 9. referatur ſimili proportione ad 15. vt 12. ad 20. *Dicit, quod ita quoque refertur reliquum 6. ad 15. totum, vt reliquum 8. refertur ad 20. totum ſuum.*

Vt pars	9	ad 15	totum.
Sic pars	12	ad 20	totum.
Ergo compars	6	ad 15	totum.
Vt alia compars	8	ad 20	totum.

Probatur. Nam ſi eſt pars 9. fundamentum relationum ad 15. totum, & ad terminum, vt 12. pars, & fundamentum ad 20. terminum, & totum. Ergo ex propoſ. 13. & viciſſim fundamenta 9. & 12. & partes dicent eandem proportionem, quam termini 15. & 20. tota. Quamobrem ſi eſt totus 15. ad totum 20. vt ablatus 9. ad ablatum 12. etiam reliquus 6. totius 15. ad reliquum 8. totius 20. ex 11. propoſ. erit, vt totus 15. ad totum 20. Si itaq; pars 6. vt fundamentum reſpicit relatione proportionis terminum, & partem 8. vt totum 15. tanquam fundamentum, totum 20. vt terminum: Ergo rurſus viciſſim ex 13. propor. inuicem fundamenta eandem proportionem dicent, quam termini inuicem, & ita reſpiciet totum 15. reliquum 6. ambo fundamenta; ſicut reſpicit totum 20. reliquum 8. ambo termini.

EXPENSIO IV.

De minimis, primiſque numeris.

THEOR. I. PROPOS. XXVI. Eucl. 23.

Primi inter ſe numeri ſunt minimi, qui eandem proportionem obtineant.

SIt 7. & 4. primi numeri ad inuicem: *Dico eos minimos eſſe eorum numerorum, qui proportionem ſimilem habent, quam 4. ad 7.*

Probatur. Nam ſi alius reperitur minor, quam 7. & 4. Sit ille *quorum* quidam numerus, qui præſupponatur minor, quam 7. & *Leonum*, qui dicatur ab aduerſarijs, minor, quàm 4. dicentes tamen proportionem, quam 4. ad 7. Cum itaque proportio numerorum in eo ſita ſit, vt numerus numeri ſit eadem pars, vel partes, quam alter ſimilis eis in proportione eſt pars, vel partes alterius; ſequitur, vt debeat dari aliquis numerus, qui metiatur *Equos*, & *Leones* toties, quoties metitur 4 & 7. Vel ergo ille numerus eſt vnitas, & ita cum vnitas toties capiat in 7. quot ſunt *Equi*, & toties in 4. quot ſunt *Leones*, erunt *Equi* ſeptem, & *Leones* 4. nempe idem numerus, qui 4. & 7. non autem minor, vt volebant aduerſarij. Quod ſi non ſit vnitas; ſed aliquis alius numerus, qui 4. & 7. metiatur, ſicut *Equos*, & *Leones*: iam 4. & 7. non erunt inter ſe primi: nam primi numeri inter ſe ſunt: quorum communis menſura eſt non numerus, ſed tantum vnitas.

THEOR. II. PROPOS. XXVII. Euc. 24.

Minimi numeri omnium eorum, qui habent cum ipſis communem rationem primi quoque ſunt inter ſe.

SI dentur 7. & 4. qui dicantur minimi ex omnibus, qui proportionem habent, quam 7. ad 4. *Dicit quod iſti quoque erunt inter ſe primi.*

Probaturque reducendo propoſitionem ad impoſſibile. Nam, ſi non ſunt primi, erit aliquis numerus V. g. *Hominum* communis menſura; ita quod numerus ille *Hominum* capiet toties in 7. quot in ſtabulo ſunt *Equi*, & toties in 4. quot in ſylua ſunt *Leones*. Ergo ſi multiplicetur numerus *Hominum*, per numerum *Equorum* producet numerum 7. & ſi multiplicetur idem numerus *Hominum* per *Leonum* numerũ producet 4. Quamobrem ex propoſ. 17. numerus *Leonum* minor, quam 4. & *Equorum* minor quam 7. (cum multiplicati faciant 7. & 4) dicent inuicẽ proportionẽ eandẽ, quam 7 ad 4. Vnde 7. & 4. nõ erunt minimi omnium proportionem dicentium, quam 7. ad 4. quòd *Leonum*, & *Equorum* minores numeri eandem proportionem dicant, quod eſt contra præſuppoſitum.

THEOR. III. PROPOS. XXVIII. Euc. 25.

Si duo numeri primi inter ſe fuerint, qui vnum eorum metitur, numerus ad reliquum primus erit.

DEntur numeri 8. & 9. qui inuicem primi ſint, & 4. metiatur 8. *Dicit quod 4. ad reliquum 9. primus erit.*

Primi 8 9
4

Probatur. Quia. Si 4 non eſt primus ad numerum 9. metietur eos aliqua communis menſura præter vnitatem. Sit hæc menſura aliquis numerus *Hominum*, quæ metiatur 4. & 9. Hæc etiam ex 11. pronunc. metietur 8. quoniam 4. ex hypotheſi metitur 8., qui numerus 4. à numero *Hominum* metitur: quare numerus *Hominum* erit menſura numeri 9. ex præſuppoſito, & numeri 8,

vt

vt probaui; vnde 9. & 8. non erunt inter se primi; cùm habeant aliquem numerum Hominum præter vnitatem communi ipsorum mensuram, quod est absurdum; cùm præsupponamus 7. & 9. primos inuicem.

THEOR. IV. PROPOS. XXIX. Eu. 22.

Minimi numeri omnium in sua proportione æquè metiuntur alios maiores eandem proportionem habentes, minor quidem minorem, & maior maiorem.

DEntur duo numeri 2 & 3. minimi inuicem, alijque duo maiores 4. & 6. eandem proportionem habentes. *Dicit quod 2. minor æquè metitur 4. minorem, sicut 3. maior quam 2. æquè metitur 6. maiorem, quam 4.*

Probatur. Quoniam ponitur, vt 2. ad 3. ita 4. ad 6. ex prop. 13. viciſſim proportionales erunt; nempe fundamenta proportionis dicent eam proportionem, quam termini, & ita erit quoque 2. ad 4. vt 3. ad 6. Quamobrem iuxta 1. definitionem erunt numeri minores 2. & 3. eadem pars, vel partes maiorum 4. & 6. Vnde eos metientur.

Probatur etiam, quod æquè. Quia non poſſunt eſſe eædem partes: Nam ſi dicatur, quod hoc euenire poſſit, diuidantur in eas partes, quas conficit 2. numeri 3. & ſint tot, quot *Equi* ſunt in agro, & 4. numeri 6. & ſint tot, quot *Oues* ſunt in ſtabulo. Itaque erit numerus 2. iuxta 1. definitionem ad numerum *Equorum* ſimilis in proportione, quam 4. ad numerum *Ouium*. Quamobrem ex 13. propoſ. & viciſſim ita erit numerus *Equorum* ad numerum *Ouium*, vt 2. ad 4. minor autem vtique eſt *Equorum* numerus, quam 2. & *Ouium* quam 4. quod ſint pars, vel partes horum numerorum; eo quod ſint multiplicatores partium eos componentium, & ideo neceſſario minores; quod eſt abſurdum, cùm 2. & 4. ex hypotheſi ſint minimi in hac proportione. Quare 2. erit medietas numeri 4. vel ſi aliquis alius numerus loco exempli ſubſtituatur, erit eius, vel pars tertia, vel quarta, non autem plures partes numeri 4. continebit. Sicut nec 3. numeri 6. alioquin neceſſariò darentur partes minores, quæ eandem rationem poſſiderent contra Hypotheſim.

THEOR. V. PROPOS. XXX. Eucl. 26.

Si duo numeri ad quempiam primi fuerint; etiam ex ijs genitus ad eundem primus erit.

POnantur duo numeri 7. & 4. qui ſint primi ad 9. inuicemque multiplicentur 7. & 4. & fiat numerus 28. *Dicit quòd, & numerus 28. erit primus ad 9.*

Probatur reducendo ad impoſſibile. Nam, ſi 28. & 9. non ſunt inter ſe primi, metiatur eos aliquis numerus *Hominũ*, at 28. toties, quot sũt *Leones* in campo. Itaque numerus *Leonum* multiplicatus per numerum *Hominum*, vel è contra producet 28. qui numerus producitur etiam à 4. & 7. Vnde ex 19. propoſ. reciprocè proportionales erunt, & 4. ad numerũ *Hominũ* erit, vt numerus *Leonũ* ad 7.

Progreſſ. 2. Quoniam autem 4 & 9. ex hypotheſi ſunt inuicem primi, & numerus *Hominum* metitur 9. ex præſuppoſito, ſequetur iuxta propoſ. 28. quòd etiam numerus *Hominum* ſit primus ad numerum 4. & ideo, quòd ſit minimus in ſua proportione iuxta propoſ. 26. Et hinc, quòd in hac proportione ſint numeri maiores 7. & numerus *Leonum*, qui hanc ipſam dicunt proportionem, ex progreſſu 1. Et iuxta propoſ. anteced. quod æquè metiatur 4. numerum *Leonum* ſicut numerus *Hominum* numerum 7. Cum autem numerns *Hominum* metiatur 9. vt ex hypotheſi, & 7. vt modò; ſequeretur, quòd 7. & 9. non eſſent inuicem primi, quòd communi menſura præter vnitatem metiantur contra hypotheſim.

THEOR. VI. PROPOS. XXXI. Eu. 28.

Si duo numeri ad duos numeros, quiſque ad vtroſque primus ſit: Etiam geniti ex primis duobus erunt primi ad genitos ex poſtremis duobus numeris.

Primi	2	3	Geniti	15
	4	5		8

DEntur 2. & 4. primùm, & deinde 3. & 5. Sitque primus 2. ad vtroſque 3. & 5. ſicut, & 4. ad eoſdem vtroſque 3. & 5. primus exiſtat. Multiplicentur ſimul 2. cum 4. vt fiant 8. & 3. cum 5. vt euadant 15. *Dicit, quòd etiam 8. & 15. geniti, erunt primi inuicem.*

Probatur. Nam 2. ponitur primus ad 3. & 5. Ergo ex præced. etiam genitus 15. erit primus ad eundem 2. Item, quia 4. eſt primus ad 3. & 5. etiam 4. erit primus ex præced. propoſ. ad 15. Cùm igitur numerus 15. ſit primus ad 2. & 4. Ergo ex præced. etiam erit primus ad genitum ex ipſis 8. & ita 8. ad 15. primus erit.

THEOR. VII. PROPOS. XXXII. Eu. 29.

Si duo numeri primi inter ſe fuerint, & multiplicans vterque ſeipſum, fecerit aliquem; Geniti ex illa multiplicatione primi inter ſe erunt. Et ſi rurſus ijdem multiplicent hos Genitos, & alios numeros efficiant. Iſti denuò refecti erunt primi inuicem: Et ſemper circa extremos hoc eueniet.

Primi	2. 3.	Geniti	9	& rurſus Geniti	27
	2. 3.		4		8

SInt 2. & 3. qui ſe multiplicent, & 3. faciat 9. & 2. faciat 4. *Dico primò 4. & 9. eſſe primos inuicem.*

Probatur. Quoniam 2. & 2. ſunt primi ad 3. Ergo ex 30. propoſ. huius, etiam ex illis genitus 4. ad eundem 3. primus erit. Cum ergo ſit 4. primus ad 3. & ideo quoque ad aliud 3. Ergo ſi 3 & 3. ſe multiplicent; 9. Genitus ex propoſ. 30. primus erit ad 4.

Dico 2. Quod ſi rurſus 2. multiplicet 4. & faciat 8. & 3. multiplicet 9. & faciat 27. eodem modo

do

do sint primi inuicem.

	2	9	27
Primi	ad	Geniti	
	3	4	8

Probatur. Nam 2. est primus ad 3. ex hypothesi & 9. est primus ad 2. Siquidem 3. & 3. sunt primi ad 2. Ergo ex propos. 30. 9. genitus erit etiam primus ad 2. Sic vt diximus supra 4. est primus ad 3. & 9. Quare habemus duos numeros, quorum quisque ad duos alios primus est, nempe 2. ad 9. & 3. & 4. ad 9. & 3. Ergo ex præced. geniti ex ipsis nempe 8. ex 4. & 2. sic 27. ex 3. & 9. erût inuicē primi, & sic dicendum, etiamsi 2. multiplicet 8. & 3. 27. & sic eodem modo res succedet, cùm semper sit eadem ratio.

THEOR. VIII. PROPOS. XXXIII.

Omnem compositum numerum, aliquis primus numerus metitur.

Probatur. Quia dato numero aliquo, V. g. 24 & datâ eius aliquâ mensurâ, vt 8. vel iste 8; est primus, & iam habemus intentum, vel compositus; Si est compositus, metiatur eum numerus V. g. 2. qui similiter, vel erit primus, vel compositus, quod, si primus, habemus id, quòd volumus, si non primus metietur eum aliquis alius numerus; cùmque in numeris diminuendo non possimus progredi in infinitum; tandem in aliquo numero primo quiescendum erit, vt est 2. respectu numeri 24.

THEOR. IX. PROPOS. XXXIV.

Omnis numerus, vel est primus, vel eum aliquis primus numerus metitur.

Probatur ex antecedenti, quia si non est primus erit compositus, & ideo aliqua mensura primi alicuius numeri tandem mensurabitur.

PROBL. I. PROPOS. XXXV.

Numeris datis quotcunque reperire minimos omnium eandem rationem habentium cum ipsis.

Sint, quotcunque numeri 6. 9. 15. habentes quascumque proportiones, siue sit eadem proprtio, quæ 6. ad 9 & quæ 9. ad 15 siue non: Isti, vel erunt inter se primi, & sic erunt etiam minimi in ea proportione iuxta propos. 26; vel compositi, & sic iuxta 2. propos. reperiemus maximam communem mensuram 3. quæ metiatur eos primum gemina vice secundum tricies, tertium quinquies Dico, *quod duenarius ternarius; & quinquenarius sunt numeri inuicem primi in ea proportione.*

Probatur itaque primò, quod eam proportionem possideant.

Quoniam numeri 2. 3. 5. multiplicati per 3. faciunt numeros prædictos 6. 9. & 15. Sequitur ex propos. 18. quod habeant geniti qui sunt 6. 9. & 15. eandem rationem, ac multiplicati 2. 3. 5.

Probatur quoque quod sint minimi in ea proportione, si enim tales non sunt, dabuntur aliqui ipsis minores. Sint itaque tales numerus *Hominum, Equorum, & Ouium*, qui iuxta propos. 28. metietur ipsos 6. 9. & 15. æquè, & ideo per numerum aliquem V. g. *Leonum*, Quapropter numerus *Leonum* multiplicans numerum *Hominum* faciet 6. multiplicans autem numerum *Equorum* faciet 9. & tandem numerum *Ouium* generabit 15. Itaque ex 19. propos. h. quoniam duenarius multiplicatus per numerum 3. generat 6. & numerus *Hominum* multiplicatus per numerum *Leonum* generat item 6. Proportionales erunt inuicem hi numeri, & se gerent multiplicantes, vt multiplicati reciprocè, & erit 3. multiplicans ad *Leones* numerum multiplicantem, vt *Homines* ad 2. multiplicati, sed *Homines* ex hypothesi sunt minus, quàm 2. numerus. Ergo ex prop. 29. etiā 3. numerus erit minor, quā *Leones*, qui numerus *Leonum* metitur 6. 9. & 15. propositos per numeros *Hominum, Equorum, & Ouium*. Quare numerus *Leonum* erit communis mensura illorum numerorum 6. 9. 15. & maior, quàm eorundem communis mensura 3. contra hypothesim, quæ maxima supponitur. Itaq; alij numeri minores ipsis, nempe duenario, ternario, & quinario, qui eadem proportione potiantur, quam 6. 9. & 15. non poterunt dari.

PROB. II. PROPOS. XXXVI.

Duobus numeris datis reperire, quem illi minimum metiantur, numerum.

Sit primo exquirendus minimus numerus omnium, quem duo numeri primi inuicem, nempe 3. & 4. metiantur. Multiplicentur inuicem, & procreatus, puta 12. erit numerus, quem metiantur. Nam toties capiet 3. in 12. quot vnitates sunt in 4. & 4. in 12. quot vnitates sunt in 3. Quod verò 12. sit minimus omnium, quem dati numeri metiantur.

Probatur. Nam, si fieri potest, aliquem alium numerum minorem V. g. *Equorum* mensuret, & numerus quidem 3. toties, quot *Oues* sunt in campo numerus verò 4. eundem numerum; *Equorum* metiatur toties quot *Canes* sunt in platea. Itaq; multiplicatus 3. per numerum *Ouium* produtet numerum *Equorum*, & hunc eundem numerum producet 4. multiplicatus per numerum *Canum*. Vnde ex 19. p. reciprocè relationem dicet multiplicati 3. ad 4. quam multiplicantes numerus *Ouium* ad numerum *Canum*, & quia etiam 4 & 3. minimi ponuntur in hac proportione mentietur quoque 3. numerum *Ouium*, & 4. numerum *Canum* ex 29. propos.

Progress. 2. Considerandum autem est rursus, quòd numerus 3. multiplicans numerum 4. facit 12. & 4. multiplicans ex hypothesi numerū *Ouium* facit numerum *Equorum*; erit ex 17. pr eadem proportio 4 ad numerum *Ouium*, quam 12. ad numerum *Equorum*. Sed ex primo progressu 4. metitur numerum *Ouium*: Ergo, & 12. metiretur numerum *Equorum*, quem posuimus minorem, quam 12. quod est absurdum.

Sint secundo dati numeri non primi inter se, vt 8. 12. inueniantur que ex prop. 33. h. minimi in ea proportione, vt sit 2. ad 3., vt 8. ad 12. multiplicentur que iuxta 9. propos. extrema proportionum inuicem nempe 2. & 12. rursusque media, vt 3. & 8. fiet idem numerus 24. Dico, *quod iste numerus est minimus, quem dati numeri metiantur.*

Quòd

Quòd autem 8 & 12. mensurent 24. clarum est cum multiplicati per 3. & 2. ipsum producant.

Quòd verò 24. sit minimus omnium, quem mẽsurent, probatur eodem tenore argumenti vt supra. Nam si non est minimus dabitur aliquis numerus V. g. *Equorum* minor ipso, quẽm mensurabunt 8. toties, quot *Oues* sunt in campo, & 12. toties, quot *Canes* sunt in platea: Quapropter idẽ numerus fiet *Equorum*, si numerus *Canum* multiplicet 12. sicut si numerus *Ouium* multiplicet 8. Itaque dicent eamdem proportionem ex 19. propos. multiplicantes inuicem, quam multiplicati, reciprocè, & ita erit 8. ad 12. vt ad numerum *Ouium* numerus Canum, & ita pariter erit 2. ad 3. vt numerus *Canum* ad numerum *Ouium* cum 2. ad 3. dicant eandem proportionem, quam 8. ad 12. Quare 2. & 3. (cum positi sint minimi in ea proportione) mensurabunt quoque æquè numerus quidem 2. numerum *Canum*, & 3. numerum *Ouium*.

Progress. 2. Obseruandum rursus est, quod 8, multiplicans 3. producit 24. Sicut, & numerus idem 8. multiplicans numerum *Ouium* producit numerum *Equorum*: Quare ita 3. erit ad numerum *Ouium* ex propos. 17. sicut 24. ad numerum *Equorum*.

Propterea; cùm ex progr. primo 3. mensuret numerum *Ouium*, mensurabit quoque ex propos. 29. numerus 24. numerum *Equorum*, Qui positus est minor; itaque maior metiretur minorem, quod est absurdum.

COROLLARIVM.

Hinc fit, quòd si duo numeri multiplicent minimos eandem rationem habentes, maior minorem, & minor maiorem, produci minimum numerum, quem illi mensurant. Nam demonstratum est, quòd, si primus maior 3. multiplicans 8. compositum minorem, & 2. primus minor multiplicans 12. compositum maiorem faciunt 24. numerum minimum, quem 8. & 12. metiantur.

THOR. X. PROPOS. XXXVII.

Si duo numeri numerum quendam mensurent, minimus quoque numerus mensuratus ab ipsis numerum illum mensurabit.

Sit 4. & numerus 6. qui mensurent 36. & numerus minimus mensuratus ab ipsis 12. (Nã 4. & 6. multiplicati per 2. & 3. primos, & minimos in eadem proportione faciunt 12.) *Dico, quod hic numerus 12. metitur quoque numerũm 36.*

Probatur. Nam, si non ita est; auferatur à 36. numerus 12. quoties fieri potest, & sit pars ablata numerus, quidam *Hominum*, qui 12. ex æquò continebit, per hanc ablationem necessariò superabit aliquid, quod erit minus, quã 12. ex aduersarijs: Hoc ergo reliquum sit quidam numerus *Ouium*. Cum itaque 4. & 6. mensurent 12. etiam mensurabũt ablatum *Hominũ*, ex numero 36. & (vt præsupponitur) cũ mẽsurent quoq; totũ 36. mensurabũnt, & reliquum numerum *Ouium* ex propos. huius 8. itaque numerus 12. contra hypothesim, non erit minimus, quem 4. & 6. metiantur; cùm metiantur quoq; & reliquũ *Ouium* minus, quàm 12.

PROBL. III. PROPOS. XXXVIII.

Tribus numeris datis reperire, quem illi minimum metiantur numerum.

3. 4. 6. metitus 12.

Sit inueniendus minimus numerus, quem dati tres numeri 3. 4. 6. metiantur. Inueniatur ex propos. 36. minimus, quem 4. & 3. metiantur, & sit 12. quem etiam 6. metitur. *Dico, quod 12. est minimus numerus, quem 3. 4. & 6. metiantur.* Si enim esset aliquis minor, is esset V. g. quidam Hominum, ergo numerus Hominum minor, quã 12. mensuraretur quoque à numero 3. & 4. Quare 12. non esset minimus, quem 3. & 4. vt repertum fuit, mensurarent.

Verùm si occurrat. Quòd minimus numerus, quem duo numeri mensurant, non mensuretur à tertio, vt est 16. qui mensuratur à 4. & 8: sed non mensuratur à 6. tertio numero. Inueniatur minimus numerus, quem 16. & 12. metiantur, & sit 48. *Dico, quod iste est numerus, quem tres 4. 8. & 12. metiantur.*

metitus primus 16.

4. 8. 12.

metitus secundus 48.

Probatur primò. Quod metiantur. Nam 4, & 8. mensurãt 16. hic 16. verò mẽsurat 48. Ergo, & 4. & 8. mensurant 48. ex propos. 10. huius.

Probatur secundò. Quod sit minimus omniũ eorum, quos 4. 8. & 12. mensurant. Nam, si datur aliquis numerus V. g. *Equorum* minor, quam 48. quem 4. 8. & 12. mensurent. Sequitur, & quòd eum mensurent 12. & 16. siquidem 16. mensuratur à 4. & 8. Quare ex prop. præc. num. *Equorũ* mensurabitur quoque à 16. minimo, quem illi mẽsurẽt. Ergo 48. non erit minimus, quẽ 12. & 16. mensurent contra hypothesim, cũ 16. ex probatione mensuret numerum *Equorum* minorem quã 48. & 12. eundẽ mẽnsuret, vtpote tertius numerus eorũ, qui numerũ *Equorũ* ex aduersarijs mẽsurãt.

COROLLARIVM.

Si tres numeri numerum quempiam metiantur, etiam minimum, quem, illi metiuntur, eundem mensurare. Nam si numerus 12. & 16. mensurant numerum Equorum etiam numerus 48. ex præced. propos. debebit illum mensurare. Cùm à minimis numeris numerus mensuratus, mẽsuret omnem numerum ab illis minimis mensuratum.

THEOR. XI. PROPOS. XXXIX.

Si quispiam numerus numerum metiatur, mensuratus habebit partem, vel partes à mensurante denominatas.

Mensuret numerus 3. numerum 12. *Dico numerum 12. habere partes, vel partem à 3. denominatam;* nempe habere tertiam partem.

Ostenditur. Nam 3. metiatur 12. toties, quot vnitates sunt in 4. Ergo vt Vnitas metitur 4. sic 3. metitur 12. Quare ex propos. 13. ita quoque

vicissim

Vicissim. Vnitas metietur 3. vt 4. 12. Et ideo eadem pars erit Vnitas ipsius 3. quæ 4. ipsius 12. Sed Vnitas est pars ipsius 3. à 3. denominata. Ergo etiam 12. habebit partes ab ipso 3. denominatas; nempe partem tertiam, vel duas tertias partes, & cęt.

THEOR. XII. PROPOS. XL.

Si numerus partem habuerit quamlibet, metitur illum numerus à parte denominatus.

HAbeat numerus 15. partem 5. quæ denominetur à 3. ita, quòd 5. sit tertia pars numeri 15. Dico, quod 5. mensurabit 15.

Probatur. Nam quot vnitates erunt in 3. tot erunt quinquenarij in numero 15. Ergo numerus quinquenarius à parte tertia denominatus metitur numerum 15.

PROBL. IV. PROPOS. XLI.

Numerum reperire, qui minimus cùm sit habeat datas partes.

SInt datæ partes tertia, quarta, quinta, quas inueniendus aliquis minimus numerus possidere debeat. Reperiatur aliquis minimus numerus, quem numerent 3. 4. & 5. iuxta partium datarum denominationem, qui erit 60. Dico numerum 60. esse minimum eorum, qui tertiam, quartam, & quintam partem habent.

Probatur. Nam quia 3. 4. & 5. metiuntur numerum 60. clarum est, quod numerus 60. ex præced. propos. habet partes à 3. 4. & 5. denominatas.

Quod verò sit minimus eorum, qui tales partes habent.

Probatur. Nam si dicatur esse numerum aliquem Hominum minorem, qui tertiam, quartam, quintam partem habeat, metietur eum numerus 3. 4. & 5. & sic non erit 60. minimus numerus, quem 3. 4. & 5. mensuret. Cum mensurent quoque numerum Hominum minorem numero 60.

THEOR. XIII. PROPOS. XLII.

Primis quibuscumque numeris propositis semper plures vltra propositos poterunt inueniri.

SInt propositi numeri 2. 3. 5. primi inuicem. Dico quòd vltra ipsos inuenietur aliquis alius. Nam sit numerus metitus à propositis 30. & addatur vnitas, & fiant 31. Iste numerus, vel est primus cùm propositis; vel non. Si est primus habemus, quod volumus; inueniri nempe alium aliquem primum numerum præter propositos. Si non est primus ex propos. 33. eum aliquis primus numerus metietur. Mensuret eum numerus Equorum. Iste, vel est idem cum primis, & est, vel 2. vel 3. vel 5. & sic mensurabit totum 31. ex hypotesi, & ablatum 30. vt vnus ex dictis. Ergo & reliquum 1. quòd est absurdum cum numerus vnitatem non metiatur, vel est diuersus à prædictis, & iam intentum habemus.

COROLLARIVM

FAcilis modum reperiendi numeros primos; Silicet reperiendo primum numerum, quem dati numeri metiatur, & illi reperto addendo vnitatem, nam ille erit primus ad inuentos.

TRACTATVS XI. IN VIII. LIBRVM EVCLIDIS

PARS SECVNDA.

De speciali Numerorum proportione.

HIc liber agit iam non de proportionibus numericis in vniuersali; sed de ipsis in particulari: Et primò de proportionibus numerorum simplicium. Secundò de proportionibus numerorum figuratorum, quorum inquam vnitates si ordine disponantur, figuram constituant. Vnde operæ pretium erit priùs horum numerorum perfectam habere notionem.

EXPENSIO I.

De principijs.

DEFINITIO I.

CVm duo numeri se se mutuo multiplicantes fecerint aliquem, genitus numerus planus apellabitur, numeri verò hunc generantes latera dicentur.

Planus

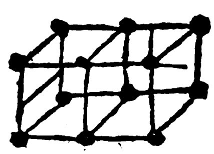
Planus dicitur numerus ortus ex duorum multiplicatione; quia secundùm suas vnitates ordine dispositas parallelogrammum constituit, vt 3. & 4. faciunt 12. Potest verò idem, & vnus nùmerus plura habere latera; cùm ex pluribus multiplicationibus generari queat, vt 12. habet latera 3. & 4 sic 2. & 6. vt ex asterismis ordinatis constat.

* * * *
* * * *
* * * *

DEFINITIO II.

Cum verò tres numeri mutuò se se multiplicantes aliquem fecerint, qui procreatus, erit solidus dicetur, & generantes tres numeri latera dicentur.

Quia nimirum, si vnitates eius disponantur, vel sumantur tanquam partes solidæ alicuius solidi, solidum constituent, V. g. si 2. multiplicet 2. facient 4. & si 4. multiplicet 3. facit 12. quæ vnitates solidum constituunt, vt hîc videre est.



DEFINITIO III.

Quadratus numerus est, qui æqualiter æqualis, vel qui sub duobus æqualibus numeris continetur.

Nam eius vnitates in longum, latumque dispositæ quadratum constituunt. Sic numerus 25. ex 5. in 5. procreatus, dicitur numerus quadratus.

Numerus vero generans dicitur latus, seu radix quadrata, quæ, vt exquiratur, suo loco ostendendum erit.

DEFINITIO IV.

Cubus numerus est, qui æqualiter æqualis æqualiter, vel qui sub tribus æqualibus numeris continetur.

V.g. 125. qui sub tribus 5. se multiplicantibus continetur: sic 5. in 5. producit 25. & rursus 5. in 25. producit 125. qui numerus cubus appellatur, & numeri producentes dicuntur latera, seu radix cubica, de qua suo loco agendum.

DEFINITIO V.

Similes solidi numeri, & plani sunt, qui proportionalia habent latera.

Vt planus numerus plano numero similis sit, non requiritur, quòd omnia eius latera, ex quorum multiplicatione generatur sint proportionalia omnibus lateribus, ex quibus alius generari potest sic 6. & 24 sunt proportionales; quòd ita sit 2. ad 3. latera numeri 6. vt 4. ad 6. latera numeri 24. licet numerus 24. habeat alia latera; nempe 2. & 12. sic 3. & 8., quæ lateribus 2. & 3. non proportionantur. Sic etiam solidus solido similis erit; si aliqua latera vnius, lateribus alterius proportione respondeant, licet alia inueniri possint, quæ talia non sint; sic 24. & 192. similes sunt, quòd latera 24. numeri sint 2. 3. 4. quæ ita sunt inuicem, vt 4. 6. 8. latera numeri 192. licet adsint alia latera numeri V. g. 192. quæ non ita se habeant; vt 6. 8. 4.

EXPENSIO II.

De minimorum numerorum proportionibus.

Quia omnes numeri licet ratione non tamen proportione correspondent, Ideo primo videndum quinam numeri inter se primi sint, quibus possint inueniri numeri proportionales, & etiam tradere modum illos inueniendi, quod in hac Expensione operi demandatur.

THEOR. I. PROPOS. I.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales: extremi verò ipsorum primi inter se fuerint, ipsi omnes minimi in ea proportione erunt.

Sint numerorum deinceps proportionalium nempe continuè 8. 12. 18. 27. D*ico quòd si extremi* 8. & 27. *sunt primi inuicem: quòd etiam erunt dati omnes numeri minimi in ea proportione.*

Probatur. Nam dentur 4. numeri minores ipsis, si id esse potest *Hominum*, *Equorum*, *Ouium*, & *Leonum*. Nam cum dicant eandem proportionem inuicem etiam extrema eorum ex propos. 14. sept. ex æqualitate in eadem ratione erunt, & ita erit numerus *Hominum* ad numerum *Leonum*, vt 8. ad 27. Quare cum 8. & 27. sint primi inuicem ex hypothesi mensurabunt ex 29. propos. sept. 8. quidem *Homines*, & numerus 27. *Leones*: nempe maior, vt ponitur 8. *Homines* numero minores, & 27. maior *Leones*, qui supponuntur pauciores.

PROBL. I. PROPOS. II.

Numeros reperire deinceps proportionales minimos in data ratione, quotcunque iusserit quispiam.

Sit data ratio, quam habet 2. ad 3. Et iubeamur primo inuenire tres numeros minimos successiuè proportionales in illâ datâ proportione. Numerus 2. multiplicetur in se, & fiat 4. Deinde cum numero 3. & fiant 6. tandem 3. in se, & fiat 9. Dico 4. 6. 9. esse minimos in ea pportione.

Probatur autem primò. Quòd sint proportionales. Nam, cum numerus 2. multiplicet se, & 3. ex propos. 17. sept. erit, vt ipse 2. ad 3. ita producti 4. ad 6. Item cum numerus 3. multiplicet 2. & se erit vt 2. ad 3. multiplicantes, ita in proportione erunt producti 6. & 9.

Probatur secundò. Quod etiam sint inuicem primi ex propos. 32. lib. sept. Nam extremi 4. & 9. procreati sunt ex numeris primis inuicem cum minimi sint in ea proportione multiplicati in se. Ergo, & extremi 4. & 9. erunt primi, & ideo minimi in ea proportione. ex propos. ant. Quare etiam medij erunt minimi in ea proportione ex eadem propos. anteced.

Iubeamur secundo ex ijs repertis, inuenire alios minimos in ea pportione fiant ex 2. in tres inuentos 4. 6. 9. multiplicato, numeris 8. 12.

& 18. Deinde ex 3. in vltimum 9. fiat 27. Dico *rursus* 8. 12. 18 27. *esse minimos in ea proportione*.

Probatur primò. Quod sint proportionales. Nam ex propos. 17. septimi, numerus 2. multiplicans 4. 6. & 9. facit aliquos 8. 12. 18. ipsi geniti in eadem ratione erunt, quam 4. ad 6. & 6. ad 9. quæ quoque est eadem, quam dicit 2. ad 3. Sic pariter 3. multiplicans 9 fecit 27. & 2. multiplicans item 9. fecit 18. ex eadem propos. 18. & 27. in eadem ratione erunt, quam 2. ad 3. Ergo omnes quatuor numeri nuper reperti 8. 12. 18. 27. in eâdem ratione sunt, quam 2. ad 3.

Probatur secundo, quod minimi quoque sint. Nam 2. & 3. cum sint primi, minimi sunt in ea proportione, & in eadem extremi sunt, 8. & 27. geniti ex 2. & 3. gemina vice in se. Quare ex pr. 32. sept. erunt quoque primi. Quare erunt minimi in ea proportione ex propos. ant. quam 2. ad 3. & sic semper succedet, si in infinitum sequaris.

COROLLARIVM I.

Hinc deducitur. Quod si tres numeri minimi sint continuè proportionales extremos quadratos esse. Nam sunt ex definitione 18. æqualiter æquales, siquidem extremi, vt 4. & 9. sunt facti, ex multiplicatione minimorum 2. & 3. in se.

COROLLARIVM II.

Deducitur quoque quatuor numerorum inuentorum, si minimi sint, extremos cubos esse, nempe 8. & 27. Nam 8. fit ex multiplicatione 2. in 2 & rursus ex multiplicatione 2. in genitũ 4. Sic 27. fit ex multiplicatione 3. in 3. & rursus ex multiplicatione 3. in genitum 9. Quarè 8. & 27. sunt numeri æqualiter æquales æqualiter. Si verò essent quinque, extremi essent quadrati quadratorum, & alij qui in Algebra explicantur.

COROLLARIVM III.

Extremi quoque secundùm hanc regulam inuenti, vt 4. & 9. sic 8. & 27. sunt primi inuicem, vt ex 32. propos. lib sept. constat. Nam consurgit 4. ex multiplicatione numeri 2. in se. Sic 9. ex multiplicatione 3. in se. Quare erunt primi ad inuicem. Sic 8. & 27. consurgunt ex multiplicatione 2. rursus in 4. & 3. rursus in 9.

COROLLARIVM IV.

Constat etiam duos minimos numeros in aliquâ ratione metiri alios quoscunque in eadem ratione. Quia scilicet producuntur ex eorum multiplicatione.

PROBL. II. PROPOS. III. Euc. 4.

Rationibus datis quotcumque in minimis numeris reperire numeros deinceps minimos in datis rationibus.

Sint datæ duæ rationes 2. ad 3. & 5. ad 6. Oporteatque reperire tres numeros minimos deinceps proportionales in datis rationibus, quod scilicet primus ad secundum sit, vt 2. est ad 3. & secundus ad tertium, vt 5. est ad 6. Ita fiet. Reperiatur minimus numerus ex propos. 36. sept. quem metiuntur 3. & 5. secundus, & tertius, & sit 15. exortus ex multiplicatione 3. cum 5. quia sunt primi inuicem; at si non essent primi, esset operandum, vt in secunda parte eiusdem propos. iubemur.

Rationes	2.	3.	5.	6.
Continuè in illis	10.	15.		18. Proportinales.

Deinde tertius 5. multiplicet primum 2. & fiant 10. sicut secundus 3. multiplicet vltimum 6 & fiant 18. *Dico tres inuentos* 10. 15. 18. *esse in ea proportione, cum possideat* 2. *ad* 3. *&* 5. *ad* 6. *nimirum esse* 10. *ad* 15. *vt* 2. *ad* 3. *&* 15. *ad* 18. *vt* 5. *ad* 6.

Probatur primo, quod eandem proportionem dicant. Nam numerus 2. & 3. multiplicando 5. fecerunt aliquos; nempe 2. ex 5. numerum 10. sicut 3. ex 5. numerum 15. Ergo ex prop. 17. sept. erunt in eadem proportione 2. ad 3 vt 10. ad 15. sic numerus 7. & 6. multiplicando 3. fecerunt 15. & 18. Ergo erunt in eadem proportione, ex eadem propositione, 5. ad 6. vt 15. ad 18.

Probatur secundò Quod *sint minimi in datis rationibus*. Nam progress. primo si non sunt minimi erunt aliqui numeri minores singuli, singulis. Qui in datis rationibus existant. Sit ergo numerus *Equorum* minor, quam 10., qui sit ad numerum *Ouium*, minorem quam 15. vt 2. ad 3. cum ergo 2. & 3. ex hypothesi minimi sint in ea proportione ex prop. 20. sept. metietur 2. numerum *Equorum* sicut 3. numerum *Ouium*.

Progress. 2. Pariter dabitur quoque numerus *Ouium* minor, quam 15. & numerus *Leonum* minor, quam 18. qui sint in eadem proportione, qua 5. ad 6. Quare 5. metietur *Oues* & 6 *Leones* ex citata prop. 20. sept. Vnde 5. & 3. metientur numerum *Ouium* minorem, quam 15. numerus quidem 5. vt modo probauimus: numerus verò 3. ex præc. progressu.

Quamobrem cùm 5 & 3 mensurent quoque 15. minimum, quem metiuntur. Sequetur, quòd numerus 15. ex propos. 37. metietur numerum Ouium minorem: quam 15. Cùm 15. sit minimus eorum ex effectione, quem 5. & 3. mensurent. Quòd verò numerus maior metiatur minorem, hoc esse nequit.

Sint deinde secundo casu tres rationes in minimis numeris 3. ad 4. prima, secunda 5. ad 6. tertia 2. ad 7. Et sint inueniendi quatuor numeri in datis rationibus deinceps, idest continuè proportionales.

Rationes	3.	4.	5.	6.	2.	7.
Continuè proport.	15.		20.		24.	84.
	Equi,		Boues,		Leones	n. minores

Inueniatur minimus numerus, quem mensuret numerus secundus 4. & tertius 5. & erit 20. Deinde multiplicetur tertius 5. cùm primo 3. nempe per vices, iuxta quas 4. capit in 20. & gignetur numerus 15. Rursus multiplicetur 4. cum quarto 6. nempe per easdem vices, penes quas 5. capit in 20 & producetur numerus 24. Erunt itaque 15. 20. 24. tres numeri in data ratione continuè proportionales. Videatur igitur, an quintus numerus 2. mensuret 24. Quod si metiatur, vt facit 2. propositus, qui capit 12. vicibus in 24. per has vices multiplicetur 7. & erunt 84. Dico itaque, quod 15. 20. 24. 84. habent datas rationes.

Probatur primò. Quod sint in datis rationibus,

bus, & quidem de tribus primis 15. 20. 24. constat, cum eodem modo executioni problema mandatum sit, ac in primo casu. De tertio verò, qui sit, ad quartum vt 2. ad 7. sic constat. Nam 2. metitur 24. tot vicibus, quot 7. metitur 84. cum ambo multiplicati per 12. eos gignant. Ergo 24. & 84. ex propos. 18. septimi erunt in ijsdem rationibus 2. ad 7.

Probatur secundo. Quod sint minimi, & etiam de tribus primis res constat ex primo casu. De numeris verò 24. & 84. tertiam proportionem facientibus clarum est, quia minor numerus dari nequit, quàm 84. qui capiat 12. vicibus 7. vt 24. capit 12. vicibus 2.

Nam si 20. 24. & 84. non sunt minimi in datis rationibus 5. ad 6. & 2. ad 7. Dabitur itaque numerus quidam *Equorum*, qui sit ad *Bouum* numerũ vt 5. ad 6. & sit numerus Bouum ad Leones, vt 2. ad 7. qui tamen singuli essent minores, quam 20. 24. 84. Quare ex propos. 29 septimi 5. metietur *Equos*, & 6, *Boues*. Et ex eadem 29. propos. 2. metietur quoque *Boues*, vt 7. *Leones*. Quia dati numeri 2. 7. & 5. 6. minimi sunt in datis rationibus. At 2. & 6. mensurant quoque 24. ex effectione minimum, quem possint metiri: ergo 24. mensurabit quoque *Boues* numerum se minorem ex propos. 37. septimi, quod est absurdum.

Tertius casus est, si quintus numerus non caperet æquè in 24. vt si esset tertia proposita proportio A 5. ad 7. reperiatur *minimus numerus*, quem A 5. & 24. metiuntur, & sit 120. Quoties ergo 24. metitur 120. quæ vices sunt 5. toties 15. primus numerus metiatur alium numerum nempe multiplicetur 5. per 15. & fiet 75. Item quoties 24. metitur 120. toties 20. secundus numerus alium numerum multiplicatus per eas vices, quæ sunt quinque, metiatur, & erit 100. At quoties 5. metitur 120. quæ sunt 24 toties 7. alium numerum metiatur, & ita 7. multiplicatus per 24. producet 168. Itaque 75. 100. 120. 168. erunt minimi in datis rationibus. Quod enim habeant datas rationes ostenditur. Quia enim 15. 20. 24. metiuntur 75. 100. 120. per eundem numerum A 5. erit eadem proportio inter hos quoque, quæ erat inter illos. Illi autem 15. 20. 24. eas rationes habebant, quæ 3. ad 4. & 5. ad 6. Ergo easdem habebunt 75. 100. & 120

Deinde, vt 5. metitur 120. vicibus viginti quatuor, ita, & 7. metitur 168. Ergo inter 120. & 168. erit eadem proportio, quæ inter 5. & 7.

Prob. 2. Quod sint minimi. Nam Progr. 1. si non sunt tales. Dabitur aliquis numerus *Equorum* minor, quam 100. *Bouum* minor, quam 120. & *Leonum* minor, quàm 168. qui tamen habebunt datas rationes.

				A
Rationes	3. 4.	5. 6.		5. 7.
Continuè Prop.	15.	20.	24.	
Continuè Prop.	75.	100.	120.	168.
secundo inuenti		Equi, Boues, Leones n. minores, quam immediatè ipsis superpositi.		

Numerus *Equorum* est ad numerum *Bouum*, vt 5. ad 6. & ideo 5. metietur numerum *Equorum* ex propos. 29. & quia & 5. & 4. metitur 20. minimum, quem possent metiri ex effectione, metietur quoque 20. ex propos. 37. septimi numerum *Equorum*.

Progress. 2. Quia verò ostensum est, quod sicut 20. est ad 24. sic 100. ad 120. Et ita quoque ex aduersarijs *Equi* sunt ad *Boues*, vt 100. ad 120. Ergo ex *Æquo*, vt 20. ad 24. sic *Equi* ad *Boues*: Quare permutando, vt 20. ad *Equos*, sic numerus 24. ad *Boues*. Quare sicut ex 1. Progressu 20. metitur *Equos* sic 24. metietur *Boues*.

Sed 5. mensurat etiam ipsos Boues, eo quod præsupponatur ab aduersarijs, quod ita sit 5. ad 7. sicut *Boues* ad *Leones* iuxta propor. 29. sept. Cum itaque 24. & 5. mensurent *Boues* mensurabit quoq; & numerus 120. ex propos. 37. sept. quem illi minimum mensurant numerum (qualem reperimus ipsũ 120. ab initio) ipsos *Boues*: At *Boues* dicũtur minus esse numero, quàm 120. Ergo numerus maior 120. metietur minorem *Bouum*, quod esse nequit.

THEOR. II. PROP. IV. Eu. 16. l. 9.

Si duo numeri primi inter se fuerint, non erit, vt primus ad secundum, ita secundus ad alium quempiam.

Sint primi inter se 6. & 7. Dico, quod non potest esse, vt 6. ad 7. ita 7. referatur ad alium quempiam V. g. ad numerum *Ouium*.

6	vt	7
7		Oues

Probatur. Quia ex propos 29. sept. Si 6. esset ad 7. vt 7. ad numerum Ouium oporteret, quod 6. metiretur 7. æquè, vtpote fundamentum secundæ proportionis 7. queadmodum idem 7. terminus primæ metiretur numerum Ouium, quòd esse nequit, cùm 6. & 7. sint inuicem primi.

THEOR. III. PROPOS. V. Euc. 17. l. 9.

Si sint quocumque numeri deinceps proportionales: Extremi verò ipsorum primi inter se fuerint; non erit, vt primus ad secundum, ita vltimus ad alium quempiam.

4		9
ad 6		Equos

Dentur 4. 6. 9. continuè proportionales quorum extremi 4. & 9. primi sint inuicem. Dico, quòd non est, vt 4. ad 6. ita 9. ad alium quempiam V. g numerum *Equorum*.

Probatur. Nam si ita esset 4. ad 6. , si, 9. ad numerum *Equorum* permutando esset quoque 4. ad 9. vt 6. ad numerum *Equorum*. Quare, cùm 4. & 9. sint primi inuicem in ea proportione 4. æquè metiretur 6 ex propos. 29. sept. & 9. Equos. Quia ergo 4. mensurat 6. & ponitur, vt 4. ad 6. ita 6. ad 9. metietur quoque 4. ipsum 9. æquè ex pron. 18. tr. 8. quod est absurdum.

PROBL. III. PROP. VI. Euc. 18. l. 9.

Duobus numeris datis considerare; an possit ipsis tertius proportionalis inueniri.

Sint dati numeri 4. & 7. Videndum est; si sint primi inuicem, si primi sunt, vt assignati. Ex propos. 4. huius euidens est, quod illis tertius proportionalis nequeat inueniri.

Quod si non sint primi, vt 4. & 6. multiplicetur in se numerus secundus, vt 6. & fiant 36. Videaturque an numerus primus 4. mensuret 36. si mensurat, vt assignatus 4. qui metitur 36. per 9. dicendum est; quòd habeat tertium proportionalem, & quod iste sit numerus ille 9. per quem primus 4. mensurat genitum 36. ex multiplicatione numeri 6. in se.

Probatur, quod ille 9. sit tertius proportionalis ex propos. 20. sept. Nam idem numerus 36. producitur, tam ex multiplicatione numeri medij 6. in se, quam ex multiplicatione 4. & 9. inuicem, qui sunt numeri extremi; siquidem, vt supponitur 4. per 9. mensurat 36. Vnde ex illa prop. 20. erit, vt 4. ad 6. sic 6. ad 9. Quod si non mensurat genitum ex multiplicatione secundi in se numerus primus, vt si dati fuissent 2. & 3. & genitus ex 3. esset 9. quem 2. non mensurat, dicendum; tertium proportionalem non posse illi inueniri.

Probatur. Nam si ille esset. Esset V. g. numerus *Equorum*: Quare cum ponatur, vt 2. ad 3. ita 3. ad *Equos*, ex propos. 20. producetur idem numerus ex multiplicatione 3. in se, nimirum 9. & ex multiplicatione 2. per numerum *Equorum*. Quamobrem 2. metiretur 9. mediante numero *Equorum*; quod esse nequit, cùm ponatur non metiri 2. ipsum 9.

PROBL. IV. PROP. VII. Euc.19.1.9.

Tribus numeris datis considerare, an possit illi quartus proportionalis inueniri.

Sint dati 3. numeri, quorum extremi, si sunt primi: Iam nequit quartus proportionalis inueniri ex propos. 5.

8. 12. 18. 27.

Si verò non sint primi, vt 8. 12. 18. multiplicandi sunt 12. & 18. vt fiant 216. & diuidendus est numerus 216. per 8. vt videamus; an ex ęquo mensuret 8. primus numerus numerum 216. genitum ex medijs; Si mensurat, vt in assignato exemplo; videndum, per quem numerum id fiat, V. g. per 27. Et tunc dicendum: tribus numeris 8. 12. 18. quartum proportionalem inueniri posse; ipsumq; esse numerum 27.

Probatur ex propos. 19. sept. Nam idem numerus fit ex multiplicatione mediorum 12. & 18. qui ex multiplicatione extremorum 8. & 27. cùm 8. multiplicando 27. generet 216. siquidem 8. ipsum metitur per 27. ex pronunc. 7. tr. 8.

Quare 8. 12. 18. 27. erunt inuicem proportionales.

Si verò primus datus numerus non mensuret genitum ex medijs, vt si essent dati 3. 4. 10. Nam 3. primus numerus non mensurat ex æquo 40. numerum ortum à multiplicatione numerorum reliquorũ 4. & 10. Tunc dicendum quartum proportionalem prædictis numeris inueniri nequaquam posse.

Probatur. Quoniam, si inuenitur, sit illis numerus *Ouium*. quartus proportionalis. Numerus 3. 4. 10. & numerus *Ouium* sunt proportionales: Ergo ex 19. propos. sept. medij 4. & 10. producerent inuicem multiplicati 40. Et idem numerus produceretur ex multiplicatione extremorum 3. & Ouium numero; Quare 3. per numerum Ouium metiretur 40. quod est absurdum cùm ponamus 3. non metiri 40.

EXPENSIO III.

De proportione numerorum non primorum.

Aliqua etiam de quibuscunque numerorum proportionibus sunt delibanda, eaque, quę elementi vim habeant, deseruiantque cęteris, de quibus agendum est.

THEOR. I. PROPOS. VIII. Euc.8.

Si inter duos numeros medij continua proportione numeri cadant; etiam inter alios eandem rationem cum ipsis habentes totidem continua proportione cadunt numeri.

Dentur 10. & 80. inter quos medij continua proportione cadant 20. & 40. ita, quòd sint continuè proportionales 10. 20. 40. 80. Sintque alij duo numeri, qui eandem proportionem dicant 6. & 48. quam 10. ad 80. Dico, *quò sicut inter 10. & 80. cadunt duo medij proportionales 20. & 40. ita cadere inter 6. & 48.*

10. 20. 40. 80.

Quod, vt ostendatur, assumantur minimi, quatuor numeri in ea proportione, in qua sunt 10. 20. 40. 80. & sint 1. 2. 4. 8. eritque, vt 10. ad 20. ita 1. ad 2. & sicut 20. ad 40. ita 2. ad 4. & sicut 40. ad 80. ita 4. ad 8. Quare ex *Æquo*, vt 10. ad 80. sic 1. ad 8. & ita 6. ad 48.

Cumque sint 1. & 8. minimi in ea proportione, ita mensurabit 1. numerum 10. sicut metitur 8. numerum 80. ex propos. 29. l. sept. & ex eadem propos. metietur etiam numeros 6. & 48. habentes eandem proportionem cum ipsis.

Quoties igitur 1. metitur numerum 6. & 8. numerum 48. toties intermedij minimi numeri 2. & 4. metiantur aliquos alios, & quia 1. metitur 6. sex vicibus, & 8. numerum 48. vicibus item sex, producet 2. intermedius minimus multiplicatus per easdẽ vices numerũ 12. & 4. alter intermedius, item per 6. ductus numerum 24. Quamobrem geniti in eadem proportione erunt ex propos. 17. sept. ac generantes per eundem numerum senarium multiplicatos, & ita erit 12. ad 24. vt 2. ad 4. quæ eadem est, ac 1. ad 2. & quæ 4. ad 8. Erunt itaque continuè proportionales 6. 12. 24. 48. vt sunt 1. 2. 4. 8. & ideo, vt sunt 10. 20. 40. 80. Cumque multitudo numerorum intermediantium, qui reperti sunt 12. & 24. sit æqualis multitudini numerorum mediantium 20. & 40. patet propositum: Quod tot numeri medij proportionales cadent inter duos numeros 6. & 48. quot inter 10. & 80. eandem proportionem cum eis habentes.

COROLLARIVM

Hinc est, quod neque inter numeros duplæ proportionis, neque superparticularis, neque superbipartientis possit cadere medius proportionalis, quia caderet etiam inter numeros minimos similis proportionis. Illi autem medium proportionalem recipere nequeunt. Nam dupla proportio minimorum est inter 1. & 2. superparticularis verò inter numeros sola vnitate dissitos, inter quos nullus numerus cadit, vt 2. & 3. su-

3. superbipartiens verò inter numeros, qui dualitate differunt, vt 5. & 7. inter quos sola vnitas intercipitur, quæ esse nequit medius proportionalis.

Nam sint 3. & 5. minimi in aliqua proportione superbipartiente, & sit numerus inter eos 4. qui dicatur medius proportionalis. Ergo erit 3. ad 4. vt 4. ad 5. quare ex pr. 22. l. 5. & 3. ablatus à 4. ita erit ad 4. ablatum à 5. vt residuum 1. à 4. ad residuum 1. à 5. & ideo 3. esset ad 4. vt vnitas ad vnitatem, quod est falsum, quia esset vt inæqualis ad inæqualem, ita æqualis ad æqualem.

THEOR. II. PROPOS. IX. Euc. 10.

Si inter duos numeros, & vnitatem continua proportione ceciderint numeri; quot inter ipsos, & vnitatem deinceps medij continua proportione cadunt numeri totidem, & inter ipsos medij continua proportione cadent.

16. 40. 100. 250. 625.
8. 20. 50. 125.
4. 10. 25.
2. 5.
5.

SInt numeri proportionales 16. & 625. & inter primum, & vnitatem tres medij proportionales cadant 2. & 4. & 8. sicut, & inter secundum 625. & vnitatem cadant tres medij proportionales 5. & 25. & 125. *Dico, quòd, & inter ipsos, tres pariter medij proportionales inuenientur.*

Nam duo minores numeri interpositi 2. & 5. se mutuò multiplicet, procreabunt 10. minor autem eorum 2. multiplicet tum modo factum 10. & faciet 20. tum mediocrem alterius seriei, nimirum 25. & faciet 50. Tandem idem numerus 2. multiplicet hos factos nimirum factum 20. & faciet 40. sic, & factum 50. faciet 100. & tandem maiorem alterius seriei 125. & faciet 250. *Dico hos postremo factos esse inter datos 16. & 625. medij tres proportionales.*

Obseruandum verò est in primis. Cùm 1. 2. 4. 8. & cęt. sicut 1. 5. 25. 125. dicuntur proportionales ab vnitate, quòd sicut vnitas metitur bis 2. sic 2. metitur 4. & 4. 8. & cęt. sicque vnitas metitur 5. quinq; vicibus, vt 5. 25. & 25. metitur 125. & cęt. Quia ita ponitur 1. ad 2. vt 2. ad 4. & sic ponitur 1. ad 5. vt 5. ad 25. & cęt.

Probatur. Quia omnes 16. 40. 100. 250. & 625. habent eandem proportionem, quam 2. ad 5. Ergo sunt continuè proportionales. Quod verò eam proportionem habeant, quam 2. ad 5. Patet nam 16. 40. 100. & 250. eandem proportionem habent ex propos. 17. quam multiplicati ex quibus prodiere 8. 20. 50. cùm fuerint multiplicati per eundem numerum 2. Isti verò 8. 20. 50. eandem habent ob eandem rationem, quam 4. & 10. cum fuerint multiplicati per eundem 2. Et rursus isti 4. & 10. eandem, quam 2. & 5. quod hi per 2. fuerint multiplicantes, ex 18. propos. Et ob eandem rationem quoque 250. & 625. quem primo posthabuimus, erunt in eadem proportione, quam 2. ad 5. cum 25 multiplicatus per 2. fecerit 250. minorem, & multiplicatus per 5. fecerit 625. Vnde omnes quinque 16. 40. 100. 250. & 625. erunt continuè proportionales, nimirum in eadem proportione, quâ 2. ad 5.

EXPENSIO IV.

De numeris planis, & solidis.

CVm numeri plani, & solidi multas insignes proprietates consequantur, quę maximè deseruiunt in Arithmeticis operationibus, & lib. 10. necessariç sint, ad cognoscendam diuersitatem quantitatis discretę à continua hinc, est quod visis proportionibus numerorum simplicium, hìc debeamus agere de numeris figuratis, nempe planis, vel solidis, & eorum proportiones agnoscere.

THEOR. I. PROPOS. X. Eucl. 5.

Plani numeri inter se rationem habent ex lateribus compositam.

Plani 8 15
Latera 2. 4 3. 5

SInt duo numeri plani 8. & 15. & latera primi 2. & 4. secundi 3. & 5. *Dico proportionem 8. ad 15. esse compositam ex propoitione laterum.*

Prob. Faciant latus primi 2. & latus secundi 3. numerum 6. se mutuò multiplicando. Itaque habemus, quod numerus 2. multiplicando 4. fecit planum 8. & multiplicando 3. latus alterius plani, numeri 15. facit 6. & ideo ex propos. 17. l. sept. ita erit 4. ad 3. vt 8. ad 6.

Progress. 1. Eadem quoque ratione, quam 3. multiplicans 2. facit 6. & multiplicans 5. fecit 15. erit eadem ratio ex cit. propos. 2. ad 5. qua 6. ad 15. refertur. Quare 8. 6. 15. sunt deinde proportionales in proportionibus, quibus refertur 4. ad 3. & 2. ad 5. Nam tribus ijs numeris ordine positis, ita refertur 8. ad 6. vt latus 4. ad latus 3. & ita respondet in proportione 6. ad 15. vt 2. ad 5.

Plani numeri 8 15
Latera 4. 2. 3. 5
6 numerus ex 2 & 3
Ita refertur 4 ad 3 & 2 ad 5.
Vt 8 ad 6 & 6 ad 15

Sed si ordo laterum inuertatur, & disponatur hoc ordine.

Plani 8 15
Latera 2. 4 5. 3
20
Vt refertur 2 ad 5, & 4 ad 3
sic 8 ad 20, vt 20 ad 15

Erit adhuc eadem ratio 8. ad 20. quæ est 2. ad 5. & 4. ad 3. quæ est 20. ad 15. Ita si quocunque alio ordine ea latera colloces V. g. 4. 2. 5. 3., aut 2. 4. & 3. 5. Nam 10. aut 12. producti ex medijs laterũ numeris erunt ad extremos proportionales velut latera, & ita referretur 4. ad 5. vt 8. ad 10. & 10. ad 15. vt 2. ad 3. Sic referretur 2. ad 3. vt 8. ad 12. & 12. ad 15. vt 4 ad 5. Ergo, cùm proportio 8. ad 15. sit effecta ex proportione V. g. 8. ad 12. & 12. ad 15. aut ex proportione 8. ad 10. & 10. ad 15. aut ex proportione 8. ad 20. & 20. ad 15. aut ex 8. ad 6. & 6. ad 15. & hæ omnes sint proportiones laterum diuersimodé collatorum; patet ex def. 8. tract. 9. part. 1. proportionem planorum 8. ad 15. componi ex proportione laterum, quod, & de omnibus alijs planis valet.

THEOR. II. PROPOS. XI. Eucl. 15.

Duorum similium planorum numerorum vnus medius proportionalis est numerus, & planus ad planum duplicatam habet lateris homologi ad latus homologum rationem.

Sint duo plani numeri similes, scilicet habentes latera proportionalia aliqua. V. g. 6. & 24. Nam latera aliqua numeri 6. quę sunt 2. & 3. sunt proportionalia aliquibus lateribus numeri 24. nempe 4. & 6. licet, & alij sint numeri, qui ex mutua multiplicatione producunt 6. & 24. qui proportionem non dicunt, vt essent 2. & 12. aut 3. & 8. latera quoque numeri 24.

Plani similes	6.	24.	Medius 12.
Latera	2. 3.	4. 6.	

Latera itaque numeri 6. sunt 2. & 3. & numeri 24. sunt 4. & 6. & eadem proportione gaudet 2. ad 3. vt 4. ad 6.

Dicit, quòd inter 6. & 24. cadit medius proportionalis numerus aliquis. Nam multiplicentur termi-nus 3. primæ combinationis extremo, cum 4. alterius proportionis, producetur 12. *Dico hunc esse proportionalem medium.*

Probatur. Progressus 1. Quoniam ita refertur 2. ad 3. vt 4. ad 6. permutando ita quoque erit 2. ad 4. vt 3. ad 6.

Progressus 2. Quoniam 3. multiplicans 2. fecit 6. & 4. fecit 12. erit eadem proportio 2. ad 4. quam 6. ad 12. & sic quia 4. multiplicans 3. fecit 12. & multiplicando 6. fecit 24. erit eadem proportio 3. ad 6. quæ 12. ad 24. Quare proportionales sunt numeri 6. 12. & 24. Ergo 12. est medius proportionalis.

Probatur secundo: Quòd habeat 6. ad 24. duplicatam lateris homologi ad latus homologum rationem. Latera homologa illa sunt, quæ vtraque in eadem quantitate sunt, fundamenta proportionis, vel termini; ita erunt in hac 2. & 4. fundamenta, & 3. & 6. ambo termini; patet autem ex prima probatione, quod ita est 6. ad 12. vt 2. ad 4. & 12. ad 24. vt 3. ad 6. Quare cum 6. ad 24. eam proportionem obtineat, quæ est 6. ad 12. & 12. ad 24. est duplicata cum gemina vice repetatur eadem proportio, & est etiam ea, quæ laterum homologorum 2. ad 4. vt 3. ad 6. Possent tamen etiam alio pacto disponi latera, vt in præc.

THEOR. III. PROPOS. XII. Euc. 19.

Duorum similium solidorum numerorum duo medij proportionales sunt numeri; & solidus ad solidum triplicatam habet rationem, quam habet latus homologum ad aliud latus homologum.

Solidi	48.	& 162.
Latera	2. 4. 6.	& 3. 6. 9.

Sint duo numeri solidi similes 48. & 162. & primi latera sint 2. 4. & 6. Secundi verò 3. 6. 9. sunt autem similes; quod latus 2. ita referatur ad 4. primi, vt latus secundi 3. refertur ad 6. & ita latus 4. primi referatur ad 6. vt latus 6. secundi refertur ad 9. *Dico, quod inter hos numeros solidos 48. & 162. duo medij proportionales cadunt numeri.*

Notandum verò est in primis; quod quia ponitur 2. ad 4. vt 3. ad 6. erit etiam permutando 2. ad 3. vt 4. ad 6. & quia ponitur 4. ad 6. latus primi solidi, vt 6. ad 9. latus secundi, erit etiam permutando 4. ad 6. vt 6. ad 9. quare erit eadem proportio, vel 2. ad 3. vel 4. ad 6. vel 6. ad 9. nimirum latera vnius solidi ad latera alterius solidi collata, cùm conueniant in intermedia proportione 4. ad 6.

Nunc, vt probetur propos. disponatur latera in ordinem, vt placet: dummodo proportiones similes in loco correspondente sint, vt vides.

	8		48
2	4	6	72
	12		
3	6	9	108
	18		162

Deinde multiplicandi sunt 2. cum 4. latera primi fient 8. sicut 3. cum 6. latera secundi, & fient 18. plani numeri. Deinde terminus primi, vel consequens 4. muliplicandus est cum fundamento relationis, vel cum antecedente secundi, qui est 3. & fient 12. Tandem 6. primi, & 9. Secundi hunc 12. multiplicent, & facient 72. & 108.

Probatur itaque primo: Quod hi numeri 72. & 108. sint duo medij proportionales inter 48. & 162.

Progress. 1. Quoniam itaque 4. multiplicauit 2. & 3. sequitur ex propos. 17. septimi; quòd eadem proportio sit inter genitos 8. & 12. quæ est inter multiplicatos 2. & 3.

Progress. 2. Iterum, quia 3. multiplicauit 4. & 6. sequitur ex eadem propos. quòd sint 4. ad 6. multiplicati sicut 12. & 18. geniti. Quare 8, 12. & 18. sunt continuè proportionales.

Progress. 3. Solidus quoque numerus 48. resultauit ex multiplicatione 2 in 4. ex qua prodijt numerus 8. & rursus ex multiplicatione 6. in 8. Vnde factus est numerus ipse solidus 48. Sic dicendum est de numero solido 162.

Progress. 4. Numerus itaque 6. latus primi solidi multiplicans ex effectione 12. fecit 72. Itaque ex cit. propos. 17. ita erit 48. ad 72. geniti, quæ est 8. ad 12. quæ est ex 1. progressu 2. & 3.

Progress. 5. Sic quia numerus 9. latus tertium secundi solidi multiplicauit ex 3. progr. 18. & fecit 162. & ex effectione multiplicans 12. fecit 108. sit vt eadem proportio sit inter multiplicatos 12. & 18. quæ inter genitos 108. & 162. quæ vero est inter 12. & 18. est illa, quę est inter 4. & 6. ex 2. progressu.

Progressu 6. Tandem, quia latus tertium 6. primi solidi 6. & 9. latus tertium secundi solidi multiplicando 12. fecerunt 72. & 108. Sequitur ex cit. propos. 17. quò eadem proportio sit inter 6. & 9. quæ est inter 72. & 108. Quamobrem

Concluditur: Quod ita sit in proportione solidus primus 48. ad 72. quæ est 2. latus prioris solidi ad 3. latus posterioris ex 4. propgressu. Et quod 72. ad 108. sit in eandem proportione, quam habet 6. latus tertium primi solidi ad 9. latus tertium secundi solidi ex 6. Progr. Tàdem quod 108. sit ad 162. solidum posterius, quæ est inter 4. latus secundum primi solidi ad 6. latus secundum posterioris solidi ex Progr. 5. quare continuam proportionem habebunt 48. ad 72. & hic ad 108. & iste ad 162. quam habet 2. ad 3. & 6. ad 9. & 4. ad 6. nimirum laterum vnius ad latera alterius,

quæ

quæ vt prænotauimus est eadem proportio.

Probatur secundò. Quòd sit proportio triplicata inter solidos 42. & 162. nam vt probatum est, eadem proportio 2. ad 3, vel 4. ad 6. vel 6. ad 9. repetita in quatuor numeris 48. 72. 108. & 162. triplicatur, & ita est 48. ad 72. vt 72. ad 108. & 108. ad 162.

PROBL. III. PROPOS. XIII. Eu. 20.

Si inter duos numeros cadat vnus medius proportionalis numerus, similes plani erunt illi numeri.

Cadat inter 18. & 32. numerus medius proportionalis 24. *Dico 18. & 32. esse similes planos numeros.*

Prog. 1. Sumātur duo numeri minimi in ratione, qua refertur 18. ad 24. aut quę est eadem 24. ad 32. ex propos. 35. & sint 3. & 4. ex propos. 29. sept.

18 24 32

3 4 6 8

3. & 4. metientur 18. & 24. æquè, idest per æqualem numerum; metiantur per 6: ideoque 3. & 6. erunt latera numeri 18.

Progress. 2. Sic quoq; 3. 4. metientur ex eadem propos. numeros 24. & 32. æquè, idest per ęqualem numerum 8. ideoque 4. & 8. erunt latera numeri 32.

Obseruandum est autem quod idem numerus 4. in primo progr. multiplicans 6. fecit 24. & ex 2 pr. idē 4. multiplicans 8. fecit 32. Vnde 6. & 8. habebunt eandem rationem, quam 24. ad 32. quę est 3. ad 4. ex 17. septimi. Poterimus itaque vti permutatione. Cùmque sit 3. ad 4. vt 6. ad 8. etiam erit 3. ad 6. vt 4. ad 8. Iam ergo patet numeros 18. & 32 esse similes planos. Planos quidem; quia habent latera 3. 4. & 6. 8. similes verò, quia latera, vt requirit def. 1. h. planorum numerorum, sunt proportionalia, & est 3. ad 6. latera plani 18. vt 4. ad 8. plani 32.

THEOR. XI. PROPOS. XIV. Euc. 21.

Si inter duos numeros cadant duo medij proportionales numeri; similes solidi sunt illi numeri.

8 12 18 27

4 6 9

22 A 2 33 B 3

Cadant inter 8 & 27. duo numeri proportionales 12. & 18. *Dico 8. & 27. solidos esse.* Sumantur tres numeri minimi in ratione 8. ad 12. vel quæ eædem sunt 12. ad 18. vel 18. ad 27. ex propos. 35. septimi, & sint 4. 6. 9.

Progress. 1. Quia itaque inter 4. 9. assumptos numeros minimos cadit vnus medius proportionalis 6. erunt 4. & 9. assumpti minimi in ea proportione ex præced. prop. plani. Lateraque eorum erunt scilicet 2. & 2. latera numeri 4. & 3. 3. latera numeri 9.

Progress. 2. Quia 4 6. 9. assumpti minimi sunt in ea proportione metientur ex propos. 29. numeros primò propositos 8. 12. 18. 27. qui habent eandem rationem cum ipsis, & numeri quibus metiūtur erunt A 2. & B 3. Itaque 4. & 6. mensurabunt 8. & 12. per A 2. eos multiplicando & 6. cum 9. mensurabunt 18. & 27. per B 3. eos multiplicando.

Progress. 3. Sed 2. 2. latera numeri 4. plani se se multiplicando faciunt 4. rursus 4. per A 2. ex secundo progressu multiplicando 4. facit 8. cùm, vt ibi 4. metiatur 8. multiplicatus per A 2. Itaque 8. numerus solidus erit, cuius latera erunt 22. & A 2. Sic & 27. Nam 9. per B 3. multiplicatus ex secundo progress. producit 27. At ipse 9. numerus planus producitur ex multiplicatione suorum laterum 3. & 3. Ergo 27. erit solidus ex definitione 2. h. cuius latera erunt 3. 3. & B 3.

Probatur verò; Quod sint solidi similes. Nam illi sunt solidi similes, quorum vnius latera tria tribus alterius sunt proportionalia.

Sed talia sunt 2 22. respectu laterum 3. 3. 3. Ergo solidi similes erunt.

Progress. 4. Quod vero talia sint. Probatur. Nam ex 2. progr. A 2. multiplicans 6. produxit 12. & B 3. multiplicans 6. item produxit 18. Ergo erit 2. ad 3. vt 12. ad 18.

Progress. 5. 12. verò, & 18. sunt in eadem ratione, quæ 4. & 6. quia multiplicati per 3. fecerunt ipsos 12. & 18. & ideo, vt A 2. ad B 3.

Progress. 6. Quia verò assumpti minimi sunt extremi eorum 4. & 9. erunt quadrati ex Coroll. 1. 2. propos. huius, & ideo plani similes, & hinc ex propos. 9. cadet inter illos medius proportionalis 6. in proportione laterum homologorum.

Propterea latus 2. primi solidi 4. & aliud latus 2. eiusdem dicent eandem rationem ad 3. & 3. latera secundi solidi 9. vt 4. ad 6. quæ eadem ex 5. progr. quæ 2. A ad B 3. numeros mensurantes, & latera tertia sollidorum. Quamobrem si est 2. ad 3. vt 2. ad 3. vt 2. A ad B 3. poterimus vti *Permutatione*, & dicere, quod erit latus 2. primi solidi ad 2. vt latus 3. ad latus 3. secundi, & ita latus 2. ad A 2. tertium latus eiusdem primi solidi, vt latus 3. ad latus tertium B 3. secundi solidi; quapropter similes erunt isti solidi.

Non potuimus autem assumere minimos 4. 6. 9. in proportionibus numerorū 8. 12. 18. 27. nisi extremi essent quadrati; quia trium minimorum numerorum in eadem proportione continuantium extrema quadrata sunt ex Coroll. 1. propos. 2. huius.

THEOR. XII. PROPOS. XV.

Similes plani numeri inter se rationem habent, quam quadratus numerus aliquis ad aliquem quadratum numerum.

Dentur duo plani similes 8. & 18. *Dico, quod sicut est 8. ad 18. ita sit aliquis quadratus ad aliquem numerum quadratum.*

Probatur. Nam 8. & 18. sunt plani similes ex hypothesi. Quare mediabit inter eos aliquis numerus proportionalis. Iste mediet, & sit 12. Reperiāturque minimi in eadem proportione, & sint 4. 6. 9. Horum extremi ex Coroll. 1. prop. 2. h. quadrati erunt. Quamobrem erit, vt quadratus 4 ad quadratum 9. ita 8. ad 18.

THEOR.

THEOR. VII. PROPOS. XVI. Eu. 27.

Similes solidi inter se rationem habent, quam cubus numerus ad cubum numerum.

PRobatur. Nam inter 16. & 54. vtpote inter solidos numeros similes interponantur, duo medij proportionales ex propos. 12. huius. Eruntq; V. g. 24. & 36. Sumptis ergo quatuor numeris minimis in ea proportione, quę est 16. ad 24. item 24. ad 36. & tandem 36. ad 54. qui sint 8. 12. 18. 27. vt ex Coroll. 2. propos. 2. huius habemus, 8. & 27. Cubi erunt. Igitur 16. ad 54. solidi numeri habebunt eandem rationem; quam Cubus 8. ad Cubum 27.

COROLLARIVM I.

COlligitur ex prædictis omnibus. Nullos numeros esse planos, vel solidos similes, inter quos medius proportionalis cadere nequeat. Quare nulli numeri primi V. g. 11. & 13. possunt esse solidi similes; Quia latera non obtinent, præter vnitatem, & se ipsum (quia V. g. ex 1. & 11. fit 11. quæ latus non sunt, nisi impropriè, nec inter eos medius proportionalis cadere potest. Sic nec numeri inter se primi; qui quadrati non sint, aut cubi similes sunt. Quòd, si dicantur esse planos similes, cadet inter eos medius proportionalis, vel vnus, vel duo. Quare cum sint primi inuicem, & sint tres, vel quatuor continua proportione hi erunt: Quadrati, vel Cubi ex Coroll. 1. vel 2. propos. 2. huius, quod est contra positionem.

COROLLARIVM II.

SIc nec numeros, quorum minor primus sit, qui ab vnitate solùm mensuretur, vt 3. 5. vel 7. non posse esse planos, vel solidos similes, nisi minor mensuret maiorem; Nam, si non mensuret essent primi inuicem, & ideo non possent esse plani, vel solidi similes ex præced. Coroll.

COROLLARIVM III.

SIc, neque plani similes possunt esse ij, quorum vnus Quadratus, vel Cubus sit alter nequaquam, vt 4. & 5. vel 16. & 26. aut 8. & 11. Nam, si essent plani similes haberent proportionem, quam quadratus, vel cubus numerus ad Quadratum, vel Cubum numerum. ex propos. 11. quod est contra hypothesim.

COROLLARIVM IV.

VNde facilis est inuentio numerorum non similium. Nam omnes numeri primi in se vt 3. 5. 7. 11. Sic numeri primi inuicem 2. & 3. Sic, & numeri, quorum vnus primus est, & alium non metitur, vt 5. & 8. Sic, & numeri quorum vnus Cubus sit, vel Quadratus, alter verò nequaquã, non possunt esse, aut plani, aut solidi similes.

PROBL. I. PROPOS. XVII.

Duos numeros planos similes inuenire.

ACcipiantur quatuor numeri proportionales, & sit 2. ad 5. vt 8. ad 20. seque multiplicent fundamenta cum terminis proportionum: 2. cum 5. & procreent 10. & 20. cum 8. & producant 80. *Dico hos esse planos similes.*

Probatur, quia illi sunt similes, qui habent latera proportionalia ex defin. talia verò sunt ex constructione 10. & 80.

EXPENSIO V.

De Quadratis, & Cubis.

NVmeri Cubici, & Quadrati quædam species sunt numerorum similium planorum, & solidorum. Vnde visis eorum genericis proprietatibus, nunc etiam species ipsorum considerandæ.

THOR. I. PROPOS. XVIII. Eucl. 11.

Duorum Quadratorum numerorum vnus proportionalis numerus medius est, & Quadratus ad Quadratum duplicatam habet lateris ad latus rationem.

SInt duo Quadrata 9. & 49. quorum latera sint 3. & 7. Dico primo *inter eos cadere aliquem numerum medium proportionalem.*

* Probatur. Nam duo Quadrata sunt duo solidi similes; siquidem eorum latera 3. 3. & 7. 7. sunt equalia: Vnde eadẽ proportio est 3. ad 3. quę alterius laterũ 7. ad aliud latus 7. Ergo ex prop. 5. inter eos aliquis medius proportionalis cadit. *Quadratum quoque duplicatam habet lateris ad latus rationem.* Nam ea proportio, quæ inter 3. & 7. gemina vice in vno quoque quadrato repetitur, ob multiplicationem laterum in se.

THEOR. II. PROPOS. XIX. Eu. 28.

Duorum Cuborum numerorum duo medij proportionales sunt numeri, & Cubus ad Cubum duplicatam habet lateris ad latus rationem.

* PRobatur. Nam duo Cubi sunt duo solidi similes ob laterum suorum æqualitatem. Sic Cubi 27. latera 3. 3. 3. ad Cubi 64. latera 4. 4. 4. eadem proportione referuntur, & est primus 3. ad secundum 3. & primus 4. ad secundum 4. & secundus 3. ad tertium 3. vt 4. ad 4. sed inter solidos similes ex propos. 6. duo medij proportionales numeri cadunt. Ergo etiam inter Cubos.

Solidi quoque habent duplicatam lateris ad latus rationem. Quare etiam Cubi eo, quòd sint solidi similes. Sic 27. & 64. habent duos medios proportionales 36 & 48. & latus 3. cubi 27. prius in se; deinde in productũ 9. ductus facit 27. Sicut, & latus 4. cubi 64. priùs in se, deinde in productum 16. ductus facit 64. Vnde proportio, quæ est inter 27. & 64. est illa ipsa, quæ est inter 3. & 4. sed triplici vice repetita.

THEOR.

THEOR. III. PROPOS. XX. Eucl. 22.

Si tres numeri deinceps sint proportionales; primus autem sit quadratus, & tertius quadratus erit.

SInt 9. 36. 144. continuè proportionales. *Dico quod si 9. est quadratus, & tertium 144. esse quadratum.*

Quia cum inter 9. & 144. cadat vnus medius proportionalis erunt plani similes ex propos. 11. huius, & ita ex definitione proportionalia habebunt latera: Quare ita erit 3. ad 3. vt latus alius 144. ad sui ipsius alterum latus: sed 3. & 3. sunt æquales: Ergo, & latera numeri alius 144. erunt æqualia 12. & 12., quare quadratus erit.

THEOR. IV. PROPOS. XXI. Eu. 23.

Si quatuor numeri deinceps sint proportionales, & primus sit Cubus; quartus etiam Cubus erit.

SInt quatuor numeri 27. 45. 75. & 125. continuè proportionales. Dico, *quod si primus sit Cubus, & vltimum quoque cubum esse.*

Probatur. Nam erunt similes solidi primus 27. & quartus 125. eo quòd inter eos duo medij proportionales numeri intercipiantur ex prop. 12. Quare ex definitione ita erit 3. ad 5. & hic ad 3. vt latus primum ad latus secundum, & hoc ad latus tertium numeri 125. Sed 33. & 3. sunt numeri æquales. Vnde latera numeri 125. erunt inuicem æqualiter æqualia, quare cubus erit.

THEOR. V. PROPOS. XXII. Euc. 24.

Si duo numeri inter se rationem habeant, quam quadratus ad quadratum, si primus quadratus sit, etiam secundus talis erit.

SI sit 36. quadratum ad 64. numerum; vt quadratum 9. ad quadratum 16. *Dico etiam numerum 64. esse quadratum.*

Probatur. Quia inter quadratos 9. & 16. cadit vnus proportionalis numerus V. g. 12. ex propos. 11. huius, sed ita est quadratus 36. ad numerum 64. Ergo ex propos. 18. etiam inter 36. & 64. cadet vnus medius proportionalis. Videlicet 48. Ergo ex propos. o. huius. Si 36. est numerus quadratus, talis erit, & 64.

THEOR. VI. PROPOS. XXIII. Eu. 25.

Si duo numeri inter se rationem habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum, si primus sit cubus, talis quoque erit secundus.

SInt 64. & 216. numeri, qui habeant rationem eam inter se, quam 8. obtinet comparatus ad numerum 27. ambo cubos. *Dico, si 64. est Cubus, quòd talis quoque erit 216.*

Probatur, quia inter 8. & 27. vtpote inter numeros Cubos ex propos. 19. huius duo proportionales cadunt numeri: Quapropter ex propos. 8. cadent quoque tales numeri duo proportionales inter 64. & 216. Quare ex propos. 21. cum 64. Cubus ponatur, talis quoque erit numerus 216.

THEOR. VII. PROPOS. XXIV.

Si ab vnitate quotcumque numeri deinceps sint proportionales. Tertius ab vnitate quadratus erit, & vno intermisso quilibet sequens. Quartus autem Cubus, & duobus intermissis quilibet alius. Septimus autem Cubus simul, & quadratus, & quinque intermissis omnes alij.

SInt ab vnitate continuè proportionales.

A B C D E

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256. 512.

1024. 2048. 4096. F

Primò *Dico tertium 4. esse quadratum, & intermisso vno, sextum 16. esse quoque quadratum, & intermisso vno, octauum 64. esse quadratum,* & sic sequendo.

Probatur. Nam: Quod 4. sit Quadratus numerus, inde patet; quia sub duobus æqualibus numeris 2. & 2. continetur ex definit. 4. Siquidem Vnitas est ad 2. vt 2. est ad 4. sed vnitas metitur 2. per se ipsam, ergo, & metietur numerus 2. numerum 4. per se ipsum, nempe per 2. Quod autem, & alij, qui intermisso vno succedunt sint quadrati, etiam patet ex propos. 20. eò quia intermediet inter vtrumque medius proportionalis V. g. inter 4. & 16. numerus 8. At 4. est Quadratus quapropter, & 16. erit quadratus ex pa. 22. h.

Secundo Dico, quod quartus ab vnitate Cubus sit. Nam Vnitas est ad 2. vt 4. ad 8. eodemque modo vnitas mensurabit 2. vt 4. numerũ 8. Sed iam ex prime partis probatione 2. multiplicans 2. & per se ipsum generat 4. Ergo etiam modo 2. multiplicans 4. faciet 8. Ergo 8. Cubus erit. Quod autem intermissis duobus, omnes alij sint Cubi, patet ex 19. propos. quia inter 8. & 64. duo medij proportionales numeri intercipiuntur.

Tertiò Septimus ab vnitate ostensus est cubus, vt patet ex numero D, quia occupat eum locum post primum cubum intermissis duobus: Est quoque Quadratus: quia post primum, & secundum Quadratum intermisso vno occurrit: Ergo simul erit Cubus, & Quadratus.

THEOR.

THEOR. VIII. PROPOS. XXV.

Si ab vnitate quotcumque numeri proportionales deinceps fuerint; qui verò post vnitatem Quadratus sit, & reliqui omnes Quadrati erunt, & si qui post vnitatem sit Cubus, & reliqui omnes Cubi erunt.

SI sint ab vnitate continuè proportionales numeri 2. 4. 16 64. 256. 1024. & primus 4. sit Quadratus. *Dico reliquos omnes esse quadratos.*

Probatur. Quia; cùm sint tres proportionales 4. 16. 64. primusque 4. sit quadratus, & tertius quadratus erit; Eodem modo, cum 16. 64. & 256. sint continuè tres proportionales, & 16. sit quadratus ergo ex propos. 20. huius, & 256. erit quadratus, & sic de reliquis. Nam numerus 4. ex hypothesi, numerus verò 16. quadratus eo, quòd ex prop. præc. sit quintus ab vnitate.

Probatur quoque de cubis eodem modo. Nam

2. 3. 4. 5. 6 7

si sint 8. 64. 512. 4096. 32768. 262144. quartus ab vnitate 512. Cubus erit ex propos. anteced. & duobus intermissis ex propos. 19. 262144. erit quoq; Cubus. Sic quia primus 8. ex hypothesi est Cubus: Ergo ex prop. 29. numerus quoq; 4096. Cubus erit ob duos proportionales intermedios 64. & 512. Cum autem 512. quartus, & quintus 4096. sint cubi, & ita sit tertius 64. ad quartum 512. vt 512. ad 4096. ex propos. 21. huius, tertius quoque 64. erit Cubus. Cùm verò tertius 64. sit cubus, etiam ob duos proportionales intermedios. Sextus 32768. & sic de reliquis.

TRACTATVS XI.

IN IX. LIBRVM EVCLIDIS

PARS TERTIA.

De Planorum, Solidorumque generatione, & inuentione.

HIc agit Euclides de planis, solidisque numeris inueniendis, etiam Quadratis, & Cubis; & quærit, qui numerus multiplicans alium Cubum, vel Quadratum efficiat, aut etiam numerum solidum aut planum. Reliqua verò de quibus pertractat de numeris paribus, & imparibus, & de perfectis, & imperfectis, non putauimus inter elementa necessariò collocanda. Cùm nomen vix consequantur in alijs partibus mathematicis; substituimus autem Expensionem de æquipotentia numerorum, & inuentione Quadratorum, qui tractatus lib. 10. deseruiunt, & absolutè necessarij sunt.

EXPENSIO I.

De numerorum æquipotentia ad gignendos æquales planos.

SIcut lineas lib. 2. Euclidis ostendimus æquipotentes, & in diuersas partes sectas, posse æquiualere quadrato totius. Sic nunc idem videndum est de numeris. Cũ Euclides de his non agat; sed acutissimè Clauius, verùm cum eius ostensiones visæ nobis sint difficiles, alias attulimus, quæ faciliori pede percurri possint.

THEOR. I. PROPOS. I.

Si numerus aliquis in duas partes secetur Planus numerus totius, partisque multiplicatione consurgens æquatur quadrato, eiusdem partis, partiumque plano.

7

3 4

12 9 21

*SIt numerus 7. qui diuidatur in duas partes in 3. & 4. multipliceturque totus per 3. & fiant 21. deinde ducatur 3. in se, & fiat quadratum 9. in alteramque partem, & fiat 12. *Dico, quòd planus numerus 12. & quadratus 9. æquantur plano 21.*

Probatur. 3. multiplicauit 4. & fecit planum 12. & se, & fecit 9. Ergo ex propos. 17. sept. ita erit 3. ad 4. vt 9. ad 12. Rursus idem 3. multiplicauit se, & fecit 9. multiplicauit quoque 7. & fecit 21. Ergo ex eadem, ita se habet 3. ad 7. vt 9. ad 21. Quia ergo est 3. ad 4. vt 9. ad 12. Ergo componendo erit 3. ad 3. & 4. simul, vt 9. ad 9. & 12. simul; sed eadem proportio est 3. ad 3. & 4. simul, quæ 3. ad 7. & eadem proportio, quæ est 3. ad 7. vt dixi est 9. ad 21. Ergo eadem proportio erit 9. ad 9. & 12. quæ 9. ad 21. quare ex prop. 9. lib. 5. erunt æquales inter se 9. & 12. simul, ac 21. quod eidem 9. eandem dicant proportionem: hæc propos. ostenditur de lineis propos. 4. l. 2.

COROLLARIVM I.

HInc educitur; quod idem dicendum de alia parte. Nam totus 7. multiplicatus per 4. nempe 28. æquabitur quadrato ipsius 4. nempe numero 16. & plano partium hoc est, numero 12. In quo considerandum est, quod partiũ numerus est in vtroque idem, nempe 12. quoniam partes sunt ædem 3. & 4. quæ se inuicem multiplicant.

COROLLARIVM II.

HInc etiam est, quòd si assumatur aliquis alius numerus præter partes, & ipsæ partes; totumque multiplicetur; planus numerus partium, per illum, alium numerum multiplicatus æquabitur totius plano ex eo alio numero consurgente; Sic 3. & 4. partes numeri 7. si multiplicentur per 5. alium numerum, dabunt planos numeros 15. & 20. simul æquales plano 35. ex 5. per 7. genito: Ratio verò est eadem: Nam ita est 15. ad 20. vt 3. ad 4. ob numerum 5. multiplicantem & 15. ad 35. vt 3. ad 7. ob eundem 5. multiplicantem ex 17. septimi. Quaderè, si est 15. ad 20. vt 3. ad 4. erit etiam componendo 15. ad 15., & 20. simul, vt 3. ad 3. & 4. simul; sed 3. ad 3. & 4 simul est eadem, quam 3. ad 7. & 3. ad 7. eadem, quæ 15. ad 35. vt dixi. Ergo proportio 15. ad 15. & 20. simul erit eadem, quæ 15. ad 35. Ideoque ex prop. 9. lib. 5. æquales erunt numeri 15. & 20. simul, ac 35. cum ad eosdem, 15. numerus eandem dicat proportionem. Hoc etiam ostenditur de lineis lib. 2. propos. 4.

COROLLARIVM III.

ELlicito. Quod etiam si numerus in plures partes, quam 2. secetur, idem tamen erit, vt si 7. secetur in 3. 2. & 2. Nam totus numerus per aliquam partem V. g. 3. vel aliquem alium numerum multiplicatus, æquabitur singulis partibus per eundem numerum multiplicatis; & simul sumptis eadem ratione, sic si 3. 2. & 2. multiplicentur per 3. hi facient 9. 6. & 6. qui æquabunt 21. numerum consurgentem ex 7. in 3. ducto.

THEOR. II. PROPOS. II.

Si numerus in duas partes diuidatur, plani duo sub partibus, & toto comprehensi æquantur quadrato totius.

SIt numerus 7. diuisus in duas partes 3. & 4. & ex toto 7. & 3. fiat planus 21. & ex 7. & 4. planus 28. Dico *hæc duo plana æquari totius quadrato* 49.

7

3 7 4

21 49 28

PRobatur. Nam quia 7. multiplicat 7. & 3. & facit 49. & 21. erit 3. ad 7. vt 21. ad 49. Sic quia multiplicat se, & 4. erit 4. ad 7. vt 28. ad 49. ex propos. 17. l. 9. & cumque 7. multiplicet 3. & 4. erit eadem proportio 3. ad 4. quæ 21. ad 28. Ergo componendo erit 3. ad 3. & 4. simul, quæ 21. ad 21. & 28. simul. Sed proportio 3. ad 3. & 4. simul est eadem; quæ 3. ad 7. & 3. ad 7. quæ 21. ad 49. ergo ita erit 21. ad 21. & 28. simul, vt 21. ad 49. quare ex propos. 9. l. 5. erunt æquales 21. & 28. simul ipsi 49. Id ostend. propos. 3. l. 2. de lineis.

THEOR. III. PROPOS. III.

Duo quadrata, cum duobus numeris planis, ex lateribus eorum effecta, æquantur quadrato, ex duobus lateribus tanquam vno assumpta.

SIt quadratum 16. & quadratum 9. quorum latera sint 4. & 3. & duo plani ex eorum lateribus 4. & 3. effecti, qui erunt 12. & 12.

3 4

21 7 28

9 12 12 16

49

D'co, *quod hæc omnia simul æquantur quadrato totius numeri* 3. & 4. vt vno latere assumpti nempe 7. cuius quadratum est 49.

Probatur. Duo plani ex toto 7. & partibus 3. & 4. producti nempe 21. & 28. ex præced. æquantur quadrato totius 7. Sed ex 1. huius planus numerus sub toto comprehensus, & parte, vt 21. & 28. æquatur quadrato ex parte illa comprehendẽte, & plano numero à partibus comprehenso, & ideo planũ 21. æquatur quadrato 9. ex 3 & plano numero 12. ex 3. & 4. multiplicatione effecto, sicut planus 28. æquatur quadrato 16. ex 4. & plano eidẽ 12. Ergo quadratum 16. & 9. cum planis numeris 12. & 12. ex lateribus eorum 3. & 4 æquabunt quadratum ex ijs lateribus, vt vno hoc est 7. quod est 49. cùm æquent planos 21. & 28 æquantes simul quadratum totius 7. Ostenditur de lineis propos. 6.

THEOR. IV. PROP. IV.

Si numerus bifariam sectus sit, & quidam numerus ei additus. Quadratum dimidij cum numero adiecto æquat planum numerum ex toto, & adiecto per adiectum multiplicato, & quadratum dimidij.

8

4 4 3

SIt numerus 8. & diuidatur bifariam, & sit 4. addaturque 3 & sint 7. & 3. cum 8 toto sint 11. ex quo 11. toto cũ addito 3. fiat planus numerus 33. Inde ex dimidio 4. fiat quadratum 16. *Dico, quod planus numerus* 33. & *quadratum* 16. *æquant* 49. *quadratum lateris* 7. *dimidij* 4. *cum adiecto* 3. Quod, & ostenditur propos. 8. de lineis l. 2.

Probatur. Nam planus ex 11. & 3. æquat ex Coroll. 3. propos. 1. duos planos sub medietate duplici 4. & 4. & 3. adiectâ comprehensos; nempe 12. & 12. & quadratum ex 3. nempe 9. Si ergo addamus etiam quadratum ex 4. hoc est 16. habebimus duos planos numeros ex lateribus quadratorum, & duo quadrata. Sed duo quadrata, & duo plani ex lateribus quadratorum æquant quadratum ex lateribus pro vno latere sumptis ex 3. prop.

 pos.

pof. huius. Quare æquabunt quadratum 49. ex dimidio cum adiecto numero: Siquidem duo plani ex lateribus, non ex toto numero, & vnico 8. sed ex dimidio, eius facti sunt, vt duo esse possint, & ideo hi plani obtinent latera ex dimidio numero 4. pro latere, & pro alio ex adiecto 3. constituta, quæ simul addita vt sint 7. faciunt quadratum 49. cui duo quadrata 16. & 9. & duo plani ex ipsorum lateribus 12. & 12. æquantur ex propos. 3. huius.

THEOR. V. PROPOS. V.

Si numerus secetur in partes æquales, & inæquales numerus planus sub partibus inæqualibus contentus vna cum quadrato, quo maior pars dimidiam superat, æquatur quadrato, qui ex dimidio enascitur.

Sit numerus 10 & secetur in partes æquales in 5. & 5. & inæquales in 7. & 3. & numerus, quo 7. maior pars superat dimidiam 5. sit 2. *Dico, quod planus numerus* 21. *ex* 3 *&* 7. *productus* vnà cum quadrato ex 2. hoc est 4. æquat quadratum 25. ex medietate numeri 10. hoc est 5.

Probatur. Quia ex 1. huius Coroll. 3. planus numerus 21. ex 3. & 7. inæqualibus partibus, æquat duos planos numeros, ex 2. & 2. per 3. genitos, nempe 6. & 6. & quadratum 9. ex 3. prodictum, si ergo addamus quadratum 4. ex 2. erunt duo quadrata 4. & 9. cum duobus planis 6. & 6. æqualia quadrato 25. ex eorum lateribus consurgente, et vno sumpto ex prop. 3. quæ sunt 2. & 3. & faciunt 5. Quod verò planus numerus 21. ex 3. & 7. genitus duos planos 6. & 6. cum quadrato 9. ex 3. exequet; patet ex Coroll. 3. propos. 1. nam 7. in tot partes diuidi potest, hoc est in partem, quâ medietatem superat 2. & in partem, quâ medietas superat minorem 2. & in ipsam minorem 3. siquidem tanto deficit minor pars à medietate, quanto maior super medietatem augescit, & 7. maior est medietate numero 2. sicut 3. est minor medietate eodem numero 2. Ostenditur prop. 7. lib. 2. de lineis.

EXPENSIO II.

De Planorum, Solidorum, Quadratorum, & Cuborum generatione.

Multiplicatio est illa, quæ generat numeros planos, vel solidos. Vnde hic quæritur; quinam numeri inuicem multiplicati, Quadratos, & Cubos, seu Planos, Solidosque numeros efficere possint.

THEOR. I. PROPOS. VI.

Si duo plani similes numeri multiplicantes se mutuò, fecerint quendam numerus productus Quadratus erit.

Sint duo plani similes 6. & 24. qui se mutuò multiplicent, & generent 144. *Dico hunc numerum esse quadratum.* Quod, vt ostendatur, multiplicandus est numerus 6. in se, & faciet 36. & sic 6. numerus multiplicabit se, & numerum 24. vnde ex propos. 17. ita erunt multiplicantes 6. ad 24. vt geniti 36. ad 144. sed ex propos. 11. lib. 8. inter planos similes vnus medius proportionalis cadit numerus V. g. inter 6. & 24. cadit 12. Ergo etiam ex propos. 8. lib. 8. cadet inter genitos, & eâdem proportione gaudentes 36. & 144. Cadat igitur, & sit 72. Cum igitur 36. 72. & 144. sint tres continuè proportionales, primusque 36. sit quadratus ex propos. 20. lib. 8. & secundus 144. quadratus erit, quod oportebat ostendere.

THEOR. II. PROPOS. VII.

Si duo numeri se se mutuò multiplicantes faciant quadratum, similes plani erunt.

Sint 6. & 24. qui faciant se inuicem multiplicantes quadratum 144. Dico, *quod isti numeri 6. & 24. similes plani erunt.* Nam primus 6. multiplicet se, & faciat 36. Erunt duo numeri quadrati 144. & 36. inter quos interueniet aliquis proportionalis numerus medius ex propos. 18. l. 8. Et quia 6. multiplicando se, & 24. facit 36. & 144. erunt in eadem proportione geniti, & generantes 6. & 24. Vnde etiam inter istos cadet ex propos. 8. lib. 8. aliquis proportionalis numerus 12. Quapropter ex propos. 13. erunt similes plani 6. & 24.

COROLLARIVM I.

Elicitur. Quod si duo numeri quadrati etiam æquales faciant quendam, iste factus erit quadratus. Quòd duo quadrati facientes sint plani similes, eo quia quadrati ponantur, vt diximus in ostensione propos. 18. l. 8.

COROLLARIVM II.

Elicitur quoque quod, si quis numerus quadratus alium multiplicans faciat quadratum; iste alius multiplicatus quadratus erit. Erunt enim ex hac 7. propos. plani similes. Vnde inter eos medius proportionalis cadet aliquis numerus; quà ex re ex propos 20. lib. 8. si primus sit quadratus, & secundus quadratus erit.

THEOR. III. PROP. VIII.

Si compositus numerus aliquem multiplicans creet aliquem alium, productus solidus erit.

Numerus compositus 6. multiplicans quemlibet alium numerum 4. faciet alium aliquem puta 24. *Dico genitum 24. esse Solidum.*

Probatur numerus 6. dicitur compositus; itaq; metietur eum aliquis numerus præter vnitatem. Sit ergo 2. qui metiatur 6. per 3. idest ter replicatus. Proptereaque 2. multiplicans 3. facit 6. & 6. multiplicans 4. procreat 24. cum ergo 24. consurgat à multiplicatione trium numerorum 2. 3. 4. ex definitione 4. lib. 8. factus 24. solidus numerus erit.

THEOR.

THEOR. IV. PROP. IX.

Si Cubus numerus se ipsum multiplicans faciat aliquem, productus Cubus erit.

NVmerus Cubus 64. se multiplicando procreet aliquem nempe 4096. Dico *hunc quoque esse Cubum*. Repertum sit latus Cubi 64. quod est 4. & ex hoc 4. in se fiat 16. & deinde 16. multiplicetur per 4. erunt 64.

Progress. 1. Idem 4. se multiplicando fecit 16. & multiplicando 16. generauit 64. Quapropter ex prop. 17. sept. eadem proportio erit inter 4. & 16. quæ est inter 16. & 64. Sed vt 4. metitur 16. per 4. & 16. 64. ita vnitas metitur 4. per 4. idest vnitas quater accepta facit 4. sicut 4. quater acceptus componit numerum 16. & 16. numerum 64. Quamobrem eadem pars erit vnitas numeri 4. quæ 4. numeri 16. & quæ 16. numeri 64. Vnde inter vnitatem, & numerum 64. duo medij proportionales cadunt numeri 4. & 16.

Progress. 2. Considerandum verò est, esse ita vnitatem ad 64. vt 64. ad 4096. Quoniã 64. multiplicando se, idest sexaginta quatuor vicibus acceptus generat 4096. sicut vnitas 64. vicibus accepta facit 64. Quare eadem proportio erit inter vnitatem, & 64. quæ est inter 64. & 4096.

Sed ex primo prog. inter vnitatem, & 64. duo medij proportionales numeri intercipiuntur; Ergo quoque ex propos. 8. lib. oct. cadent inter 64. & 4096. etiam duo proportionales numeri intermedij. Quaderé ex prop. 21. l. oct. cum 64. sit Cubus, talis quoque erit numerus 4096.

THEOR. V. PROPOS. X.

Si Cubus numerus Cubum multiplicans faciat aliquem, productus Cubus erit.

SIt Cubus 8. qui multiplicet Cubum 27. & faciat 216. Dico *hunc quoque esse Cubum*.

Probatur. Nam si 8. multiplicet se productus 64. cubus erit ex præced. & quia 8. multiplicauit duos numeros 8. & 27. & generauit 64. & 216. eadem proportio erit ex 17. l. sept. inter genitos 64. & 216. quæ est inter generantes 8. & 27. sed inter istos duo medij proportionales cadunt numeri, cùm sint cubi ex propos. 19. l. oct. Ergo ex propos. 8. inter 64. & 216. Quapropter ex prop. 21. l. oct. cum primus 64. ex præced. sit Cubus etiam secundus 216. Cubus erit.

THEOR. VI. PROP. XI.

Si Cubus numerum aliquem multiplicans faciat Cubum, ille multiplicatus Cubus erit.

CVbus numerus 27. multiplicans aliquem v.g. 8. faciat Cubum 216. Dico 8. *quoque Cubum esse*.

Probatur eodem argumenti methodo: Nam 27. multiplicet se, & faciat 729. Itaque, quia 27. multiplicauit 27. & 8. generantes, & protulit genitos 729. & 216. eadem proportio erit ex propos. 17. sept. inter 27. & 8. quæ reperitur inter 729. & 216. Verùm 729. & 216. sunt Cubi; hic quidem ex hypothesi, ille autem ex propos. 9. & hac de causa ex propos. 19. lib. oct. inter eos duo medij proportionales interponuntur. Ergo etiam ex 8. lib. 8. inter 27. & 8. Vnde ex propos. 21. l. 8. cum primus 27. ex hypothesi sit cubus, etiam secundus 8. cubus erit.

THEOR. VII. PROPOS. XII.

Si numerus quispiam se multiplicet, & genitus sit Cubus, generans quoque Cubus erit.

SI 64. genitus ex multiplicatione 8. in se Cubus est. Dico, *& numerum 8. qui fuit in se multiplicatus Cubum esse*.

Multiplicetur rursus 64. per 8. & fiant 512. qui cubus erit; quia est productus ex multiplicatione numeri 8. in se, rursus numeri 8. in productum 64. ex sui multiplicatione exortum. Qua ex re, cùm numerus 64. numerum aliquem multiplicans generet Cubum, multiplicatus 8. ex præc. propos. Cubus erit.

EXPENSIO III.

De numeris quadratis inueniendis.

AD libri 9. demonstrandas propositiones ista omninò Expensio est necessaria, cùm enim ibi agatur de inuentione irrationalium multarum, inter eas quædam sunt, quarum inuentio in inuentione numerorum, qui cum alijs numeris, vel quadratum efficiant, vel etiam non efficiant, prout res postulauerit, consistit.

PROBL. I. PROPOS. XIII.

Duos numeros quadratos inuenire, ita vt compositus ex ipsis quadratus quoque sit.

EX propos. 17. lib. 8. reperiantur duo numeri plani similes, quorum vterque, vel par sit, vel impar V. g. 10. & 40. detrahaturque minor à maiore, & reliquus par erit, nam etiam detracto impare, ab impari residuus numerus par reperitur; quia auferendo impar aufertur differentia vnitatis, quâ differebat maior à pari, & sic relinquitur par. Quare cum residuum sit par f. 30. diuidatur per medium, vt fit 15. Si ergo 40. planus numerus maior multiplicet minorem planum 10. fiet numerus quadratus 400. ex 6. propos. h. Deinde multiplicetur 15. in se, medietas residui, & fiet quadratus 225. Dico igitur, quod si duo hæc quadrata addantur simul, *Quod fiet numerus quadratus, qualis est 625.*

40. ablatus 10. Resid. 30. med. 15.
10. in 40. dat 400. 15. in 15. dat 225.
Additi 225. & 400. Sunt 625. quad.
cuius radix 25. idest 10. & 15.

Prob. ex propos. 4. huius. Nam ibi ostendimus, quod si aliquis numerus dimidius sit, cui addatur aliquis numerus, & summa in se multiplicata faciat quadratum, quod hoc erit æquale quaquadrato ex ipsius dimidio, sine adiectione sumpto, & plano numero consurgenti ex summa

THEOR. II. PROPOS. XI. Eucl. 13.

Duorum similium planorum numerorum vnus medius proportionalis est numerus, & planus ad planum duplicatam habet lateris homologi ad latus homologum rationem.

Sint duo plani numeri similes, silicet habentes latera proportionalia aliqua. V. g. 6. & 24. Nam latera aliqua numeri 6. quę sunt 2.& 3. sunt proportionalia aliquibus lateribus numeri 24. nempe 4. & 6. licet, & alij sint numeri, qui ex mutua multiplicatione producunt 6.& 24.qui proportionem non dicunt, vt essent 2. & 12. aut 3. & 8. latera quoque numeri 24.

Plani similes 6. 24. Medius 12.
Latera 2. 3. 4. 6.

Latera itaque numeri 6. sunt 2. & 3. & numeri 24. sunt 4. & 6. & eadem proportione gaudet 2. ad 3. vt 4. ad 6.

Dicit, quòd inter 6.&24. cadit medius proportionalis numerus aliquis. Nam multiplicentur terminus 3. primæ combinationis extremo, cum 4. alterius proportionis, producetur 12. *Dico hunc esse proportionalem medium.*

Probatur. Progressus 1. Quoniam ita refertur 2. ad 3. vt 4. ad 6. permutando ita quoque erit 2. ad 4. vt 3. ad 6.

Progressus 2. Quoniam 3. multiplicans 2. fecit 6. & 4. fecit 12. erit eadem proportio 2. ad 4. quam 6. ad 12. & sic quia 4. multiplicans 3. fecit 12. & multiplicando 6. fecit 24. erit eadem proportio 3. ad 6. quæ 12. ad 24. Quare proportionales sunt numeri 6. 12. & 24. Ergo 12. est medius proportionalis.

Probatur secundo: Quòd habeat 6. ad 24. duplicatam lateris homologi ad latus homologum rationem. Latera homologa illa sunt, quæ vtraque in eadem quantitate sunt, fundamenta proportionis, vel termini; ita erunt in hac 2. & 4. fundamenta, & 3. & 6. ambo termini; patet autem ex prima probatione, quod ita est 6. ad 12. vt 2. ad 4. & 12. ad 24. vt 3. ad 6. Quare cum 6. ad 24. eam proportionem obtineat, quæ est 6. ad 12. & 12. ad 24. est duplicata cum gemina vice repetatur eadem proportio, & est etiam ea, quæ laterum homologorum 2. ad 4. vt 3. ad 6. Possent tamen etiam alio pacto disponi latera, vt in præc.

THEOR. III. PROPOS. XII. Euc. 19.

Duorum similium solidorum numerorum duo medij proportionales sunt numeri; & solidus ad solidum triplicatam habet rationem, quam habet latus homologum ad aliud latus homologum.

Solidi 48. & 162.
Latera 2. 4. 6. & 3. 6. 9.

Sint duo numeri solidi similes 48. & 162. & primi latera sint 2. 4. & 6. Secundi verò 3. 6. 9. sunt autem similes; quod latus 2. ita referatur ad 4. primi, vt latus secundi 3. refertur ad 6. & ita latus 4. primi referatur ad 6. vt latus 6. secundi refertur ad 9. *Dico, quod inter hos numeros solidos 48. & 162. duo medij proportionales cadunt numeri.*

Notandum verò est in primis; quod quia ponitur 2. ad 4. vt 3. ad 6. erit etiam permutando 2. ad 3. vt 4. ad 6. & quia ponitur 4. ad 6. latus primi solidi, vt 6. ad 9. latus secundi, erit etiam permutando 4. ad 6. vt 6. ad 9. quare erit eadem proportio, vel 2. ad 3. vel 4. ad 6. vel 6. ad 9. nimirum latera vnius solidi ad latera alterius solidi collata, cùm conueniant in intermedia proportione 4. ad 6.

Nunc, vt probetur propos. disponãtur latera in ordinem, vt placet: dummodo proportiones similes in loco correspondente sint, vt vides.

8			48
2	4	6	72
12			
3	6	9	108
18			162

Deinde multiplicandi sunt 2. cum 4. latera primi fient 8. sicut 3. cum 6. latera secundi, & fient 18. plani numeri. Deinde terminus primi, vel consequens 4. muliplicandus est cum fundamento relationis, vel cum antecedente secundi, qui est 3. & fient 12. Tandem 6. primi, & 9. Secundi hunc 12. multiplicent, & facient 72. & 108.

Probatur itaque primo: Quod hi numeri 72. & 108. sint duo medij proportionales inter 48. & 162.

Progress. 1. Quoniam itaque 4. multiplicauit 2. & 3. sequitur ex propos. 17. septimi; quòd eadem proportio sit inter genitos 8. & 12. quæ est inter multiplicatos 2. & 3.

Progress. 2. Iterum, quia 3. multiplicauit 4. & 6. sequitur ex eadem propos. quòd sint 4. ad 6. multiplicati sicut 12. & 18. geniti. Quare 8. 12. & 18. sunt continuè proportionales.

Progress. 3. Solidus quoque numerus 48. resultauit ex multiplicatione 2 in 4. ex qua prodijt numerus 8. & rursus ex multiplicatione 6. in 8. Vnde factus est numerus ipse solidus 48. Sic dicendum est de numero solido 162.

Progress. 4. Numerus itaque 6. latus primi solidi multiplicans ex effectione 12. fecit 72. Itaque ex cit. propos. 17. ita erit 48. ad 72. geniti, quæ est 8. ad 12. quæ est ex 1. progressu 2. & 3.

Progress. 5. Sic quia numerus 9. latus tertium secundi solidi multiplicauit ex 3. progr. 18. & fecit 162. & ex effectione multiplicans 12. fecit 108. fit vt eadem proportio sit inter multiplicatos 12. & 18. quæ inter genitos 108. & 162. quæ vero est inter 12. & 18. est illa, quę est inter 4. & 6. ex 2. progressu.

Progressu 6. Tandem, quia latus tertium 6. primi solidi 6. & 9. latus tertium secundi solidi multiplicando 12. fecerunt 72. & 108. Sequitur ex cit. propos. 17. quò eadem proportio sit inter 6. & 9. quæ est inter 72. & 108. Quamobrem

Concluditur: Quod ita sit in proportione solidus primus 48. ad 72. quæ est 2. latus prioris solidi ad 3. latus posterioris ex 4. propgressu. Et quod 72. ad 108. sit in eandem proportione, quam habet 6. latus tertium primi solidi ad 9. latus tertium secundi solidi ex 6. Progr. Tãdem quod 108. sit ad 162. solidum posterius, quæ est inter 4. latus secundum primi solidi ad 6. latus secundum posterioris solidi ex Progr. 5. quare continuam proportionem habebunt 48. ad 72. & hic ad 108. & iste ad 162. quam habet 2. ad 3. & 6. ad 9. & 4. ad 6. nimirum laterum vnius ad latera alterius,

quæ

quæ vt prænotauimus est eadem proportio.

Probatur secundò. Quod sit proportio triplicata inter solidos 42. & 162. nam vt probatum est, eadem proportio 2. ad 3. vel 4. ad 6. vel 6. ad 9. repetita in quatuor numeris 48. 72. 108. & 162. triplicatur, & ita est 48. ad 72. vt 72. ad 108. & 108. ad 162.

PROBL. III. PROPOS. XIII. Eu. 20.

Si inter duos numeros cadat vnus medius proportionalis numerus, similes plani erunt illi numeri.

Cadat inter 18. & 32. numerus medius proportionalis 24. *Dico* 18. *&* 32. *esse similes planos numeros*.

Prog. 1. Sumātur duo numeri minimi in ratione, qua refertur 18. ad 24. aut quę est eadem 24. ad 32. ex propos. 35. & sint 3. & 4. ex propos. 29. sept.

18 24 32

3 4 6 8

3. & 4. metientur 18. & 24. æquè, idest per æqualem numerum; metiantur per 6: ideoque 3. & 6. erunt latera numeri 18.

Progress. 2. Sic quoq; 3. 4. metientur ex eadem propos. numeros 24. & 32. æquè, idest per ęqualem numerum 8. ideoque 4. & 8. erunt latera numeri 32.

Obseruandum est autem quod idem numerus 4. in primo progr. multiplicans 6. fecit 24. & ex 2 pr. idē 4. multiplicans 8. fecit 32. Vnde 6. & 8. habebunt eandem rationem, quam 24. ad 32. quę est 3. ad 4. ex 17. septimi. Poterimus itaque vti permutatione. Cùmque sit 3. ad 4. vt 6. ad 8. etiam erit 3. ad 6. vt 4. ad 8. Iam ergo patet numeros 18. & 32 esse similes planos. Planos quidem; quia habent latera 3. 4. & 6. 8. similes verò, quia latera, vt requirit def. 1. h. planorum numerorum, sunt proportionalia, & est 3. ad 6. latera plani 18. vt 4. ad 8. plani 32.

THEOR. XI. PROPOS. XIV. Euc. 21.

Si inter duos numeros cadant duo medij proportionales numeri; similes solidi sunt illi numeri.

8 12 18 27

4 6 9

22 A 2 33 B 3

Cadant inter 8 & 27. duo numeri proportionales 12. & 18. *Dico* 8. *&* 27. *solidos esse*. Sumantur tres numeri minimi in ratione 8. ad 12. vel quæ eædem sunt 12. ad 18. vel 18. ad 27. ex propos. 35. septimi, & sint 4. 6. 9.

Progress. 1. Quia itaque inter 4. 9. assumptos numeros minimos cadit vnus medius proportionalis 6. erunt 4. & 9. assumpti minimi in ea proportione ex præced. prop. plani. Lateraque eorum erunt scilicet 2. & 2. latera numeri 4. & 3. 3. latera numeri 9.

Progress. 2. Quia 4 6. 9. assumpti minimi sunt in ea proportione metientur ex propos. 39. numeros primò propositos 8. 12. 18. 27. qui habent eandem rationem cum ipsis, & numeri quibus metiuntur erunt A 2. & B 3. Itaque 4. & 6. mensurabunt 8. & 12. per A 2. eos multiplicando & 6. cum 9. mensurabunt 18. & 27. per B 3. eos multiplicando.

Progress. 3. Sed 2. 2. latera numeri 4. plani se se multiplicando faciunt 4. rursus 4. per A 2. ex secundo progressu multiplicando 4. facit 8. cùm, vt ibi 4. metiatur 8. multiplicatus per A 2. Itaque 8. numerus solidus erit, cuius latera erunt 22. & A 2. Sic & 27. Nam 9. per B 3. multiplicatus ex secundo progress. producit 27. At ipse 9. numerus planus producitur ex multiplicatione suorum laterum 3. & 3. Ergo 27. erit, solidus ex definitione 2. h. cuius latera erunt 3. 3. & B 3.

Probatur verò; Quod sint solidi similes. Nam illi sunt solidi similes, quorum vnius latera tria tribus alterius sunt proportionalia.

Sed talia sunt 2 22. respectu laterum 3. 3. 3. Ergo solidi similes erunt.

Progress. 4. Quod vero talia sint. Probatur. Nam ex 2. progr. A 2. multiplicans 6. produxit 12. & B 3. multiplicans 6. item produxit 18. Ergo erit 2. ad 3. vt 12. ad 18.

Progress. 5. 12. verò, & 18. sunt in eadem ratione, quæ 4. & 6. quia multiplicati per 3. fecerunt ipsos 12. & 18. & ideo, vt A 2. ad B 3.

Progress. 6. Quia verò assumpti minimi sunt extremi eorum 4. & 9. erunt quadrati ex Coroll. 1. 2. propos. huius, & ideo plani similes, & hinc ex propos. 9. cadet inter illos medius proportionalis 6. in proportione laterum homologorum.

Propterea latus 2. primi solidi 4. & aliud latus 2. eiusdem dicent eandem rationem ad 3. & 3. latera secundi solidi 9. vt 4. ad 6. quæ eadem ex 5. progr. quæ 2. A ad B 3. numeros mensurantes, & latera tertia solidorum. Quamobrem si est 2. ad 3. vt 2. ad 3. vt 2. A ad B 3. poterimus vti *Permutatione*, & dicere, quod erit latus 2. primi solidi ad 2. vt latus 3. ad latus 3. secundi, & ita latus 2. ad A 2. tertium latus eiusdem primi solidi, vt latus 3. ad latus tertium B 3. secundi solidi; quapropter similes erunt isti solidi.

Non potuimus autem assumere minimos 4. 6. 9. in proportionibus numerorū 8. 12. 18. 27. nisi extremi essent quadrati; quia trium minimorum numerorum in eadem proportione continuantium extrema quadrata sunt ex Coroll. 1. propos. 2. huius.

THEOR. XII. PROPOS. XV.

Similes plani numeri inter se rationem habent, quam quadratus numerus aliquis ad aliquem quadratum numerum.

Dentur duo plani similes 8. & 18. Dico, *quod sicut est* 8. *ad* 18. *ita sit aliquis quadratus ad aliquem numerum quadratum*.

Probatur. Nam 8. & 18. sunt plani similes ex hypothesi. Quare mediabit inter eos aliquis numerus proportionalis. Iste mediet, & sit 12. Reperiaturque minimi in eadem proportione, & sint 4. 6. 9. Horum extremi ex Coroll. 1. prop. 2. h. quadrati erunt. Quamobrem erit, vt quadratus 4 ad quadratum 9. ita 8. ad 18.

THEOR.

THEOR. VII. PROPOS. XVI. Eu. 27.

Similes solidi inter se rationem habent, quam cubus numerus ad cubum numerum.

PRobatur. Nam inter 16. & 54. vtpote inter solidos numeros similes interponantur duo medij proportionales ex propos. 12. huius. Eruntq; V. g. 24. & 36. Sumptis ergo quatuor numeris minimis in ea proportione, quę est 16. ad 24. item 24. ad 36. & tandem 36. ad 54. qui sint 8. 12. 18. 27. vt ex Coroll. 2. propos. 2. huius habemus, 8. & 27. Cubi erunt. Igitur 16. ad 54. solidi numeri habebunt eandem rationem, quam Cubus 8. ad Cubum 27.

COROLLARIVM I.

COlligitur ex prædictis omnibus. Nullos numeros esse planos, vel solidos similes, inter quos medius proportionalis cadere nequeat. Quare nulli numeri primi V. g. 11. & 13. possunt esse solidi similes; Quia latera non obtinent, præter vnitatem, & se ipsum (quia V. g. ex 1. & 11. fit 11 quæ latus non sunt nisi impropriè, nec inter eos medius proportionalis cadere potest. Sic nec numeri inter se primi; qui quadrati non sint, aut cubi similes sunt. Quòd, si dicantur esse planos similes, cadet inter eos medius proportionalis, vel vnus, vel duo. Quare cum sint primi inuicem, & sint tres, vel quatuor continua proportione hi erunt: Quadrati, vel Cubi ex Coroll. 1. vel 2. propos. 2. huius, quod est contra positionem.

COROLLARIVM II.

SIc nec numeros, quorum minor primus sit, qui ab vnitate solùm mensuretur, vt 3. 5. vel 7. non posse esse planos, vel solidos similes, nisi minor mensuret maiorem; Nam, si non mensuret essent primi inuicem, & ideo non possent esse plani, vel solidi similes ex præced. Coroll.

COROLLARIVM III.

SIc, neque plani similes possunt esse ij, quorum vnus Quadratus, vel Cubus sit alter nequaquam, vt 4. & 5. vel 16. & 26. aut 8. & 11. Nam, si essent plani similes haberent proportionem, quam quadratus, vel cubus numerus ad Quadratum, vel Cubum numerum. ex propos. 11. quod est contra hypothesim.

COROLLARIVM IV.

VNde facilis est inuentio numerorum non similium. Nam omnes numeri primi in se vt 3. 5. 7. 11. Sic numeri primi inuicem 2. & 3. Sic, & numeri, quorum vnus primus est, & alium non metitur, vt 5. & 8. Sic, & numeri quorum vnus Cubus sit, vel Quadratus, alter verò nequaquã, non possunt esse, aut plani, aut solidi similes.

PROBL. I. PROPOS. XVII.

Duos numeros planos similes inuenire.

ACcipiantur quatuor numeri proportionales, & sit 2. ad 5. vt 8. ad 20. seque multiplicent fundamenta cum terminis proportionum: 2. cum 5. & procreent 10. & 20. cum 8. & producant 80. *Dico hos esse planos similes.*

Probatur, quia illi sunt similes, qui habent latera proportionalia ex defin. talia verò sunt ex constructione 10. & 80.

EXPENSIO V.

De Quadratis, & Cubis.

NVmeri Cubici, & Quadrati quædam species sunt numerorum similium planorum, & solidorum. Vnde visis eorum genericis proprietatibus, nunc etiam species ipsorum considerandæ.

THOR. I. PROPOS. XVIII. Eucl. 11.

Duorum Quadratorum numerorum vnus proportionalis numerus medius est, & Quadratus ad Quadratum duplicatam habet lateris ad latus rationem.

SInt duo Quadrata 9. & 49. quorum latera sint 3. & 7. Dico primo *inter eos cadere aliquem numerum medium proportionalem.*

Probatur. Nam duo Quadrata sunt duo solidi similes; siquidem eorum latera 3. 3. & 7. 7. sunt æqualia: Vnde eadẽ proportio est 3. ad 3. quę alterius laterũ 7. ad aliud latus 7. Ergo ex prop. 5. inter eos aliquis medius proportionalis cadit. *Quadratum quoque duplicatam habet lateris ad latus rationem.* Nam ea proportio, quæ inter 3. & 7. gemina vice in vno quoque quadrato repetitur, ob multiplicationem laterum in se.

THEOR. II. PROPOS. XIX. Eu. 28.

Duorum Cuborum numerorum duo medij proportionales sunt numeri, & Cubus ad Cubum duplicatam habet lateris ad latus rationem.

PRobatur. Nam duo Cubi sunt duo solidi similes ob laterum suorum æqualitatem. Sic Cubi 27. latera 3. 3. 3. ad Cubi 64. latera 4. 4. 4. eadem proportione referuntur, & est primus 3. ad secundum 3. & primus 4. ad secundum 4. & secundus 3. ad tertium 3. vt 4 ad 4. sed inter solidos similes ex propos. 6. duo medij proportionales numeri cadunt. Ergo etiam inter Cubos.

Solidi quoque habent duplicatam lateris ad latus rationem. Quare etiam Cubi eo, quòd sint solidi similes. Sic 27. & 64. habent duos medios proportionales 36 & 48. & latus 3. cubi 27. prius in se, deinde in productũ 9. ductus facit 27. Sicut, & latus 4. cubi 64. priùs in se, deinde in productum 16. ductus facit 64. Vnde proportio, quæ est inter 27. & 64. est illa ipsa, quæ est inter 3. & 4. sed triplici vice repetita.

THEOR.

THEOR. III. PROPOS. XX. Eucl. 22.

Si tres numeri deinceps sint proportionales; primus autem sit quadratus, & tertius quadratus erit.

Sint 9.36.144. continuè proportionales. *Dico quod si 9. est quadratus, & tertium 144. esse quadratum.*

Quia cum inter 9. & 144. cadat vnus medius proportionalis erunt plani similes ex propos. 11. huius, & ita ex definitione proportionalia habebunt latera: Quare ita erit 3. ad 3. vt latus alius 144. ad sui ipsius alterum latus: sed 3. & 3. sunt æquales: Ergo, & latera numeri alius 144. erunt æqualia 12. & 12., quare quadratus erit.

THEOR. IV. PROPOS. XXI. Eu. 23.

Si quatuor numeri deinceps sint proportionales, & primus sit Cubus; quartus etiam Cubus erit.

Sint quatuor numeri 27. 45. 75. & 125. continuè proportionales. Dico, *quod si primus sit Cubus, & vltimum quoque cubum esse.*

Probatur. Nam erunt similes solidi primus 27. & quartus 125. eo quòd inter eos duo medij proportionales numeri intercipiantur ex prop. 12. Quare ex definitione ita erit 3. ad 3. & hic ad 3. vt latus primum ad latus secundum, & hoc ad latus tertium numeri 125. Sed 33. & 3. sunt numeri æquales. Vnde latera numeri 125. erunt inuicem æqualiter æqualia, quare cubus erit.

THEOR. V. PROPOS. XXII. Euc. 24.

Si duo numeri inter se rationem habeant, quam quadratus ad quadratum, si primus quadratus sit, etiam secundus talis erit.

Si sit 36. quadratum ad 64. numerum; vt quadratum 9. ad quadratum 16. *Dico etiam numerum 64. esse quadratum.*

Probatur. Quia inter quadratos 9. & 16. cadit vnus proportionalis numerus V.g. 12. ex propos. 11. huius, sed ita est quadratus 36. ad numerum 64. Ergo ex propos. 18. etiam inter 36. & 64. cadet vnus medius proportionalis. Videlicet 48. Ergo ex propos. [2]o. huius. Si 36. est numerus quadratus, talis erit, & 64.

THEOR. VI. PROPOS. XXIII. Eu. 25.

Si duo numeri inter se rationem habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum, si primus sit cubus, talis quoque erit secundus.

Sint 64. & 216. numeri, qui habeant rationem eam inter se, quam 8. obtinet comparatus ad numerum 27. ambo cubos. *Dico, si 64. est Cubus, quòd talis quoque erit 216.*

Probatur, quia inter 8. & 27. vtpote inter numeros Cubos ex propos. 19. huius duo proportionales cadunt numeri: Quapropter ex propos. 8. cadent quoque tales numeri duo proportionales inter 64. & 216. Quare ex propos. 21. cum 64. Cubus ponatur, talis quoque erit numerus 216.

THEOR. VII. PROPOS. XXIV.

Si ab vnitate quotcumque numeri deinceps sint proportionales. Tertius ab vnitate quadratus erit, & vno intermissis quilibet sequens. Quartus autem Cubus, & duobus intermissis quilibet alius. Septimus autem Cubus simul, & quadratus, & quinque intermissis omnes alij.

Sint ab vnitate continuè proportionales.

A		B		C		D			E
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512

1024. 2048. 4096. F

Primò *Dico tertium 4. esse quadratum, & intermisso vno, sextum 16. sse quoque quadratum, & intermisso vno, octauum 64. esse quadratum,* & sic sequendo.

Probatur. Nam: Quod 4. sit Quadratus numerus, inde patet; quia sub duobus æqualibus numeris 2. & 2. continetur ex definit. 4. Siquidem Vnitas est ad 2. vt 2. est ad 4. sed vnitas metitur 2. per se ipsam, ergo, & metietur numerus 2. numerum 4. per se ipsum, nempe per 2. Quòd autem, & alij, qui intermisso vno succedunt sint quadrati, etiam patet ex propos. 20. eò quia intermediet inter vtrumque medius proportionalis V.g. inter 4. & 16. numerus 8. At 4. est Quadratus quapropter, & 16. erit quadratus ex pa. 22. h.

Secundo Dico, quod quartus ab vnitate Cubus sit. Nam Vnitas est ad 2. vt 4. ad 8. eodemque modo vnitas mensurabit 2. vt 4. numerū 8. Sed iam ex primę partis probatione 2. multiplicans 2. & per se ipsum generat 4. Ergo etiam modo 2. multiplicans 4. faciet 8. Ergo 8. Cubus erit. Quod autem intermissis duobus, omnes alij sint Cubi, patet ex 19. propos. quia inter 8. & 64. duo medij proportionales numeri intercipiuntur.

Tertiò Septimus ab vnitate ostensus est cubus, vt patet ex numero D, quia occupat eum locum post primum cubum intermissis duobus: Est quoque Quadratus: quia post primum, & secundum Quadratum intermisso vno occurrit: Ergo simul erit Cubus, & Quadratus.

THEOR.

THEOR. VIII. PROPOS. XXV.

Si ab vnitate quotcumque numeri proportionales deinceps fuerint; qui verò post vnitatem Quadratus sit, & reliqui omnes Quadrati erunt, & si qui post vnitatem sit Cubus, & reliqui omnes Cubi erunt.

SI sint ab vnitate continuè proportionales numeri 2. 4. 16 64. 256. 1024. & primus 4. sit Quadratus. *Dico reliquos omnes esse quadratos.*

Probatur. Quia; cùm sint tres proportionales 4. 16. 64. primusque 4. sit quadratus, & tertius quadratus erit; Eodem modo, cum 16. 64. & 256. sint continuè tres proportionales, & 16. sit quadratus ergo ex propos. 20. huius, & 256. erit quadratus, & sic de reliquis. Nam numerus 4. ex hypothesi, numerus verò 16. quadratus eo, quòd ex prop. præc. sit quintus ab vnitate.

Probatur quoque de cubis eodem modo. Nam

2. 3. 4. 5. 6 7

si sint 8. 64. 512. 4096. 32768. 262144. quartus ab vnitate 512. Cubus erit ex propos. anteced. & duobus intermissis ex propos. 19. 262144. erit quoq; Cubus. Sic quia primus 8. ex hypothesi est Cubus: Ergo ex prop. 29. numerus quoq; 4096. Cubus erit ob duos proportionales intermedios 64. & 512. Cum autem 512. quartus, & quintus 4096. sint cubi, & ita sit tertius 64. ad quartum 512. vt 512. ad 4096. ex propos. 21. huius, tertius quoque 64. erit Cubus. Cùm verò tertius 64. sit cubus, etiam ob duos proportionales intermedios. Sextus 32768. & sic de reliquis.

TRACTATVS XI. IN IX. LIBRVM EVCLIDIS

PARS TERTIA.

De Planorum, Solidorumque generatione, & inuentione.

HIc agit Euclides de planis, solidisque numeris inueniendis, etiam Quadratis, & Cubis; & quærit, qui numerus multiplicans alium Cubum, vel Quadratum efficiat, aut etiam numerum solidum aut planum: Reliqua verò de quibus pertractat de numeris paribus, & imparibus, & de perfectis, & imperfectis, non putauimus inter elementa necessariò collocanda. Cùm nomen vix consequantur in alijs partibus mathematicis; substituimus autem Expensionem de æquipotentia numerorum, & inuentione Quadratorum, qui tractatus lib. 10. deseruiunt, & absolutè necessarij sunt.

EXPENSIO I.

De numerorum æquipotentia ad gignendos æquales planos.

SIcut lineas lib. 2. Euclidis ostendimus æquipotentes, & in diuersas partes sectas, posse æquiualere quadrato totius. Sic nunc idem videndum est de numeris. Cũ Euclides de his non agat; sed acutissimè Clauius, verùm cum eius ostensiones visæ nobis sint difficiles, alias attulimus, quæ faciliori pede percurri possint.

THEOR. I. PROPOS. I.

Si numerus aliquis in duas partes secetur Planus numerus totius, partisque multiplicatione consurgens æquatur quadrato, eiusdem partis, partiumque plano.

7

3 4

12 9 21

* SIt numerus 7. qui diuidatur in duas partes in 3. & 4. multipliceturque totus per 3. & fiant 21. deinde ducatur 3. in se, & fiat quadratum 9. in alteramque partem, & fiat 12. *Dico, quòd planus numerus 12. & quadratus 9. æquantur plano 21.*

Probatur. 3. multiplicauit 4. & fecit planum 12. & se, & fecit 9. Ergo ex propos. 17. sept. ita erit 3. ad 4. vt 9. ad 12. Rursus idem 3. multiplicauit se, & fecit 9. multiplicauit quoque 7. & fecit 21. Ergo ex eâdem, ita se habet 3. ad 7. vt 9. ad 21. Quia ergo est 3. ad 4. vt 9. ad 12. Ergo componendo erit 3. ad 3. & 4. simul, vt 9. ad 9. & 12. simul; sed eadem proportio est 3. ad 3. & 4. simul, quæ 3. ad 7. & eadem proportio, quæ est 3. ad 7. vt dixi est 9. ad 21. Ergo eadem proportio erit 9. ad 9. & 12. quæ 9. ad 21. quare ex prop. 9. lib. 5. erunt æquales inter se 9. & 12. simul, ac 21. quod eidem 9. eandem dicant proportionem: hæc propos. ostenditur de lineis propos. 4. l. 2.

CO-

COROLLARIVM I.

Hinc educitur; quod idem dicendum de alia parte. Nam totus 7. multiplicatus per 4. nempe 28. æquabitur quadrato ipsius 4. nempe numero 16. & plano partium hoc est, numero 12. In quo considerandum est, quod partiũ numerus est in vtroque idem, nempe 12. quoniam partes sunt ædem 3. & 4. quæ se inuicem multiplicant.

COROLLARIVM II.

Hinc etiam est, quòd si assumatur aliquis alius numerus præter partes, & ipsæ partes; totumque multiplicetur; planus numerus partium, per illum, alium numerum multiplicatus æquabitur totius plano ex eo alio numero consurgente; Sic 3. & 4. partes numeri 7. si multiplicentur per 5. alium numerum, dabunt planos numeros 15. & 20. simul æquales plano 35. ex 5. per 7. genito: Ratio verò est eadem. Nam ita est 15. ad 20. vt 3. ad 4. ob numerum 5. multiplicantem & 15. ad 35. vt 3. ad 7. ob eundem 5. multiplicantem ex 17. septimi. Quaderè, si est 15. ad 20. vt 3. ad 4. erit etiam componendo 15. ad 15., & 20. simul, vt 3. ad 3. & 4. simul; sed 3. ad 3. & 4 simul est eadem, quam 3. ad 7. & 3. ad 7. eadem, quæ 15. ad 35. vt dixi. Ergo proportio 15. ad 15. & 20. simul erit eadem, quæ 15. ad 35. Ideoque ex prop. 9. lib. 5. æquales erunt numeri 15. & 20. simul, ac 35. cum ad eosdem, 15. numerus eandem dicat proportionem. Hoc etiam ostenditur de lineis lib. 2. propos. 4.

COROLLARIVM III.

Elicito. Quod etiam si numerus in plures partes, quam 2. secetur, idem tamen erit, vt si 7. secetur in 3. 2. & 2. Nam totus numerus per aliquam partem V. g. 3. vel aliquem alium numerum multiplicatus, æquabitur singulis partibus per eundem numerum multiplicatis; & simul sumptis eadem ratione, sic si 3. 2. & 2. multiplicetur per 3. hi facient 9. 6. & 6. qui æquabunt 21. numerum consurgentem ex 7. in 3. ducto.

THEOR. II. PROPOS. II.

Si numerus in duas partes diuidatur, plani duo sub partibus, & toto comprehensi æquantur quadrato totius.

Sit numerus 7. diuisus in duas partes 3. & 4. & ex toto 7. & 3. fiat planus 21. & ex 7. & 4. planus 28. Dico *hæc duo plana æquari totius quadrato* 49.

7
3 7 4
21 49 28

Probatur. Nam quia 7. multiplicat 7. & 3. & facit 49. & 21. erit 3. ad 7. vt 21. ad 49. Sic quia multiplicat se, & 4 erit 4. ad 7. vt 28. ad 49. ex propos. 17. l. oct. cumque 7. multiplicet 3. & 4. erit eadem proportio 3. ad 4. quæ 21. ad 28. Ergo componendo erit 3. ad 3. & 4. simul, quæ 21. ad 21. & 28. simul. Sed proportio 3. ad 3. & 4. simul est eadem; quæ 3. ad 7. & 3. ad 7. quæ 21. ad 49. ergo ita erit 21. ad 21. & 28. simul vt 21. ad 49. quare ex propos. 9. l. 5. erunt æquales 21. & 28. simul ipsi 49. Id ostend. propos. 3. l. 2. de lineis.

THEOR. III. PROPOS. III.

Duo quadrata, cum duobus numeris planis, ex lateribus eorum effecta, æquantur quadrato, ex duobus lateribus tanquam vno assumpta.

Sit quadratum 16. & quadratum 9. quorum latera sint 4. & 3. & duo plani ex eorum lateribus 4. & 3. effecti, qui erunt 12. & 12.

3 4
21 7 28
9 12 12 16
49

Dico, *quod hæc omnia simul æquantur quadrato totius numeri* 3. & 4. vt vno latere assumpti nempe 7. cuius quadratum est 49.

Probatur. Duo plani ex toto 7. & partibus 3. & 4. producti nempe 21. & 28. ex præced. æquantur quadrato totius 7. Sed ex 1. huius planus numerus sub toto comprehensus, & parte, vt 21. & 28. æquatur quadrato ex parte illa comprehendẽte, & plano numero à partibus comprehenso, & ideo planũ 21. æquatur quadrato 9. ex 3 & plano numero 12. ex 3. & 4. multiplicatione effecto, sicut planus 28. æquatus quadrato 16. ex 4. & plano eidẽ 12. Ergo quadratum 16. & 9. cum planis numeris 12. & 12. ex lateribus eorum 3. & 4 æquabunt quadratum ex ijs lateribus, vt vno hoc est, 7. quod est 49. cùm æquent planos 21. & 28 æquantes simul quadratum totius 7. Ostenditur de lineis propos. 6.

THEOR. IV. PROP. IV.

Si numerus bifariam sectus sit, & quidam numerus ei additus. Quadratum dimidij cum numero adiecto æquat planum numerum ex toto, & adiecto per adiectum multiplicato, & quadratum dimidij.

8
4 4 3

Sit numerus 8. & diuidatur bifariam, & sit 4. addaturque 3 & fint 7. & 3. cum 8 toto fint 11. ex quo 11. toto cũ addito 3. fiat planus numerus 33. Inde ex dimidio 4. fiat quadratum 16. *Dico, quod planus numerus 33. & quadratum 16. æquant 49. quadratum lateris 7. dimidij 4. cum adiecto 3.* Quod, & ostenditur propos. 8. de lineis l. 2.

Probatur. Nam planus ex 11. & 3. æquat ex Coroll. 3. propos. 1. duos planos sub medietate duplici 4. & 4. & 3. adiectâ comprehensos; nempe 12. & 12. & quadratum ex 3. nempe 9. Si ergo addamus etiam quadratum ex 4. hoc est 16. habebimus duos planos numeros ex lateribus quadratorum, & duo quadrata. Sed duo quadrata, & duo plani ex lateribus quadratorum æquant quadratum ex lateribus pro vno latere sumptis ex 3. propos. huius. Quare æquabunt quadratum 49. ex dimidio cum adiecto numero: Siquidem duo plani ex lateribus, non ex toto numero, & vnico 8. sed ex dimidio, eius facti sunt, vt duo esse possint, & ideo hi plani obtinent latera ex dimidio numero 4. pro latere, & pro alio ex adiecto 3. constituta, quæ simul addita vt sint 7. faciunt quadratum 49. cui duo quadrata 16. & 9. & duo plani ex ipsorum lateribus 12. & 12. æquantur ex propos. 3. huius.

THEOR. V. PROPOS. V.

Si numerus secetur in partes æquales, & inæquales numerus planus sub partibus inæqualibus contentus una cum quadrato, quo maior pars dimidiam superat, æquatur quadrato, qui ex dimidio enascitur.

SIt numerus 10 & secetur in partes æquales in 5. & 5. & inæquales in 7. & 3. & numerus, quo 7. maior pars superat dimidiam 5. sit 2. *Dico, quod planus numerus* 21. *ex* 3 *in* 7. *productus* vnà cum quadrato ex 2. hoc est 4. æquat quadratum 25. ex medietate numeri 10. hoc est 5.

Probatur. Quia ex 1. huius Coroll. 3. planus numerus 21. ex 3. & 7. inæqualibus partibus, æquat duos planos numeros, ex 2. & 2. per 3. genitos, nempe 6. & 6. & quadratum 9. ex 3. procedens, si ergo addamus quadratum 4. ex 2. erunt duo quadrata 4. & 9. cum duobus planis 6. & 6. æqualia quadrato 25. ex eorum lateribus consurgente, vt vno sumpto ex prop. 3. quæ sunt 2. & 3. & faciunt 5. Quod verò planus numerus 21. ex 3. & 7. genitus duos planos 6. & 6. cum quadrato 9. ex 3. exequet; patet ex Coroll. 3. propos. 1. nam 7. in tot partes diuidi potest, hoc est in partem, quâ medietatem superat 2. & in partem, quâ medietas superat minorem 2. & in ipsam minorem 3. siquidem tanto deficit minor pars à medietate, quanto maior super medietatem augescit, & 7. maior est medietate numero 2. sicut 3. est minor medietate eodem numero 2. Ostenditur prop. 7. lib. 2. de lineis.

EXPENSIO II.

De Planorum, Solidorum, Quadratorum, & Cuborum generatione.

MVltiplicatio est illa, quæ generat numeros planos, vel solidos. Vnde hic quæritur; quinam numeri inuicem multiplicati, Quadratos, & Cubos, seu Planos, Solidosque numeros efficere possint.

THEOR. I. PROPOS. VI.

Si duo plani similes numeri multiplicantes se mutuò, fecerint quendam numerus productus Quadratus erit.

SInt duo plani similes 6. & 24. qui se mutuò multiplicent, & generent 144. Dico *hunc numerum esse quadratum*. Quod, vt ostendatur, multiplicandus est numerus 6. in se, & faciet 36. & sic 6. numerus multiplicabit se, & numerum 24. vnde ex propos. 17. ita erunt multiplicantes 6. ad 24. vt geniti 36. ad 144. sed ex propos. 11. lib. 8. inter planos similes vnus medius proportionalis cadit numerus V. g. inter 6. & 24. cadit 12. Ergo etiam ex propos. 8. lib. 8. cadet inter genitos, & eâdem proportione gaudentes 36. & 144. Cadat igitur, & sit 72. Cum igitur 36. 72. & 144. sint tres continuè proportionales, primusque 36. sit quadratus ex propos. 20. lib. 8. & secundus 144. quadratus erit, quod oportebat ostendere.

THEOR. II. PROPOS. VII.

Si duo numeri se se mutuò multiplicantes faciant quadratum, similes plani erunt.

SInt 6. & 24. qui faciant se inuicem multiplicantes quadratum 144. Dico, *quod isti numeri 6. & 24. similes plani erunt*. Nam primus 6. multiplicet se, & faciat 36. Erunt duo numeri quadrati 144. & 36. inter quos interueniet aliquis proportionalis numerus medius ex propos. 18. l. 8. Et quia 6. multiplicando se, & 24. facit 36. & 144. erunt in eadem proportione geniti, & generantes 6. & 24. Vnde etiam inter istos cadet ex propos. 8. lib. 8. aliquis proportionalis numerus 12. Quapropter ex propos. 13. erunt similes plani 6. & 24.

COROLLARIVM I.

ELicitur. Quod si duo numeri quadrati etiam æquales faciant quendam, iste factus erit quadratus. Quòd duo quadrati facientes sint plani similes, eo quia quadrati ponantur, vt diximus in ostensione propos. 18. l. 8.

COROLLARIVM II.

ELicitur quoque quod, si quis numerus quadratus alium multiplicans faciat quadratum; iste alius multiplicatus quadratus erit. Erunt enim ex hac 7. propos. plani similes. Vnde inter eos medius proportionalis cadet aliquis numerus; quà ex re ex propos. 20. lib. 8. si primus sit quadratus, & secundus quadratus erit.

THEOR. III. PROP. VIII.

Si compositus numerus aliquem multiplicans creet aliquem alium, productus solidus erit.

NVmerus compositus 6. multiplicans quemlibet alium numerum 4. faciet alium aliquem puta 24. *Dico genitum* 24. *esse Solidum*.

Probatur numerus 6. dicitur compositus: ideòq; metietur eum aliquis numerus præter vnitatem. Sit ergo 2. qui metiatur 6. per 3. idest ter replicatus. Proptereaque 2. multiplicans 3. facit 6. & 6. multiplicans 4. procreat 24. cum ergo 24. consurgat à multiplicatione trium numerorum 2. 3. 4. ex definitione 4. lib. 8. factus 24. solidus numerus erit.

THEOR.

THEOR. IV. PROP. IX.

Si Cubus numerus se ipsum multiplicans faciat aliquem, productus Cubus erit.

NVmerus Cubus 64. se multiplicando procreet aliquem nempe 4096. Dico *hunc quoque esse Cubum.* Repertum sit latus Cubi 64. quod est 4. & ex hoc 4. in se fiat 16. & deinde 16. multiplicetur per 4. erunt 64.

Progress. 1. Idem 4. se multiplicando fecit 16.& multiplicando 16. generauit 64. Quapropter ex prop. 17. sept. eadem proportio erit inter 4. & 16. quæ est inter 16. & 64. Sed vt 4. metitur 16. per 4. & 16. 64. ita vnitas metitur 4. per 4. idest vnitas quater accepta facit 4. sicut 4. quater acceptus componit numerum 16. & 16. numerum 64. Quamobrem eadem pars erit vnitas numeri 4. quæ 4. numeri 16. & quæ 16. numeri 64. Vnde inter vnitatem, & numerum 64. duo medij proportionales cadunt numeri 4. & 16.

Progress. 2. Considerandum verò est, esse ita vnitatem ad 64. vt 64. ad 4096. Quoniã 64. multiplicando se, idest sexaginta quatuor vicibus acceptus generat 4096. sicut vnitas 64. vicibus accepta facit 64. Quare eadem proportio erit inter vnitatem, & 64. quæ est inter 64. & 4096.

Sed ex primo prog. inter vnitatem, & 64. duo medij proportionales numeri intercipiuntur; Ergo quoque ex propos. 8. lib. oct. cadent inter 64. & 4096. etiam duo proportionales numeri intermedij. Quaderé ex prop. 21. l. oct. cum 64. sit Cubus, talis quoque erit numerus 4096.

THEOR. V. PROPOS. X.

Si Cubus numerus Cubum multiplicans faciat aliquem, productus Cubus erit.

SIt Cubus 8. qui multiplicet Cubum 27. & faciat 216. Dico *hunc quoque esse cubum.*

Probatur. Nam si 8. multiplicet se productus 64. cubus erit ex præced. & quia 8. multiplicauit duos numeros 8. & 27. & generauit 64. & 216. eadem proportio erit ex 17. l. sept. inter genitos 64. & 216. quæ est inter generantes 8. & 27. sed inter istos duo medij proportionales cadunt numeri, cùm sint cubi ex propos. 19. l. oct. Ergo ex propos. 8. inter 64. & 216. Quapropter ex prop. 21. l. oct. cum primus 64. ex præced. sit Cubus etiam secundus 216. Cubus erit.

THEOR. VI. PROP. XI.

Si Cubus numerum aliquem multiplicans faciat Cubum, ille multiplicatus Cubus erit.

CVbus numerus 27. multiplicans aliquem v. g. 8. faciat Cubum 216. Dico 8. *quoque cubum esse.*

Probatur eodem argumenti methodo: Nam 27. multiplicet se; & faciat 729. Itaque, quia 27. multiplicauit 27. & 8. generantes, & protulit genitos 729. & 216. eadem proportio erit ex propos. 17. sept. inter 27. & 8. quæ reperitur inter 729. & 216. Verùm 729. & 216. sunt Cubi; hic quidem ex hypothesi, ille autem ex propos. 9. & hac de causa ex propos. 19. lib. oct. inter eos duo medij proportionales interponuntur. Ergo etiam ex 8. lib. 8. inter 27. & 8. Vnde ex propos. 21. l. 8. cum primus 27. ex hypothesi sit cubus, etiam secundus 8. cubus erit.

THEOR. VII. PROPOS. XII.

Si numerus quispiam se multiplicet, & genitus sit Cubus, generans quoque Cubus erit.

SI 64. genitus ex multiplicatione 8. in se Cubus est. Dico, *& numerum 8. qui fuit in se multiplicatus Cubum esse.*

Multiplicetur rursus 64. per 8. & fiant 512. qui cubus erit; quia est productus ex multiplicatione numeri 8. in se, rursus numeri 8. in productum 64. ex sui multiplicatione exortum. Qua ex re, cùm numerus 64. numerum aliquem multiplicans generet Cubum, multiplicatus 8. ex præc. propos. Cubus erit.

EXPENSIO III.

De numeris quadratis inueniendis.

AD libri 9. demonstrandas propositiones ista omninò Expensio est necessaria, cùm enim ibi agatur de inuentione irrationalium multarum, inter eas quædam sunt, quarum inuentio in inuentione numerorum, qui cum alijs numeris, vel quadratum efficiant, vel etiam non efficiant, prout res postulauerit, consistit.

PROBL. I. PROPOS. XIII.

Duos numeros quadratos inuenire, ita vt compositus ex ipsis quadratus quoque sit.

EX propos. 17. lib. 8. reperiantur duo numeri plani similes, quorum vterque, vel par sit, vel impar V. g. 10. & 40. detrahaturque minor à maiore, & reliquus par erit, nam etiam detracto impare, ab impari residuus numerus par reperitur; quia auferendo impar aufertur differentia vnitatis, quà differebat maior à pari, & sic relinquitur par. Quare cum residuum sit par s. 30. diuidatur per medium, vt fit 15. Si ergo 40. planus numerus maior multiplicet minorem planum 10. fiet numerus quadratus 400. ex 6. propos. h. Deinde multiplicetur 15. in se, medietas residui, & fiet quadratus 225. Dico igitur, quod si duo hæc quadrata addantur simul, *Quod fiet numerus quadratus, qualis est 625.*

40. ablatus 10. Resid. 30. med. 15.
10. in 40. dat 400. 15. in 15. dat 225.
Additi 225. & 400. Sunt 625. quad.
cuius radix 25. idest 10. & 15.

Prob. ex propos. 4. huius. Nam ibi ostendimus, quod si aliquis numerus dimidius sit, cui addatur aliquis numerus, & summa in se multiplicata faciat quadratum, quod hoc erit æquale quadrato ex ipsius dimidio, sine adiectione sumpto, & plano numero consurgenti ex summa

 adiecti,

addiecti, & totius pro vno latere, & adiecti tantùm pro alio.

Sic itaque hic fecimus. Sumpsimus numerum 30. addidimusque 10. planum numerum, & fecimus planum 40. constitutumque est ex 10. ipso adiecto, & multiplicato in 40. (nempe in totum 30. cum adiecto 10.) numerum 400. Deinde assumpta est medietas 15. numeri 30. & factum est quadratum 225. Quare si addamus 400. & 225. fiet quadratus numerus; Erit enim ille numerus æqualis quadrato ex medietatis 15. & adiecti 10. summâ 25. in se multiplidata consurgens, qui est 625. Numeri verò coniuncti simul 400. & 225. sunt quadrati, & 225. quidem ex effectione, & 400. ex 6. huius; quòd duos numeros ex quorum multiplicatione generatur, assumpserimus planos similes.

PROB. II. PROPOS. XIV.

Numerum quadratum inuenire, qui subductus ab altero quadrato, relinquat quoque quadratum numerum.

Construantur omnia, vt supra, nimirum assumantur duo plani similes 10. & 40. pares ambo, vel ambo impares, & subducatur alter 10. ab altero 40. & residuum 30. bifariam secetur, & fit medietas 15. & habebimus duos numeros requisitos 15. nimirum medietas, & 25. eadem numeri 30. medietas cum addito 10. multiplicentur in se numeri 15. & 25. & fint 225. & 625. geniti. Dico, *quòd si minor 225. subducatur à maiore 625. relinquet 400. qui est numerus quadratus.*

Prob. Nam subducto quadrato 225. à quadrato 625. reliquitur planus numerus ex toto 30. cũ addito 10. & additi 10. multiplicatione generatus. & 400. ex prec. Sed totus, cum addito nempe 40. & additus 10. fuerunt duo plani similes ex constructione, ergo planus numerus ex eorum multiplicatione progeneratus erit quadratus ex 6. huius.

PROBL. III. PROPOS. XV.

Inuenire duos numeros quadratos, quorum excessus non sit quadratus.

Elige duos planos non similes, V. g. 8. & 30. nempe totum 22. cum addito 8. qui multiplicati inuicem dabunt numerum planum non quadratum 240. medietas verò numeri 22. nempe 11. multiplicetur in se, fiet numerus quadratus 121, qui simul additi, vt sint 361. ex propos. 7. huius, erunt æquales quadrato ex medietate 11. & addito 8. nempe numero 19. quod quadratum est 361. Ergo 361. & 121. erunt duo quadrati numeri, quorum minor subductus à maiore relinquet pro excessu numerum non quadratum 240.

PROBL. IV. PROPOS. XVI.

Duos numeros quadratos inuenire ita, vt compositus ex ipsis non sit quadratus.

18. Ablat. 8. Resid. 10. Med. 5.
8. in 18. dat 144. * 5. in 5. dat 25.
Additi 144. & 25. dant Quad. 169.
Cuius radix 13. idest 5. & 8.

Præceptum 1. Eadem constructio fiat, quæ priùs & assumptis duobus planis similibus paribus, vel imparibus, vt 8. & 18. quorum latera sunt proportinoalia 2. & 4. primi, & 3. atq; 6. secundi. Subducaturq; alter ab altero, & residuetur 10. qui diuidatur per medium, & fit medietas numerus 5. Eritque quadratum 25. ex multiplicatione numeri 5. in se, simulque planus numerus 144. ex 8. in 18. æqualis quadrato ex summa 13. numerorum 5. & 8. qui est 169. quadratus.

Auferatur deinde ex latere 5. vnitas, & relinquuntur 4. fiatque quadratum A 16. Dico, *quod B. C numerus 16. compositus cum quadrato 144. non facit numerum quadratum, nimirum eorum quadratorum summam 160. non esse quadratum.*

Totum D 16. Ablat. 8. B. Resid. 8. E Med. 4.
B 8. in D 16. dat O 128. * 4. in 4. dat 16. Quad.
Additi 128. & 16. æquant Quad. 144. C.
Cuius Radix 12. idest B 8. & 4.

Præceptum 2. probationis gratiâ. Assumatur duplum numeri 4. & fiant 8. & iuxta constructionem præcedentem adiciatur numerus 8. vt priùs, & fiat totum D 16. Itaque habemus numerum totum 16. D, idest B 8. cum adiecto 8, E. Diuidantur per medium E 8. & fit 4. Deinde multiplicetur 4. in se, & fit quadratus 16. & multiplicetur postea totus numerus B 8. & E 8. adiectus in vnam summam redacti hoc est 16. D, per ipsum B 8. adiectum, & erunt O 128. qui duo numeri quadratus 16. & 128. planus numerus ex 6. huius æquabunt quadratum 144. C numerum, ex summa dimidij 4. & adiecti B 8. nempe 12. se multiplicantis, qui quadratus numerus 144. C appellatur ob distinctionem quadrati item 144. prioris præcepti.

Itaque aduertendum est quadratum 16. coniunctum cum plano secundi præcepti O 128. minore, vtpote à minori latere 16. per multiplicationé 8. producto æquat quadratum C 144. & coniunctus cum plano maiore 144. primi præcepti effecto, qui à lateribus 8. & 18. prouenit æquat numerum 160.

Obseruandum quoque est, quod quadratum 144. C & anteced. prec. 169. habent latera, quæ sola vnitate differunt nimirum 12. & 13.

Prob. Nunc propos. Itaque numerus A 16. est quadratus, vtpote ex 2. prec. productus ex multiplicatione 4 in se, sic 144. quadratus est, quòd sit productus ex duobus numeris planis ex propos. 6. huius, qui simul additi faciunt numerum 160. non quadratum. Si enim numerus 160. quadratus, foret aut esset æqualis quadrato 169. prioris præcep. aut eo maior. Seu esset æqualis quadrato posterioris præcepti C 144. aut ipso minor, aut esset quadratum quoddam inter hos numeros quadratos medium: sed neutrum ex istis esse potest; Ergo non erit quadratum.

Singulæ itaq; propositiones ostenduntur. Non potest esse æqualis quadrato 169. vel ipso maior, eo quod ex 1. præcept. planum ex lateribus 8. & 18. consurgens 144. & quadratum 25. nascens ex latere 5. ei fit æquale. Hic verò numerus 160. generatus est à dicto plano, sed quadrato 16. cuius latus est tantummodo 4. & ideo minor, quam quadratus 25. cuius latus est 5.

Non potest esse minor hic numerus 160. quadrato C 144. nec ei æqualis: Eo quia huic numero est æquale planum 128, à lateribus 8. & 16. exurgens ex posteriori præcept. vna cum quadrato 16. cuius latus est 4. hic verò numerus 160. nascitur à dicto à dicto quadrato 16. Sed plano 144. cuius latera sunt maiora 8. & 18. & ideo etiam ipsum 160. necesse est, quod sit maius.

Tandem. Non potest esse quid medium. Quoniam si esset quadratum medium inter quadrata 169. prioris præcepti, & quadratum c 144. posterioris præcepti consequeretur latera media inter latus huius, & latus alterius. Sed id non potest esse: Idcirco neque potest esse quadratus numerus medius. Quod ostenditur: Nam vt prea. aduertimus, latera horum duorum quadratorum 169. & c 144. sunt 13. & 12. qui sola vnitate ex constructione differunt: Vnde nullus numerus inter eos intercipi potest, ex quo consurgat tanquam à latere medio quadratum 160. Quamobrem non erit quadratum.

COROLLARIVM

Ducitur hinc compositum hoc modo ad illos duos quadratos non habere proportionem, quam quadratus ad quadratum; Quia ex propos. 22. lib. 8. cùm componentes sint quadrati, ob proportionem eam quadrati ad quadratum ipse quoque compositus quadratus esset.

PROBL. V. PROPOS. XVII.

Numeros non quadratos inuenire, ita vt compositus ex ipsis sit quadratus.

Secetur numerus quadratus in duas partes non quadratas, & erit factum, quod quæris; siquidem illæ duæ partes non quadratæ erunt tales, quæ compositæ rursùs numerum quadratum efficient.

PROBL. VI. PROPOS. XVIII.

Inuenire numerum, qui ad numerum quadratum, & ad alterum non quadratum, non habeat proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Numero non quadrato addenda est vnitas, ita tamen, vt per hanc vnitatis additionem nõ reddatur numerus quadratus, vt si sint 4. quadratus, & 5. non quadratus, adde vnitatem numero 5. & fiant 6. & quia 6. non est quadratus habebis numerum, quem quæris: si quidem neque ad 5. neque ad 4. proportionem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. At si daretur numerus talis, cui addita vnitas faceret quadratum, vt 8. cui additus 1. facit 9. tunc deme vnitatem, vt fit 7. & obtinebis, quod desideras. Dico itaque; quod iste numerus 6. aut 7. proportionem non habet cum numero 4. & 5. quam quadratus ad *quadratum numerum*.

Nam talem non habet respectu numeri non quadrati; quoniam non potest cadere inter eos aliquis numerus, qui sit medius proportionalis; cùm sola vnitate differant; & ideo nullus numerus inter eos cadere possit; sed nec cùm numero quadrato 4. hac de causa; quod si cõsequeretur eam proportionem, cum primus 4. sit quadratus ex 22. propos. lib. 8. esset quoque quadratus ipse, seu 6. seu 7.

PROBL. VII. PROPOS. XIX.

Duos numeros non quadratos inuenire, vt compositus ex ipsis non sit quadratus, neque cum ipsis proportionem dicat, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Id faciliter fit, si diuidatur numerus quilibet non quadratus, vt 14. in duos numeros inter se primos 3. & 11. & erunt numeri quæsiti. Nam cũ primi sint inter se proportionem nõn habent, quam quadratus ad quadratum numerum, & cum numerus 14. ex quo per diuisionem euenere non sit quadratus; neque ipsi sunt; aut possunt esse quadrati; Ideoq; nec ad eos habere proportionem quadrati ad quadratum.

TRACTA-

TRACTATVS XII.

IN X. LIBRVM EVCLIDIS

De Lineis irrationalibus.

VT Tractatus linearum irrationalium intelligeretur, necesse fuit priùs aliqua saltem de numeris cognoscere. Vnde tres de numeris libri huic libro præmittendi fuerunt; nulloque modo fieri potuit, vt immediatè hæc tractatio succederet, aut sexto libro, aut præcedentibus. Cognitio verò harum linearum est etiam elementaris. Siquidem cũ sint complurimę magnitudines latera irrationabilia obtinentes, tàm planę, quàm solidæ; multoties, quis errorem acciperet, dum putat lineam, seu latus alicuius figuræ se posse numeris exprimere, quòd inexprimibile est; & quia insuper ostendit Euclides spatia quædam æqualia quadratis irrationabilibus, V. g. parallelogramma applicata lineæ rationali alterum latus irrationale efficere talis, vel talis rationis: nos illam cognitionem tanquam minus necessariam ab elementis ablegauimus sola generica cognitione contenti.

EXPENSIO I.

De Principijs.

ANtequam ipsum de incommensurabilibus librum aggrediamur, quædam principia ad eum spectantia præcognoscere oportet: hæc autem sunt.

DEFINITIO I.

COmmensurabiles magnitudines dicuntur, quas eadem mensura metitur.

Sint lineæ altera quatuor palmorum, altera septem palmorum; quia palmus metitur vtrasque commensurabiles appellantur.

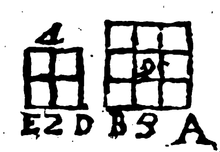
DEFINITIO II.

INcommensurabiles verò, quarum nulla communis mensura contigit reperiri. Ergo duę lineæ tales essent, quarũ vna sex palmos contineret, altera verò, nec palmo ex æquo mensurari posset quantumcumque multiplicatis ipsius partibus aliquotis, nec semipalmo, nec quarta palmi, nec septima, nec octaua, nec decima, nec quæcunque alia; illa linea irrationalis respectu lineæ sex palmorum appellatur; cum tamen respectu alterius lineæ, rationalis esse queat. Vnde irrationabilitas alicuius lineæ, seu quantitatis semper respectiuè sumitur.

DEFINITIO III.

REctæ lineæ potentia commensurabiles sunt; cum quadrata earum idem planum metitur.

Sint duo quadrata primum AB, quod capiat nouem quadrata, alterum ED quatuor, hæc quadrata dicentur commensurabilia, & latera eorum, potentiâ commensurabilia. Sunt verò lineæ, vt infra ostendam, quæ longitudine, & potentiâ commensurabiles sunt; aliæ solum potentiâ, quòd quidem earum quadrata aliquâ communi mensurâ dimetiri possint; sed non ipsę lineæ, & istæ vocantur potentiâ tantùm commensurabiles.



DEFINITIO IV.

INcommensurabiles lineæ potentia sunt, cum quadrata earum nulla communi plana mensura mensurantur.

DEFINITIO V.

Aliqui lineæ, aliquæ erunt longitudine commensurabiles; aliæ potentia tantùm; aliæ erunt quoque incommensurabiles omninò.

Hæc itaque linea, cui aliæ secundùm commensurabilitatem, & incommensurabilitatem comparantur, dicenda est *Rationalis*. Itaque tota rationalitas, & irrationalitas sumitur relatiuè ad aliquam lineam propositam; cùm alioqui etiam irrationales illi propositæ, alijs lineis ab illa diuersis, rationales dici possint.

DEFINITIO VI.

ET huic commensurabiles, siue longitudine, siue potentia tantùm, Rationales dicantur.

DE-

DEFINITIO VII.

VT illi omninò incommensurabiles, irrationales. Nimirum tum potentiâ, tum longitudine.

DEFINITIO VIII.

FT quadratum, quod à proposita recta linea fit, dicatur Rationale.

Quemadmodum linea dicitur Rationalis, quæ notæ quantitatis est, sic quadratum ab ea descriptum rationale dicitur, & respectu eius cæteræ planities commensurabiles, seu incommensurabiles dicuntur, si nulla planitie, quæ communis mensura sit tum propositæ planitiei, tum alterius reperiatur.

DEFINITIO IX.

ET quadrata huic commensurabilia rationalia.

DEFINITIO X.

ET huic incommensurabilia pariter irrationalia appellantur, siue sint quadrata, siue alicuius alterius figura.

DEFINITIO XI.

REcta verò, quæ illis quadratis irrationalibus latera sunt, vel quadratis quibuscumque æqualibus spatio irrationali cuiuscumque figura sit, illa dicantur irrationales.

Si spatia itaque incommensurabilia fuerint, quadrata: latus illorum irrationalis est linea, si quadrata non fuerint, tunc illis figuris irrationalibus quadratum æquale, habebit latus, quod linea irrationalis appellanda est.

AXIOMATA I.

MAgnitudo quamcumque magnitudinem mensurans, etiam compositam ex ipsis magnitudinibus mensuratis, mensurat.

II.

Magnitudo mensurans, aliquam, mensurat quoque omnem aliam, quam illa mensurata mensurat.

III.

Magnitudo mensurans totam, & ablatam; mensurat quoque reliquam magnitudinem.

EXPENSIO II.

De commensurabilibus quantitatibus.

VT irrationales quantitates euidentiùs innotescant, prius de rationabilibus, & earum commensurabilitate agendum, & ad numeros habitudine. Quare id præsenti expensione præstabimus.

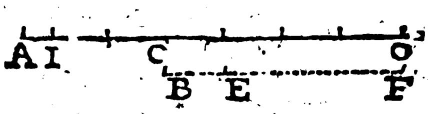
PROBL. I. PROP. I. Euc. 2.

Duabus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum communem mensuram reperire.

DVÆ magnitudines dentur, quæ sint commensurabiles, quarum oporteat maximam mensuram reperire.

Linea detur punctata BF, & alia continua linea OA: Detrahaturque minor punctata à maiore, quoties fieri potest, & remaneat AC, quæ iterum subducatur à punctata FB, quoties fieri potest, vel totam auferet, & sic AC, erit maxima communis mensura, vel non, sed remanebit aliquid s. EB: Hoc iterum subducatur ab AC, & remaneat IA: Iam tandem, cùm sit, commensurabilis, aliquod residuum adæquatè mensurabit præcedentē magnitudinem; Et sic *hæc erit maxima communis mensura, qualis est in datis lineis* IA, quæ mensurat EB diuidens eam in duas partes nihilo remanente.

Probatur primò, quòd IA metiatur vtramque. Nam IA metitur BE, sed BE metitur IC: Ergo, & IA metitur IC ex 3. Axiomate. Rursus IC metitur EF; Sed IA, vt modo probatum est, metitur IC; Ergo ex eodem principio metitur quoque IA partem EF; Sed metiebatur EB quoque alteram partem, ergo totam BF metitur. Sed hæc partem CO in linea continua metitur; Ergo, & IA metitur CO. Sed metiebatur etiam CI compartem, & IA se ipsam, quæ simul componunt totam AO. Ergo IA totam lineam continuam metitur: igitur AI totum BF, & totum AO metietur.



Probatur quoque, quòd sit maxima communis mensura: Nam si adesset alia maior: hæc metietur IA minorem, quòd fieri nequit; Nam metietur AO, & BF, hæc autem metitur CO, ergo hæc assignata metiretur CO; sed metiebatur ex supposito totam AO; Ergo, & residuum CA ex 2. princ. Sed residuū CA s. IA, & IC mensurat FE; Ergo hæc assignata metiretur quoque EF; quare, & residuum EB; sed EB mensurabat CI, Igitur EB metiretur CI; quare, & residuum IA; ergo illa maior, quæ assignaretur, mensura metiretur tandem IA minorem, quod esse nequit.

COROLLARIVM

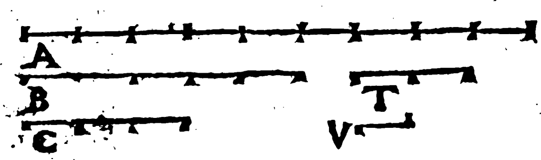
HInc patet. Quod magnitudo aliqua metiens duas magnitudines, metitur etiam earum communem mensuram: Nam assignata illa maior, ad hoc, vt ambas totas posset mensurare, debebat, & earum maximam communem mensuram tandem mensurare; vt in demonstratione ostensum fuit.

Non ponimus hic duas primas propositione Euclidis: Quoniam sine ipsis possumus omnia ostendere, quæ in hoc libro assumpsimus ostendenda: & alioquin in secunda proposit. ponat id, quod fieri posse, aliqui dubitent, nempe perpetuam detractionem ab aliqua quantitate. Illam autem ponimus alibi ex Ambrosio à Sancto Vincentio tentio efficatiùs demonstratam Tract. de progressionibus linearum.

PROBL. II. PROPOS. II.

Tribus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum communem mensuram inuenire.

SInt datæ tres magnitudines commensurabiles A, B, C. Sitq; ex præced. I. propos. reperta maxima mensura duarum A, & B, quæ sit T, si ergo T metiatur quoque C; habebimus maximam mensuram omnium trium A, B, & C; quòd si non metiatur saltem B, & T ex præced. Coroll. commensurabiles erunt, & dabitur aliqua magnitudo, quæ mensurabit A, B, & E cum sint commensurabiles; Quamobrem & mensurabit quoque T duarum A, & B maximam communem mensuram. Inueniatur ergo ex præced. propos. maxima mensura ipsarum C, & T, & sit V. Dico *magnitudinem* V *esse trium* A, B, C *maximam communem mensuram*.



Probatur, quod sit mensura: Nam V est mensure magnitudinis T, & C; Ergo ex 3. pron. & magnitudinum B, & A, quas T mensurat.

Probatur quoque, Quòd ea sit maxima; Nam assignata quædam V.g. palmus, vel quælibet alia; quæ maior dicatur, quàm V. Mensurabit B, & A; Quare, & maximā earum mensuram T ex Coroll. præced. Metitur quoque C. Quare, & earum T, & C mensuram communem V. Ergo palmus maior, quàm V, metiretur lineam V; quod fieri nequit.

COROLLARIVM

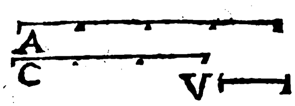
COlligitur hinc quoque; Quòd magnitudo metiens tres magnitudines, & earum maximam communem mensuram metitur. Nam palmus, si metiretur tres A, B, C, metiretur quoque mensuram communem V. Quod si darentur quatuor magnitudines. Repertā trium ex præced. probl. communi mensurā maximā; deinde huius mensuræ repertæ, & quartæ maxima communis mensura reperiri deberet, quæ esset omnium quatuor maxima mensura communis, & sic de alijs pluribus in infinitum.

THOR. I. PROPOS. III. Eucl. 5.

Commensurabiles magnitudines inter se rationem habent, quam numerus ad numerum: Et si hanc obtineant commensurabiles erunt.

Sicut incommensurabiles proportionem non habent, quam numerus ad numerum; Et si hanc non habeant, incommensurabiles erunt.

PRobatur prima pars. Nam si A, & C sunt commensurabiles. Inueniatur earum communis mensura V, Quotiesque ea repetita metitur A toties vnitas repetatur, & faciat numerum æqualem numero V.g. 4. partium; idemq; fiat mensurando C, & faciat 3. Tot itaque mensuras continet A, quot vnitates sunt in numero 4. & tot C, quot vnitates in numero 3. Cum ergo æquè vnitas mensuret numerum 4. & 3. vt V metitur A, & C proportionem eandem habebit A ad C, quam 4. ad 3. & ideo, quam numerus ad numerum.



Probatur secunda pars. Nam si duæ magnitudines A, & C, proportionem habeant, quam 4. numerus ad numerum 3. quot vnitates sunt in 4. in tot partes æquales sit diuisa magnitudo A, quarum vna sit V; Erit itaque magnitudo A ad V, vt numerus 4. ad vnitatem; Sed vt 4. ad 3 ita ponitur A ad C. Ergo C tot partes obtinebit ex ijs, quibus constat A, nempe ex partibus V, quot vnitates sunt in 3.. Nam mensura communis mensurans 4. & 3. iuxta quam proportionem dicunt, est vnitas. Ergo etiam erit V communis mensura, iuxta quam A, & C proportionem dicunt.

Probatur tertia pars. Nam, si aliquæ quantitates, quæ dicuntur incommensurabiles, proportionem haberent, quam numerus ad numerum ex probatione secundæ partis, commensurabiles essent.

Probatur quarta pars. Nam si proportionem non habeant, quam numerus ad numerum, & tamen commensurabiles credantur; ex primę partis probatione habebunt quoq; proportionem, quam numerus ad numerum contra Hypothesim.

THEOR. II. PROPOS. IV. Eu. 9.

Quæ à rectis lineis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata, inter se proportionem habent, quam quadratus ad quadratum numerum.

Et quadrata proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum & latera habebunt longitudine, commensurabilia.

Quæ verò à rectis lineis longitudine non commensurabilibus fiunt quadrata, non habent inuicem proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

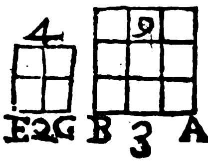
Sicut quadrata proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, nec latera habebunt longitudine commensurabilia.

PRobatur prima pars; Nam lineæ commensurabiles proportionem habent, quam numeri: Sed ex 18. lib. 8. numerorum quadrata sunt in duplicata proportione laterum. Sic quoque linearum quadrata sunt in duplicata ratione suorum laterum ex 20. sexti libri. Ergo quadrata linearum, & quadrata numerorum sunt in duplicata proportione laterum: Quare sunt in simili propor-

por-

portione, nempe duplicata laterum suorum.

Probatur secunda pars. Nam ex ijsdem citatis propositionibus est quadratum numerorum, sicut & linearum in duplicata proportione laterum 3. Sed numerorum quadratorum latera sunt numeris exprimibilia; Ergo, & partes linearum, quæ latera ijs quadratis contexunt: vt G B, & A B tales erunt.



Probatur tertia pars. Nam si lineæ sunt incommensurabiles; quadrata earum non habebunt proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; Siquidem ex prima probatione quadrata, quæ proportionem obtinent, quam quadratus numerus ad quadratum, latera quoque obtinent longitudine commensurabilia; & ideo illæ lineæ contra Thesim essent commensurabiles.

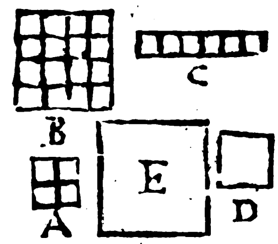
Probatur quoque 4. pars eodem tenore. Nam quadrata, quæ referuntur ad aliud vt quadratus numerus ad quadratum numerum, latera obtinent commensurabilia; & ideo illa quadrata, quæ non referuntur proportione eâ, vt quadratus numerus ad quadratum numerum longitudine latera incommensurabilia possidebunt. Alioquin si latera essent commensurabilia, & ipsa quadrata se haberent, vt quadratus ad quadratum numerum contra hypothesim.

COROLLARIVM.

Sequitur. Lineas longitudine commensurabiles tales quoque esse potentiâ: Nam possunt constituere quadrata inuicem commensurabilia.

Lineas verò potentiâ commensurabiles; nimirum quorum quadrata commensurabilia sunt, posse quidem, & longitudine esse commensurabiles, sed non semper. Nam potest V. g. dari quadratum, quod sit tertia pars alterius, & proportionē habeat, quam numerus ad numerum, vt 1 ad 3: quorum latera erunt incommensurabilia omnino cum quadrata non sint inuicem, vt numerus quadratus ad quadratum. Si verò detur quadratum, quòd ad aliud proportionem habeat, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, illud semper ex propos. præced. habebit latera commensurabilia respectu alterius. Lineas verò longitudine incommensurabiles, quandoque esse, & potentiá incommensurabiles, quandoque verò nequaquam: Quia eorum quadrata poterunt habere proportionem V. g. quod vnum sit duplum alterius, nimirum, quam numerus ad numerum, vt 4. ad 9. vel 10. ad 11. licet non eam, quam quadratus numerus ad numerum quadratum, quæ requiritur, vt etiam latera sint commensurabilia. Lineas verò incommensurabiles potentiâ, longitudine quoque semper esse incommensurabiles. Verùm dices. Cùm omnes numeri plani, & solidi proportionē consequantur, quam quadratus numerus ad quadratum numerum ex propos. 12.l.8. vt 6. & 24. qui proportionem habent, quam 1. ad 4. vel 4. ad 16.

An hæc quadrata, quæ inuicem hanc proportionem dicunt, initantur quoque lateribus longitudine commensurabilibus, & Resp. affirmatiuè; Licet enim non possent diuidi in eas partes, in quas latus quadrati 4. & 16. diuiditur: possent tamen diuidi in alias partes V. g. si latus quadrati 6. diuiditur in duas partes latus quadrati 24. posset diuidi in quatuor. Nam cum quadrata sint in duplicata proportione suorum laterū, si se habent quadrata, vt 1 ad 4. latera erunt, vt 1 ad 2. & sicut latus sic, & quadrata ipsa poterunt diuidi: vnum quidem in 4. alterum verò in 16. partes, non tamen commensurabiles illis, quæ 6. plana similia, & 24. constituant.



Sic si sit quadratum partium quatuor A, & aliud partium 16. vt B, & parallelogrammum 6. ex dictis partibus complectens; cui ex documentis primi libri fiat quadratum æquale D, & huic quadrato D fiat quadratum quadruplo maius, E Quadratum D erit 6. partium respectu quadrati A, & B, & parallelogrammi C, cum huic sit æquale, & quadratum E consequenter partium 24. & ideo latera horum quadratorum; si sumantur, vt constituta partibus 6. & 24 nullis numeris effari possunt, cùm non sint 6. & 24. numeri quadrati; Verùm absolutè, cùm ex alijs partibus quadrata D, & E, constitui possint V. g. D ex 4. & E ex 16. erunt eorum latera commensurabilia. Vnde colligitur omne quadratum, quod proportionē obtineat, quam similes numeri plani, habere latera longitudine commensurabilia: Si quidem ex propos. 12.l.8. omnes numeri similes proportionem inuicem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

EXPENSIO III.

De comparatione linearum rationalium, & irrationalium.

DOcet hæc expensio modum argumentandi in lineis rationalibus, & irrationalibus, & quomodo argumenta valeant, & deductiones de commensurabilibus, vel è contrà. Vnde sine hac expensione irrationales magnitudines impossibile est cognoscere in specie.

THEOR. I. PROPOS. V.

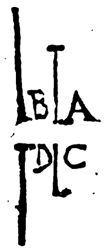
Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & fundamentum primæ combinationis suo termino sit commensurabile; fundamentum quoque secundæ combinationis suo termino erit commensurabile, & si è contra fundamentum illud primæ suo termino sit incommensurabile; tale quoque erit fundamentum secundæ combinationis respectu sui termini.

SInt quatuor magnitudines proportionales, ita quod sit A ad B, vt C ad D; si. A fundamentum primæ combinationis sit ad suum terminum B, vt

A a fun-

fundamentum C ad terminum D. Dico, *quod si fundamentum A commensuraretur termino B; fundamentum quoque alterum C suo termino D commensurabile esse.*

Probatur. Erit enim A ad B in proportione, vt numerus V.g. 2. ad numerum 4 ex propositione 3. huius, sed eandem proportionem dicit quoque C ad D; quare ex eadem propositione erit quoque commensurabilis C cum suo termino D, cum sit, vt A ad B, & ideo vt 2. ad 4. hoc est, vt numerus ad numerum.



Si verò sit incommensurabilis A fundamentum respectu termini B. Dico, *nec esse commensurabilis magnitudo; & fundamentum C respectu termini D.*

Probatur quoque ex eadem propositione sic. Nam si A est incommensurabilis ipsi B. Ergo non dicet proportionem, quam numerus ad numerum. Sed tali quoque in proportione est magnitudo C respectu magnitudinis D; ergo neque ipsa dicet proportionem, quam numerus ad numerum, ideoque incommensurabilis erit C ipsi D.

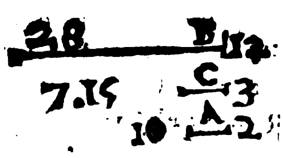
Hoc autem intelligitur non de commensurabilitate longitudinis tantùm, sed etiam potentiæ tantùm. Nam sit quadratum ex A ad quadratum ex B, vt numerus 2. ad numerum 4. quia ponitur A ad B, vt C ad D, & ideo ob similitudinem figurarum ex propositione 26. l. 6. vt quadratum ex A ad quadratum ex B, sic quadratum ex C ad quadratum ex D; erunt quoque, vt 2. ad 4. sic quadratum ex C ad quadratum ex D, quare cum quadrata linearum C, & D sint vt numerus ad numerum erunt ipsæ potentiâ tantùm commensurabiles ex pr. 4. huius.

THEOR. II. PROPOS. VI. Euc. 12.

Quæ eidem magnitudini sunt commensurabiles, & inter se sunt commensurabiles.

DEtur magnitudo A, & B, quæ magnitudini C commensurabilis existat. Dico, *eas magnitudines inuicem esse commensurabiles.*

Probatur. Nam cum magnitudo A ponatur commensurabilis magnitudini C, erit, vt numerus V.g. 10. ad numerum 15. Et eadem ratione, quia magnitudo B ponitur quoque commensurabilis magnitudini eidem C, erit ad magnitudinem eam, vt numerus aliquis V.g. 28. ad 7. & ideo conuertendo C erit ad B, vt numerus 7. ad alium 28. Reperiantur itaque tres numeri continuè proportionales in datis rationibus 10 ad 15. & 7. ad 28. ex propositione 3. l. 8. & sint 2. 3. 12. ita quod linea A se habeat ad C, vt 2. ad 3. & C ad B, vt 3. ad 12.



Quo posito erit quoque ex æquo A ad B, vt 2. ad 12. & ideo A erit commensurabilis ipsi B, quia se geret A magnitudo ad B magnitudinem, vt numerus ad numerum.

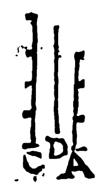
Quod & intelligitur, si duæ A, & B sint solum commensurabiles, cuidam tertiæ potentiâ. Nam tunc erit V.g. quadratum ex A ad quadratum ex C, vt numerus 10. ad numerum 15. & quadratum ex B ad quadratum ex C, vt 28. ad 7. Repertis ergo tribus numeris 2. 3. 12. in continua proportione ex 3. lib. erit quadratum ex A ad quadratum ex C, vt 2. ad 3. & quadratum ex C idem ad quadratum ex B. vt 3. ad 12. ideoque ex æquo erit, vt 2 ad 12. sic quadratum ex A ad quadratum ex B: cum quæ sit quadratum ex A ad quadratum ex B, vt numerus ad numerum; ipsæ lineæ ex 4. huius erunt tantùm potentiâ commensurabiles.

THEOR. III. PROPOS. VII. Euc. 13.

Sint duæ magnitudines; & altera quidem sit commensurabilis cuidam tertiæ, altera verò incommensurabilis; illæ magnitudines inuicem erunt incommensurabiles.

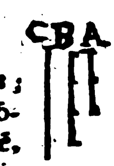
SIt A lineæ C commensurabilis, seu longitudine, seu potentiâ, & eidem C linea altera D incommensurabilis. Dico *eas nempe A, & D esse inuicem incommensurabiles.*

Probatur. Nam si D est commensurabilis magnitudini A, cum eidem quoque A ponatur commensurabilis C: Sequeretur, quòd cùm D, & C vni tertiæ A sint cõmesurabiles ex propos. antec. contrà Thesim inuicem cõmensurationem haberent, seu longitudine, seu potentiâ.



THEOR. IV. PROPOS. VIII. Eu. 14.

Si sint duæ magnitudines commensurabiles: altera verò ipsarum cuidam incommensurabilis sit, & reliqua eidem incommensurabilis erit.



PRob. eodem argumento, ac præcedens; quia magnitudo A potentiâ tantù, seu lõgitudine, & B cõmesurabiles essent inuicẽ, & tamen A existente cum aliâ magnitudine, quapiam C incommensurabili esset nihilominus magnitudo B eidem ipsi C commensurabilis.

Iam magnitudo A, & magnitudo C magnitudini B essent commensurabiles. Quamobrem ex proposit. 6. huius inter se quoque A, & C essent commensurabiles contra id, quod præsupponitur.

COROLLARIVM.

QVæ incommensurabilibus inuicem sunt commensurabiles, sunt inter se etiam incommensurabiles, quia eadem militat ratio de duabus, aut pluribus, & de vna, vt patet.

THEOR. V. PROPOS. IX. Eucl. 17.

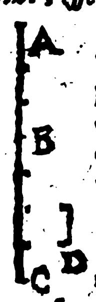
Si duæ magnitudines commensurabiles componantur, & tota magnitudo vtrique earum commensurabilis erit.

Quod, si tota magnitudo vni earum commensurabilis sit, & magnitudines, quæ compositæ à principio fuerant, commensurabiles erunt.

DEntur A B, & B C magnitudines, quæ compo-

po-

ponantur in B: *Dicemus, vt priùs, licet composita sint, esse commensurabiles.*



Nam eadem communis mensura D metitur vtrasque diuisas. Ergo etiam compositas metietur ex pronunciato 1. Quare cum diuisæ, & compositæ habeant eandem cummunem mensuram erunt AB, BC, & tota AC commensurabiles.

Probatur secunda pars, quia si tota AC commensurabilis erit vni ipsarum V. g. magnitudini BC, ergo eadem communis mensura D, metietur totam,& ablatam BC: Quare, & reliquam BA ex 3. pronunc. & ideo BA erit commensurabilis toti AC.

COROLLARIVM.

Hinc sequitur. Quod si tota magnitudo ex duabus composita cõmensurabilis sit vni ex suis partibus; quòd etiam reliquæ cõmensurabilis sit: Nam mensura, quæ metitur totum,& ablatum metitur, & reliquum ex pronunc. 3.

THEOR. VI. PROPOS. X.

Si duæ magnitudines inuicem incommensurabiles componantur, & tota magnitudo vtrique ipsarum incommensurabilis erit. Quod si tota magnitudo vni ipsarum incommensurabilis fuerit, & quæ à principio compositæ magnitudines, inuicem erunt incommensurabiles.

Probatur prima pars. Quia si detur aliqua mensura metiens totam AC, & ablatam AB, in schemate præced. propos. metiretur quoque, & reliquam BC, ex pronunc. 3. quòd est contra hypoth. ponuntur enim AB, & BC incommensurabiles.

Probatur secunda pars; Quia si ab initio magnitudines, quæ fuere compositæ dicantur commensurabiles; sequitur, quod si tota magnitudo AC vni ipsarum sit commensurabilis, quod etiam sit alteri, ex propos. præced. contra Thesim.

COROLLARIVM

Hinc sequitur. Quòd, si tota magnitudo ex duabus composita sit incommensurabilis alteri partium componentium, hæc etiam erit incommensurabilis reliquæ; Nam ex Coroll. præc. si esset commensurabilis vni esset, & alteri.

Magnitudines autem, quæ componuntur, debent esse re ipsá commensurabiles, quæ nempe possint dimetiri communi mensura maxima; alioquin ratio non valeret, quæ à communi mensura desumitur, vnde non intelligitur de lineis potentiâ commensurabilibus.

EXPENSIO IV.

De inuentione linearum rationalium.

Antequam irrationales inueniantur, priùs de inuentione rationalium agendum est; ex harum enim cognitione gradus sternitur ad irrationales diuersas inueniendas. Vnde in primis diuersas species harum linearum, vt singulas deinde doceamus inuenire; distinguere opus est.

Rationales inuicem lineæ in plura genera se iunguntur secundùm diuersam comparationem, quâ cum linea aliqua tertiâ conferuntur, quæ dicitur ob id Rationalis; nempe illa, ex quo cæterarum mensuræ æstimantur, & est velut Cubitus, seu Pes in vsitata rerum vendibilium mensuratione. Nam aut hæ lineæ comparatæ cum illâ sunt inuicem longitudine commensurabiles, quatenùs ex eius partibus, vel vna, vel ambæ integratæ inuicem quoque consentiunt longitudine vel non, sed solùm potentiâ. Si longitudine commensurabiles, tunc potest accidere, quòd vna ex istis sit Rationali æqualis; & ecce *primum genus*, quòd si omnes sint inæquales illi, sed solùm secundum partes in linea Rationali existentium longitudine commensurarentur. Erit *secundum genus*: Si verò inuicem sunt solùm potentiâ commensurabiles, tunc altera ex istis potest reperiri, vel æqualis, vel saltem commensurabilis lineæ Rationali, si æqualis reperitur erit *tertium genus*, si inæqualis, sed tamen commensurabilis erit *quartum genus*. At si ne dum inuicem; sed etiam cum linea Rationali comparatę sunt, tantùm potentia commensurabiles erit *quintum genus*. Et tandem potest accidere, quod hæ lineæ sint commensurabiles inuicem, sed cum linea Rationali comparatæ, illi solùm sint potentia commensurabiles, & erit *sextum genus*.

Primum genus, vt docebimus reperitur ex Corollario propos. 11. sicut, & secundum.

Tertium verò genus,& quartum reperitur, si primo inueniatur rationali alicui commensurabilis aliqua, vel æqualis ex propos. 11. sequenti Corollario, & huic reperiatur alia potentiâ tantum commesurabilis, ex propos. 12. nam duæ repertæ erunt inuicem potentiâ tantùm commensurabiles, sed altera ex istis erit lineę Rationali cõmẽsurabilis, altera verò potentia tantũ, ex prop. 7.

Quintum genus reperitur ex propos. 12. si nempe expositæ Rationali A inueniatur aliqua potentia tantum commensurabilis B; & huic inuentæ alia item reperiatur potentiâ tantum commensurabilis C, nam, cum rationalis A, & hæc secundo inuenta C primo inuentæ B sint potentiâ tantum commensurabiles erunt, inuicem potentiâ tantùm cõmensurabiles ex propos. 6.

Sextum verò genus reperitur ex Corollario propos. 12.

PROBL. I. PROPOS. XI.

Inuenire rectam, ad cuius quadratum, ita se habeat quadratum alterius, vt numerus ad numerum.

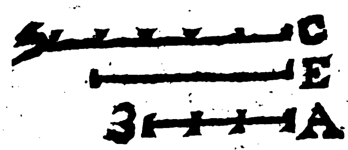
Sint duo numeri 3. & 5. & linea A. Debeamusque inuenire lineam aliquam, cuius quadratum, ità sit in proportione, cum lineæ A quadrato, vt est numerus 3. ad numerum 5.

Diuidatur linea A in tot partes, quot habet numerus oblatus 3. V.g. in tres partes; deinde assumatur linea C, quæ quinque partes æquales illis, obtineat, eritque linea A, ad lineam C, vt numerus 3. ad 5.

Inter istas autem lineas media proportionalis inueniatur ex 16. propos. lib. 6. quæ sit B. Dico quadratũ ex A ad quadratum ex B esse sicut 3. ad 5.

Probatur ex Corollario propos. 21. lib. 6. Nam

A, B, C. tres lineæ sunt continuæ proportionales, & ideo, cum quadrata omnia sint similia, similiter;



que descripta erit, vt latus A ad latus C, ita quadratum factum ex A ad quadratum factum ex B ob proportionem laterum duplicatam; Sed A se habet ad C, vt 3. ad 5. Ergo, & quadratum ex A ad quadratum ex B se habebit in proportione, vt 3. ad 5.

COROLLARIVM

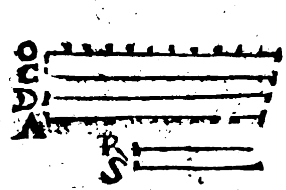
HInc enascitur modus inueniendi lineas longitudine alteri commensurabiles. Nam nihil aliud agendum, quam diuidere datam A, (quæ quoniam ab ea cæterarum mensuræ desumuntur, vocatur Rationalis,) in partes, quas voles, & ex illis partibus alias componere lineas, que alias æquales Rationali in diuersas partes diuidere, & eas partes, tanquam lineas assumere, omnes enim datæ Rationali A, erunt similiter Rationales.

PROB. II. PROPOS. XII.

Propositæ rectæ lineæ inuenire duas rectas lineas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantùm, alteram verò etiam potentiâ.

SIt recta proposita A, cui inueniendæ primo sit linea incommensurabilis longitudine tantùm. Inueniantur duo numeri proportionem non habentes, quam quadratus numerus ad quadratum numerum V.g. 10. & 11. ex propos. 19. lib. 9. vel ex 16. pr. Coroll. 4 l. 8. Deinde ex praeced. inueniatur linea, cuius quadrato ita se gerat in proportione quadratum ex C confectum, vt 10. ad 11. numeri, vel vt linea A ad O lineam. *Dico esse C lineam lineæ A incommensurabilem potentia tantùm.*

Probatur primo, quod sit incommensurabilis longitudine. Nam ea quadrata habent etiam latera longitudine commensurabilia, quæ proportionem habent, quã quadratus numerus ad quadratum numerum ex propos. 4. huius. Sed quadratum factum ex A ad quadratum ex C, illam non habet proportionem, cum sit solùm proportio, quam habet numerus 10. ad numerum 11. non quadratos: Ergo eorum latera, nempe linea A, & C, erunt incommensurabilia.



Probatur secunda pars, nempe quod sit tantùm longitudine incommensurabilis. Nam eorum quadrata commensurantur, cùm habeant proportionem, quam numerus ad numerum.

Secundò sit inuenienda altera linea D, quæ sit quoque potentiâ incommensurabilis. Inueniatur linea D inter duas A, & C longitudine incommensurabiles media proportionalis ex 13. lib. 6. Dico D esse *incommensurabilem tum longitudine, tum potentiâ lineæ A primo positæ.*

Probatur ex propositione 21. lib. 6. Nam ea proportio intermedia, inter quadratum ex A factum, & quadratum ex D, quæ est inter lineas, & latera A, & C. Sed illæ sunt incommensurabiles. Ergo etiam quadrata ex propos. 5. huius erunt incommensurabilia, & ideo ipsæ rectæ incommensurabiles erunt potentiâ: Vnde, & longitudine ex prop. 4. huius.

COROLLARIVM

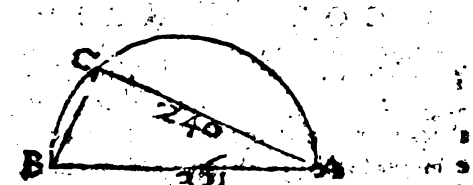
COlligemodum, quo, & plures lineæ inueniantur datæ rationali potentiâ tantùm incommensurabiles. Nam sufficit huic inuentæ C reperire alias longitudine commensurabiles V.g. R, vel S ex Corollario præcedenti: Nam erunt etiam datæ Rationali potentiâ tantùm commensurabiles.

Siquidem A est longitudine incommensurabilis C, cui tertiæ sunt commensurabiles lineæ inuentæ R, & S; Quare ex propos. 7. linea Rationalis A, & inuentę R, aut S erunt inuicem incommensurabiles.

PROBL. III. PROPOS. XIII.

Inuenire duas rationales potentia tantùm commensurabiles, ita vt maior possit efficere quadratum maius, quàm linea minoris, quorum differentia, seu excessus quadratus habeat latus dictæ maiori lineæ longitudine commensurabile.

PRoponatur aliqua linea Rationalis AB, & inueniantur ex propos. 15. lib. 9. duo numeri quadrati, quorum excessus non sit quadratus, vt 361. & 121. quorum excessus 240. non est quadratus. Deinde ex propos. 11. reperiantur duæ lineæ AB, & CD potentiâ tantùm commensurabiles, quorum nimirum quadrata se habeant, vt numerus 361. quadratus, ad numerum non quadratum 240. Deinde super maiori AB fiat semicirculus, alteraque AC accommodetur in semicirculo, connectaturq; recta CB. *Dico AB plus posse, quàm AC, nempe* ex constitutione potentiâ tantùm commensurabiles, quadrato rectę lineæ C B, quæ ipsi AB longitudine est commensurabilis.



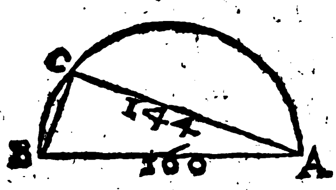
Probatur. Nam quadrata linearum AB, & AC sunt æqualia quadrato ex linea AB confecto ex propositione 21. lib. 2. sed vt numerus 361. ad 240. ita est quadratum lateris AB ad quadratum lateris AC. Ergo *per conuersionem rationis* erit 361. ad 121. complementum numeri 240. vt sit æqualis numero 361. ita quadratum ex latere AB ad quadratum ex latere CB, quod cum quadrato AC, sit æqualis quadrato ex latere AB, sed quadrata numerorum 361. & 121. habent latera commensurabilia, alioquin non essent numeri quadrati, ergo, &

& latus AB, cum latere CA erit commensurabile ex propos. 5. huius.

PROBL. IV. PROPOS. XIV.

Inuenire duas rectas potentiâ tantùm commensurabiles, quarum maior possit efficere quadratum maius, quàm efficiat minor; quorum differentia, seu excessus quadratus habeat latus dictæ maiori lineæ longitudine incommensurabile.

SIt linea rationalis AB, inueniantur ex propos. 16. lib. 9. duo numeri quadrati 16. & 144. ita quod compositus ex ipsis, nempe 160. non sit quadratus. Fiatque, vt compositus non quadratus 160. ad quadratum V. g. 144. ita linea AB ad aliam AC, ex propos. 11. huius. Deinde super maiorem AB fiat semicirculus, accommodeturque AC in eo à puncto A, connectaturque recta CB. *Dico* CB *esse lineam lineæ* BA *longitudine incommensurabilem latus quadrati, quo* A *superat* AC *quad.*



Probatur. Quia BA est ad AC, vt non quadratus numerus 160. ad quadratum 144. Ergo quadratum ex BC, erit ad AB, vt compositus non quadratus 160. ad quadratum numerum 16. per conuersionem rationis. Quoniam quadrata duo ex BC, & CA ex propos. 11. lib. 2. æquant quadratum ex BA, sicut quadratus numerus 144. & 16. æquant numerum 160. quare ita se habebit, vt numerus 160. ad 16. ita BA ad BC. Sed 160. ad 16. cum non sit quadratus, nõ habet proportionẽ, quã quadratus numerus ad quadratum numerum. Ergo neque latera BA, & CB ex propos. 11. huius, & ideo non erunt cõmensurabilia. Quare quadratum ex BA superabit AC quadratum, & excessus quadrati latus BC incommensurabile erit.

THEOR. I. PROPOS. XV.

Si quatuor lineæ sint proportionales, & fundamentum relationis, seu antecedens in prima combinatione superet consequentem, & terminum quoad potentiam quadrato, cuius latus sit fundamento illi commensurabile: Alterum quoque proportionis fundamentum in secunda combinatione eodem excessu superabit suum terminum: At si excessus primæ combinationis fuerit lateris incommensurabilis, talis quoque erit excessus in altera combinatione fundamenti respectu sui termini.

SIt BA ad BC, vt DF ad DG. Dico, quod si quadratum BA superet quadratum BC, & excessus, seu gnomon niger sit tale spatium, quod in quadratum redactum latus eius fundamento lineæque maiori BA sit commensurabile; taleque erit latus quadrati æquantis gnomonem nigrum in quadrato DF. Quòd illud quadratũ si gnomoni nigro in AB quadrato æquale, habeat latus incommensurabile ipsi BA, tale quoque erit latus quadrati æquantis gnomonem nigrum in quadrato DF.

Probatur, vt est BA ad BC, ita DF ad DG. Ergo ex 26. lib. 6. vt est quadratum ex BA ad quadratum ex BC, ita assimilatur in proportione ob similitudinem figurarum, (quia omnia sunt quadrata,) quadratum ex DF ad quadratum ex DG. Ergo conuertendo erit etiam totum quadratũ ex BA ad aliam compartem, nempe gnomonẽ nigrum, & excessum suum HA, sic quadratum ex DF ad aliam compartem, & excessum suum gnomonem nigrum FI; Ergo, & ad quadrata gnomonibus æqualia, eritque quadratum ex BA ad quadratum nigrum BL æquale gnomoni nigro AH, vt quadratum ex DF ad quadratum nigrum DM æquale gnomoni nigro FI, ideoque erit quoque latus BA ad latus BL illius quadrati nigri, vt latus DF ad latus DM huius quadrati nigri ex 26. lib. 6. si ergo BA, & LB sint lineæ commensurabiles, tales quoque erunt DF, & DM; quod si fuerint incommensurabiles longitudine BA, & BL tales quoque erunt DF, & DM longitudine incommensurabiles ex propos. 5. huius.

EXPENSIO V.

De Binomijs.

AGitur de compositione linearum potentiâ tantùm commensurabilium in vnam lineam coalescentium, ex quarum compositione resultat linea tota, quæ Binomium appellatur, vel ex Binis nominibus: eo quia resultet à compositione duarum linearum potentiâ commensurabilium. Est quæ primum genus linearum irrationalium; In quatuor enim genera secedunt irrationales lineæ. Aliæ enim exoriuntur ex cõpositione, vt prædictæ. Aliæ à subtractione, vt Apotome, duarum linearum potentiâ tantùm commensurabilium. Aliæ irrationales procedunt à proportionali interpositione mediæ alicuius proportionalis inter duas commensurabiles potentiâ tantùm. Et vocantur Mediæ; Aliæ tandem ex diuisione lineæ in partes irrationales, & ab irrationalibus simpliciter exoriuntur, quæ postrema duo genera, & per subdiuisionem alias producunt pariter irrationales. Agemus autem primo de Binomijs, vtpote de facilioribus.

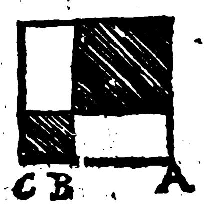
THEOR. I. PROPOS. XVI.

Si duæ rationales potentiâ tantùm inuicem commensurabiles componantur, tota irrationalis erit, vocetur autem ex Binis Nominibus.

COmponantur duæ rationales AB, & BC potentiâ tantùm inuicem commensurabiles ex propos.

propos. 12. huius inuentæ. Dico *totam* AC *irrationalem esse*.

Probatur. Quoniam enim ex propos. 1. lib. 6. rectangulum sub AB, & BC; quale est album ad quadratum BC nigrum se habet, veluti respicit basis AB basim BC: Quoniam ea rectangula sunt eiusdem altitudinis: sequitur, quòd sint incommensurabilia, qualiter sunt ipsæ bases. Addatur rectangulo eius duplum, quòd certè ei commensuratur, & fient duo rectangula æqualia alba. Addatur quoque quadrato nigro aliud nigrum ex AB, eruntque quadrata inuicem commensurabilia; quòd lineæ AB, & BC ex hypothesi sint inuicem potentiâ commensurabiles. Nam factâ hac compositione ex propos. 10. duo rectangula à duobus quadratis incommensurabilitate dissidebunt; quia magnitudinibus, quæ priùs erant incommensurabiles, vt rectangulo albo, & quadrato nigro commensurabiles, quælibet suę, magnitudines addidimus, quadrato quidem nigro quadratum aliud nigrum sibi commensurabile, rectangulo verò aliud rectangulum sibi æquale. Sed componantur simul hæc duo rectangula, quæ incommensurabilia sunt quadratis, & ipsa duo quadrata; ex propos. 10. tota magnitudo ex incommensurabilis erit, cum alterâ magnitudine partium incommensurabilium; & ideo rectangula alba, cum duobus quadratis nigris simul erunt incommensurabilia ipsis met quadratis nigris seorsim sumptis.



Verùm duo rectangula prædicta cùm duobus quadratis nigris ex propos. 6. lib. 2. sunt æqualia quadrato ex tota AC, tanquam vna linea. Hoc itaque quadratum maximum ex tota AC erit incommensurabile duobus quadratis altero ex AB, altero ex BC: cum ergo quadratum ex tota AC ex duabus AB, & BC coalitâ sit irrationale quadratis ipsarum componentium AB, & BC; etiam ipsa tota AC erit irrationalis ex propos. 9. huius, ipsis partibus componentibus AB, & BC. Cuius nomen erit Binomium, quia ex duabus integratur.

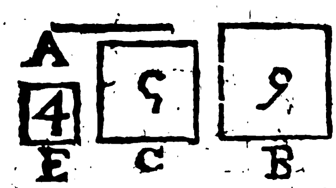
Quod præcedenti propos. explicauimus Binomium, est genus quoddam, quod sex differentias Binomiorum sub se complectitur. Illæ verò exoriuntur à comparatione duarum, ex quibus componuntur potentiâ tantùm sibi inuicem commensurabilium comparatarum lineæ Rationali, respectu, cuius dicuntur rationales, seu longitudine, seu potentiâ; & quia in superioribus vidimus duas differentias linearum commensurabilium potentiâ tantùm, primam propos. 13. nempe, cùm maior excedit minorem in quadrato suo constituendo spatio tali, quòd si in quadratum redigatur, latus eius sit longitudine maiori commensurabile; inde est, quòd, si hoc primum genus lineæ Rationali comparetur, & maior illi Rationali sit longitudine commensurabilis hinc prima differentia constituatur; Quod si minor sit Rationali commensurabilis iam secundam differentiam obtineamus. Quod si, nec maior, nec minor, sed sicut sunt incommensurabiles inuicem, ita quoque sint Rationali, & tertia differẽtia habetur.

Secundum verò genus linearum sibi inuicem incommensurabilium est; quandó vnâ alteram excedit tali spatio quadrato, quod habeat latus eidem maiori incommensurabile ex propos. 14. & eodem ordine dat tria alia Binomia. Nam vel maior linea, seu Nomen est commensurabile datę Rationali, & ecce. Quartũ, vel minor ei commensuratur, & ecce Quintum; vel neutra incommensurabilium, ei commensuratur, & ecce. Sextum. Docebimus itaque modum in sequentibus reperiendi hæc omnia Binomia, ob quæ necessarium est priùs refricare memoriam eorum, quæ diximus lib. 9. Expens. vltima.

PROBL. I. PROPOS. XVII.

Inuenire ex Binis Nominibus primam.

Oportet primò reperire duas lineas longitudine commensurabiles A, & B ex Corollario propos. 11. huius, quarum prima A statuatur pro Rationali. Alteri verò B inueniatur altera C longitudine solùm incommensurabilis, & gaudeat conditionibus, quas assignauimus propos. 13. huius nempe repertis duobus numeris quadratis 4. & 9.



quorum excessus 5. non sit quadratus. Maioris B quadratum obtineat ad minoris C quadratum eam proportionem, quam maior quadratus numerus 9. ad excessũ 5. non quadratũ. Nã si duę istæ potentiâ tantùm commensurabiles componantur; linea tota ex illis duabus coalescens, erit primum Binomium.

Probatur. Nam potitur duabus conditionibus ad primum Binomium requisitis. Prima est, quòd rationali A sit maius nomen B commensurabile, vt ex constructione constat.

Secunda est, quòd est de genere illorum linearum potentiâ tantùm commensurabilium, quarum quadratum, quod potest efficere, maior B excedit minoris C quadratum excessu quodam quadrato; quòd habet latus commensurabile ipsi maiori, cùm eius B quadratum, quod est, vt numerus 9. sit ad quadratum minoris C, vt numerus 5. ex propos. 11. huius, & ideo excessus E sit vt 4. numerus quadratus ad ipsum 9. numerum quadratum. Vnde latus illius excessus, in quadratum redacti ad quadratum ipsius B maioris erit commensurabile ex propos. 4. huius. Si ergo B, & C componantur ex 16. efficient Binomium, quod ex dictis requisitis erit primum.

PROBL. II. PROPOS. XVIII.

Inuenire ex Binis Nominibus secundam.

Sit Schema præcedens; Et sumantur, vt priùs duæ commensurabiles A, C, & A statuatur pro Rationali; huic verò C inueniatur potentiâ tantũ commensurabilis B eadem arte, ac modo, quo propos. 13. huius; sed cum hac differentiâ ab anteced. quod vt excessus numeri 5. non quadratus, ad quadratum numerum maiorẽ 9. sic quadratum ex C minori, & commensurabili linea ipsi Rationali ad quadratum ex B maiori erectum. *Latera enim horum quadratorum in vnam lineam composita* ta exhibebunt Binomium secundum.

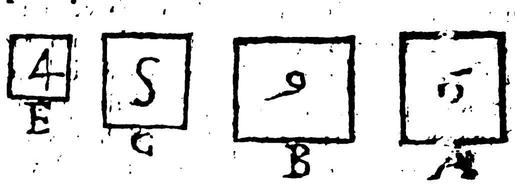
Probatur. Nam minus nomen, nempe latus minoris quadrati c est ex constructione commensurabile Rationali datæ A, est autem minus latere B, quod sit quadratum ex c ad quadratum ex A, vt excessus non quadratus, & reliquus 5. ad numerum excedentem, & totum 9. & ideo ad maiorem. Quare, & latus c, vtpote quadrati minoris erit minus latere B.

Secundam verò conditionem ex effectione propos. 13. adipiscitur, cùm non obtineant proportionẽ earũ quadrata, vt numerus quadratus ad numerũ quadratũ. Et quadratũ maius B superet c quadrato E sibi B in latere commensurabili, vt propos. 13. ostensum est; Vnde si componantur B, & c ex 16. efficient Binomium, quòd erit ex dictis secundum.

PROBL. III. PROPOS. XIX.

Inuenire tertium Binomium.

PRæcept. 1. Inuentis duobus numeris quadratis 4. & 9. eá conditione, qua propos. 13. vt excessus 5. non sit quadratus; Sumatur ex prop. 18. l. 9. numerus alius, qui ad neutrũ eorum 5. & 9. proportionem dicat, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, qui sit 6. Deinde vt est numerus non quadratus 6. ad quadratum 9. sit quadratum Rationalis A ad quadratum, cuius latus B; nec sit quadratum Rationalis A proportionatus ad quadratum ex B, vt quadratus numerus ad numerum quadratum. Ideoque licet quadrata sint rationalia; quia sunt, vt numerus ad numerum; ipsa tamen latera A, & B potentiá tantùm erunt commensurabilia, non longitudine ex propos. 4. huius.



Præcept. 2. Deinde fiat iuxta propos. 13. huius vt quadratus numerus 9. ad suum excessum 5. non quadratum: ita quadratum eiusdem rationis, cuius latus B, ad aliud quadratum ex propos. 11. huius, & sit huius quadrati latus c. Dico, *quod si c & B componantur erit Binomium tertium.*

Prob. Progr. 1. Quoniam primam conditionẽ genericam consequitur ex constructione. Quia quadratum B superat quadratum c quadrato quodam E, cuius latus est maiori B commensurabile, quia est vt 9. ad 5. cuius residuum vsque ad 9. est 4. numerus quadratus, & ideo etiam quadratum c habet residuum, cum quo æquat quadratum B, vt numerus quadratus 4. & 5. numerum quadratum 9. ex propos. 13. Vnde ex propos. 4. latus excessus E erit commensurabile lateri B.

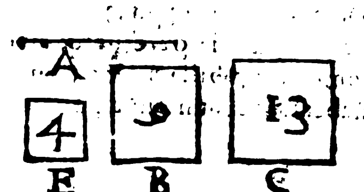
Progress. 2. Habet quoque conditionem specificam nempe, quod ambæ B, & c sint incommensurabiles Rationali A. Et B quidem ex Precept. 1. id consequitur. De linea verò c ostenditur; Quadratum ex A est ad quadratum ex B, vt 6. ad 9. ex effectione, nempe non dicit proportionem eam, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. At quadratum ex B dicit proportionem ad quadratum ex c, quam 9. ad 5. s. non eam quam quadrati numeri ad numerum quadratum. Ergo ex æqui erit vt 6. ad 5. ita quadratum ex A ad quadratum ex c, & ideò non erit illa, quam quadrati numeri ad quadratum numerum. Vnde nec lineę A, & c inuicem commensurabilitatem consequentur. Cum ergo B, & c ad Rationalem A sint incommensurabiles, maiorque B superet minorem c quadrato E, sibi maiori commensurabilis lateris, facient, si componantur Binomium quod ex 16. propos. huius, & ex alijs conditionibus erit tertium.

PROBL. IV. PROP. XX.

Inuenire ex Binis Nominibus quartam.

VSque adhuc vsi sumus pro fundamento Binomiorum propos. 13. huius: nunc vtendum est propos. 14. Iuxtaque ipsius documenta duo numeri quadrati assumendi sunt, ita quòd compositus ex ipsis non sit quadratus, vt 4. & 9. cuius compositum est 13. non quadratus; ideoque nec proportionem dicit, quam quadratus ad numerum quadratum ex prop. 16. lib. 9. Deinde reperiatur A Rationalis, & c ei commensurabilis. Fiatque vt compositus non quadratus 13. ad quadratum alterum ex componentibus, puta 9. ex propos. 11. huius; ita quadratum commensurabilis c ad quadratum alterius B componaturque B, & c, *& erit Binomium quartum.*

Probatur. Nam B, & c sunt commensurabiles solùm potentiâ, cùm eorum quadrata se habeant, vt numerus ad numerum.



Sibi verò vindicant conditionem genericam Binomiorum. Quoniam maius Nomen c, vtpote latus maioris quadrati suo quadrato superat quadratum minoris lateris B quadrato quodam sibi longitudine incommensurabili, vt ostenditur citata propos. 14.

Obtinent quoque requisitum specificum: Etenim c maius nomen acceptum est ex effectione commensurabile Rationali A. Cum ergo c sit commensurabilis rationali A & potentiâ tantùm commensurabilis respectu B, quam superat suo quadrato, excessu tali quadrato E, cuius latus sibi est longitudine incommensurabile, sed solùm potentiâ: Si hæ duæ lineæ B, & c coniungantur, efficient ex propos. 16. Binomium, & hoc ex requisitis præallegatis erit quartum.

PROBL. V. PROPOS. XXI.

Inuenire ex Binis Nominibus quintam.

ADhibeatur idem Schema, & repertis duobus numeris, vt prius, eadem fiat constructio numerica, vt in antecedenti, vel 14. prop. h. Deinde accepta quadam Rationali A ipsi commensurabilis inueniatur B; fiatque deinde, vt numerus quadratus V. g. 9. ad compositum ex duobus quadratis non quadratum 13. sic ex propos. 11. huius quadratum ex B, quod erit minus ad quadratum alterum, cuius latus C, quod erit maius, vt numerus quadratus est minor compositorum quadrato, *& B, & C latera in vnam lineam conflata facient Binomium quintum.*

Pro-

Probatur. Quoniam obtinent conditionem genericam Binomij: quia eadem constructio facta est, quæ propos. 14. & ideo B superat C quadrato quodam E, cuius latus sibi maiori B est longitudine incommensurabile: Lineæ quoque B, & C sunt potentiâ tantùm commẽsurabiles; eò quòd earum quadrata sint, vt numerus ad numerum, hoc est, vt 9. ad 13.

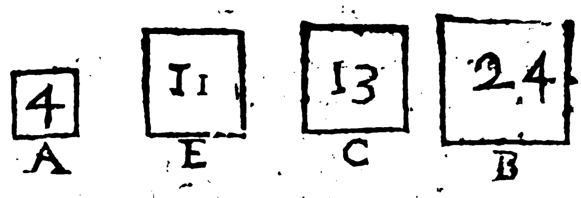
Et tandem obtineat conditionem specificam: nã, & Minus Nomen B est ipsi Rationali A ex constructione commensurabile, ideoque B, & C compositæ facient Binomium, ex 16. h. & hoc quintum erit.

PROBL. VI. PROPOS. XXII.

Inuenire sextam ex Binis Nominibus.

Reperiendi sunt duo numeri non quadrati ex propos. 16. lib. 9. V. g. 11. & 13. qui cõmpositi faciant numerum non quadratum 24. Idcircoque, nec cum eo, quod componunt, nec inuicem dicant proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Assumaturque quilibet numerus, qui ad neutrum ipsorum proportionem habeat, quam quadratus numerus, ad quadratum numerum, vt est quilibet quadratus. V. g. 4. Sumatur deinde Rationalis A, & vt 4. ad 24. sic fiat quadratum ex A ad quadratum ex alia aliqua V. g. B ex propos. 11. huius: eruntque B, & A tantùm potentiâ commẽsurabiles. Deinde fiat, vt 24. ad 13. ita quadratum ex B ad quadratum ex alia C: eruntq; latera longitudine incommensurabilia B, & C; quia eorum quadrata se habeant, vt numerus ad numerum.



Ita quoque se habent incommensurabiliter cum Rationali A: & quidem B, vt diximus: Linea verò C ex hac ratione. Nam vt 4. ad 24. sic A, quadratum Rationalis ad quadratum B, & vt 24. ad 13. ita quadratum B ad quadratum C. Ergo ex æquo, vt 4. ad 13. ita quadratum A ad quadratum C, nimirum, vt numerus ad numerum, & ideo linea Rationalis A, & C erunt inuicem incommensurabiles, & hæc est conditio specifica harum linearum B, & C ad Binomium requisita. Obtinent quoque conditionem genericam. Nam quadratum ex B quadratum ex C superat quadrato quodam E, quod est, vt 11. ad 24. tanquam numerus ad numerum, ideoque sibi maiori B longitudine incommensurabile. Quare si B, & C componantur ex propos. 18. facient Binomium, quod ex prædictis conditionibus erit sextum.

EXPENSIO VI.

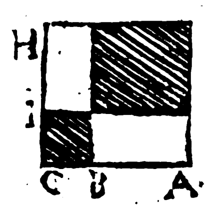
De lineis Apotomis.

Composuimus vsque adhuc lineas irrationales addendo inuicem duas rationales potentiâ tantũ commensurabiles, nunc verò auferendo vnam ab aliâ generabũtur irrationales eodem ordine, ac in præced. Expensione.

THEOR. I. PROPOS. XXIII.

Si à rationali rationalis auferatur potentiâ tantum commensurabilis existens toti; reliqua irrationalis erit, vocatur autem Apotome.

Detrahatur à Rationali AC Rationalis BC, quæ ipsi AC toti potentiâ tantùm sit commensurabilis. Dico *reliquam AB esse irrationalem respectu lineæ AC, & BC.*



Probatur ferè eodem argumento, quo propos. 16. Rectangulum AI sub AC, & BC cõtentum, cùm AC, & CB ponantur longitudine incommensurabiles ex 1. l. 6. erit incommensurabile quadrato nigro, ex BC constituto; etenim cum sint eiusdem altitudinis, sunt inuicem, vt bases.

Progress. 2. Addatur rectangulo eiusdem AI seminigro duplum, & sint duo rectangula seminigra AI, & BH æqualia, & ideo inuicem sibi commensurabilia pro vna parte. Pro alia verò addatur quadrato nigro ex BC aliud quadratum AB ex tota AC, quod ei vtique est commensurabile, cum lineæ ipsæ ponantur commensurabiles potentiâ. Factaque hac additione ex propos. 8. huius manebunt duo rectangula seminigra sumpta, vt vna quantitas, & duo quadrata nigrum ex CB, & AC ex tota pariter vt vnum quid sumpta inuicem incommensurabilia, vt erant priùs.

Progress. 3. Addatur rursus rectangulis quadratum nigrum ex AB: Efficiemusque magnitudinem ex totâ AC, & ex quadrato nigro BC, ex 9. l. 2. quare magnitudo tota ex rectangulis seminigris duobus, & quadrato nigro BA erit tunc commensurabilis, vtpote illi æqualis, quantitati ex duobus quadratis nempe ex tota AC, & parte BC constitutis, & ideo cum illa ex progr. 2. sit rectangulis incommensurabilis etiam hæc incommensurabilis parti componenti, nempe rectangulis ijsdem duobus seminigris erit. Cum itaque tota magnitudo ex rectangulis composita, & quadrato AB nigro sit incommensurabilis vni parti componenti: nempe rectangulis duobus seminigris; erit etiam incommensurabilis alteri ex Coroll. propos. 10. huius, scilicet quadrato ex AB. Et ideo etiam quadratum ex tota AC, & quadratum ex parte BC æqualia rectangulis, & quadrato alteri ex AB, erunt eidem nigro ex BA incommensurabilia, & insuper cum quadrata AC, & ex parte BC ex hypothesi sint inuicem commensurabilia, quòd lineæ AC, & BC sint potentia commensurabiles, & ideo etiam toti ex propos. 9. huius, erit etiam vnumquodque eorum eidem quadrato, ex BA incommensurabile ex prop. 8. h.

Igitur

Igitur, cùm quadrata ex BC, & AC sint incommensurabilia, quadrato ex AB; Lineæ ipsæ, & latera erunt irrationalia ex propos. 4. huius. Vnde ablata BC ex AC relinquet residuum AB incommensurabile, & toti AC, & ablato BC, & ideo dicetur Apotome.

Sex species Apotomarum, quæ exoriuntur à lineis potentiâ tantùm commensurabilibus, vt Binomiorum, reperiuntur.

Nam, vel maior plùs potest, quàm minor linearum potentiâ tantùm commensurabilium, & differentia potentialis est quadratum, cuius latus maiori est commensurabile, & hoc genus parit tres species Apotomum, prout comparantur cum aliâ quadam Rationali. Nam si maior sit Rationali commensurabilis est prima Apotome, si minor exoritur secunda Apotome, si nec vna, nec altera oritur tertia Apotome dummodo minor harum linearum ad Rationalem comparatarum auferatur à maiore, vt Reliqua Apotome sit.

Secundum genus linearum potentiâ tantùm commensurabilium explicatum propos. 14. ex illud, quarum vna potest magis, quàm alia, & differentia est quadratum quoddam, cuius latus est maiori incommensurabile, & hoc genus parit tres species Apotomum eodem ordine. Nam vel maior est commensurabilis expositæ Rationali, & obtinemus quartam speciem, vel minor, & consequimur quintam, vel nulla Rationali commensuratur, & sextam Apotome habebimus.

PROBL. II. PROPOS. XXIV.

Apotomum sex species reperiuntur.

REperiuntur eodem modo, ac Binomia, solumque in hoc differenti; quòd repertis lineis duabus nempe maiori, & minori Nomine, deinde, vt Binomium efficiatur, coniunguntur simul. Hic verò minor linea, quæ dicitur Congruens, subducitur à maiori, quæ dicitur Tota, & quod restat, vocatur Apotome, seu Reliquum. Ita primum Binomium paritur per coniunctionem duarum linearum ex propos. 17. quarum minor, si subducatur à maiori efficitur Apotome prima, & si duæ lineæ repertæ propos. 18. coniunctæ faciunt Binomium secundum, si minor earum subducatur à maiori faciet Apotomem secundam. Sic dicas de alijs: Vnde singulas propositiones non replicabimus; sed propos. 19. dabit Apotomem tertiam, propos. 20. Apotomem quartam. prop. 22. Apotomem quintam. Tandem propos. 21. Apotomem sextam docebit inuenire.

EXPENSIO VII.

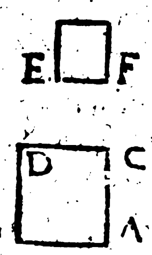
De Irrationalibus Medijs.

HIc agimus de lineis irrationalibus, quæ resultant per relationem ad alias, & proportionem, & in duplici genere sunt. Vel enim ad lineas, quæ potentiâ tantùm sunt inuicem commensurabiles referuntur, & vocantur mediæ, eò quòd sint medium proportionale inter duas potentiâ tantùm commensurabiles. Vel non sunt media inter duas incommensurabiles, sed nascuntur per æquipotentiam ad spatia irrationalia; & hoc secundum est genus, quod sub se habet species de quibus infra. Porrò Mediæ in duplicem speciem secernuntur, Aliæ enim sunt; quarum duæ sumptę faciunt rectangulum sub ipsis contentum Rationale, licet singularũ quadrata sint irrationalia Quadrato Expositæ Rationalis, quas explicamus 29. & alię quarum rectangulum est irrationale, quas docemus inuenire propos. 30.

THEOR. I. PROPOS. XXV.

Recta linea potens quadratum irrationale, irrationalis est.

POssit recta AB quadratum ABCD, scilicet ex ea fiat, vel factum supponatur, & hoc sit irrationale scilicet comparatum, cum quadrato alicuius lineæ FE, sit irrationale, nullàque communi mensurâ dimetiri possit. *Dico, quod etiam linea* AB *sit irrationalis comparata cùm linea* FE.

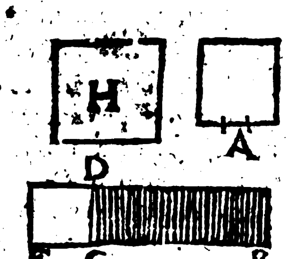


Probatur. Nam si dicitur rationalis eius quadratum erit rationale: ex propos. 4. huius, quòd est contra Thesim.

THEOR. II. PROP. XXVI.

Quod sub rationalibus potentiâ solùm commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum irrationale est, & recta linea ipsum potens; nempe potens efficere quadratum illi æquale, irrationalis. Vocatur autem Media.

SIt data rationalis A, cui adsint duæ aliæ potentia tantùm commensurabiles BC, & CD, ex quibus rectăgulum nigrum componatur. Dico, *quod hoc rectangulum est irrationale comparatum cum quadrato lineæ* A. Insuper, & assero, quòd, si fiat quadratum H æquale dicto rectangulo, *linea recta latus huius quadrati erit irrationalis respectu lineæ* A, & quòd vocanda sit *Media*.



Probatur prima pars. Nam descripto quadrato ex altera illarum, & ex DC, quod erit rationale, & quadrato lineæ A commensurabile; cum lineę datę BC, & CD sint ei potentiâ commensurabiles: idest earum quadrata sint commensurabilia, eritque insuper eiusdem altitudinis ob latus idem CD, quare ex 1. lib. 6. erunt in eadem proportione ita latera, vt quadrata, & eodem modo referentur latus CE lateri BC, vel æquali DC; vt rectangulum nigrum ad quadratum album; sed hæ lineę, lateraque sunt incommensurabilia. Idcircò etiam incommensurabilia erunt rectangula album, & nigrum ex propos. 5 huius. Sed quadratum DE album est commensurabile quadrato ex Rationali A constructo; Ergo rectangulum nigrum erit eidem quadrato Rationalis incommensurabile ex propos. 7. huius.

Probatur secunda pars. Nam cum rectangulum nigrum fuerit ostensum irrationale, etiam quadratum H; quod ei supponitur æquale, erit irrationale comparatũ quadrato Rationalis A, & ideo latus eius ex anteced. propos. erit irrationale.

Probatur tandem latus huius quadrati H sit vocandum Linea Media. Nam ex propos. 19. lib. 6. illa linea media proportionalis est inter alias duas, cuius quadratum est æquale rectangulo ab illis duabus constituto. Quare cum quadratum H sit æquale rectangulo nigro lineis BC, & CD constituto, erit latus eius media proportionalis, inter huius rectanguli latera BC, & CD.

COROLLARIVM I.

Hinc videre est spatium medio spatio commensurabile medium esse, idest irrationale. Nam postquam demonstratum est spatium DB incommensurabile esse spatio DE; ostensum quoque est medium esse, cum ipsum potens sit media scilicet latus quadrati H.

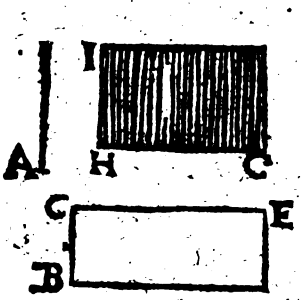
COROLLARIVM II.

Hinc quoque educes omnia spatia sub irrationalibus duabus, seu longitudine, seu potentiá contenta esse vni earum quadrato incommensurabilia, & irrationalia, quod, ita sint quadratum DE ad rectangulum DB, vt ipsæ lineæ EC ad CB; sed ipsæ ponuntur irrationales. Quare etiam rectangulum nigrum albo quadrato erit irrationale.

THEOR. III. PROP. XXVII.

Si ex Rationali fiat rectangulum æquale quadrato Mediæ; alterum latus erit ei Rationali potentiâ tantùm commensurabile.

Sit data Media A, & Rationalis BC, siue longitudine, siue tantùm potentiá; ex qua tanquàm ex vno latere, vel per propos. 43. lib. 1. vel reperiendo extremam BC, & A lineis proportionalem CE. Nam rectangulum ex 9. lib. 6. ex extremis CE, & CB constitutum erit æquale quadrato mediæ A. Dico, *quod hæc tertia proportionalis* CE *est Rationalis potentiâ tantùm Rationali* BC *commensurabilis*.



Probatur. Nam quadratum ex Media est æquale rectangulo sub duabus rectis lineis potentiá tantùm commensurabilibus comprehenso, vt ex propos. ant. Sit ergo illud GI habens lateri CB, latus HI potentiá tantùm cõmensurabile. Modo sic arguo. Rectangula BE, & GI sunt æqualia, vtpote vni tertio æqualia; nimirum quadrato ex media A. Ergo habebunt latera ex propos. 10. l. 6. reciprocè proportionalia. Quare eandem proportionẽ dicet HI ad CB, quã CE ad GH: Sed HI, & CB sunt potentiá tantùm commensurabiles: Ergo etiam GH, & CE ex 5. h. Sed HI cõmensuratur ipsi HG ex Thesi. Ergo ex 6. h. inuicem IH, & CE: sed CB cõmensuratur codẽ modo HI, & CE quoq; Ergo & inter se.

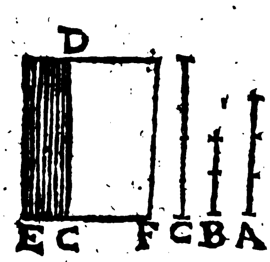
THEOR. VI. PROP. XXVIII.

Mediæ commensurabilis media est.

Sit recta A mediæ B commensurabilis; *Dico, & B mediam esse idest incommensurabilem*.

Detur itaque Rationalis, respectu cuius B media est, & sit C. Applicetur q; ei C, vel quod idẽ est, fiat ex eá, tanquám ex vno latere rectangulum nigrum E B, quod sit æquale quadrato mediæ B ex propos. 43. lib. 1. Et ex præced. EC erit Rationalis potentiá tantùm commensurabilis. Deinde ex Rationali C; tanquam ex vno latere ex eadem propos. 43. lib. 1. fiat rectangulum æquale quadrato datæ A. Cum ergo media B, & A recta data ponantur commensurabiles, earum quadrata erunt commensurabilia ex propos. 4. huius; quamobrem rectangula quoque quadratis æqualia erunt commensurabilia, quibus suppositis.

Probatur. Rectangula DE, & DF ob eandem Rationalem DC, quæ vtriusque latus contexit, sunt eiusdem altitudinis: Ergo ex propos. 1. lib. 6. se habebunt inuicem, vt Bases EC, & CF; cum ergo Rectangula album, & nigrum sint cõmensurabilia ex hypothesi; bases quoque erunt inuicem cõmensurabiles EC, & CF. Sed EC Rationali DC est incommensurabilis longitudine; sed solum potentiá, vt dictum est ex præc. propos. Ergo etiam talis erit CF ex propos. 8. h. Sunt ergo hæc duo rectangula nigrum, & album contenta sub incommensurabilibus longitudine, quia EC est incommensurabilis ipsi C, & eidem quoque CF ostensa est incommensurabilis: Quare & rectæ lineæ, quę quadrata æqualia istis rectãgulis efficere possunt, ex propos. 25. huius. Sed talis est A, Quoniam fecimus rectangulum album, illius quadrato æquale: Ergo erit Media.



COROLLARIVM

Hinc educitur spatium quoque medio spatio commensurabile medium. Quia rectangula nigrum, & album ponuntur commensurabilia, & tamen probantur media, dum ostenditur contineri sub lineis potentia tantum commensurabilibus. Vnde ex propos. 25. erit spatium irrationale, & linea ipsum potens media B, & consequenter appellabitur spatium medium ab ipsa linea, quæ ipsum potest accipiendo denominationem.

PROBL. I. PROP. XXIX.

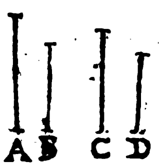
Medias inuenire potentiâ tantùm commensurabiles, quæ rationale contineant.

Sint duæ potentiá tantùm commensurabiles ex propositione. 12. huius A, & B, inter quas media proportionalis sumatur C, ex propos. 16. lib. 6. & ex propos. 15. lib. 6. reperiatur huic quarta proportionalis D; ita quod ita sit in proportione A ad B, vt C ad D. *Dico* C, *&* D *esse medias potentia tantùm commensurabiles. Secundò, quòd si fiat ex eis rectangulum, illud erit rationale.*

Probatur prima pars. Nam A, & B potentiá tantùm

tantùm sunt commensurabiles. Ergo, cùm eandem proportionem dicant A ad B, vt C ad D, erunt etiam C, & D inuicem commensurabiles ex prop. 5 huius solùm potentia.

Probatur secunda pars: Nam fundamentum proportionis A est ad suum terminum B, ex construct. vt fundamentum C ad terminum D: Ergo *permutando* referetur fundamentum A ad fundamentum C, vt terminus B ad terminum D.



Sed ex constructione, cùm C sit media proportionalis, ita est A ad C, vt C ad B. Ergo etiam erit, vt C fundamentũ ad B terminũ, ita B ad terminum D, quòd sit eadem proportio C ad B, quæ A ad C, & quæ A ad C eadem, talis sit B ad D ex ostensione superiori Et ideo etiam B erit media proportionalis inter C, & D; Propiereaque eius quadratum erit æquale rectangulo ex C, & D ex 19. propos. lib 6. Est autem quadratum ex linea B constructum Rationale cum B sit Rationalis potentiá tantum commensurabilis: Ergo, & rectangulum, ex rectis C, & D tanquam lateribus compactum erit Rationale.

COROLLARIVM.

SI A, & B sint lineæ tales potentiá commensurabiles; ita quòd quadratum maioris superet quedratum minoris spatio quodam, quod in quadratum redactum habeat latus commensurabile ipsi maiori, vt docemus propos. 13 Etiam mediæ adiumento earum repertæ simili conditione gaudebunt, & C maior poterit plùs, quam D minor quadrato lineæ rectæ maiori commensurabilis. Nam ita est A ad B, vt C ad D; potest verò A plus quam B quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Ergo etiam C plus, quam D eodem genere quadrati poterit, vt ex propos. 15. huius Reperientur autem duæ cum hac conditione ex prop. 13. huius.

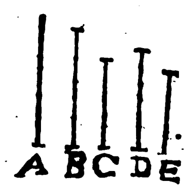
RROBL. II. PROPOS. XXX.

Medias inuenire potentiá tantùm commensurabiles, quæ spatium irrationale contineant.

SInt tres Rationales potentia tantum commensurabiles A, B, C, & inter A, & B media D proportionalis inueniatur ex propos. 16. lib. 6. Deinde reperiatur ipsi D quarta proportionalis E ex propos. 15. sexti; ita quòd, sicut B refertur ad C lineam, tali quoque proportione D referatur ad lineam E. Dico D, & E esse medias proportionales potentia tantùm commensurabiles. Secundo Dico; *quòd spatium irrationale contineant, quòd appellatur medium*.

Probatur A, & B sunt lineæ ex hypothesi potentiá tantùm commensurabiles. Ergo rectangulum factum ex ipsis ex propos. 26. huius erit medium. Sed D est inter easdem A, & B media proportionalis: Ergo ex propos. 19. lib. 6. eius quadratum rectangulo ex lineis A, & B facto erit æquale, & etiam quadratum ex D erit medium, & irrationale, & D media. Quippe quod rectangulo irrationali sit æquale.

Sed B refertur ad C, vt D ad E. Illæque B, & C sunt potentiá tantùm commensurabiles; Quambrem, & E ipsi D erit potentiá tantùm commensurabilis ex propos. 5 huius. Propterea erit quoque E media ex propos. 28. huius. Ergo D, & E mediæ sunt potentiá tantum commensurabiles.



Probatur quoque 2. pars. Nempe quòd, si ex E, D lineis fiat rectangulũ, illud sit mediũ. Fundamentum B refertur ad terminum C, vt fundamentum D refertur ad terminum E, ex constructione. Vnde *permutando*, ita erit fundamentum B ad fundamentum D, vt terminus C ad terminum E. Sed D est media proportionalis inter A, & B. Quare ex rè, vt est A ad D, sic erit D ad B in proportione. & *inuertendo* eá proportione respiciet B ipsum D sicut D ipsum A. Cum itaque sit B ad D, vt D ad A: Ergo etiam referetur terminus C ad terminum E, vt D refertur ad A: quia est ipsorum D, & A proportio eadem, quæ fundamenti B ad fundamentum D, & ideo eadem, quæ termini C ad terminum E.

Cum ergo istæ quatuor lineæ sint proportionales, & D sit ad A; vt C ad E; rectangulum ex propos. 18. l. 6. quod continetur sub extremis D, & E erit æquale rectangulo à medijs contento A, & C: sed rectangulum hoc ex lineis C, & A est medium ex propos. 26. huius. Ergo etiam rectangulum factum ex lineis E, & D ei æquale.

COROLLARIVM.

HInc nascitur, quod si maior B plus possit quã C quadrato habente latus commensurabile ipsi maiori B: quod etiam sic se habebit D ad E, & suo quadrato superabit quadratum ipsius E quadrato tali, quod habebit latus sibi commensurabile Ratioque est eadem, quæ præced. Coroll. quia ponitur, sic esse B ad C, vt D ad E in proportione. Potest verò B plus, quam C quadrato rectæ lineæ sibi maiori incommensurabili: ergo etiam D plus poterit; quam E eodem genere quadrati, ex 15. huius: Porrò reperientur duæ B, & C cum ea conditione ex propos. 14. huius.

EXPENSIO VIII.

De irrationalibus, quæ nascuntur à medijs.

MEdiæ licet respectu Rationalis irrationales sint, inuicem tamen commensurabiles sunt, ex propos. 28. huius. Idcirco penes diuersos respectus & relationes possunt dici, & rationales, & irrationales; irratioales quidem respectu Rationalis expositæ, at rationales inuicem: De istis verò duo genera assignauimus: Primum propos. 29. quæ rationale spatium continent: Secundum propos. 30. quæ medium spatium amplectuntur. Nunc ex isto duplici genere mediarum; Quatuor species oriuntur irrationalium linearum; duæ per compositionem, duæ per subtractionem, vt supra ex rationalibus potentia tantùm Binomia, & Apotomes nascebantur. Si ergo potentiã commensurabilis mediæ, ei addatur; quæ ambæ rationale spatium contineant, vocabitur ex Binis Medijs prima, seu primum Binomium Medium. Si verò vna subducatur ab aliá, vocabitur media

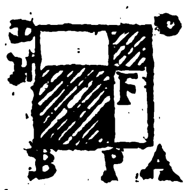
Apotome prima. Si verò duæ mediæ inuicem potentia commensurabiles medium contineant spatium, & vna addatur alteri vocabitur ex binis medijs secunda; seu Binomium Medium secundum: Si verò vna subducatur ab alia, dicitur media Apotome secunda.

THOR. I. PROPOS. XXXI.

Si duæ mediæ potentia tantùm commensurabiles componantur, quæ rationale contineant, tota irrationalis erit, quæ vocatur ex Binis Medijs Prima.

COmponantur duæ Mediæ PA, & PB superiùs inuentæ propos. 29. quæ rationale rectangulum contineant. *Dico totam irrationalem esse.*

Probatur. Nam rectangulum album AF ex medijs AP, & PB ita refertur ad quadratum nigrum ex BP ex 1. l. 6. cum sit eiusdem altitudinis, vt bases; Sed bases sunt incommensurabiles: Ergo etiam Rectangulum AF album est incommensurabile quadrato nigro PH.



Addatur rectangulo aliud æquale FD, & ideo sibi commensurabili: Quadrato verò PH nigro ex PB, quadratum nigrum OF ex AP, quod vtique ei erit commensurabile; cùm mediæ inuicem ponantur potentiâ commensurabiles. Illa duo rectangula alba AF, & FD adhuc erunt incommensurabilia quadratis nigris, ex propos. 8. huius.

Verùm si omnia hæc aggregentur simul, duo rectangula alba, cum duobus quadratis nigris, ex propos. 10. hoc aggregatum ex magnitudinibus irrationalibus vtrique parti aggregatæ irrationalis erit, & signanter duobus rectangulis albis, quæ magnitudo est vna pars aggregata.

Tota autem hæc magnitudo irrationalis, nempe duo rectangula alba, & duo quadrata nigra æquant ex propos. 6. l. 2. quadratum AD ex tota AB; Ergo hoc quadratum AD ex tota AB erit irrationale respectu rectangulorum alborum, quæ sunt rationalia, & ideo etiam respectu quadrati Rationalis. Quaderè etiam ipsa tota AB, latus ipsius, erit incommensurabilis lineæ Rationali.

Vocatur autem *Binomium medium*; quod componatur ex duabus medijs, & *primum* ad differentiam secundi.

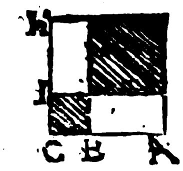
THEOR. II. PROPOS. XXXII.

Si à media media auferatur potentiâ tantùm ei commensurabilis, quæ rationale contineant, Reliqua irrationalis erit; vocatur autem Media Apotome prima.

ACcipiantur duæ mediæ potentiâ tantùm commensurabiles, quę spatium rationale contineant inuentæ propos. 32. huius CB, & AC, & minor BC subducatur à maiori AC. *Dico residuum AB esse lineam irrationalem.*

Probatur. Rectangulum AI sub maiori AC, & minori BC est rationale: Quare etiam duplicatum erit rationale, vt sunt AI, & BH. Quadrata verò nigra ex medijs AH, & BI irrationalia respectu Rationalis quadrati, licet inuicem rationalia, & ideo etiam irrationalia respectu rectangulorum AI, & BH, vtpote illi quadrato Rationalis commensurabilium ex Thesi.

Si verò totum ex duobus quadratis AH, & BI sumatur erit vtique singulis quadratis commensurabile: cum partes ipsæ nempe quadrata sint inuicem commensurabilia, & ideò respectu rectangulorum AI, & BH erit totum irrationale ex propos. 8. huius.



Verùm, si rectangulis duobus addatur quadratum ex AB, ex 9. secundi fit magnitudo æqualis magnitudini duorum quadratorum BI, & AH; ideoque sicut duo quadrata AH, & BI sunt rectangulis ostensa incommensurabilia, sic erit hoc aggregatum ex rectangulis, & quadrato BA ipsis AH, & BI nigris quadratis æquale, rectangulis eisdem AI, & BH seorsim sumptis erit irrationale.

Cùm itaque tota magnitudo ex rectangulis, & quadrato ex AB sit incommensurabilis suæ parti, nempe rectangulis seorsim: Erit etiam incommensurabilis reliquæ parti nempe quadrato nigro ex AB ex parte 2. propos. 10. Quare Quadratum ex AB erit incommensurabile Rectangulis ipsis; sed rectangula ponuntur rationalia respectu Quadrati lineæ Rationalis: Quaderè etiam quadratum ex AB erit irrationale ex propos. 8. respectu quadrati lineæ Rationalis; Et idcirco etiam ipsa AB ipsi Rationali, irrationalis erit.

THEOR. III. PROPOS. XXXIII.

Si duæ mediæ potentiâ tantùm commensurabiles componantur, quæ medium contineant, tota irrationalis erit; vocatur autem ex Binis Medijs Secunda.

COmponantur duæ mediæ potentiâ tantùm inuicem commensurabiles AB, & BC, quæ medium spatium contineant. *Dico totam AC irrationalem esse.*

Præassumptum. Vt propos. ostendatur pręsupponendum est, Duo rectangula alba inuicem æqualia esse media; quia alterum ex ipsis sub AB, & BO ex Thesi est medium, & ideo eius duplum, eique commensurabile, medium est ex Coroll. propos. 30.

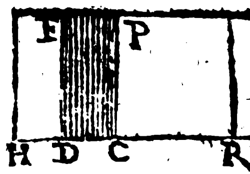
Sic quoque quòd quadrata nigra sunt media, quia lineæ AB, & BO eorum latera contexentes ex Thesi sunt mediæ respectu rationalis, licet inuicem comparatæ commensurabiles sint potentiâ; ideoque eorum quadrata inuicem sibi erunt commensurabilia, & hinc compositum ex ipsis ex propos. 10. erit medium, & irrationale, sicut ipsa seorsim irrationalia sunt.

Deinde Rationali ED expositæ applicandum est rectangulum EH, sicut ex eâ, tanquam ex vno latere, efficiendum est EH ex propos. 43. primi; quod rectāgulum sit ęquale duobus medijs rectangulis albis, & eidem aliud rectangulum PD applicandum est, quod sit æquale duobus quadratis nigris item medijs.

Primo itaque est ostendendum spatium totum

PH

PH esse irrationale respectu quadrati lineę Rationalis; & hoc demonstrabitur ex eo, quod conti-



neatur sub CD, & DH, quę ostendetur potentiâ tantùm commensurabiles, quæ compositæ facient ex propos. 16. h. lineam irrationalem CH; linea verò DE, vel æqualis CP Rationalis est. Ideoque spatium PH erit irrationale, vt ostendetur: Quibus omnibus suppositis, cùm spatium PH irrationale, sit æquale quadratis nigris, & albis rectangulis ex effectione, quæ ex propos. 6. lib. 2. faciunt quadratum ex tota AO, erit quadratum AK ex tota AO irrationale: Quamobrem etiam latus, & tota AO erit irrationale.

Primo itaque progressu ostendendum est duas CD, & DH esse rationales potentiâ tantùm commensurabiles, & ostendetur primo esse incommensurabiles longitudine. Nam in figura primò proposita rectangulum AI ex AB, & BO album quadrato nigro ex BO incommensurabile est; quòd ex 1. lib. 6. rectangulum sit ad quadratum eiusdem altitudinis, vt basis AB ad basim BO; ideoque cum bases sint incommensurabiles, etiam rectangulum AI album ex AB, & BO erit nigro quadrato ex BO incommensurabile. Ideoque etiam duo rectangula duobus quadratis erunt incommensurabilia, quia rectangulum rectangulo æquali. Quadra tumq; quadrato commensuratur ad præassump. Ideoque spatium quoque nigrum PD æquale quadratis erit incommensurabile spatio albo EH æquale rectangulis. Ipsæ ergo lineæ erunt incommensurabiles, cum sit rectangulum nigrum ad rectangulum album, vt basis ad basim ex 1. l. 6.

Probatur deinde 2. Progr. Quod etiam sint potentiâ commensurabiles. Nam spatium nigrum PD est medium, vtpote æquale quadratis nigris medijs ex præassumpt. & DE Rationalis. Ergo alterum latus CD erit Rationale saltem potentiâ, ex propos. 27. Et ex eadem cum spatium album EH sit medium, vtpote medijs rectangulis albis AI, & IH æquale, latus eius alterum HD erit potentiâ commensurabile, quia ED Rationalis est; itaque lineæ CD, & DH sunt incommensurabiles longitudine quidem, vt supra ostensum est: Verùm, vt modo ostendimus, commensurabiles potentiâ; compositę facient lineam CH irrationalem ex propos. 16. huius, ideoque spatium PH conclusum sub rationali DE, vel CP, & sub irrationali CH erit irrationale: Quod consequens modo demonstrandum est.

Progress. 3. Si spatium CH esset rationale spatium, latus quoque CH esset rationale, & sic rationale, & irrationale; quod repugnat. Irrationale quidem, vt probatum est progress. 2. Rationale verò, vt ostendetur ex sententiâ aduersariorũ, si spatium ex CH afferant rationale. Nam facto quadrato PR ex Rationali CP, ita erit quadratum PR ad rectangulum HP, vt RC ad CH: sed rectangulum HP comparatum quadrato PR ex aduersarijs est rationale: Ergo latus RC, vel æquale DE respectu lateris CH ob eandem altitudinem CP erit rationale, contra quòd ostensum est progress. 2. cum itaque hoc spatium PH sit irrationale, & sit æquale quadrato AK etiam quadratum illud erit irrationale, & linea AC irrationalis erit respectu rationalis DE, quod erat ostendendum.

COROLLARIVM

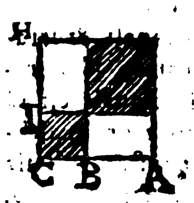
HInc est, quod medium spatium non superet medium spatium spatio rationali; sed irrationali spatio. Siquidem quadratum AK est irrationale, & medium, cui æquatur rectangulum PH & ideo irrationale est. Rectangulum quoque nigrum PD est irrationale, & medium, quòd superatur à rectangulo PH spatio EH, quòd ostensum est irrationale; siquidem si spatium EH esset Rationale, etiam rectangula AI, & IK æqualia essent rationalia.

THEOR. IV. PROP. XXXIV.

Si à mediâ media auferatur potentiâ tantùm commensurabilis existens toti, quæ cum tota medium contineat reliqua irrationalis erit, vocatur verò mediæ Apotome secunda.

DEtrahatur à media AC media BC, ei AC tantùm potentiâ commensurabilis; quæ cum tota AC medium rectangulum contineat. *Dico reliquam* BA *irrationalem esse lineæ alicui expositæ Rationali, cui* BC, *&* AC *mediæ sunt*.

Probatur. Nam, cum latera AC, & BC potentiâ tantum sint commensurabilia, efficient sua quadrata commensurabilia: Quare etiam composita ex 9. huius, magnitudo ex compositione resultans verisque seorsim commensurabilis erit. Quamobrem, cùm ea quadrata ex hypothesi media sint, tota magnitudo eis commensurabilis media erit ex propos. 9. huius.



Progress. 2. Rursùs, quia rectangulum sub AC, & BC medium, & irrationale est ex Thesi; si accipiantur duo ex ipsis AI, & BH; Tota quoque magnitudo media erit ob eandem rationem, quòd dupla sit singulis partibus, & duplum suæ parti dimidiæ commensurabile sit.

Progress. 3. Sciendum verò est ex 8. lib. 2. Duo quadrata, totum ex AC, & nigrum ex CB prædicta esse æqualia duobus rectangulis AI, & BH addito eis quadrato ex BA: Spatium itaque medium ex 1. progr. nempe duo quadrata superat spatium medium ex 2. progr. nempe duo rectangula, quadrato ex AB: sed ex præc. Coroll. medium non superat medium, nisi spatio medio: Ergo illud spatium reliquum, quadratum ex AB erit medium, & irrationale; & linea AB; quæ eius latus existit, erit irrationalis, quæ vocanda est mediæ Apotome secunda.

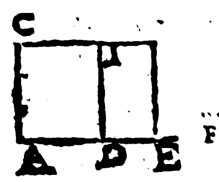
THEOR.

THEOR. V. PROPOS. XXXV.

A mediâ infinitæ irrationales fiunt, & nulli antecedentium est eadem.

Sit media DA. Dico *ex ea fieri irrationales infinitas, quæ nulli ex primo factis eædem sint.*

Exposita enim Rationali AC. Contineatur sub rationali AC, & mediâ AD spatium DC: hoc erit irrationale. Possit illud recta DE, ideſt ſit latus quadrati illi ſpatio æqualis; hoc erit rurſus irrationale quadratum, & DE erit media inter DA & AC ex prop. 19 lib. 6. Addatur DE ipſi Rationali, vel æquali DI, & fiat ſpatium EI, hoc iterum erit irrationale cum contineatur ſub media ED, & rationali DI. Poſſit illud EF, quæ rurſus erit media proportionalis inter ED & rationalem DI, & ſic in infinitum.



Quod vero ED non ſit eadē, ac AD patet, quia EI eſt rectangulum, linea verò ED eſt latus quadrati ei rectangulo æqualis, ſic EF eſt latus quadrati rectangulo EI æqualis: vnde EF non poteſt æquari ipſi ED, ſed nec ipſi DA; cum ſemper proportio, vel creſcat, vel diminuatur. Eſt enim rectangulum ED minus, quam DA ob latus minus ED altero DI ſemper eodem perſiſtente, & ſic de alijs in infinitum.

Quòd verò rectangulum ſub rationali, & irrationali contentum ſit irrationale patet. Nam rectangulum ex media AD, & AC Rationali eſt ad quadratum ipſius Rationalis AC ob eandem altitudinem, quam ipſa Rationalis præſtat, vt baſis AD ad latus AC: ſed ex Theſi ſunt irrationales, ergo etiam ipſum ſpatium erit irrationale quadrato Rationalis, & ſic dicas de omnibus alijs.

EXPENSIO IX.

De lineis in partes commenſurabiles, ſeu incommenſurabiles, & omninò irrationales ſecandis.

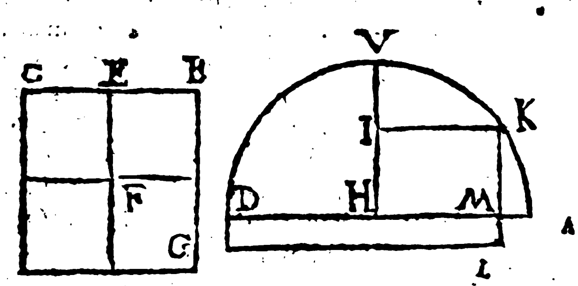
Viſis inuentionibus linearum potentiâ incōmenſurabilium; modo docere oportet, quomodo in qualibet exhibitâ lineâ partes commenſurabiles, ſeu incommenſurabiles reperiatur pro qua indagine neceſſaria eſt propoſ. 30. & 31. lib. 6. in qua docemus applicare rectangulum æquale dato rectilineo alicui lineæ, quòd ad implendam totam eius longitudinē figurâ quadratâ deficiat. Verùm quia propoſitio, vtpote vniuerſalis eſt difficilior, nos verò ſolum indigemus applicatione ad lineam datam rectanguli tantum æqualis quadrato; inde ponemus Lemma faciliùs ad inſtitutum deſeruiens.

LEMMA I. PROP. XXXVI.

Datæ rectæ maiori rectangulum applicare æquale quartæ parti quadrati à minore deſcripti: ſed taliter, vt per totam non ſe extendat; ſed ſpatium relinquat, cui quadratum applicari poſſit.

Sit linea maior AD, minor CB, quæ diuiſa bifaria in E; quadratum ex medietate CE deſcriptum, vt CF erit quarta pars quadrati à tota deſcripti CG, ex propoſ. 6. ſecundi Coroll. Huic ergo quartæ parti CF ſit applicandum ad lineam AD maiorem æquale parallelogrammum.

Secetur AD bifariam in H, & deducta perpendiculari ad AD, quæ ſit HV à puncto H detruncetur æqualis ipſi CE, & centro H interuallo HD medietate ducto ſemicirculo AKVD ab I ducatur IK perpendicularis ipſi HI, & eo puncto, quo ſecat ſemicirculum in K, deducatur alia perpendicularis ad AD, quę ſecet eam in M; ſegmentoque AM æqualis fiat reliqua ML, & tandem perficiatur rectangulum LD.



Dico hoc parallelogrammum LD applicatum rectæ AD eſſe æquale quadrato CF, & deficere figura quadrata AL vſque ad occupandam totam lineam AD.

Probatur ex propoſ. 16. l. 6. MK eſt media proportionalis inter MD, & MA. Ergo eius quadratum ex propoſ. 19. eiuſdem eſt æquale parallelogrammo LD ex lineis MD, & ML confecto: ſed huius KM quadratum eſt æquale quadrato CF, quod ſit MK latus æquale ipſius lateri CE ex effectione. Ergo rectangulum DL eſt æquale quadrato CF: patet verò deficere figura quadrata ad occupandam lineam AD; quia latus LM eſt æquale ſegmento MA.

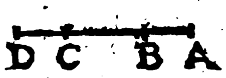
THEOR. I. PROPOS. XXXVII.

Si recta ſecetur in partes inæquales, & ab eadem detrahatur pars æqualis parti minori: ſi illæ partes fuere commenſurabiles, reliquum erit commenſurabile toti; ſin minus, reliquum erit toti incommenſurabile.

Sit recta AD, cui detrahatur minor pars AB, & rurſus huic æqualis pars CD. Dico reliquum BC commenſurabile eſſe ipſi primitiuæ AD; ſi tamen partes primo factæ AB, & BD ab initio fuere commenſurabiles.

Pro-

Probatur. Quoniam partes AB, & BD ponuntur primò commensurabiles suo toti AD: Etiam tota linea AD vtrique ipsarũ cõmensurabilis erit ex propos. 9. Componantur AB, & æqualis CD: eritque composita commensurabilis suæ parti dimidiæ AB, & ideo tota AD etiam huic toti ablato AB, & CD commensurabilis erit. Quare totũ AD, etiam reliquo commensurabilis erit ex Coroll. prop. 9.



Probatur secundus casus eodem genere argumenti. Nam, si pars AB est incommensurabilis parti BD, eritque composita ex tota AD ex propos. 10. incommensurabilis singulis suis partibus AB, & BD. Addatur parti AB pars æqualis CD, vt ideo ei commensurabilis, & huic toti adhuc erit incommensurabilis tota AD ex propos. 8. & ideo ex Coroll. propos. 10. erit quoque incommensurabilis residuo BC.

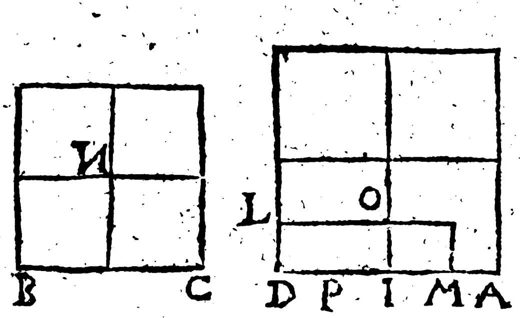
COROLLARIVM

DEducitur. Conuersam huius propositionis quoad vtraque partes esse quoque veram: nempe, quòd si BC ponatur commensurabilis ipsi toti DA, etiam BA, vel CD, vel vtrasque simul commẽsurabiles, ipsi DA futuras; quoniã si tales nõ essent, deberet dici, quòd essent incommensurabiles BA, seu CD ipsi DA: quare sequeretur quoque iuxta præced. BC esse incommensurabilem ipsi AB contra Thesim. Similiter si CB incommensurabilis ponatur ipsi DA: Erit etiam BA, vel CB, vel vtraque simul incommensurabiles ipsi AD ob eandem rationem; quia si essent commensurabiles sequeretur contra Thesim iuxta anteced. ostensionem, BC non esse incommensurabilem.

THEOR. II. PROPOS. XXXVIII.

Si fuerit linea quædam maior, cui fuerit applicatum rectangulum æquale quartæ parti quadrati à minore descripti, & secet lineam in partes inæquales; excessus, seu differentia, qua maius segmentum superat medietatem, erit latus quadrati, cuius quadruplum est excessus quadrati lineæ totius maioris super quadratum minoris.

SIt linea AD, cui fuerit applicatum ex Lemmate præcedenti rectangulum ML æquale quartæ parti CN quadrati à minore CB descripti. Dico, *quòd differentia* MI *erit latus quadrati, cuius quadruplum æquat excessum, quo quadratum lineæ* AD *superat quadratum lineæ* CB.



Quòd, vt probetur; diuidatur maior AD bifariã in I, & ex ea sumatur DP æqualis lineæ, & segmento AM, quo facto cum AI, & ID sint medietates, & ideo æquales, & MA, & PD ablatæ æquales; reliquæ MI, & IP æquales remanebunt.

Progr. 1. Recta AD est diuisa bifariam in I, & & non bifariam in M: Quare ex propos. 7. lib. 2. rectangulum ML sub MA, & MD contentum vnà cùm quadrato ex MI erecto erit æquale quadrato ex medietate IA descripto.

Progr. 2. Sed rectangulum hoc ex hypothesi, & constructione est æquale quartæ parti hoc est CN quadrati ex minore CB descripti, Ergo hoc rectangulum ML quater acceptum æquabit totum quadratum ex CB descriptum. Et quadratum ex MI, vt ex Coroll. propos. 6. lib. 2 constat æquabit quadratum ex MP quater acceptum, quòd supra MI, & IP ostensæ sint æquales.

Progress. 3. Sed quadratum ex AI æquat rectangulum ML simul cum quadrato ex MI, & dixi progress. 1. & hoc quadratum quater acceptum æquat quadratum totius AD ex Coroll. propos. 6. lib. 2. Ergo etiam rectangulum ML ex segmentis, & quadratum MI quater accepta æquabunt quadratum ex linea tota AD descriptum.

Progress. 4. Sed ex secundo progr. Rectangula quatuor sunt æqualia quadrato ex CB, & hæc eadem simul cum quatuor quadratis ex 3. progress. æquant quadratum ex AD: Ergo AD quadratum excedet quadratum ex CB quatuor quadratis ex MI differentia, quod erat probandum; Quatuor autem quadrata ex MI æquant quadratum ex MP, vt progress. 2. dictum est.

PROBL. I. PROPOS. XXXIX.

Diuidere datam lineam in partes incommensurabiles.

SIt data recta AD in præced. schemate, quam oporteat diuidere in partes incommensurabiles. Huic primò reperiatur alia tantùm potentiã commensurabilis minor CB, qua minori possit efficere ipsa data maior AD quadratum maius tali excessu quadrato, qui habeat latus sibi maiori incommensurabile ex propos. 14. huius. Applicetur autem rectangulum æquale quartæ parti quadrati ex minore CB descripti, quòd defficiat ad eius longitudinem occupandam figurã quadratã, & sit ML. Dico MD esse partem in linea AD incommensurabilem ipsi AD, & etiam compartem AM talem esse ipsi AD actu, & potentia, sed insuper inuicem esse incommensurabiles.

* Probatur. Quia ex præced. MI, qua maior pars superat medietatem est quarta pars quadrati, quo linea AD suo quadrato superat quadratũ lineæ CB. Ideoque MP erit linea subtendens totum quadratum, quò maioris AD superat minoris CB quadratum: Ergo MP erit incommensurabilis, quia ex hypothesi excessus iste quadratus obtinet latus incommensurabile ipsi AD. Sed ex propos. 37. Coroll. si MP sit incommensurabilis ipsi AD etiam MA & PD erit incommensurabilis toti lineæ AD. Et propos. 10. autem, si tota magnitudo ex duabus conflata vni earum incommensurabilis sit, erit, & alteri ex partibus, & ipsæ partes ab initio assumptæ incommensurabiles erunt. Quare AM, & PD ipsi AD toti, & etiam comparti MP incommensurabilis erit. Quòd si componatur MP, & AM, vel æqualis PD tota quoque magnitudo MD erit incommensu-

mensurabilis parti MA. Quamobrem portiones AM,& MD incommensurabiles erunt longitudine, tum toti AD, tum inter se.

Præass. Pro ostens. 2. partis, scilicet, quòd sint, ne dum actu incommensurabiles, sed etiam potentiâ, tum respectu lineæ AD, tum inuicem incommensurabiles, præsupponendum est; Quòd rectangulum ML est commensurabile quadrato CB, cum sit eius quarta pars, & ideo quadrato AD, cui ex CB quadratum ex Thesi commensuratur. Deinde, quòd etiam quadratum ex MP est commensurabile eidem AD. Quia, cùm quadratum ex CB sit commensurabile toti quadrato ex AD, erit etiam reliquum ex MP eidem commensurabile; quòd autem ex MP sit reliquum ostensum est in præced. Tandem rectangulum ML esse eiusdem altitudinis, ac quadratum ex AM, & quadratum ex MD, nam vnum latus DL æquat AM ex hypothesi, & MD est latus etiam quadrati ex MD.

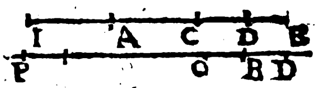
* Probatur, quòd AM, & MD sint incommensurabiles potentiâ ipsi AD Rectãgulum LM est cõmensurabile quadrato CB, cum sit eius quarta pars: Ergo etiam quadrato AD, cui ex CB commẽsuratur quadratum. Sed vt est AM, ad MD incommensurabiles ex 1.l.6. sic est quadratum ex AM ad rectangulum ML ob eandem altitudinem DL æqualẽ PD: Ergo etiam quadratum ex MA erit incommensurabile quadrato ex CB, & ideo ex AD. Idem ostendetur de quadrato MD. Quia est eiusdem altitudinis ob latus MD idem, ac rectanguli ML. Ergo erit incommensurabile rectangulum ML, & quadratum ex MD, quales ipsæ bases sunt AM, & MD, & ideo quadratum ex MD erit incommensurabile ipsi quadrato ex CB, & quadrato ex AD.

* Probatur. Etiam, quòd quadrata ex AM, & MD sint inuicem incommensurabilia: Nam rectangulum ML duplicatum, cum quadrato ex MP, ex 9. secundi æquant quadratũ ex MD cum quadrato PD. Cũ autẽ rectang. ML, & quad. MP præass. sit commensurabile ipsi AD. Etiam illa rectangula ML duplatum, & quadratum MP sunt commensurabilia quadrato CB, & AD: Ergo etiam totum quadratum ex MD simul cùm quadrato ex PD, vel AM, commensurabilia erunt, quæ illa æquant quadrato ex CB, & AD, sed quadratum ex AM est ostensum incommensurabile quadrato ex CB, vel AD. Ergo etiam erit incommensurabile toti quãtitati aggregatæ quadratorum AM, & MD; Quare ex propos. 10. ipsa quadrata erunt inuicem incommensurabilia.

THEOR. III. PROPOS. XL.

Si linea extrema, & media ratione secetur, vtrumque segmentum irrationalis linea est, quæ vocatur Apotome.

* PRobatur de maiori segmento. Nam si tota linea AB ponatur rationalis; etiam dimidium erit rationale. Sed ex propos. 35. l.6. si hoc dimidium reperiatur coniunctum cum maiori segmento facit quadratum quintuplo maius; quã à dimidio descriptum quadratum. Quare dimidij CB, vel æqualis AI, & maioris segmenti AD tanquam ex vnica linea, idest DI factum quadratum erit vt 5. respectu quadrati ex sola dimidia AI, quod erit vt 1. Eritque proportio tanquam numeri ad numerum, vnde lineæ ipsæ dimidia AI, & segmentum AD simul respectu dimidij tantum, idest AI, vel CB erunt potẽtiâ tantum commensurabiles, cum earũ quadrata habeant proportionem, quam



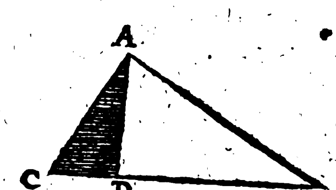
numeri ad numerum: Si ergo dimidia IA auferatur ab ID, reliquum remanebit AD segmentum maius ex propos. 19 huius Apotome.

* Probatur quoque secunda pars. Nam, si addatur PB tota minori segmento, & fiat DP efficit ex propos. 38. lib. 6. quadratum quintuplo maius, quàm quòd efficitur à maiori segmento PO; si ergo auferatur maius segmentum à totâ, cum minori segmento DB, remanebit duplex minus segmentum; nempe, quòd erat prius DB, & id, quod relinquitur ex hac ablatione BO, Quare DO est Apotome, sed DB est dimidium BO: Ergo DB est Apotome, quòd erat probandum. Quoniam irrationali commensurabilis irrationalis linea ex prop. 8. huius est, & Apotome quoque, quòd exoriatur ex ablatione minoris à maiori linearum, quæ inuicem potentiâ commensurantur, cùm earũ quadrata sint, vt $\frac{1}{4}$ quad. ad quinque, ex 6.13.

EXPENSIO X.

De irrationalibus simpliciter.

TErtium genus irrationalium est earum, quæ nascuntur ex equipotentia ad duas lineas incõmensurabiles, ne dũ longitudine solùm, sed etiã incõmensurabiles potentiâ; & huius generis sunt tres species. Prima species est earũ, quarum quadrata simul posita faciunt spatium rationale; rectangulum verò ab ipsis contentum medium, Secundum genus se habet è contrà; nam rectangulum sub ipsis contentum est rationale, spatium verò ex earum quadratis conflatum est irrationale. Tertium genus est earum, quæ faciunt rectãgulum sub ipsis contentum medium, & spatium quoque, quòd conflatur ex eorum quadratis medium, quæ quomodo inueniãtur docere oportet.



Obseruandum est ex 29. l. 6. quod perpendicularis in rectangulo ab angulo recto demissa secat basim tali modo, vt rectangulum sub tota, & maiori segmento sit equalis quadrato maioris lateris, at rectangulum sub tota, & minore segmento sit æquale quadrato minoris lateris.

Quod patet ex Corolla. pr. 8. l. 6. Nam latus BA maius est medium proportionale inter totam basim BC, & maius segmentũ BD: Ergo ex propos. 19. lib. 6. eius quadratum erit æquale rectangulo, quod totâ basi BC maiori segmento BA ambitur. Eadem ratio est de totâ BC, & minori segmento DC inter, quæ medium proportionale est minus latus CA.

Sic obseruandum est, quòd quadratum perpendicularis est æqualis rectangulo segmentorum, quòd ex eiusdẽ 8. Cor. l. 6. ppẽdicularis sit mediũ proportionale inter duo basis segmenta.

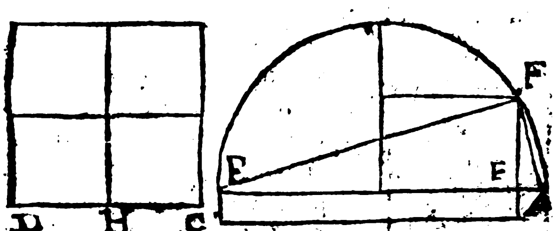
Sic

Sic rectangulum sub tota basi, & sub perpendiculari esse æquale rectangulo crurum: Patet, quia ob similitudinem triangulorum, ita est CB ad crus maius AB, vt crus minus, & basis AC in triangulo CAD est ad perpendicularem AD, crusq; maius in eodem triangulo, ideoque ex propos. 19. lib. 6. rectangulum contentum sub extremis proportionalibus erit æquale mediarum rectangulo.

PROBL. I. PROPOS. XLI.

Inuenire duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant quidem compositum ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum verò sub ipsis contentum medium.

Reperiantur duæ Rationales potestate solùm commensurabiles, ex propos. 14. huius, quarum maior AB plus possit, quam minor CD quadrato rectæ ipsi maiori AB incommensurabilis. Deinde ex propos. huius 36. applicetur maiori parallelogrammum deficiens figurâ quadratâ, quod sit equale parti quartę quadrati à minore CD descripti, cuius latus est medietas CH, diuidatque eam in EB partes incommensurabiles, ita quòd rectangulũ contineatur sub AB, & EB. Descripto tandem semicirculo super AB, erigatur à puncto E perpendicularis EF, ad AB, quæ secet semicirculum in F; iunctis ergo punctis extremis AF, & BF erunt rectæ AF, & FB duæ incommensurabiles, quarum quadrata composita facient magnitudinem rationalem; *rectangulum verò ab ipsis contentum medium.*



Probatur primò. Quòd sint *incommensurabiles* ex propos. 39. huius. Partes AE, & EB sunt incommensurabiles, sed vt est segmentum AE ad segmentum EB; ita est rectangulum sub tota, & minore parte EA ad rectangulum sub tota, & maiore parte EB ex 1. sexti; quòd sint eiusdem altitudinis ob idem latus AB totius, commune vtrisque. Ergo etiam hæc duo rectangula erunt incommensurabilia, vt sunt bases AE, & EB. Sed hoc rectangulum ex tota & maiore parte EB est æquale quadrato ex BF, vt suprà notaui, sicut, & rectangulũ ex tota, & minore parte AE, vt suprà est æquale quadrato ex latere AF minore. Ergo quadratum cruris maioris BF, & quadratum minoris AF erunt incommensurabilia; & ideo rectæ AF, & FB, quæ horum quadratorum contexunt latera, erunt incommensurabiles eodem modo, quo AE, & EB, nimirum toti rationali AB, & inter se.

Probatur secunda pars. Quod earum quadrata composita efficiant spatium rationale. Nam ex 11. secundi efficient spatium æquale quadrato ex AB ob rectangulum triangulum AFB: Basis verò AB ponitur potentiâ commensurabilis ipsi CD minori, & ideo eius quadratum erit rationale. Quadrata ergo ex AF, & FB simul posita illi quadrato æqualia efficient spatium rationale.

Probatur tertia pars, quòd rectangulum sub ipsis AF, & FB contentum sit medium. Rectangulum sub AE, & EB contentum, vtpote, quæ sint potestate solùm commensurabiles medium est prop. 26. huius. Ergo etiam omne aliud, quòd ipsis sit commensurabile ex propos. 28. Coroll.

Sed rectangulum ex totâ basi AB, & perpendiculari EF illi commensuratur, quòd sit medietas eius, ergo hoc rectangulum erit medium.

Quòd verò sit medietas rectanguli ex CD, & AB incommensurabilibus rectangulum ex AB, & EF ostenditur; quia EF horthogonalis est medietas lateris CD. Vnde, cùm rectangulum ex tota AB, & FE sub totâ AB, & medietate lineæ CD contineatur erit dimidio minor; quàm rectangulum sub totâ AB eâdem, & totâ CD.

Quòd verò orthogonalis sit medietas lateris CD, sic ostenditur, perpendicularis FE quadratum ex præassumpt. æquale est rectangulo ex partibus AE, & EB basis; sed hoc ex effectione est æquale quadrato ex dimidia CH totius CD: Ergo quadratum perpendicularis FE, & quadratum ex HC erunt æqualia. Vnde, & latera erunt æqualia, & perpendicularis EF erit equalis medietati CH lineę CD. Rectangulum ergo sub EF, & AB, vtpote medietas rectanguli medij, & irrationalis sub AB, & DC contenti erit medium, & irrationale: Sed huic ex prænotatis est æquale rectangulum ex cruribus AF, & FB; Igitur rectangulum ex cruribus AF, & FB erit medium, & irrationale. Duæ itaq; AF, & FB faciunt quadrata simul posita rationalia, at rectangulum sub ipsis contentum medium, & irrationale, & ipsę sunt incommensurabiles potentiâ ipsi AB Rationali potentiâ commensurabili.

PROBL. II. PROPOS. XLII.

Inuenire duas rectas potentiâ incommensurabiles; quæ faciant compositum ex ipsarum quadratis medium: rectangulum verò sub ipsis contentum Rationale.

Inueniantur duę Media ad differentiam propos. antecel. AB, & CD potentia tantùm inuicem commensurabiles; quæ Rationale spatium amplectantur ex propos. huius 29. sed hac conditione, quòd AB maior plus possit, quàm CD minor quadrato rectæ sibi maiori longitudine incommensurabilis, quas docuimus inuenire Coroll. prop. 30. Deinde applicetur maiori rectangulum æquale quartæ parti quadrati ex CD minori descripti, & omnia peragantur, vt priùs vtendo eadem figura. *Dico primo AF, & FB esse incommensurabiles.*

Probatur eadem ratione, quâ ostensa est prima pars preced. propos. ex eo principio, quòd partes AE, & EB sint incommensurabiles. Vnde, & eorum rectangula sub tota AB, & ipsis AE, & EB comprehensa, vtpote eiusdem altitudinis: ideoque quadrata ex AF, & BF eis æqualia: Idcircoque, & & ipsa latera AF, & BF erunt incommensurabilia. Dico secundo. *Compositum ex ipsarum quadratis esse medium, & irrationale.*

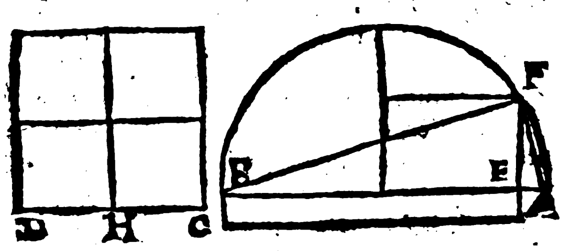
Probatur eodem modo, quo ostensa est secunda pars præced. Ex eo, quod sit æqualis ea magnitudo quadratorum compositorum ex AF, & FB quadrato ex AB media. Vnde illud spatium duorum quadratorum medium erit ex Coroll. propos.28.

Dico tertio *rectangulum sub ipsis contentum esse rationale*. Probaturque eadem deductione, qua tertia pars praeced propos. Nempe ex eo, quia rectangulum earum AF, & FB aequale est rectangulo ex perpendiculari FE, & tota BA; quod est medietas rectanguli sub AB, & CD, & ideo ipsi commensurabili. Idcircoque, cùm rectangulum illud ex AB, & CD ex Hypothesi sit rationale, cùm medias assumpserimus spatium rationale continentes, etiam dimidium eius erit rationale, & ideo rectangulum ex AF, & FB huic dimidio aequale, erit quoque rationale.

PROBL. III. PROPOS. XLIII.

Inuenire duas rectas potentiâ incommensurabiles, quae faciant compositum ex earum quadratis medium, & rectangulum sub ipsis comprehensum medium.

Reperiantur duę Mediae potentiâ tantùm commensurabiles AB, & CD; quae medium contineant spatium, & irrationale ex propos.30. huius, & maior plus possit, quàm minor quadrato cuiusdam rectae maiori incommensurabilis. Deinde omnia fiant, vt propos.41. habebimus intentum.



Nam iisdem probationibus vtendo, primo AE & EB erunt incommensurabiles ob quadratum, quo maioris superat minoris quadratū maiori ipsi incommensurabile, & ideo AE, & EB sunt incommensurabiles, & hinc earum rectangula AB tota pro altero latere inseruiente erunt incommensurabilia; Idcirco etiam quadrata linearum AF, & FB eis aequalia. Vnde ipsae AF, & FB erunt incommensurabiles.

Secundo aggregatum quadratorum AF, & FB erit medium, quòd sit aequale quadrato ex AB medio propter suum latus AB medium.

Tertiò rectangulum sub AF, & FB erit medium; cum sit medietas rectanguli sub AB, & CD medij ex Thesi, & irrationalis, quòd sit aequale rectangulo ex perpendiculari dimidia datae CD, & altera data AB, facto, & ideo rectangulum ex lineis AF, & FB erit medium, & irrationale, vt ex suppositione est rectangulum ex AB, & CD.

EXPENSIO XI.

De lineis irrationalibus, quae ab irrationalium simpliciter additione, vel subductione resultant.

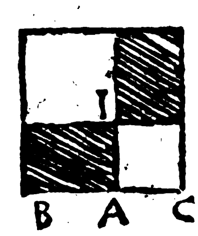
Vidimus, quomodo tres species irrationalium reperiantur in anteced. Expens. quae certis condicionibus discriminantur. Si ergo istae inuicem addantur constituunt tres speties irrationalium *Maior* prima; Secunda *Rationale, & Medium Potens*. Tertia *Bina Media potens*. Si verò altera alteri subducatur relinquunt tres species alias irrationalium. Nempe *Primā, quae dicitur minor*. Secundam *cùm Rationali medium totum efficiens*. Tertiam *Cum medio medium totum efficiens*; quas omnes demonstrabimus esse irrationales.

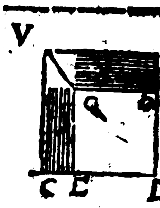
THEOR. I. PROPOS. XLIV.

Si duae rectae potentiâ incommensurabiles componantur, quarum quadrata aggregata rationalia sint, Rectangulum verò irrationale. Tota est irrationalis, quae vocatur Maior.

Coniungātur duae rectę AB, & AC potētiâ commensurabiles, quarum quadrata aggregata CI, & HI rationalia sint Rectangulum verò ab ipsis effectum irrationale sit BI. Dico *totam* CB *esse irrationalem*.

Probatur ratione, quâ vsi sumus propos. 15. Rectangulum nigrum BI sub AB, & AC conclusum est medium ex hypothesi; Vnde, & duplicatum addito ei altero nigro medium, & irrationale perseuerabit ex Coroll. propos.28. cùm sit commensurabile parti componenti. Sed aggregatum quadratorum alborum CI, & IH, quibus pro lateribus inseruiunt, ponitur rationale. Rectangula nigra igitur quadratis duobus albis erunt incommensurabilia. Et si rectangula cum quadratis componantur totum aggregatum ex propos.10. erit vtrique parti componenti irrationale. Hoc autem totum est aequale ex propos.4. secundi quadrato ex CA, & AB, tanquàm vnâ lineâ constituto. Ergo hoc quadratum totius compositae AB erit incommensurabile quadratis duobus nigris: Sed quadrata duo ex lineis seorsim sumptis ex Thesi ponuntur rationalia: Ergo quadratum ex tota CB quadratis albis erit irrationale. Vnde, & tota CB erit irrationalis ipsis CA, & AB, quam placuit appellare *Maiorem*.





THEOR.

THEOR. II. PROPOS. XLV.

Si duæ rectæ potentiâ incommensurabiles componantur. Quorum quadrata aggregata faciant spatium medium; Rectangulum verò, quod claudunt, Rationale tota irrationalis erit; vocatur autem Rationale, & medium potens.

COmponantur duæ rectæ DE, & CE potentiâ incommensurabiles, quas docuimus reperire propos. 35. quæ compositum quadratorum faciunt medium; rectangulum verò sub ipsis contentum Rationale. Dico *has compositas facere lineam Irrationalem.*

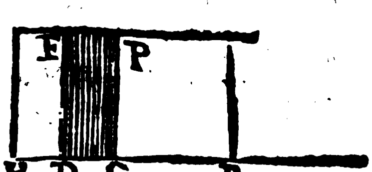
Probatur eâdem ratione adhibitâ, quæ in præcedenti. Nam rectangulum nigrum CQ est Rationale, quod claudūt inuétæ ED, & CE, & cū alio nigro æquali rectangulo est adhuc rationale. Quadratorum verò alborum aggregatum ex Thesi est irrationale. Ergo si simul omnia ponantur tota quantitas, & magnitudo aggregata singulis partibus erit irrationalis, sicut, & ipsis quadratis. Sed hæc tota aggregatio quadratorum, & rectangulorum ęquat quadratū DV ex CD ex prop. 6. l. 2. Ergo hoc quadratum magnum ex CD erit irrationale, & idcirco eius latus tota composita EC ex duabus repertis CE, & ED erit irrationalis, quæ apellabitur *Rationale, & medium potens*, quia potest efficere suis partibus, quibus componitur rectangulum rationale, & quadratorum partium aggregatum medium, nempe irrationale.

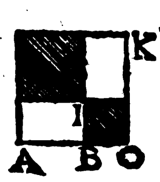
THEOR. III. PROPOS. XLVI.

Si duæ rectæ potentiâ incommensurabiles componantur, quorum quadrata composita spatium medium efficiant, & rectangulum quoque, quod continent medium sit, tota irrationalis erit; vocatur autem bina media Potens.

PRobatur eadem ratione, qua vsi sumus ad ostendendam propos. 33.

Vt ergo probetur applicandum est alicui rationali DE rectangulum DP nigrum, quod sit æquale rectangulis duobus albis ex hypothesi medijs duarum datarum AB, & OB; & eidem Rationali PE applicetur aliud rectangulum æquale duobus quadratis nigris ex hypothesi medijs, quæ fiant ex AB, & OB.





Quo facto probabitur eodem modo, ac ibi propos. Totum spatium PH esse irrationale; quòd sit confectum ex duobus rectangulis, quorum vnum est æquale rectangulo medio duplici albo, & alterum quadratis nigris, quæ quantitates sunt incommensurabiles; quòd rectangulum album ad quadratum nigrum ob eandem altitudinem, quam cum illis habent, sit vt bases AB, & OB, quæ ponuntur incommensurabiles, & ideo quadrata ipsa rectangulis nigris erunt incommensurabilia. Quare rectanguli PH, partes DP, & FH, vtpote æquales quantitatibus inuicē incommensurabilibus constans, erit incommensurabilis altera, alteri. Quare lineæ ipsæ erunt incommensurabiles CD ad DH.

Erunt autem potentiâ commensurabiles Quoniam ED est rationalis, & spatium medium rationali applicatum facit aliud latus potentia commensurabile; ex propos. 27. Quamobrem duæ lineæ potentiâ tantùm commensurabiles sunt, quæ compositæ facient lineam irrationalem ex propos. 16. huius. Spatium verò, quod continent progr. 3. propos. 33. ostensum est irrationale: quia ibi demonstratur: quod, si spatium contineatur sub rationali, & irrationali, illud est irrationale.

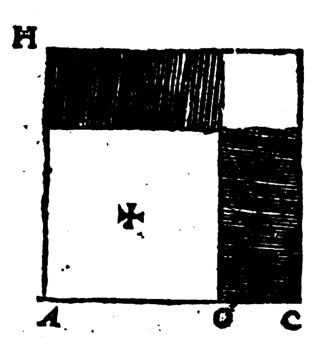
Hoc autem spatium, ex effectione æquant rectangula alba, & quadrata nigra, quæ simul faciunt quadratum AK, ex AO. Ergo quadratum ex AO erit irrationale; & ideo ipsa AO irrationalis erit.

THEOR. IV. PROPOS. XLVII.

Si à linea recta auferatur alia potentia incommensurabilis existens illi toti, sit autem compositum ex ipsorum quadratis rationale: at rectangulum ab ipsis clausum medium: reliqua irrationalis erit, quæ vocatur Minor.

DIcit propositio quod si detur AC linea maior, & tota, & OC minor, quorum quadrata sint rationalia; at rectangulum sub ipsis contentum, vt est semialbum OI, sit medium: Dicit inquam, quod si minor OC auferatur à maiori AC, *reliqua AO erit irrationalis.*

Probatur eodem modo, ac propos. 23. huius. Rectangulum sub AC, & OC seminigrum inuentis lineis iuxta propos. 41. est ex Hypothesi medium; ergo duplicatum erit quoque medium ex Coroll. propos. 28.

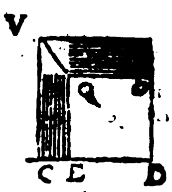


Compositum verò ex quadratis datarum AC, & OC Rationale: Igitur prædictis rectāgulis OI, & PI semialbis quadrata album ex linea OC, & aliud totum CH erunt irrationalia, & incommēsurabilia. Si verò rectangulis prædictis addatur quadratum ex residuo AO ex 7. secundi efficietur magnitudo æqualis duobus quadratis prædictis CH ex ICA toti, & alteri ex linea OC. Ideoque incommensurabilis rectangulis duobus OI, & PI. Cum ergo tota magnitudo quadrati OA, & rectangulorum duorum seminigrorum PI, & IO sit incommensurabilis rectangulis seorsim sumptis ex propos. 10. erit, & incommensurabilis quadrato ex AO. Quapropter erit hoc quadratum cruce insignitum ex AO irrationale. Vnde ipsum residuum linea AO erit irrationalis, quod appellandum est linea Minor.

THEOR. V. PROPOS. XLVIII.

Si recta linea à rectâ auferatur incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum ex ipsorum quadratis medium; rectangulum verò sub ipsis contentum Rationale, Reliqua irrationalis erit. Vocatur autem, cum Rationali medium totum efficiens.

DEtrahatur à rectâ CD maiori recta CE minor, quæ inuentæ sint iuxta propos. 42. Dico *reliquum* ED *esse irrationale.*



Probatur eadem ratione, ac antecedens. Rectangulum sub CD, & CE contentum ex hypothesi ponitur rationale, vnde, & duplicatum tale erit, vt OV, & EV: Sed duorum quadratorum DV, & QV ex duobus EC, & CD lateribus factorum compositum est irrationale. Ergo hoc compositum duplicatis rectangulis OV, & EV erit irrationale, & incommensurabile: Sed si rectangulis addatur quadratum album DQ, ex ED ex 9. secundi efficitur magnitudo æqualis magnitudini ex conflatis quadratis DV, & QV, ideo quadratis seorsim sumptis incommensurabilis, ex propos. 10. huius. Quare incommensurabilis quoque quadrato residui albo ex QD. Ideo reliqua ED irrationalis erit, quæ vocatur. *Cùm rationali medium totum efficiens.*

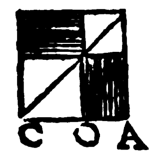
THEOR. VI. PROPOS. XLIX.

Si à rectâ auferatur recta potentiâ incommensurabilis existens toti, quæ faciat compositum ex ipsorum quadratis mediam, & rectangulum sub ipsis contentum medium, & quadratis incommensurabile; Reliqua irrationalis erit, quæ vocatur, cum medio medium totum efficiens.

SIt recta AC, à qua detrahatur OC, & sint eiusdem rationis, quas docuimus reperire prop. 43. additâ eâ conditione, quod rectangulum non commensuretur quadratis ex AO, & AC. Dico residuum OA esse incommensurabile, & irrationale.

Probatur eadem ratione, quâ vsi sumus prop. 34. Tota magnitudo ex repertarum AC, & OC quadratis conflata media est ex Thesi, sicut, & rectangulum seminigrum sub ipsis contentum, etiam si duplicatum, vt sunt duo rectangula nigra, cum duplici quadrato minori, & quia rectangulum seminigrum duobus quadratis albis ponitur incommensurabile; tale quoque erit compositum ex rectangulis duobus seminigris.

Sed si duobus Rectangulis addatur quadratum maius ex residuo OC ex propos. 9. secundi efficitur magnitudo æqualis magnitudini ex duobus quadratis AC toto, & AO? Ergo hęc tota magnitudo quadratis duobus seorsim sumptis erit media, & incommensurabilis iuxta propos. 10. superant itaq; quadrata media magnitudinem rectangulorum compositorum nigrorum quadrato ex residua OC.



Sed medium non superat medium rationali, aliquâ quãtitate ex Coroll. prop. 33. Ergo quadratum ex residua OC non est rationalis quantitas: Vnde erit irrationalis, & linea illud quadratum subtendens OC erit irrationalis, quæ vocatur. Cum media medium totum efficiens, quia nascitur à partibus, quæ efficiunt tum quadrata composita: tum rectangulum, quod ambiunt medium, & irrationale.

COROLLARIVM VNIVERSALE.

HAbemus itaque 26. inuentiones diuersarum linearum irrationalium. Primò sex Binomiorum, quæ nascuntur à compositione linearum potentiâ tantùm commensurabilium. Secũdò sex Apotomes ex subtractione potentiâ tantùm rationalium. Deinde habemus mediam irrationalem, quæ inter duas potentiâ tantùm commensurabiles media proportionalis est, ex quâ nascũtur quatuor species irrationaliũ duę per subductionẽ, quę dicũtur Apotome media prima, & Apotome media secunda, duæ per additionẽ quę vocantur Binomium mediũ primũ, & Binomiũ mediũ secundũ. Tandẽ inuenimus tria genera irrationalium simpliciũ, ex quibus prodiere, sex species irrationalium; nempe duæ à singulis generibus; vna quidem per additionem, vt sunt, quas hic descripsimus prima *Maior*. Secunda *Rationale, ac medium potens*. Tertia *Bina Media potens*. Altera verò per ablationem nempe Prima *minor*. Secunda *cum rationali medium totum efficiens*, & Tertia *Cum medio medio totum efficiens*, quæ omnes, si simul ennumerentur erunt 26. nempe 12. per additionem, & ablationem, & aliæ genericæ, nempe Mediæ, & irrationales simpliciter, & si placeat reperire etiam plures ex media infinitæ mediæ fiunt, vt supra diximus.

Addit verò Euclides multas harum linearum proprietates, quæ exoriuntur ab applicatione spatiorum irrationalium ad ipsas, seu ad aliquam rationalem: sed cum visum nobis sit, ea non pertinere ad elementa, noluimus in plura hunc tractatum extendere, cum hæc sufficiant ad naturam irrationalium, exortumque intelligendum: neque amplior earum cognitio ad prosecutionem Mathematices desideretur.

EXPENSIO XII.

De commensurabilibus ad lineas irrationales.

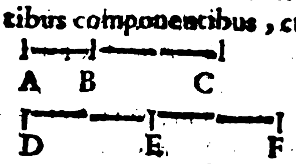
FÆcundum germen linearum irrationalium sunt lineæ ipsæ irrationalibus commensurabiles: nam ipsæ quoque illarũ naturam inducunt, & irrationales sunt: Vnde ad multiplicandas irrationales sufficiet multiplicare alicui irrationali semel repertæ commensurabiles.

THEOR.

THEOR. I. PROPOS. L.

Alicui ex Binomijs commensurabilis, ipsa quoque Binomium est.

IRrationalitas Binomiorum consistit in eo, quod totum sit incommensurabile omnino suis partibus componentibus, cùm partes ipsæ sint potentiâ commensurabiles. Sit ergo Binomium AC diuisum in sua nomina AB, & BC, & ei linea commensurabilis longitudine DF; ostendendum est DF esse quoque Binomium, & ostendetur ex eo, quòd possit DF in duas partes diuidi, quibus totum erit irrationale, cùm ipsæ partes inuicem sint potentiâ commensurabiles.



Fiat itaque ex propos. 15. lib. 6. vt AC ad DF; sic AB ad DE. Eritque etiam ex propos. 22. quinti cum sit totum AC ad totum DF, vt ablatum AB, ad ablatum DE, reliquum quoque BC ad reliquum EF, vt totū ad totū, & vt ablatū AB ad ablatū DE. Quare ex 5. huius erunt commensurabiles AB, & DE, sicut etiam BC, & EF. Sed BC, & AB ponuntur incommensurabiles toti AC: Ergo etiam DE, & EF ipsi toti AC tales erunt, sed AC, & DF sunt commensurabiles, ergo ex propos. 8. huius. & ipsi suo toti DE, & EF erunt incommensurabiles.

Progr. 2. Probatur quoque esse DE, & EF duas tantùm potentiâ inuicem incommensurabiles. Nam ita ponitur AB ad DE, vt BC ad EF. Ergo *permutando* AB ad BC, vt DE respondet in proportione ad EF; sed AB, & BC sunt potentiâ commensurabiles. Ergo etiam ex 5. huius tales erunt DE, & EF. Quare cum DE, & DF sint duæ potentiâ tantùm commensurabiles ex ijs constet DF, etiam DF erit Binomium.

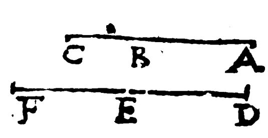
THEOR. II. PROPOS. LI.

Apotome commensurabilis, etiam ipsa Apotome est.

SIt AB Apotome, & BC congruens, & DE ipsi AB commensurabilis. *Dico, quod etiam hæc ipsa* AB *Apotome sit*; Scilicet ex subductione duarum Rationalium potentia tantum, irrationalis quædam linea resultans respectu ipsarum, à quibus subduci poterat.

Fiat itaque AB ad DE, vt AC ad DF ex propos. 15. lib. 6.

Quia itaque est totum AC ad totum DF, vt pars AB ad partem DE ablatas, erit quoque ex prop. 22. lib. 5. reliquum BC ad reliquum EF, vt totum ad totum, & vt ablatum ad ablatum, & ideo inuicem commensurabiles lineæ. Sed AB ablatum ponitur, vtpote Apotome incommensurabile ipsi compacti BC, & toti AC. Ergo etiam DE ex huius 5. erit incommensurabile ipsi DF, & EF. Quoniam inuicem AB, & DE sunt commensurabiles sicut, & inuicem tota AC, & DF, quare reliquum EF erit incommensurabile toti AC: vnde, & suo toti ei commensurabili DF ex propos. 8. huius.

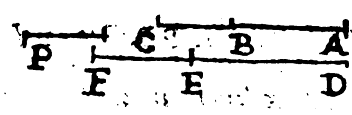


Probatur deinde, quòd DF, & EF sint potentiá commensurabiles. Nam ostensum est, quòd sicut est AC totum ad DF totum sic, & BC pars reliqua sit ad EF partem reliquam. Ergo *permutando*, vt est AC totum ad suam partem reliquam BC in proportione, sic est DF totum ad suam partem reliquam in proportione, sed AC totum ad BC reliquam est potentiá commensurabilis linea. Ergo ex propos. 5. huius etiam totum DF ad reliquum EF. Vnde cum DE sit residuum à subtractione Rationalis EF potentiá tantùm commensurabilis respectu illius DF, à quá subducta est, ipsa erit Apotome quoque, & respectu illarum, à quibus emanat eádem naturam Apotome sortitur.

THEOR. III. PROPOS. LII.

Binomio medio commensurabilis, & ipsa Binomium medium est.

SIt P Rationalis, & AC Binomium medium diuisum in sua nomina AB, & BC & DF, toti Binomio AC commensurabilis. Et ex 15. lib. 6. fiat, vt tota AC ad totam DF, sic pars AB ad partem DE. Erit ergo ex 22. quinti etiam reliquá BC ad reliquam EF, vt tota AC ad totam DF, & ideo, cùm DF ponatur commensurabilis ipsi AC; talis erit pars DE commensurabilis parti AB, ex propos. 5. huius, & sic EF commensurabilis parti BC. Quare respectu Rationalis P, erunt incommensurabiles, & mediæ DE, & EF; vt sunt AB, & BC ex propos. 24. huius. Secundo ostendetur esse inuicem potentiá tantùm commensurabiles DE, & EF, sicut, & illæ sunt AC, & BC.



Quæ enim est, vt pars AB ad partem DE, sic pars BC ad partem EF, erit *permutando* pars AB ad partem BC, vt pars DE ad partem EF: Sed partes AB, & BC potentiá tantùm ponuntur commensurabiles; Ergo etiam DE, & EF ex prop. 5. h. Quare, cum sint mediæ efficient aliquam ex ijs irrationalibus, quæ resultant per compositionem mediarum.

THEOR. IV. PROPOS. LIII.

Apotome media commensurabilis, & ipsa Apotome media est

SEd sit AB Apotome media in fig præced. & ei congruens BC, & fiat, vt AC ad DF, ita AB ad DE. Quia ergo, vt totum AC correspondet proportione ad totum DF, sic pars AB ablata ad partem ablatam DE. Ergo etiam ex propos. 22. lib 5. BC reliqua pars correspondebit ad reliquam EF, vt ablata AB ad ablatam DE, sed pars ablata AB est commensurabilis parti DE ablatę ex Thesi. Ergo ex propos. 5. h. reliqua BC, reliquæ EF, & totum AC toti DF erit commensurabile, & quia AC, & BC ponuntur mediæ; erunt etiam DF, & EF mediæ ex propos. 24. h. respectu rationalis P.

Probatur deinde, quòd sint inuicem potentia commensurabiles DF, & FE.

Nam ita est AC ad DF, vt BC ad FE; Ergo *permutando* ita erit fundamentum AC ad fundamentum BC, vt DF terminus ad FE terminum: Sed AC, & BC sunt potentiá tantùm commensurabiles: Ergo ex propos. 5. h. etiam DF, & FE.

THEOR.

THEOR. V. PROPOS. LIV.

Compositis lineis irrationalibus commensurabiles sunt quoque eodem modo, ac ipsæ irrationales compositæ.

Sit AB, & BC duæ omninò irrationales, quæ cõpositæ faciant lineam AC irrationalem respectu P Rationalis. Dico, & DF ei commensurabilem, seu longitudine seu potentiâ tantùm esse lineam quoque irrationalem, vt ipsa est.

Probatur. Sit diuisa AC in suas partes irrationales, quibus componitur AB, & BC, & fiat totum AC ad totum DE, vt AB ad DE ex propos. 15. lib. 6. ideoque etiam erit totum AC ad DF totum, sic altera pars BC ad alteram partem EF ex 22. lib. 5., & ideo partes AB ad DE, vt BC ad EF. Quare, cùm totum AC ponatur commensurabile toti DF, erit etiam pars AB commensurabilis parti DE, sicut, & alia compars BC erit alteri comparti EF commensurabilis. Quare, cùm partes sint commensurabiles, & totum AB rationali P ponantur incommensurabile, etiam partes DE, & DF erunt incommensurabiles ipsi Rationali P, sicut, & ipsum totũ DF toti AC commensurabile, & ipsi rationali P erit incommensurabile ex prop. 8. h.

Probatur secundo. Quod etiam illæ partes DE, & EF sint inuicem incommensurabiles. Nam ita ponitur AB ad DE, vt BC ad EF. Ergo *permutando* ita erit AB ad BC, vt DE ad EF; Sed BA, & BC sunt incommensurabiles omnino. Ergo ex prop. 5. h. etiam DE, & EF.

THEOR. VI. PROP. LV.

Quæ Reliquis ex lineis irrationalibus commensurabiles sunt, & ipsæ irrationales, & Reliqua, vt illæ sunt.

Sit AB reliquum ex irrationalibus duabus AC, & BC, & commensuretur ei DE. Dico, quod etiam DE est reliquum, seu Apotome ex irrationalibus duabus.

Sit enim BC altera irrationalis à cuius subtractione ab irrationali AB remansit AC, & ex prop. 15. l. 6. fiat, vt AB ad DE, ita AC ad DF; & quia AB commensuratur ipsi DE, etiam AC totum commensurabitur ipsi toti DF, & altera pars BC alteri comparti EF. Cum ergo AC totum, & BC pars ponantur incommensurabiles omninò rationali P etiam DF totum, & EF pars reliqua ex prop. 8. h. erit incommensurabilis omnino, & irrationalis rationali P.

Probatur deinde; quòd etiam DF, & FE sint duę omninò incommensurabiles: Nam vt est AC ad DF, ita ponitur BC ad EF: Ergo *permutando* erit, vt AC ad BC, ita DF ad FE: sed AC, & BC sunt incommensurabiles omninò, & irrationales: Ergo ex prop. 5. h. etiam DF, & FE: ideoque, cùm sint inuicem irrationales, & irrationales quoque respectu P rationalis remanebit lineâ DE Reliquum ab irrationali DE subductâ irrationalis EF sicut AB est reliquum subductâ irrationali BC ab irrationali AC.

Et hæc dicta sint genericè de illis lineis, quæ commensurantur irrationalibus; licet enim Euclides ad species singulas descendat, in illis 22. Binomiorum, & Aptomarum spetiebus, & probet singulas commensurabiles vnicuique speciei Binomio, vel Reliquo ad illam speciem pertinere, cui commensuratur; nobis tamen visum est, adeo specificam cognitionem necessariam non esse, maximè, quia irrationales minùs in vsum veniant in rebus mathematicis.

TRACTA-

TRACTATVS XIII.

IN NVMERIS PROPORTIONALIBVS. PARS I.

De Numerorum Ratione.

POST Elementa primus ſcopus, in quem Mathematica tendit, ſunt proportiones numericæ, vtpote, quæ cum ſint rationales, magis etiam cognitioni ſunt obuiæ, & proportionibus corporum maximè affines, illis ianuam aperiant. Sed priùs de numeris ipſis proportionalibus, vt qui proportionum Arithmeticarum ſint fundamenta, agere opus eſt, & ſub hac ratione fundamenti proportionum de illis ſermonem facere. Poſſunt autem conſiderari, vt fundamenta proxima, & vt fundamenta remota, vt remota conſiderantur cum rationes ipſorum, quatenus ſe gerunt, vt continens, & contentum ſpeculationem ſubeunt, at vt fundamenta proxima, cùm non iam ſub ratione ſimplici, ſed ſub ratione relata ad aliam, & ſimilitudinem alij rationi dicente animaduertuntur. Ibi interueniunt duo numeri ſolum; hic quatuor requiruntur, quoniam iam non conſiderantur, vt obtinent rationem; ſed proportionem. Si ergo, vt rationem dicentes numeri accipiantur, tunc vocantur fracti: nempe partes alterius numeri, qui ſe tanquam totum, & continens gerit, & de iſtis prima hac tractatus parte peragemus, numeris, vt rationem dicentibus in ſecundam partem reſeruantes.

EXPENSIO I.

De minutiarum proportionibus.

ANtequam ipſarum minutiarum Algorithmum proponamus, neceſſe eſt cognoſcere ipſarum proportionem, quam hic breuiter indicabimus.

DEFINITIO I.

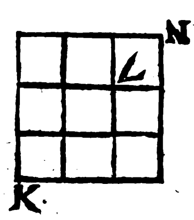
F*Ractio, minutiaue, aut numerus fractus eſt vna pars, ſeu plures partes alicuius totius, vel plurium totorum ſub vnius ratione conſideratorum.*

Si enim totum ſit ſectum in 4. partes æquales, duæ ex ipſis, vel vna erunt numerns fractus: Item ſi tres aurei ſecti ſint in 8. partes æquales, & ex illis accipiantur tres, illæ tres partes erit numerus fractus trium aureorum.

Conſtat verò quælibet fractio duobus numeris alter eſt; qui partes acceptas exprimit, & ſuper lineolam ponitur, alter eſt, qui totius exprimit partes, & ſub lineola ponitur hoc modo.

$\frac{3}{5}$ $\frac{4}{5}$ Qui ſuper lineolam ponitur dicitur Numerator; quòd numeret partes, quæ accipiuntur ex partibus totius; qui verò ſub lineola collocatur dicitur Denominator; quòd denominet, ex quo toto illæ partes ſūptæ ſint; ita in minutia $\frac{3}{5}$, in qua ſunt tres quintæ partes vnius integri quinque partibus conſtantis, tres eſt Numerator quinque Denominator.

Præaſſumpt. I. Oriuntûr numeri fracti ſæpius à diuiſione integrorum, in quâ, aut illa, quæ diuidūtur ſunt integrà ſingula, vt numerus diuidendus accipitur, vt plures partes plurium integrorum, vt vnius, & diuiſio inſtituitur ad hoc, vt illæ partes in integros redigantur, vt 103. Iulij diuiduntur per 10. Iulios, quibus conſtat Aureus quilibet, vt Aurei fiant & ſic fractio $\frac{3}{10}$, quæ remanet à diuiſione ſignificat vnius aurei tres partes, ex 10. ex quibus conſtat. Vel diuiditur aliquis numerus ad hoc; vt ſingulis diſtribuatur, V. g. 103. Aurei, vt diſtribuantur 10. Militibus, & tunc ſignificat fractus $\frac{3}{10}$ tres Aureos in 10. æquales partes diſtributos. Ita ſi dentur V. g. in quadrato KN partes 9. ex quibus accipiantur 4. & fiat minutia $\frac{4}{9}$ KL conſtabit ex quatuor quadratis, quorum quodlibet eſt 9. pars totius; quare ſi ſingulæ partes in 9. partes iterum intelligantur diuiſæ numerus 4. eſt etiam huius totius nona pars. Nam, ſi hæ ſingularum nouenæ partes ſimul erant quatuor nouenarios, etiam ſingulis diuiſis in nouem partes, quatuor ex ipſis erunt quatuor nouenariorum nona pars. Nam fient 36. cuius 4. eſt nona pars, nempe earum nouem in quibus 4. partes intelliguntur diuiſæ, vt fiant 36. Vnde eſt illud, quòd minutia ideſt 4. eſt pars numeratoris



ris scilicet ipsius 4. à denominatore denominata, nempe nona pars.

THEOR. I. PROPOS. I.

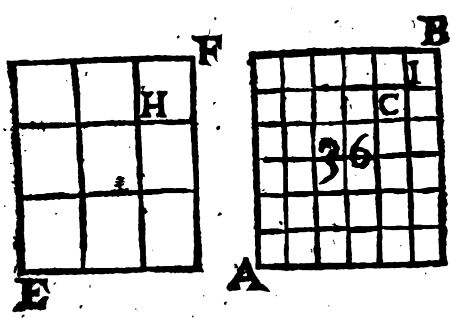
Minutia est ad suum integrum, vt numerator ad denominatorem.

*PRobatur. Quia numerus numerans exprimit partes totius, & tot habet vnitates, quot partes sunt in ipsa quantitate non integra, nempe minutiâ, sicut & denominator tot habet vnitates; quot integrum partes; Ergo vt est minutia ipsa ad integrum, ita est numerator ad denominatorem.

THEOR. II. PROPOS. II.

Minutiæ æqualis, vel eiusdem integri quæ ad suas integras quantitates eandem habent proportionem, inuicem sunt æquales; quæ verò habet maiorem proportionem, illa maior est.

*SIt integri eiusdem AB 36. minutia AC, seu pars 16. nempe $\frac{16}{36}$ sitque integrum prædicto æquale EF 9. cuius minutia sit 4. EH, ita vt sit $\frac{4}{9}$. *Dico minutias esse æquales si ad sua integra æqualia sint in eadem proportione.*



Probatur. Quia ex propos. 9. quinti, quæ magnitudines ad eandem, seu ad æquales eandem habent rationem æquales sunt inter se; sed minutia HE 4. & AC 16: ad æqualia integra EF, & AB similē habent rationem; Ergo sunt inuicem æquales.

Probatur secunda pars. Quia maior ratio ea est, cùm aliqua quantitas alterius plùs comprehendit, sed AI 25. dicit ex hypothesi ad suum totum AB 36. maiorem rationem, quam EH 4. ad EF 9. ergo plùs comprehendit AI 25. ex integro AB; quàm EH 4. ex integro EF 9. quæ integra sunt æqualia: Quare erit maior AI, quam EH.

THEOR. III. PROPOS. III.

Si ad sua integra inæqualia minutiæ similem dicant proportionem erunt inuicem in proportione, vt sua tota, & integra existunt.

*SIt minutia KL 4. ad suum integrum KN 9. vt in schemate præced. præass. vt minutia AC ad integrum maius priori integro AB. *Dico, quòd minutia KL ad AC est, vt integrum KN ad AB.*

Probatur. Ita est KL minutia ad KN totum, vt AC minutia ad AB totum ex hypothesi. Ergo permutando erit KL ad AC, vt totum KN ad totum AC.

COROLLARIVM.

HInc eruitur minutias, quarum numeratores eandem proportionem habent ad suos denominatores esse æquales; si denominator integrū æqualis quantitatis exprimat; cum enim denominator vices integri obeat, & partes, quæ in ipsa quantitate sunt, exprimat, patet; quòd eadem ratio est de denominatoribus, ac de totis ipsis: Vnde, & minutia ad suum denominatorem maiorem rationem dicens maior erit, & ita Aurei $\frac{3}{9}$, & $\frac{4}{12}$ erunt minutiæ æquales. Quia ita se habet 3. ad 9. vt 4. ad 12. At $\frac{4}{9}$, & $\frac{4}{12}$ sunt minutiæ, quarum prima $\frac{4}{9}$ cum habeat maiorem rationem ad suum denominatorem; quam $\frac{4}{12}$ maior erit.

THEOR. IV. PROPOS. IV.

Duæ minutiæ eundem habentes denominatorem, eandem proportionem habent, quam numeratores, dummodo de eodem vel æquali toto verificentur.

DEtur minutia $\frac{16}{36}$, & $\frac{25}{36}$. Dico, *quòd habent eandem inuicem proportionem, quàm numeratores 16. & 25.*

* Probatur, vt numerus 16. ad 36. ita est minutia AC partium 16. nempe ipsa quantitas in schemate præc. ad integram quantitatem BA ex 1. h. vt autem numerus 36. ad 25. ita est AB ad AL. Ergo *ex æquo* ita erit 16. ad 25. relicto medio 36. vt quantitas AC ad quantitatem AI.

EXPENSIO II.

De fractionum valore.

CVm à proportione, quam dicunt numeratores ad denominatores minutiæ, pro vt vidimus valore crescant, & maiores sint, videndum modo est; quomodo earum valor dignosci queat.

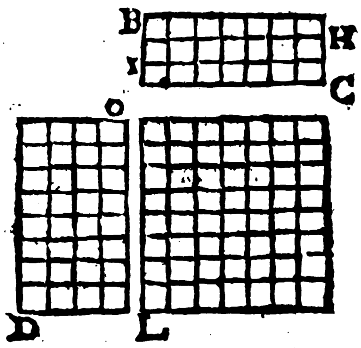
PROBL. I. PROPOS. V.

Duas minutias diuersarum denominationum ad eandem reducere denominationem.

SInt datæ minutiæ $\frac{4}{7}$, & $\frac{3}{8}$ Velimusque cognoscere valorem harum minutiarum, idest quænam ad suum idem, cuius sunt minutiæ, maiorem proportionē dicat. Alternatìm denominatores vnius cum numeratoribus alterius multiplicentur V. g. 3. per 7. & fiant 21. & è contra 4. per 8. & fiant 32. deinde denominatores inuicem, qui exprimāt partes ipsius totius, & fiat 56. Dico eandem esse minutiam $\frac{21}{56}$ quæ $\frac{3}{8}$, & $\frac{32}{56}$ quę $\frac{4}{7}$.

* Probatur. Nam, cùm sint numerator 3. & denominator 8. multiplicati per eundem numerum 7. erit ex 17. l. 7. elem. eadem proportio 3. ad 8. quam 21. ad 56. ex prima vero propos. h. minutiæ

tiæ, quæ ad suum totum idem, habent æqualem proportionem, æquales sunt; quare CB minutia constans tribus octauis partibus CI, & IH, & HB erit æqualis CB ipsi toti, prout constat 21. partibus minoribus ex 2. h. propos. cùm ad CL totum eandem dicat proportionem.



Sic in OD cõstante quatuor partibus septimis, cũ sit 4. multiplicatus per numerũ eundem 7. & sit factus 32. & item totum 8. sit multiplicatum per 7. & factum 56. habebit eandem proportionem 4. ad 7. quam 32. DO minutia ad 56. CL totum: Ergo ex 1. propos. h. $\frac{32}{56}$, & $\frac{4}{7}$ erunt æquales, & erit eadem minutia DO. Quare duæ minutiæ $\frac{3}{8}$, & $\frac{4}{7}$ erunt redactæ ad eundem denominatorẽ, cum $\frac{32}{56}$, & $\frac{21}{56}$ illis sint æquales.

PROBL. I. PROPOS. VI.

Plures, quàm duas minutias diuersarum denominationum ad eundem reducere.

Sint datæ minutiæ $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, quę ad eandem denominationem redigendę sint. Multiplicentur simul ordinatim denominatores, nempe 2. cum 7. vt fiat 14. & cum hoc producto 14. numerus 3. vt fiant 42. & cum hoc producto 42. numerus 5. vt fiat 210. Deinde diuidatur numerus productus per ipsum denominatorem. Diuidatur V. g. per primum 2. & erunt 105. qui multiplicetur per 1. numeratorem, & prodibit prima minutia $\frac{105}{210}$. Deinde idem numerus diuidatur per secundum denominatorem 7. & prodibit 30. multipliceturque hic numerus per numeratorem 4. & erit $\frac{120}{210}$. Idem fiat de tertio 3. nam diuiso 210. per 3. erit 70. qui multiplicetur per 2. & erit $\frac{140}{210}$. Sic diuidatur per 5. & erit 42. qui multiplicetur per 3. & erit vltima minutia $\frac{126}{210}$. Dico omnes datas minutias reuocatas esse ad alias $\frac{105}{210}$ $\frac{120}{210}$ $\frac{140}{210}$ $\frac{126}{210}$ eiusdem denominationis, quæ prædictis $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$ æquiualent.

* Probatur. Nam, cùm multiplicauerimus denominatores simul, habebit primus numerus tot duenarios, quot vnitates sunt in 7. & tot septenarios, quot vnitates sunt in 2. & sic habebit partes, quas numerus 2. & quas 7. habent, idem dicas de numero 7. multiplicato cum 3. & de 3. multiplicato cum 5. Vnde productus numerus 210. eas habebit partes, quas habent denominatores; nempe secundam, septimam, tertiam, quintam. Poterit itaque mensurari numero 5. 3. 7. & 2. reperiantur itaque istæ partes per diuisionem, & sit V. g. quinta pars 42. Quia ergo 42. est quinta pars, habebit eam proportionem 42. ad 210. quam 1. ad 5. Si ergo multiplicetur 42. per 3. & fiat 126. & per 5. vt fiat 210. erit eadem proportio 3. ad 5. multiplicatorum, quæ 126. ad 210. genitorum; cum per eundem numerum 42. multiplicati sint; quare ex propos. 5 erit eadem minutia $\frac{3}{5}$ & $\frac{126}{210}$, & sic de aliis.

PROB. II. PROPOS. VII.

Datas minutias diuersæ denominationis, vel eiusdem æstimare, quæ maior sit.

Sit data minutia $\frac{3}{5}$, & $\frac{4}{7}$, & volumus cognoscere, quænam maior sit. Multiplicentur inuicem numeratores vnius cum denominatoribus alterius, & consideretur, cuiusnam numerator maiorem numerum producat. Nam illa minutia est maior. Sic quia multiplicatus 4. per 5. producit 20. & 3. cum 7. producit 21. maior erit minutia $\frac{3}{5}$, quam $\frac{4}{7}$.

* Probatur. Nam si inuicem denominatores multiplicentur, & fiat 35. erit eadem minutia $\frac{21}{35}$, quæ $\frac{3}{5}$, & $\frac{20}{35}$, quæ $\frac{4}{7}$ ex 5. huius prop. Sed 21. maiorem proportionem dicit ad suum totum 35. quam 20. ex propos. 8. lib. 5. quia plures partes eius comprehendit. Ergo 21. erit maior, quam 20. ex secunda propos. huius. Vnde etiam erit maior $\frac{3}{5}$, quam $\frac{4}{7}$ ex propos. 12. lib. 5. Coroll.

COROLLARIVM I.

Quod, si iam sint æquales denominatores patet, eam minutiam fore maiorem, quæ denominatorem habet maiorem; ita est maior $\frac{3}{9}$, quam $\frac{2}{9}$, & cæt. Quod si numeratoribus iisdem denominatores inęquales sint, vt $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{5}$, erit illa minor minutia, cuius denominator maior est ex prop. 8. lib. 5. quia suo toti minorem proportionem dicit. Nam $\frac{3}{4}$ minutiæ denominator superat numeratorem vnica parte tantum; at minutia $\frac{3}{5}$ denominator superest numeratori duabus vnitatibus; Vnde 3. magis comprehendit de integro 4. quam 3. de integro 5.

COROLLARIVM II.

Hinc etiam est; Quod, si in aliquâ minutia numerator, aut æquet, aut superet denominatorẽ, quòd illa minutia æquet, aut superet integrũ, cùm partes integri numerator exprimat, ita $\frac{9}{9}$, & $\frac{5}{5}$ sunt integra; at si essent $\frac{9}{5}$ tunc esset vnus integer, & insuper $\frac{4}{5}$, & sic propriè esset scribendum 1 $\frac{4}{5}$.

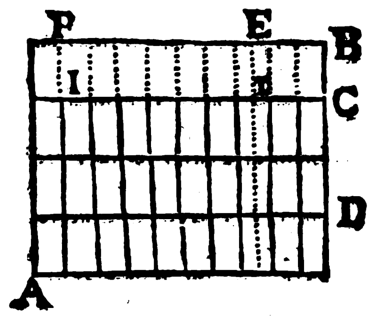
PROBL. III. PROPOS. VIII.

Valorem alicuius minutiæ, secundùm alias partes non à denominatore denominatas explorare.

Sit minutia $\frac{3}{4}$ vnius quadrati, quod constet 20. partibus. Volo scire, quot partes sint tres quartę illius quadrati; multiplico per partes 20. datas numeratorem 3. & facit 60. diuidoque per denominatorem 4. & productum erit 15. Tot ergo partibus constat minutia $\frac{3}{4}$, estque æqualis $\frac{3}{4}$, & $\frac{15}{20}$.

* Probatur. Nam multiplicetur per 20. numerus 4. denominator, & quia 20. multiplicat 4. & facit 80. & 3. & facit 60. erit eadem proportio ex 17. lib. 7. n. 3. ad 4. quæ 60. ad 80. Diuidat rursus 4. eundem numerum 60. & 80. & generet 15.

& 20. eadem quoque proportio erit 15. ad 20. quæ 60. ad 80. idest, quæ 3. ad 4. Quare æqualis erit minutia ex 2. huius propos. $\frac{3}{4}$, & $\frac{15}{20}$.



Sic ex 10. parallelogrammis; quibus constat AB ob multiplicationem per 4. factum est AB totũ 40. minorum, & AC minutia æqualis priori ex tribus parallelogrammis, quorum vnum est AD factũ est 30, & tandem per diuisionem per 4. diuisum est totum in 10. parallelogramma, quorum vnum est AP, & item minutia, & facta est AB æqualis minutiæ AC.

Quod si minutia intelligatur diuisa per denominatorem, vt def. 1. aduertimus V. g. remanserint ex aliqua diuisione facta per 4. tres integri: vt sint $\frac{3}{4}$, tunc tria V. g. parallelogramma intelliguntur diuisa in 4. partes, quorum trium parallelogrammorum simul sumptorum minutia est tertia pars, aut tres illarum amplectitur, & aliquis desiderat scire, quot ex decem partibus, in quas illa tria parallelogramma intelliguntur diuisa comprehendant $\frac{30}{4}$ ipsorum. Tunc eodem modo agendum est. Ratio est. Quia accepta vnitate V. g. AD, ea habet eandem rationem ad 3. cũ 1. multiplicando 3. faciat 3. ex 17. lib. 7. quam 10. ad 30. item per 3. multiplicatus: Si verò diuidatur per 4. eadem ratio erit $7\frac{1}{2}$ ad 10. quæ 3. ad 4. cum 30. diuisus per 3. faciat 10. & idem 30. diuisus per 4. faciat $7\frac{1}{2}$ cumque idem numerus vtrobique diuidatur quotientes $7\frac{1}{2}$ & 10. habebunt eandem rationem, quam numeri diuidentes 3. & 4. Quare minutia AT erit tres quartæ partes minutiæ AC tribus parallelogramis constantis, quorum vnum est AD.

Aduerte tamen; quòd si quando, vt hîc $7\frac{1}{2}$ numerus, qui prouenit non sit integer; tunc propriè non potest ad eam denominationem redigi minutia; quia silicet minutia non solet per numeratorem, cui fractus adhæreat exprimi; vt fieret, si numerator statueretur $7\frac{1}{2}$; ideoque minutia redigetur ad aliã æquiualentem $\frac{15}{20}$, vel si detur 10. & velit aliquis, exhiberi minutia, cuius numerus 10. sit denominator, tunc respondebitur, quod propriè nequit fieri, sed æquiualenter.

PROBL. IV. PROPOS. IX.

Tam numeratoris, quam denominatoris maximam communem mensuram inuenire.

SIt datus numerus $\frac{1970}{2758}$, cuius tum numeratoris, tum denominatoris maxima communis mensura sit reperienda. Diuidatur denominator 2758 per numeratorem 1970, & residuum V. g. 788. diuidat rursùs numeratorem, & 394. diuidat rursùs residuum præcedens 788, aut nihil remanet, aut aliquid; si aliquid remaneat; rursùs idem faciendum, diuidendo residuum maius per residuum minus, donec ad vnitatem deuentum sit, & si ad eam perueniatur, erit ea communis mensura, nec aliam communem mensuram ij numeri habebunt, & ideo vocabuntur inter se primi; at si ad vnitatem non perueniatur, vt hoc exemplo, in quo diuisso residuo 788. per residuum minus 394. nihil remanet, ideo 394. erit communis amborum mensura maxima.

Prob. ex propos. 2. lib. 7. elem. Nam iam 394. mensurat ex æquo 788. residuũ: hoc autem residuum 788. mensurat 1970. & hoc mensurat 2758. Ergo 394. mensurat etiam 2758, Quod vero etiam sit maxima communis mensura patet, & probatur eiusdem prop. 2. l. 7. elem.

PROBL. V. PROPOS. X.

Minutiam ad minorem denominationem redigere.

MInutiæ aliquando adeo magnis numeris proponuntur, vt non facilè earum proportio intelligatur, quis enim non faciliùs intelligat $\frac{5}{7}$ quam $\frac{1970}{2758}$. Imo aliquando magna minutia alicuius residui diuisionis per minimos exprimitur, cùm tamen computus apparenter hoc non exhibeat, V. g. sit numerus 24822. diuisus per 2758. quotiens erit 9. & residuum erit $\frac{1970}{2758}$, qui numerus apud auctores reperietur expressus per hunc $\frac{5}{7}$ minimum numerum illi minutiæ æquiualentem: Vnde oportebit cognoscere eandem minutiam sub diuersis numeris posse exprimi; ne aliquis putaret errorem irrepsisse in computo aliquo apud Mathematicos breuissimis terminis expresso.

Ita igitur, si reducenda sit aliqua minutia ad minimos terminos, erit agendum: Repertâ maximâ communi mensurâ ex antecedenti diuidatur per eam, tum numerator, tum denominator V. g. datę minutię $\frac{1970}{2758}$ diuidatur per maximam mensuram 394. tam numerator 1970. & prodibit pro numeratore 5. tum denominator, & exeret pro denominatore 7. ita erit noua minutia $\frac{5}{7}$ quam Dico æquiualere minutiæ $\frac{1970}{2758}$.

* Probatur eadem proportio est 5. ad 7. quam 1970. ad 2758. cum vterque numerus sit per 394. diuisus, & quotientes sint 5. & 7. ex pr. 17. lib. 7. Quare ex 3. propos. Cor. huius erit æqualis minutia $\frac{5}{7}$ minutiæ $\frac{1970}{2758}$.

PROBL. VI. PROPOS. XI.

Integros ad minutiam redigere.

SInt dati integri 7. qui reducendi sint ad minutiam denominatam à numero 9. multiplicetur 7. per 9. & erit productus 63. qui erit numerator, stabitque minutia $\frac{63}{9}$.

* Probatur. Denominator exprimit integrum in eas partes, quas habet, seu numeros diuisum. Ergo tot erunt nouenarij, quot integri. Sed integri sunt 7. Ergo nouenarij erunt quoque 7. Numerus verò 9. septies acceptus facit 63. vnde erunt $\frac{63}{9}$.

EXPEN-

EXPENSIO III.

De fractorum numerorum additione.

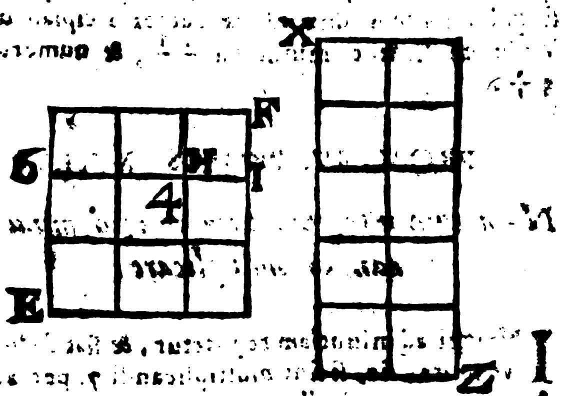
Additio fractorum facilis est, & ferè eadem, quæ integrorum, [illegible] vnica propositio sufficiens erit.

PROBL. I. PROPOS. XII.

Minutias eiusdem denominationis, aut diuersæ simul addere.

Sint primo addendæ minutiæ eiusdem denominationis $\frac{6}{9}$ & $\frac{4}{9}$. Simul colligantur numeratores, & fiunt 10. & supponetur denominator, & fient $\frac{10}{9}$, idest 1. & $\frac{1}{9}$. Dico duas minutias esse simul additas.

[illegible]



Probatur, vt est numerator numerus 6. ad denominatorem 9. ita est minutia EI ad integrum EF ex propos. 1. Et vt est numerus 4. ad denominatorem 9. ita est minutia EH ad integrum EF ex 1. huius. Ergo ex propos. 25. lib. 5. compositus numerus 6. prima quantitas cum 4. quinta, habebit eandem rationem ad denominatorem 9. secundam, quam EI tertia cum EH sexta ad integrum EF quartam quantitatem: sed 6. & 4. numerus est ad 9. vt 10. ad 9. sed vt 10. ad 9. ita fiat ZX minutia ad integrum EF. Ergo ZX ad integrum EF erit, vt EI, & EH ad integrum EF. Vnde ZX erit minutia æqualis EI, & EH, & dicet eandem proportionem ad integrum quam 10. ad 9. Vnde bene quoque exprimetur per numerum $\frac{10}{9}$, vt requiritur in expressione minutiæ ex prima propos. huius.

Idem verò agendum etiã, si sint plures minutiæ, quam duæ, [illegible]. Nam omnes illæ minutiæ simul collectæ efficient [illegible] idest 2. & $\frac{1}{7}$, sic agito in cæteris.

Si verò denominatores minutiarum sint diuersi, tunc redigentur ex supradictis ad eandem denominationem, & eadem seruabitur regula, eademque ostensio valebit.

EXPENSIO IV.

De Minutiarum subductione.

Eadem prorsus ratio est de subductione, quæ de additione.

PROBL. I. PROP. XIII.

Minutiam minorem à minutia maiore subducere.

Si duæ minutiæ, quarum minor à maiore subducenda sit, Subducatur numerator minoris à maiore, & residuum, erit minutia, quæ post subtractionem remanet. Ita si $\frac{3}{4}$ à $\frac{4}{4}$ subducenda sit, deducto n. 3. à 4. residuum erit $\frac{1}{4}$ sic si $\frac{4}{7}$ à $\frac{7}{7}$ deducatur, residuum erit $\frac{3}{7}$.

Probatur: Quia enim 4. detractus à 7. relinquit 3. erit 3. & 4. æqualis numero 7. Ergo, & minutia 3. & 4. expressa erit æqualis quantitati minutiæ expressæ numero 7. Vnde ablata quantitate respondente numero 4. remanebit quantitas respondens numero 3.

At si sint minutiæ diuersorum denominatorum. Prius in vnam denominationem sunt reuocandæ, vt supra docuimus, & sic instituenda est, vt prius, operatio.

EXPENSIO V.

De fractorum multiplicatione.

Minutia multiplicatur, aut per minutiam aliam, aut per numerum integrum cum minutia, aut per numerum integrũ, aut mutuò duo integri cum duabus minutiis, &c.

PROBL. I. PROPOS. XIV.

Inuicem Minutias multiplicare.

Sint multiplicandæ minutiæ $\frac{4}{9}$ & $\frac{6}{9}$ multiplicentur inuicem numeratores, & fiat 24. Deinde denominatores, seu sint eiusdem, seu diuersæ denominationis, & fiant 81. Ergo numerus ex multiplicatione [illegible] productus est minutia [illegible] multiplicantur ex numeratorum multiplicatione [illegible] denominatorum fit [illegible]

[illegible] & ideo minutiam $\frac{6}{?}$ esse genitam ex minutia $\frac{1}{7}$ per minutiam [illegible]

Probatur. Nam; cùm 7. multiplicatus per 5. produxit 35. erit [illegible] product. 35. ad multiplicatum 7. vt multiplicantis 5. ad 1. Idem [illegible]

$\frac{4}{?}$ est ad 1. ideo erit ea, quæ multiplicabit $\frac{?}{?}$, & generabit $\frac{?}{3\ ?}$.

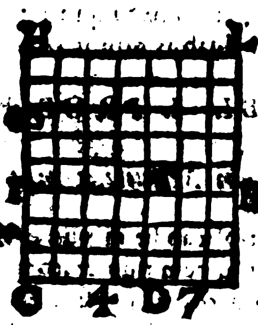
COROLLARIVM

HInc vides maiorem esse rationem in minutiâ genitâ denominatoris ad numeratorem, quàm in minutijs generantibus denominatorum ad numeratores: si quidem 3. ad 2. est proportio sesquialtera, & 4. ad 3. est proportio superparticularis sesquitertia, at verò 6. ad 12. est dupla, id quod explicandum.

THEOR. I. PROP. XV.

Genitus numerus in multiplicatione minutiarum habet proportionem compositam, ex proportione minutiarum generantium.

SIt $\frac{4}{8}$, & $\frac{3}{7}$ docet regula multiplicationem numeratorum simul, & denominatorum simul; sed hoc est proportiones componere. Siquidem ex def. 1. lib. 8. per mutuam multiplicationem duorum denominatorum fit planus numerus, item fit alius planus numerus per multiplicationem numeratorum; sed ex propos. 10. lib. 8. elem. duo plani numeri inter se rationem habent ex lateribus compositam: Ergo, & hi duo numeri denominator, & numerator habebunt proportionem



è lateribus compositam insuicem. Sic si adsit numerus $\frac{4}{8}$ DH, & alius $\frac{3}{7}$ CA, si multiplicaverimus latus 8. per 7. efficiemus planum num. 56. CB, & 3. per 4. planũ 12. CT, qui habebunt eam proportionem compositam ex $\frac{4}{8}$, & $\frac{3}{7}$. Quoniam si multiplicentur 3. numerator per 8. denominatorem efficiemus 24. & 12. ad 24. erit eadem proportio, vtpote multiplicati per eundem 3. quæ 4. ad 8. sic 24. & 56. erit eadem proportio, quæ 3. ad 7. vtpote multiplicati per eundem numerum 8. sed proportio 12. ad 56. est composita ex proportione (defin. 14. lib. 7.) n. 12. ad 24. & 24. ad 56. ergo etiam ex proportione 4. ad 8. & 3. ad 7.

COROLLARIVM

HInc elicitur non esse mirum; si magis augeatur proportio denominatoris ad numeratorem in genitis, quam ea, quæ est in generantibus. Nam genitæ minutiæ denominator ad numeratorem, cum sit composita ex proportionibus generantium minutiarum est maior. Vnde numerator geniti debet pluries, vel saltem plus comprehendere suum numeratorem ob maiorem proportionem, quam ei dicit, quàm denominator minutiarum generantium ad suum numeratorem, ad quem dicunt proportionem simplicem.

PROBL. III. PROPOS. XVI.

Minutiam per integrum, cuius est minutia multiplicare.

ACcipitur integer tanquam minutia supponendo integro 1. vt fiat ex eo, velut fractio ab vnitate denominata; deinde regula præcedens adhibeatur. Sit enim multiplicandi minutia $\frac{2}{3}$ per numerum 7 fiat $\frac{7}{1}$, & adhibita regula tradita fient $\frac{14}{3}$, vel $4\frac{2}{3}$.

Prob. Tum ex antecedenti, tum quia, cum in minutiâ integrum exprimit denominator diuisum in tot partes, quot in eo sunt vnitates, integra 7. si numerator sit 3. continebit septies, trinas partes, seu septem ternarios, ex quibus singulis ternarijs duas partes tantum æquat minutia $\frac{2}{3}$. Si ergo tot tertiæ partes ex singulis septem integris tribus partibus compositis accipiantur, quot vnitates sunt in 2. erunt 14. tertiæ partes, vtpote, quòd à singulis septem duæ tertiæ partes accipiantur. Vnde conficient minutiam $\frac{14}{3}$, & numerum $4\frac{2}{3}$.

PROBL. IV. PROPOS. XVII.

Numerum integrum cum integro minutia adnexo multiplicare.

INteger ad minutiam reuocetur, & fiat deinde, vt supra. Sic, si sint multiplicandi 7. per 2. & $\frac{2}{3}$; integer 2. cui adhæret minutia in tertia proijcietur multiplicando per denominatorem, vt fiant $\frac{8}{3}$; deinde numero 7. ad modum minutiæ accepto, $\frac{7}{1}$ prima regula adhibeatur, fientque $\frac{56}{3}$.

Probatur ex 14. propos. ac etiam eodem modo velut præcedens. Nam integrum quodlibet ex duobus intelligitur diuisum in tres partes, ex quibus minutia $\frac{8}{3}$ octo tertias partes comprehendit. Si ergo ex illis accipiantur 8. tertiæ partes toties, quot vnitates sunt in 7. non est dubium; quòd fient 56. tertiæ partes; nempe minutia $\frac{56}{3}$.

COROLLARIVM

HInc est, quod eodem modo multiplicetur integer cum minutis per minutiam solùm. V. g. 2. $\frac{2}{3}$ per $\frac{2}{3}$ reducendo integrum ad minutiam, & faciendo $\frac{8}{3}$, & $\frac{2}{3}$. Deinde multiplicando numeratores simul, & denominatores simul, & efficiendo minutiam $\frac{16}{9}$.

Sic, si multiplicanda sint inuicem integra duo, quibus minutiæ adhærent idem præstabitur V. g. sint 2. & $\frac{2}{3}$ multiplicandi per 4. $\frac{1}{5}$ reducetur ad minutiam suam vtrumque integrum; primum quidem ad $\frac{8}{3}$, secundum verò ad $\frac{21}{5}$; & deinde eodem modo res præstabitur, & fient $\frac{168}{15}$.

Quod sic ex dictis propos. 14. probo. Quia 8. multiplicat 22; ita erit genitus 176. ad 22. vt 8. ad 1. Rursus, quia 3. multiplicat 5. ita erit genitus 15. ad 5. vt 3. ad 1. ex defin. 16. Fract. 8. Quare etiam simul 176. & 15. idest $\frac{176}{15}$ erit ad 22. & 5. idest ad minutiam $\frac{22}{5}$, vt 8. & 3. simul nimirũ $\frac{8}{3}$ ad minutiam vnde $\frac{8}{3}$ minutia erat multiplicans.

COROL-

COROLLARIVM.

Hinc licet videre numeratores in minutijs siue ex additione collectis, seu ex multiplicatione genitis aliquando prodire maiores suis denominatoribus, & ideo superare minutias ipsas suas totas, quod in multiplicatione præcipuè solum adueniet, cum iam numeratores multiplicandi essent denominatoribus in aliqua maiores. Si verò quis cupiat in integra, ut prius, restituere hæc consequentur; si ipsos numeratores per denominatores diuidat. Sic si quis cupiat agnoscere, quot integra in minutia $\frac{14}{15}$ continentur, diuidat per 15. & inueniet integra 11. & $\frac{14}{15}$.

Secundò Multiplicatio probatur per diuisionem. Vnde operæ pretium erit, prius addiscere diuisionem, quam modo tradenms.

EXPENSIO VI.

De Minutijs diuidendis.

QVi intellexerit minutiarum multiplicationem, facilis ei euadet diuisio, quòd fere idem sit, vt modo videri poterit.

PROBL. I. PROPOS. XVIII.

Minutiam, quam alia data minutia per aliam minutiam mensuret, reperire.

SInt data minutia $\frac{2}{5}$, & $\frac{3}{7}$, & iubeatur quis reperire minutiam aliquam, quam minutiæ datæ metiantur. Multiplicentur vnius inuicem numerator, & denominator, vt 3. & 7. & fiant 21. & per hunc numerum multiplicetur numerator 2. & denominator 5. alterius, & fiat minutia $\frac{42}{105}$. Dico hanc minutiam metiri minutias $\frac{3}{7}$.

Probatur. Quia 21 multiplicat 2. & 5. Ergo producti 42. & 105. erunt inuicem, vt 2. ad 5. ex 17. lib. 7. & sic 42. metietur 105. vt 2. mensurat 5. Sed etiam 3. & 7. mensurant 21. qui per 2. mensurat 42. & per 5. metitur 105. ergo etiam $\frac{3}{7}$ metietur $\frac{42}{105}$ ex 9. pronunc. Tract. 8.

Reperiemus secundò numerum per quem minutia $\frac{3}{7}$ metitur minutiam $\frac{42}{105}$. Sic fiat 2. per 7. & prodibit 14. numerator, deinde 3. per 5. denominatores vnius cum numeratoribus alterius minutiæ multiplicando, & habebimus 15. denominatorem, stabitque minutia $\frac{14}{15}$, per quam dico minutiam $\frac{3}{7}$ metiri minutiam $\frac{42}{105}$.

Et probatur. Nam idem 2. multiplicauit 7. & fecit 14. multiplicauit quoque 21. in præced. probatione, & fecit 42. ergo, ex 17. septimi, ita est 7. ad 21. vt 14. ad 42. Quare ex def. 18. Tr. 8. talis pars erit 7. numeri 21. quæ 14. 42. sed 7. metitur 21. per 3. ex ostensione 1. partis, ergo etiam 14. metietur 42. per 3. & ideo etiam è contra 3. metietur 42. per 14. Rursus Quoniam 3. multiplicauit 5. & fecit 15. & 5. multiplicauit 21. vt supra, & fecit 105. ita erit 3. ad 21. vt 15. ad 105. sed 3. metitur 21. per 7. Ergo etiam 15. metietur 105. per 7. & ideo etiam 7. metietur 105. per 15. ideoque $\frac{3}{7}$ metietur minutiam $\frac{42}{105}$ per minutiam $\frac{14}{15}$.

COROLLARIVM

MInutiam, seu numeros, per quos altera minutiarum $\frac{3}{7}$ mensurat productum $\frac{42}{105}$ & quotientes $\frac{14}{15}$ consurgere à decussata datarum minutiarum $\frac{2}{5}$, & $\frac{3}{7}$ multiplicatione, nempè denominatorum vnius per numeratores alterius, & vice versa. Nam 2. per 7. facit 14. qui ter acceptus mensurat 42. & 3. per 5. facit 15. qui septies acceptus facit 105. Vnde quotientes 14. à numeratore vnius 2. per 7. alterius denominatore, & 15. à numeratore 3. per denominatorem alterius 5. consurgit. Quare minutia $\frac{14}{15}$ mensuratur à minutia $\frac{2}{5}$ per minutiam $\frac{3}{7}$ nempe per $\frac{3}{7}$ inuersè sumptam.

PROBL. II. PROPOS. XIX.

Minutiam per minutiam diuidere.

POtest diuisio fieri, ac multiplicatio, & eodem pacto præstari hac solum conditione seruata, vt diuisoris minutiæ numerator sumatur pro denominatore, & denominator pro numeratore sedibus eorum commutatis. Sint diuidendi $\frac{2}{5}$ per $\frac{3}{7}$ diuisoris $\frac{3}{7}$: numeri sedes mutent, & fiat $\frac{7}{3}$. Deinde multiplicentur inuicem numeratores, & fiat minutia $\frac{14}{15}$. Dico Minutiam $\frac{2}{5}$ esse per minutiam $\frac{3}{7}$ diuisam.

Fiat 3. in 7. numerus 21 & 2. in 21. fiat 42. sic 5. in 21. fiat 105.

Probatur. Cum 42. se habeat ad 105. vt 2. ad 5. erit eadem minutia $\frac{42}{105}$ ac $\frac{2}{5}$ ex prima parte antecedentis propos. Sed minutia $\frac{3}{7}$ mensurat $\frac{42}{105}$ per minutiam $\frac{14}{15}$ ex præced. 2. parte. Ergo etiā minutia $\frac{3}{7}$ mensurabit minutiam $\frac{2}{5}$ per $\frac{14}{15}$. Hæc autem minutia $\frac{14}{15}$ ex Coroll. consurgit ex multiplicatione vnius denominatoris per alterius numeratorem, & è contra; vel à multiplicatione vnius minutiæ per aliam multiplicantem sumptam inuersè. Ergo si sumatur minutia diuidens inuersè vt $\frac{7}{3}$, & multiplicetur per aliam producetur quotiens alterius V. g. $\frac{14}{15}$, qua mensurabit $\frac{42}{105}$ minutia $\frac{3}{7}$, & ideo etiam minutiam $\frac{2}{5}$, quæ est eadem cum ipsa.

Eodem autem modo agemus, si voluerimus diuidere quamlibet minutiam per integrum, seu per integrum, cui minutia adhæreat, seu integrum per minutiam, vel integrum, cui minutia hæreat per minutiā, vel integrū per integrum cū minutia, vel tandem integrum cum minutia per integrū solùm, vel cum minutia, qui sunt casus 7. Id verò reducendo semper integra quæcunque ad minutiam agemus, & more minutiarum ea assumendo, vt hic vides.

Min.

Min. Int.		
$\frac{2}{3}$ per 4	$\frac{2}{3}$ $\frac{4}{1}$	$\frac{2}{12}$
min. int.min.		
$\frac{2}{5}$ per 3 $\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$ $\frac{17}{5}$	$\frac{10}{85}$
int. min.		
3 per $\frac{4}{3}$	$\frac{3}{1}$ $\frac{4}{3}$	$\frac{9}{4}$
int. min. min.		
4 $\frac{1}{3}$ per $\frac{2}{5}$	$\frac{13}{3}$ $\frac{5}{2}$	$\frac{65}{6}$
int. int.min.		
5 per 2 $\frac{3}{4}$	$\frac{5}{1}$ $\frac{4}{11}$	$\frac{20}{11}$
int.min. int.min.		
6 $\frac{1}{2}$ per 3 $\frac{4}{5}$	$\frac{13}{2}$ $\frac{5}{19}$	$\frac{65}{38}$
int.min. int.		
4 $\frac{2}{4}$ per 8	$\frac{18}{4}$ $\frac{1}{8}$	$\frac{18}{32}$

Obseruandum verò est diligenter, quinam numerus sit diuisor, vt eius numerus inuertatur; alioquin, si non diuisoris, sed diuidendi numerus inuertatur contrarium eueniet, vt experimentum docebit.

THEOR. II. PROPOS. XX.

Numerus, seu minutia quotiens potest esse aliquando maior minutiâ diuisâ.

SIt data minutia $\frac{6}{7}$ diuidenda per minutiam $\frac{2}{7}$. Factâ operatione $\frac{42}{14}$ minutia erit quotiens, & demonstrabit, quoties $\frac{2}{7}$ ingrediuntur in minutia $\frac{6}{7}$, quæ minutia $\frac{42}{14}$ est minutia maior minutiâ diuisâ $\frac{6}{7}$.

Probatur, Nam quotiens est numerus indicans, quot vicibus diuisor in numero diuidendo capiat; sed minutia diuidens multo minor, quam diuidenda potest capere tot vicibus, vt quotiens vel superet denominatorē proportionis minutię diuidēdę: Ergo potest esse maior ipsa ex Cor pr. 3. huius. Sic minutia $\frac{2}{7}$ in $\frac{6}{7}$ capit ter perfectè; & ideo 42. numerator etiam capit denominatorem 14. ter. At è contrà, si diuideretur $\frac{2}{7}$ per $\frac{6}{7}$ nam 6. non capit in 2. nisi pro tertia sui parte; & ideo esset quotiens $\frac{14}{42}$. Nam 14. minus est numero 42. pro tertia ipsius 42. parte, & ad illum habet proportionem, quam 1. ad 3. & quam $\frac{2}{7}$ diuisus numerus habet ad $\frac{6}{7}$ numerum diuidentem.

COROLLARIVM.

HInc itaque collige: Quod minutiæ quotientis numeratoris proportio ad denominatorem exprimit proportionem, quam habet minutia diuisa ad diuisorem. Nam, si numerator continebat denominatorem, etiam minutia diuisa continebit diuidentem, vel semel, vel pluries prout numerator quotientis denominatorem continet; quod, si non contineat, sed minor sit numerator denominatore in minutia quotiente, tunc exprimit proportionem minoris inæqualitatis, quam habet minutia diuisa ad diuidentem, vt $\frac{14}{42}$ exprimet proportionem subtriplam, quam habet $\frac{2}{7}$ ad $\frac{6}{7}$, & ideo exprimit, quod $\frac{2}{7}$ non continet nisi tertiam partem numeri 42., vt 14. non continet, nisi tertiam partem numeri 42. & contrà si diuideretur $\frac{6}{7}$ per $\frac{2}{7}$ tunc quotiens esset $\frac{42}{14}$ exprimens, quod minutia diuisa continet diuidentem ter, & habet ad eam proportionem maioris inæqualitatis triplam.

EXPENSIO VII.

De Minutijs minutiarum.

ALiquando fracti numeri quoque suas fractiones habent, quæ duplici sensu accipiuntur, vel enim sunt fractiones vnius partis, quæ numero fracto exprimitur. Sic, si dico duas tertias partes vnius dimidij diuisum significo illud dimidium in 3. partes ex quibus possideo duas.

Alio verò modo accipitur, tanquam non vna pars numeri fracti, sed ambæ partes simul perinde ac si vnius essent diuisæ in alias partes, ex quibus omnes non assumerem, sed aliquas, vt, si dicerem $\frac{2}{3}$ $\frac{5}{6}$ significo duas tertias partes, ac si essent vnica pars, diuisas esse in 6. partes ex quibus assumo 5. Scribitur autem fractio fractionum interiecto puncto prodiens sic $\frac{2}{3}$.

PROBL. I. PROPOS. XXI.

Fractiones fractionum ad simplices fractiones reuocare.

VT fractiones fractionum secundo sensu intellectæ ad simplicem fractionem conuertas; numeratores inuicem sunt multiplicandi, & vltimus terminus genitus erit numerator minutiæ omnibus illis fractionibus fractionum æquiualentis; denominator autem erit numerus à multiplicatione mutuâ denominatorum genitus. Sic $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ reducetur ad hanc $\frac{6}{12}$; & minutia A B C reducetur ad hanc $\frac{6}{60}$, multiplicatis inuicem numeratoribus 2. 3. 4. & denominatoribus 3. 4. 5.

Probatur hanc regulam esse bonam; Nam quia intelligitur minutia secundo sensu: Ergo duæ partes totius 3. ante diuisæ in 4. Sic ergo minutiæ minutiarum denominator proueniens numeratorum ex hypothesi, quæ inferuntur etiam ex proutione. 9. Tract. 8. denominatorum simpliciter minutiæ A, qui est 3. quem 2. mensurat. Ergo redigatur denominator A 3. in partes, quas continet met denominatoris B 4. & in easdem partes A 2. numerator, fietque minutia $\frac{8}{12}$. & quia 3. & 2. A fuerunt multiplicati per eundem numerum 4. ita ex 17. sept. erit 2. ad 3. multiplicati, ac geniti 8. & 12. Sic numerator minutiæ minutiarum 3. B mensurat suum denominatorem B 4. & hic ex hypothesi numeratorem A 2. simplicis minutiæ. Redigatur itaque A 2. in partes, quas continet numeri B 4. & 3. & gignetur minutia $\frac{6}{8}$; quia autem 2. multiplicauit 4. & fecit 8. & 3. fecit 6. erit eadem proportio 3. ad 4. quæ 6. ad 8. Cum ergo sit 6. ad 8. vt B minutiæ minutiarum 3. ad 4. & 8. ad 12. vt A minutiæ simplicis 2. ad 3. Ergo etiam erit ex æquo 6. ex 2. in 3. genitus ad 12. ex 4. in 3. nascentem, vt numerator minutiæ minutiarum B 3. ad minutiæ simplicis denominatorē A 3. quare $\frac{6}{12}$ equiualebit tribus quartis duarū tertiarū partiū. Nam vt magis res pateat, duę quartę partes numeri 12. sunt 8. quarum tres quartæ partes sunt 6.

At si in primo sensu minutia intelligatur, & de vnica parte minutiæ simplicis intelligatur fractus secundus, & minutia minutiæ: Tunc alio pacto oportebit procedere. Nam numerator idē persistet, q minutia minutię, at denominatoris cū denominatore minutię simplicis, vel antecedentis multiplicatio denominatorem dabit. Sic si sint $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{5}$ fractionis secundæ idem 3. numeratoris vices obibit; at denominator consurget ex multiplicatione 5. cum 3. vt fiant 15. & stabit minutia $\frac{3}{15}$.

Prob. Nam, cùm numeri 3. intelligatur diuisa quælibet vnitas in 5. partes: Ergo 5. toties mensurabit 2. quot vnitates sunt in 2. & ideo etiam mensurabit 3. quot vnitates sunt in 3. ideoque si habeo tres quintas vnitatis, quæ est in 2. habeo etiam 3. quintas partes vnius vnitatis quæ est in 3. & quia omnium vnitatum 3. simul sumptarum quinque partes faciunt 15. habebo itaque minutiam $\frac{3}{15}$.

PROBL. II. PROPOS. XXII.

Minutiam minutiæ in primo sensu, minutiæ inserere, seu simul addere.

Differt insitio à reductione. Nam ibi quærimus minutiam, quæ eiusdem valoris sit, ac minutia minutiæ, hic verò addimus minutiam minutiæ simplici minutiæ, ita vt ibi non interueniat prima, & simplex minutia, nisi tanquam denominator minutiæ secundæ, nec auget eam, sed restituit eandem non re, aut numero; sed valore: hìc autem minutia simplex additur minutię minutiarum, vt fiat maior etiam valore, & est propriè additio.

Fit ergo sic. Detur minutia $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{5}$, & debeamus simul addere quatuor quintas partes vnius tertię, ad duas tertias. Numerator minutię simplicis in denominatorem minutiæ minutiarum ducatur. Nempe 2. in 5. vt fiat 10. & huic addatur numerator 4. minutiæ minutiarum, & fint 14. & hic erit numerator; denominatorem verò exhibebit mutua denominatorum multiplicatio, & erunt 15. stabitque minutia ex minutia simplici, & minutia minutiæ coaugmentata $\frac{14}{15}$.

* Probatur. Nam cùm 5. multiplicet 3. & multiplicet 2. & fiat minutia $\frac{10}{15}$ erit eadem ac $\frac{2}{3}$ sed quia 5. idem est, ac vna pars denominatoris 3. minutiæ simplicis ex præc. propos. parte secundâ ideo $\frac{4}{15}$ erit eadem minutia, ac $\frac{1}{3}$ $\frac{4}{5}$ nimirum minutia $\frac{4}{5}$ simplicis $\frac{1}{3}$; cùm ergo habeamus $\frac{4}{15}$, $\frac{10}{15}$ poterimus simul addere, vt fiant $\frac{14}{15}$, quod est inserere.

Et idem agendum, si sint plures minutiæ minutiarum, vt si $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{5}{8}$ proponantur addendæ. Ex 2. in 5. fiunt 10. addito 4. fiant 14. ex 14. in 8. fiunt 112. addito 5. fiunt 117, & hic erit numerator; Denominator verò exoret ex mutuâ denominatorum multiplicatione 120. & erit minutia $\frac{117}{120}$. summa minutiarum $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{5}{8}$.

Aduerte autem minutiam nullam esse reducendā ad minimos terminos, dum vna alteri additur, licet valde augescat; sed tunc, cum omnino completa est operatio; alioquin sensus variaretur, & nihil recti colligeretur, sic $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$. prius ad 2. per 3. fiunt 6. addito 1. fiant 7. deinde per secundum 3. 7. fiunt 21. & addito 2. fiunt 23, deinde 23. per 4. fiunt 92. addito 3, fiunt 95. pro numeratore, cum denominator ex multiplicatione denominatorum mutua colligatur 180. & fiat minutia summa prædictarum minutiarum $\frac{95}{180}$, quæ deinde potest redigi ad denominationem minorem per regulas traditas $\frac{19}{36}$.

PROBL. III. PROPOS. XXIII.

Minutiam minutiæ minutiæ simplici in secundo sensu addere, aut inserere.

Sint exhibitæ minutie $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{5}$ intellectæ in secundo sensu, quæ sint simul addendæ. Minutiæ simplicis numerator 3. cum denominatore minutiæ secundæ 5. multiplicetur, vt fiant 15. deinde ipsi numeratores inter se multiplicentur 2. & 3. & fint 6. addanturque simul 15. & 6. & fiant 21. pro numeratore; denominator verò erit numerus ex multiplicatione denominatorum 4. & 5. procreatus nempe 20.; stabitque minutia $\frac{21}{20}$, quæ erit summa prædictarum minutiarum $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{5}$.

* Probatur. Nam quia 5. multiplicauit 3. & 4. ex 17. lib. 7. ita erit 3. ad 4. vt 15. ad 20. Quare ex 3. huius Coroll. eadem minutia erit $\frac{3}{4}$, quæ $\frac{15}{20}$. Rursus, quia 5, multiplicauit 4. qui sunt denominatores, & fecit 20. & 2. multiplicauit 3. numeratores, & fecit 6, ex propos. 21. huius eadem minutia erit $\frac{6}{20}$, quæ $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{5}$.

Cum ergo habeamus eandem minutiam minorem $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{5}$ expressam minutia $\frac{6}{20}$, & minutiam $\frac{3}{4}$ maiorem, & simplicem expressam numero $\frac{15}{20}$. Si eas addamus simul efficient minutiam $\frac{21}{20}$ summam minutiarum $\frac{3}{4}$, & $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{5}$. At si plures minutiæ adsint, idem prorsus agendum. Sic, si habeamus $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$ nempe $\frac{4}{5}$. & 3 quintas trium quartarum duarum tertiarum, & tres quartas duarum tertiarum addendas ad duas tertias, ita agemus. Multiplicabimus 2. numeratorem primæ $\frac{2}{3}$ per denominatorem maximæ minutię minutiarum 4. & fiant 8. & deinde numeratores inuicem, & erunt 6. quibus simul additis conficient 14. hunc verò per denominatorem, 5. sequentis minoris multiplicabimus, & fiet numerus 70. deinde omnes tres numeratores inuicem 2. 3. 3. & fiunt 18. quibus numero 70. additis erunt 83, quem numerum per denominatorem postremæ 6. multiplicabimus, & fiet 492. & deinde omnes quatuor numeratores inuicē 2. 3. 2. 4. vt fiat 48. qui numerus addendus est numero 492. & erit numerator 540. Denominator verò erit numerus ex mutuâ multiplicatioplicatione denominatorũ productus, nempe 360. & minutia summa omnium prædictarum stabit $\frac{1}{3}$. $\frac{4}{6}$. $\frac{2}{6}$ idest $\frac{1}{3}$.

Porrò in hac insitione, seu additione termini ante totalem additionem ad minimos numeros reduci possunt, si tamen numerator sit minor quàm denominator, alioqui illa reductio esset potius causa confusionis.

TRACTATVS XIII.

PARS SECVNDA.

De Numeris proportionalibus inueniendis.

Hic iam ipsos numeros, non vt rationem, sed vt proportionem dicentes exquirimus, & docemus, tum numeros extremos proportionales inuenire, & consequenter Auream regulam proportionum, tum mediam proportionalem, vnde extractionem Radicis quadratæ, tum etiam duos medios proportionales, & cubicam radicem inuenire docemus. Tractatus omninò, & absolutè necessarius, sine quo in Mathematicis proficere nemo potest.

EXPENSIO I.

De inueniendo datis tribus quarto proportionali, vel de regula proportionum.

HÆc regula, quâ datis tribus numeris quartus quæritur, dicitur Aurea ob eius vsum mirificum, nedum in mathematicis; sed & in omnibus humanis comercijs, vt ferè nihil in negotijs cōtractibusue agatur, nisi hęc regula interueniat.

PROBL. I. PROP. I.

Tribus datis numeris quartum proportionalem inuenire, qui ita sit ad tertium, vt secundus ad primum.

DIsponantur tres numeri dati in seriem, ita vt tertius, cui annexa est quæstio, & cui quæritur quartus, qui sit ei proportionalis, vt est secundus ad primum sit vltimo loco, & huic similis primo loco, cui verò quartus, qui desideratur, debet assimilari secundo loco. V.g. sit datus numerus 6. & 9. & 12. numero verò huic vltimo quartus proportionalis quæritur, nempe aliquis numerus, qui sit in proportione ad 12. vt est 9. ad 6. Primo ergo loco ponendus est numerus 6. secundo 9. tertio 12. dicendo si 6. tanquam fundamentum habet pro termino numerum 9. numerus 12. acceptus, vt fundamentum, quem numerum proportionalem habebit, qui illi ita correspondeat, vt 9. ad 6.? Sicque dispositi, vt hic vides stabunt numeri, si 6. dant 9. quid 12.? Multiplicabitur, itaque numerus 12. per 9. & fient 108. genitus autem numerus diuidetur per 6. & prodibunt 18. hicque numerus erit quartus proportionalis.

Probatur ex 19. propos. septimi Eucl. cum quatuor numeri proportionales fuerint, qui ex medijs generatur est æqualis ei numero, qui ex extremis conficitur; cùm ergo hic sint quatuor numeri proportionales, & sit 6. ad 9. vt 12. ad 18. genitus numerus à medijs 12. & 9. qui est 108. erit æqualis numero, qui producitur ab extremis 6. & 18. Itaque habemus eundem numerum, qui ab extremis produceretur per multiplicationem mutuam mediorum: quare ex defin. 15. multiplicationis Tract. 8. numerus 108. toties continebit numerum 18. quot vnitates sunt in 6. quia est idē numerus, qui produceretur à 6. & à 18. inuicem multiplicatis: Si ergo diuidatur per numerum 6. prodibit numerus, qui perquiritur, nempe numerus 18.

COROLLARIVM I.

COllige ex propos. 4. octaui non omnes numeros habere quartum proportionalem; eo quòd minimi sint in datis rationibus: vnde nascuntur minutiæ in diuisione geniti ex secundo, & tertio per primum ferè semper, quæ eodem modo ponendæ sunt, vt in diuisione integrorum tract. 8. monuimus Coroll. propos. 22. & more fractorum.

PROBL. II. PROP. II.

Datis numeris, cuius primo adhæreat minutia, quartum proportionalem inuenire.

SIt V. g. qui emerit 3. palmos serici cum $\frac{5}{7}$ quinque aureis, quęratur quot nummis aureis emet 32. palmos?

Si 3 $\frac{5}{7}$. dant 5 quid 32.?

Primo

Primo multiplicabimus integros secundum, & tertium. Nimirū 32. p quinque, & facient 160. Iste ergo numerus per integrum 3. & $\frac{5}{7}$ est diuidendus ex doctrina propos. 19. part. 1. Tractat. huius. Supponemus itaque numero 160. vnitatem, & deinde redigemus integrum 3. in minutiam multiplicabimusque 3. per 7. vt fiant 21. addemusque numeratorem 5. & fient 26. itaque minutia erit $\frac{26}{7}$, & sic numeri dispositi erunt.

$$\frac{160}{1} \quad \frac{26}{7} \quad \text{diuisorisque mutato loco} \quad \frac{7}{26}$$

Multiplicabimus 160 per 7. & prodibit genitus quotiens $\frac{1120}{26}$, quem, vt redigamus ad integra diuidemus per 26. & prodibit numerus 43 $\frac{2}{26}$. Itaque 32. palmi serici venient aureis, 43. $\frac{2}{26}$ si 3 $\frac{5}{7}$ quinque aureis venduntur.

PROBL. III. PBOPOS. III.

Datis duobus numeris, cuius secundo adhæreat minutia, quartum proportionalem inuenire.

$$\text{Si Equi 5. aureis } 35\,\frac{4}{9} \text{ quid } 27?$$

Sint V. g. Equi quinque, qui empti sint 35. aureis, & $\frac{4}{9}$. Quæritur, quot aureis Equi 27. constabunt. Ex Tract. h. p. 1. prop. 11. integra in fractiones proiciātur, nempe 35 $\frac{4}{9}$ in $\frac{309}{9}$, & numero 27, supponatur 1. & sic stent numeri inuicem multiplicandi.

$$\frac{27}{1} \quad \& \quad \frac{309}{9}$$

Qui generabunt numerum $\frac{8343}{9}$. qui diuidentur per numerum 5. Equorum ex propos. 19. Tr. h. 1. & erunt $\frac{8343}{45}$, quæ fractio ad integra redacta erit 185. & $\frac{18}{45}$, idest $\frac{2}{5}$. Ita Equi 27. constabunt aureis 185. & $\frac{2}{5}$.

PROBL. IV. PROPOS. IV.

Datis tribus numeris, cui tertio adhæreat minutia, quartum proportionalem inuenire.

Quæratur, quot aureis 57. libræ, & $\frac{7}{12}$. Zuccari veneant? dum tres libre 14. solidis emuntur itaque numeri disponentur.

Libræ 3. dant 14. solidos, quot restituent libre 57. & $\frac{7}{12}$?

Igitur, vt in anteced. numerus 57 $\frac{7}{12}$ in minutias proiciendus, vt sint $\frac{691}{12}$; ex inde secundus numerus 14. per hunc tertium multiplicandus, & genitus prodibit $\frac{9674}{12}$, qui deinde per 3. primum diuidendus erit ex part. 1. propos. 19. h. Tract. de fractis, fientq; $\frac{9674}{36}$, qui ad integra redacti dabunt 268. & $\frac{26}{36}$, idest $\frac{13}{18}$. Obseruandum verò est, quòd fracti non sunt ad integra redigendi, neque in hac, neque in antecedenti operatione; donec sit completa operatio, ne impediatur, & confusio enascatur.

PROBL. V. PROPOS. V.

Datis tribus numeris, cui primo, & secundo adhæreant fractiones, quartum proportionalem inuenire.

Quæratur, quid veneant 12. vlnæ panni; si 3 $\frac{5}{7}$ veneunt aureis 2. & $\frac{3}{5}$, itaque ita dispositi stabunt numeri.

$$3\,\frac{5}{7} \text{ dant } 2\,\frac{3}{5} \text{ quid } 12?$$

Multiplica ex prop. 17. huius Tract. par. 1. numerum 12. per 2 $\frac{3}{5}$ redigendo ad fractiones $\frac{13}{5}$ & deinde ducendo 12. in $\frac{13}{5}$, & fient $\frac{156}{5}$; deinde ex expens. 5. Tract. huius p. 1. diuidò fractionem $\frac{156}{5}$ per integrum, & fractionem 3 $\frac{5}{7}$ nempe $\frac{26}{7}$ multiplicando 7. per 156. & 26. per 5. & erit minutia $\frac{1092}{130}$ nimirum ad integros redacta 8. & $\frac{52}{130}$, idest $\frac{26}{65}$ itaque 12. vlnæ panni constant aureis 8. & $\frac{52}{130}$.

PROBL. VI. PROPOS. VI.

Datis tribus numeris, cui secundo, & tertio minutia adhæreat quartum proportionalem inuenire.

Sint quatuor pedes muri, qui fiant pretio 6. aureorum, & $\frac{3}{5}$; quot aurei persoluentur ob opus pedum muri 9. & $\frac{3}{4}$?

Redigentur ad fractiones 6. $\frac{3}{5}$ ad $\frac{33}{5}$, & 9 $\frac{3}{4}$ ad $\frac{39}{4}$; & deinde multiplicentur, & fient $\frac{1287}{20}$ diuidantur deinde ex supra cit. propos. $\frac{1287}{20}$ per 4. & fient $\frac{1287}{80}$, quæ minutia ad integrū redacta, fient aurei 16. & $\frac{7}{80}$; itaque 9. pedes muri, & $\frac{3}{4}$ efficientur pretio 16. aureorum, & $\frac{7}{80}$.

PROBL. VII. PROPOS. VII.

Datis tribus numeris, cui tertio, & primo adhæreat fractio quartum proportionalem inuenire.

Eodem modo fit. Quæratur V. g. si 4. vlnæ, $\frac{5}{8}$ emūtur pretio 20. aureorum, quot aureis $\frac{3}{7}$ vnius vlnæ ementur?

$$\text{Si } 4\,\frac{5}{8} \text{ vlnæ aureis 20. quid } \frac{3}{7}?$$

Itaque multiplica 20. per $\frac{3}{7}$ ex expens. 4. supercitata, eruntque $\frac{60}{7}$, qui fracti diuidentur per integrum, & fractionem 4 $\frac{5}{8}$ multiplicando, vt docetur propos. 9. expens. 5. supracit. eruntque $\frac{480}{259}$, itaque pretium erit 1. aureus, & $\frac{221}{259}$ qui redigi nequeunt ad minorem denominationē, idest insuper dandæ erunt 221. partes vnius aurei ex 259. in quas diuideretur.

PROBL. VIII. PROPOS. VIII.

Datis tribus numeris, in quibus omnibus inueniatur fractio, quartum proportionalem reperire.

QVis tribus diebus, & septem horis, nimirum in 3 & $\frac{7}{24}$ conficit 93 milliaria, & $\frac{3}{4}$; quæritur, quot milliaria conficiet 5. diebus, & 11. horis nimirum $5\frac{11}{24}$? Itaque redigentur integri 5. ad suam minutiam, & fiant $\frac{131}{24}$, sic etiam $93\frac{3}{4}$ redigentur ad $\frac{375}{4}$, & inuicem multiplicabuntur, eruntque $\frac{49125}{96}$, quæ minutia diuidetur per minutiam 3. & $\frac{7}{24}$ redactam ad $\frac{79}{24}$, vt docemus expens. 5. huius de fractis, & producet $\frac{1179000}{7584}$. Quæ minutia ad integros redacta dabit milliaria $155\frac{3720}{7584}$ nimirum ferè $\frac{1}{2}$, itaque viator quinque diebus, & 11. horis conficiet milliaria $155\frac{1}{2}$, qui confecit diebus 3. & 7. horis milliaria 93. & $\frac{3}{4}$.

EXPENSIO II.

De probatione regulæ aureæ.

MOdus inueniendi quartum numerum proportionalem indiget trutinâ aliquâ, ob quam, quis certò agnoscat se benè operatum fuisse; pro quo sciendum est duobus aliis modis æquiualentibus quartus proportionalis inueniri, quos hic explicabimus; deseruientque pro lydio lapide ad capiendum experimentum de operationis rectitudine.

PROBL. I. PROPOS. IX.

Datis tribus numeris quartum proportionalem aliter inuenire.

SIt numerus 10. cui quærendus quartus proportionalis, qui ad illum ita sit proportionatus, vt 8. ad 12. diuidatur per primum secundus numerus, & quotiens multiplicet tertium numerum 10. sic.

Si 8. dat 12. quid 10.? dabit 15.

diuisus numerus 12. per 8. dat quotientem $1\frac{4}{8}$, per quem multiplicatus 10. dat numerum quartum proportionalem 15.

Probatur. Quia enim, vt est 8. ad 12. ita esse debet 10. ad 15. & quotiens $1\frac{4}{8}$ exprimit proportionem, secundùm quam 8. continetur in 12. estq; denominator proportionis, & ideo eam ipsam designat, iuxta quam 10. debet contineri in quarto proportionali; quare si 10. multiplicetur per quotientem $1\frac{4}{8}$ producet illum numerum; qui toties continebit 10. vt 12. continet 8. quia quotiens numerat vices, quibus multiplicatus continetur in numero genito.

Si verò fracti adsint eadem regula valebit, V. g. velit quis capere experimentum, an computus præced. expens. propos. 7. sit bene deductus, in quo quærebatur, quid sibi vellent $\frac{3}{7}$ vnius vlnæ; si 4. vlnæ, & $\frac{1}{8}$ precio 20. aureorum vendebantur. Itaque diuidendus erit secundus numerus per primum 4. $\frac{1}{8}$ idest $\frac{33}{8}$, & numerus prodibit $\frac{160}{33}$, qui multiplicabuntur per $\frac{3}{7}$, & dabunt $\frac{480}{231}$, vt prius.

Placeat deinde capere experimentum operationis propos. 6. in qua quæritur, cum habeamus per 4. pedes muri aureos $\frac{13}{2}$; quid simus lucraturi si sint pedes $9\frac{3}{4}$, vel $\frac{39}{4}$, diuidemus itaque $\frac{13}{2}$ per 4. & producent $\frac{13}{8}$: deinde multiplicabimus per $\frac{39}{4}$, & generabunt $\frac{507}{32}$.

PROBL. II. PROPOS. X.

Alio quoque modo datis tribus numeris quartum proportionalem inuenire.

DAtis tribus numeris 30. 55. 89. quæratur quartus proportionalis, qui sit ad 89. vt 55. est ad 30. diuidatur tertius per primum, & quotus erit 2. $\frac{29}{30}$. Multiplicet deinde hic quotus secundum 55. & producit $\frac{4895}{30}$, qui diuisus per 30. dabit $163\frac{5}{30}$, idest $\frac{1}{6}$.

I. 30. II. 55. III. 89. IV. 163. $\frac{1}{6}$.

Probatur. Ita est primus ad secundum, vt tertius ad quartum: Ergo quoties continetur tertius in primo, toties continebitur quartus in secundo; quoniam *permutando*, ita quoque erit primus ad tertium, vt secundus ad quartum, & *inuertendo*, ita erit tertius ad primum, ita quartus ad secundum; quamobrem primus toties continebitur in tertio quoties continebitur secūdus in quarto, vel è contrà. Quapropter si diuidatur tertius per primū, quotiens indicabit suis vnitatibus vices secundùm quas continetur primus in tertio, & ideo secūdùm quas continetur secundus in quarto, eritque denominator proportionis. Quare secundum eas vices, & per illum quotum secundus multiplicatus ex 18. defin. tract. 8. essiciet quartum ignotum; cùm genitus ex multiplicatione contineat multiplicatum toties, quot vnitates habet multiplicans, qui, vt prædiximus, quotus est, & proportionis denominator.

COROLLARIVM.

HInc autem habes, quomodo regulæ aureæ operatio tentari possit. Nam postquam perfeceris eam primo modo, poteris hoc secundo, & tertio expiare, & experimentum sumere; an eundem numerum pariat; moraliter enim impossibile est, vt per diuersas operationes procedendo in eundem errorem delabaris.

Sit V. g. accipiendum experimentum, an prop. 5. præced. Expens. calculus sit ritè confectus, in quo proponebatur quæstio.

Si $3\frac{1}{7}$, dant $2\frac{1}{2}$, quid exposcet 12.?

Itaque tertius numerus 12. diuidendus erit per primum $3\frac{1}{7}$ in fractiones redactum $\frac{22}{7}$, & quotiens erit $\frac{84}{22}$, qui deinde multiplicandus erit per $2\frac{1}{2}$ in fractiones redactum $\frac{5}{2}$, & pariet numerum $\frac{420}{44}$, vt prius.

Rursus velit quis examinare prop. 4. operationem, in qua dantur lib. 3. zaccari emendæ solidis 14. & quæritur librarum 57. $\frac{1}{2}$ pretium. Diuidetur vltimus in minutias redactus $\frac{115}{2}$ per primum 3. & erunt $\frac{115}{6}$. Rursusque hic quotiens multiplicet secundum 14. & prodibit genitus $\frac{1610}{6}$ requisitus quartus proportionalis; erunt que solidi 268 $\frac{2}{6}$.

EXPEN-

EXPENSIO III.

De regula trium inuersa.

DIximus primum numerum ad secundum in regula proportionum ità respondere proportione, vt tertius ad quartum, qui quæritur, & ideo, vt ex propos. 12. lib. 5. Euclidis constat eò maior est quartus secundo, quò maior est tertius primo, & pari ratione quò minor est tertius primo, sic, & esse debeat quartus secundo. Verùm aliquando etiam desideratur numerus quartus qui tantò sit minor secundo quantùm est tertius maior primo, vel è contra quartus expetitur; qui tantò sit maior secundo, quantò tertius est minor primo. Si tamen in priori ordine numeri disponuntur, ita vt primum locum occupet numerum, qui significat id, quod etiam tertius 9. secundum verò occupet, cui quæritur eiusdem significationis numerus, qui ita sit ad tertium, vt ipse est ad primum. Sic verò inuersa ratio stat.

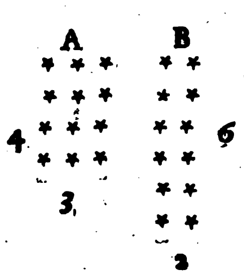
Proportio recta.				Inuersa.			
I.	2.	3.	III.	I.	2.	4.	III.
II.	4.	6.	IV.	II.	6.	3.	IV.
Recta.				Inuersa.			
I.	4.	6.	III.	I.	4.	2.	III.
II.	2.	3.	IV.	II.	3.	6.	IV.

Itaq; erit proportio inuersa cum vltimum consequens secundæ ponitur loco consequentis seri ei secūdę, & secundū consequens loco antecedentis secundæ seriei, & tertij termini:

THEOR. I. PROPOS. XI.

In planis numeris æqualibus tantò est latus maius latere vnius plani, quantò est minus latus aliud huius latere alio primi plani;

SIt planus numerus A, & B. Dico, *quod quanto est 6. numeri* B *maior* quàm 4. numeri A; tantò, & 2. eiusdem B minor erit quam 3.



Probatur. Nam ita est ex propos. 17. primi reciprocè 2. 4. ad 6. vt 2. ad 3. Ergo ex 12. lib. 5. Elem. ita 4. erit minor, quam 6. sicut 2. quam 3. Quare 3. consequenter tantò erit maior, quam 2. quantò 2. est minor, quam 3. & consequenter, quantò 4. minor quam 6. tantò maior erit 3. quàm 2.

COROLLARIVM.

HInc est posse dari casum, quòd cognoscamus plani numeri latera 4. & 3. & alterius 6. & hinc velimus cognoscere ipsi 6. per regulam auream latus tale, quod faciat cum ipso numerum talem planum, qui exęquet numerum planum ex 3. & 4. Ideoque debeat inquiri numerus, qui sit tanto minor, quam 3. quanto 6. est maior, quam 4. & ideo sit inuertenda regulá.

THEOR. II. PROP. XII.

Inuersa regula ad rectam reduci potest.

QVoniam, vt declarauimus, Consequens primæ seriei pro antecedente ponitur in secūda serie, & consequens secundæ seriei pro consequente in prima in 2. regula inuersa. Ideo erit, vt consequens 2. primæ seriei *conuertendo* ad antecedentem suum 4. Ita consequens secundæ seriei 3. ad ignotum antecedens 6. Eritq; proportio ex conuersione terminorum proportioni rectę respondens. Ibi enim referebatur Antecedens 4. ad consequentem 2. vt quiddam ignotum ad consequentem 3. Sed conuersio terminorum proportionem eorum non immutat, & adhuc antecedens assumptum, quod priùs erat consequens. Si dicebat ꝓportionē maioris inæqualitatis ad suū antecedens in prima serie, talem, & dicit consequens in secunda serie ad antecedentem suum alioquin non esset eadem proportio, si esset in vna serie maioris inæqualitatis, in altera minoris: Ergo Proportio inuersa conuersis terminis erit recta, & consequens, ac antecedens assumptum 2. erit minus antecedēte 4. vicem termini occupante in prima serie, vt antecedens 3. priùs consequens ignoto altero termino minus erat.

PROBL. I. PROPOS. XIII.

Quærere quartum proportionalem, qui sit maior secundo, vt est tertius minor primo; Vel etiam minor secundo, vt tertius est maior primo.

IVxta præcedentem Regulam rectam proportionum sint dispositi numeri, & quæratur; si 3. palmi latitudinis 9. vlnas serici exposcunt ad conficiendam lacernam; quot vlnæ 2. palmi latitudinis requirent.

3. 9. quid 2?

Inuertantur termini, & qui habet annexam quæstionem primus constituatur, medius medium teneat; primus tertium locum, sic.

Quid 2.? si 9. dant 3.

Deinde eodem prorsus modo procedatur, multiplicetur vltimus per secundum, & erit 27. qui diuidatur per primum 2. & erit quartus proportionalis $13\frac{1}{2}$. Et ita erit 2. ad 9. vt 3. ad $13\frac{1}{2}$: quoniam sicut 9. quater cum dimidia eiusdem parte continet 2. sic $13\frac{1}{2}$ quater cum dimidia eiusdem ternarij parte continet 3.

Itaque 3. vlnæ latitudinis dant 9. longitudinis; quare 2. vlnę latitudinis exibebūt vlnas longitudinis $13\frac{1}{2}$, cùmque 2. primus sit minor, quam 3. tertius, quartus tamen $13\frac{1}{2}$ est maior secundo 9. cum in regula recta deberet esse minor: Si enim regula recta adhiberetur proueniret numerus 6. qui esset tanto minor, quam 9. secundus, vt tertius 2. minor est primo 3.

Sed iam huius regulæ capiamus experimentum in fractis.

Operarij 30. perficiunt opus 11. diebus, 15. horis, quot diebus conficient 50?

30. 11. D. H. 15. quid 50?

Quo maior hìc numurus operariorum, & minor numerus dierum requiritur ad opus perficiēdum,

dum, & ideo quantò est tertius maior primo, nempe 50. numero 30. tantò erit tempus, qui desideratur, & quartus numerus minor secundo 11. qui etiam tempus exprimit.

Vnde regula aurea; sed euersa adhibenda est: atque numeri inuersò erunt dispositi.

$$50? \quad 11 \frac{15}{24} \quad 30.$$

Itaque multiplicabitur 30. per 11. $\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ in minutias redactum $\frac{2}{}\frac{7}{2}\frac{9}{4}$, & efficient $\frac{8}{}\frac{1}{}\frac{7}{2}\frac{0}{4}$, qui deinde diuidentur per 50. & efficient $\frac{8}{1}\frac{1}{2}\frac{7}{0}\frac{0}{0}$ nimirum dies 6. & $\frac{3}{4}\frac{9}{0}$.

Quæ regula inuersa etiam probari poterit, tum primo, tum secundo modo præcedentis expensionis, & quidem primo; si numerus secundus, $\frac{2}{}\frac{7}{2}\frac{9}{4}$ diuidatur per primum 50. & fiant $\frac{}{5}\frac{2}{2}\frac{7}{0}\frac{9}{0}$ deinde quotiens hic multiplicet tertium 30. & fiant $\frac{8}{1}\frac{1}{2}\frac{7}{0}\frac{0}{0}$. Sic etiam secundum examen poterit adhiberi diuidendo per primum 30 tertium numerum 50. vt fiant $\frac{5}{3}$, deinde multiplicando hanc minutiam cum minutia media $\frac{2}{}\frac{7}{2}\frac{9}{4}$ dabit enim $\frac{8}{1}\frac{1}{2}\frac{7}{0}\frac{0}{0}$.

Cognoscetur autem ex ipsâ quæstione propositâ, cùm adhiberi oportebit regula proportionum inuersa; nam ipsum lumen naturæ dictabit, quãdo requiretur quartus terminus tantò minor secundo, quantò tertius maior primo, quòd tertius ex sui natura non possit dare maiorem terminum, sed minorem. V. g. si saccus tritici, cum emitur quatuor aureis dat panem vnius solidi 10. vnciarum, quot erunt ũnciæ, si triticum cariùs ematur; nempe 6. aureis: nam ipsa rei natura dictat, quòd quantò cariùs emitur frumentum, tantò panis debeat esse minoris ponderis, vt eodem pretio semper vendatur, & numero æquet pretium maius, cum panis semper vendi debeat vnico solido, ideoque hic cognoscitur, quod regula inuertenda sit, quia, quo maior est 6. tertius numerus, quàm 4. eo minus debeat esse pondus panis, qui exposcitur, pondere dato 10. vntiarũ.

EXPENSIO IV.

De Regula Aurea composita.

COmponitur regula Aurea, cum geminâ vice adhibetur eo, quòd quæstio proposita talis naturæ sit, vt non nisi gemina vice adhibita regula proportionis solui queat.

THOR. I. PROPOS. XIV.

Quando proponuntur magis, quam tres termini; tunc gemina vice regula proportionum est adhibenda.

SVnt quinque operarij, qui murum 23 pedum construunt 7. diebus: si ergo sint 10. quot diebus construent murum 39. pedum? Vides hic plures, quàm tres terminos esse propositos, nempe quinque operarios 23. pedes, dies 7. & rursus 39. pedes, & decem operarios. Dico itaque, quod regula trium gemina vice adhibenda sit: Nam exquirendum est; si 5. operarij, vt faciant 23. pedes 7 diebus operantur, quod insument temporis in conficiendis 39. pedibus ijdem met operarij. Ita, vt operarij non veniant sub quæstione, cum ijdem semper ponatur, cognito deinde tempore V. g. 11. dierum, & $\frac{2}{}\frac{6}{3}$ partium valus diei. Postea exquiremus, si 5 operarij temporis 11 $\frac{2}{}\frac{6}{3}$ conficiunt murum 39. pedum quanto tempore 10. conficient eundem met murum. Itaque murus hic non venit sub quæstione; sed idem præsupponitur. Sicut multa alia licet possent reuocari ad quæstionem, quòd tamen eadem præsupponantur in vtraque proportionalium serie, tam in primo, & secundo, quam in tertio, & quarto non reuocantur ad quæstionem, vt altitudo muri, & longitudo, quæ, si proponeretur, quælibet semel adhibitâ regulâ esset exquirenda, vt infra.

PROBL. I. PROPOS. XV.

Regulam trium rectam compositam data capaci quæstione adhibere.

SIt propositum saxum, cuius altitudo sit pedes 2. latitudo pedes 4. $\frac{1}{2}$, faciatque 9. pedes superficiei; quæritur quot pedes faceret, si latitudo esset 6. altitudo esset 5. pedum. Itaque quæremus primo de altitudine, si ita placeat, deinde de latitudine. Itaque dicemus ita. Si saxum altum pedes 2. latitudine posthabita, pedes 9. superficiei exhibet. Quot daret si esset altum pedes 5? & multiplicato 9. per 5. generabitur 45. qué diuidemus per 2. & prodibit quotiens 22 $\frac{1}{2}$. Deinde quæremus de latitudine; dicemusque si saxum pedum 4 $\frac{1}{2}$ dat longitudinis 22 $\frac{1}{2}$ quid si esset 6. & dabit 30. pedes.

PROBL. II. PROPOS. XVI.

Regulam auream inuersam compositam dato capaci subiecto exercere.

SIt Rupes 13. pedibus lata, alta 22. ex quâ longitudinis desũ si pedes 32. ad conficiendũ murum. Debeo conficere alium murum eiusdem magnitudinis, & habeo aliam Rupem altam 17. pedes, & latam 11. Quæritur, quid debeam de illa desumere in longitudinem. Quæram igitur primo, si pedes 13. latit. dant 32. longitudinis, quid dabunt 11? Certum est, quòd dabunt magis, quàm 32. licet 11. sit minus, quam 13. eò, quia sit minor latitudo; vnde debeo desumere magis secundùm longitudinem; ideoque regulam inuertam.

Quid 11.? si 32. dant 13.

Et facto computo prodibit 37. $\frac{9}{11}$. Itaque, si 13. dant longitudinem 32; oportebit, quòd ex saxo minoris latitudinis desumam longitudinem maiorem 37 $\frac{9}{11}$: Deinde Rursùs dicam, si 22. dant 37. $\frac{9}{11}$, quid 17? & vtique debet esse maior numerus, qui quæritur, quam 37 $\frac{9}{11}$ licet 17. sit minor, quam 22; quia minor altitudo dat magis longitudinis. Vnde inuertam regulam sic.

$$\text{Quid } 17.? \quad \text{si } 37 \frac{9}{11} \text{ dant } 22.$$

Et inuenies numerum $\frac{9}{}\frac{1}{1}\frac{5}{8}\frac{2}{7}$, idest 48. & $\frac{1}{1}\frac{7}{8}\frac{6}{7}$; itaque longitudo huius rupis debebit esse 48. & $\frac{1}{1}\frac{7}{8}\frac{6}{7}$, & patet: Nam producunt 13. 22. & 32. molem æqualem nimirum 9152. vt producunt 17. 11. & 48 $\frac{1}{1}\frac{7}{8}\frac{6}{7}$, qui etiam producunt 9152. & ita ex mole æquali saxea possum conficere murum æqualem.

PROB.

PROBL. III. PROPOS. XVII.

Regulam Auream compositam ex inuersa, & recta dato capaci subiecto exercere.

SInt quinque operarij, qui murum conficiant diebus 25. pedum 32. Quæritur, quanto tempore conficient, si essent operarij 7. & murus pedum 40.

Primo itaque inquiratur, si diebus 25. Operarij 5. dant murum pedum 32. quid si essent 7. & sic stabit quæstio

i 5. diebus 25. perficiunt opus, quid 7?

Sed quia, quò plures sunt operarij eò minori tempore opus perficiunt, quare licet 7. sit maior numerus, quam 5. numerus tamen, qui quæritur debet esse minor, quam 25. ideoque inuertenda est regula sic.

Quid 7. ? si 25. diebus 5. opus perficiunt.

Et adhibita regula eueniet tempus $17\frac{6}{7}$ dierum.

Deinde inquiremus; si murus 32. pedum conficitur diebus $17\frac{6}{7}$; quanto tempore perficietur si esset 40. pedum, & sic erit exemplum.

Si 32. diebus $17\frac{6}{7}$, quid si 40. pedum?

Et quia, quò opus est maius, eo maius est tempus insumptum in opere, ideo, vt est maior 40. quam 32. ita erit maior numerus exoptatus, quam $17\frac{6}{7}$: Vnde hæc operatio recta erit, & multiplicato vltimo numero, cum medio prodibit numerus [illegible], & si diuidatur per 32. numerus erit [illegible], idest facient opus diebus 22 [illegible]; idest [illegible]. Propterea perficient opus, si sint 7. operarij, & opus 40. pedum, si 5. faciunt pedes 32. diebus 25.

EXPENSIO V.

De numeris æquè potentibus.

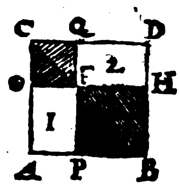
ANtequam ad inuentionem radicis quadratæ accedamus, & inuentioni medijproportionalis, opus est vtile licet non necessarium, de numeris æquè potentibus agere, qui fundantur in lib. 2. Eucl. & 8. siquidem hæc maxime faciunt ad radicem quadratam intelligendam.

Præass. Iam quidem de numeris æquè potentibus latè egimus lib. 8. Verum hic facilliùs, eaq; quæ demonstrauit Euclides de lineis, numeris applicantur. Siquidem vnica ostensione omnes 10. propositiones lib. 2. numeris conuenire ostenditur. Quia longitudo, seu linea commensurabilis alteri est sicuti numerus ad numerum ex prop. 3. decimi, & ex propos. 4. quę à lineis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata sunt, vt quadratus numerus ad quadratum numerum, & consequenter, quæ ex lineis longitudine commensurabilibus fiunt rectangula, se habebunt vt planus numerus ad numerum planum. Hinc euenit; quòd, si latera cuiuscumque, seu quadrati, seu rectanguli, cuiuscumque propositionis secundi libri ponantur rationalia, quòd se habebunt inuicem, vt numerus ad numerum, & eorum quadrata, & rectangula, vt quadratus numerus ad quadratum numerum; & ideo etiam, vt planus numerus ad planum numerum: Vnde si linea sit ad lineã, vt numerus ad numerum, etiam quadratus ad quadratũ, vt numerus quadrat. ad numerũ quadratum, & planum ad planum, vt planus numerus ad planum numerum; Sed propositiones secundi Euclidis de lineis commensurabilibus intelligi possunt, cum sectio permittatur vt libet de 1. vsq; ad 10 Ergo eadem ratio, quæ de lineis, & quadratis, rectangulisque erit de numeris, eorumque quadratis, & planis: sed vt etiam pateat quomodo ijs propositionibus singulis, hæc vniuersalis doctrina applicetur sub exemplum veniat propos. 4. quæ, & nostra interest.

THEOR. I. PROP. XVIII.

Si numerus diuisus sit, vtcumque quadratus totius est æqualis quadratis partium, & insuper rectangulis earundem.

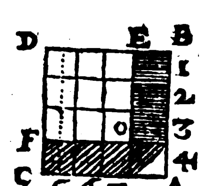
SInt partes AB 8. cuius 3. assumantur, & fiat quadratum 9. & 5. & fiat quadratum 25. deinde partes ipsæ multiplicentur simul, & fiat planum 15. & geminetur, sintque 15. & 15. duo plana. Dico, quod hæc duo plana 15. & 15. & duo quadrata 25. & 9. sunt æqualia quadrato ex toto numero 8. nimirum quadrato 64.



Patet. Nam ita est, vt ex præassumpto ostensum est, quadratum AD ad quadrata nigra, & rectangula 1. & 2. vt numerus quadratus 64. ad duo quadrata 9. & 25. & plana 15. & 15. sed illud AD est æquale quadratis nigris, & rectangulis 1. 2. ergo etiam quadratus 64. erit æqualis quadratis 9. & 25. & planis 15. & 15.

COROLLARIVM I.

HInc est modus reperiendi quadratum numerum, cum quo quilibet numerus quadratum quoque numerum constituat. Sit V. g. numerus 7. constituaturque hic vice gnomonis in quadra-



to ABCD, vt per quadrata parua nigra exprimitur. Ad hoc itaque, vt reperiatur numerus quadratus cum hoc gnomone, quadratum quoque efficiens, reperiendus erit quadratus albus EF. Vt igitur reperiatur ex numero 7. dematur 1, vt auferatur quadratum seminigrum angulare ad A, remanebuntque 6. qui numerus duo parallelogramma nigra

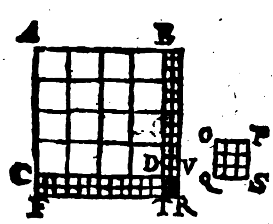
gra

gra exprimit; ad hoc itaque, vt vnum habeatur, diuidatur bifariam, & erunt 3. : multiplicetur ideo 3 in se ipsum, quia latus plani est æquale lateri quadrati albi, & obtinebis quadratum album 9. cum quo 7 faciet quoque quadratum numerũ 16.

Si verò velis plana seu parallelogramma nigra plures series quadratorum continere, & numerus datus sit capax, tunc ita efficies dato numero 351. subtrahes ab eo numerum quadratum, quem elegeris, cuius sit capax, vt 169. cuius radix, & latus est 13. nempe latus o 7. quadrati parui seminigri; remanetque numerus 182. pro parallegrammis nigris oc, & ob. Diuidatur bifariam, quia sunt duo; & erit 91. diuidaturque per latus 13. nempe o3. & prodibit latus ob; nempe quotus 7. Multiplicabitur itaq; in se quotus 7. & generabitur 49. qui numerus cum 35. constituet quadratũ 400. cuius radix est 20. Verum id non potest semper fieri præcisè, sed proximè in numeris maximè, in quibus fractiones interueniunt.

COROLLARIVM II.

*Hinc etiam regula ellicitur alia, quâ inueniatur numerus, qui cum numero quadrato quadratum quoque efficiat. Ob cuius declarationem ponamus quadratum ABCD non habere, nisi 16. partes, & ideo in se toto non continere, nisi quadrata parua 256. si vellem addere quadrata tot eiusdem rationis, quæ componerent quadratum maius, deberem addere 16. pro vno quoque



latere, at insuper in angulo 1 quadratum. Vnde essent addenda 3. quadrata. Quod si in geminam seriem essent addenda quater 16. quadrata nempe 64. & insuper 4. quadrata in angulo. Vnde regula prodit. Sit datus numerus quilibet 9. & radix 16. quadrati 256. per illum 9. multiplicetur, & producet 144. & productus numerus bis assumatur, & fit 288. ob duos planos numeros BV, & CT, deinde 9. in se multiplicetur, & fit 81. ob quadratum seminigrum DR, qui cum 288. faciat summam 369. hic numerus additus quadrato 256. quadratum quoque efficit 625. cuius radix est 25. nimirum 16. & 9.

Et hac regula potest fieri tabula radicum, & quadratorum. Nam si quadrato 1 velimus addere quadratum numeri 2. accipiamus gemina vice radicem numeri 1, quæ est 1, & addamus 1, & fient 3. qui cum quadrato 1 facient 4. cuius latus est 2. Deinde accipiemus gemina vice 2. & addemus 1. vt fient 5. qui additus quadrato 4. facit 9 quadratum numeri 3. Deinde gemina vice acceptus 3. cum vnitate facit 7. qui additus quadrato 9. facit quadratum 16. numeri radicalis 4. & sic consequenter procedendo singulorum numerorum naturaliter procedentium, singula quadrata obtinebimus; quorum tabulam dat Clauius Geom. prac. l.8. & Maginus tab. Tetragonica.

COROLLARIVM III.

Tandem eruitur, quomodo dato quadrato reperiamus numerum; qui subductus relinquat quoque quadratum; nam si à latere 16. quadrati 256. auferatur 3. & reliquus 13. per 3. multiplicetur, & fiant 39. & gemina vice accipiatur, & fit 78, cui addatur quadratum 9. numeri 3. subducti à 16. fient 87. Numerus itaque 87. subductus à numero quadrato 256. relinquit quadratum 169. cuius radix 13.

PROBL. I. PROPOS. XIX.

Numero dato æquipotentes numeros alios, quos, quis iusserit, reperire.

Sit numerus aliquis 6. diuidendus in numeros 3. qui possint efficere quadrata, quæ simul æquent quadratum numeri 8. Reperiantur tres numeri 5. 4. 3. ex propos. 13. lib. 9. Elem. quorum duo 4. & 3. æquent quadratum numeri 5. Deinde vtere regula aurea, & dic si 5. dant 4. quid dabit datus numerus V. g. 8.? & si 5. dant 3. quid 8? Inueniesque $6\frac{2}{5}$, & $4\frac{4}{5}$, qui erunt radices duorum quadratorum quadrato numeri 8. æqualium.

* Nam ita ponitur 5. ad 4. vt 8. ad $6\frac{2}{5}$ Ergo ex 18. l.8. cum quadrati suorum laterum proportionem habeant duplicatam; ita erit quadratum ex 5. ad quadratum ex 4. vt quadratum ex 8. ad quadratum ex $6\frac{2}{5}$. Et sic pariter quadratum ex 3. ad quadratum ex 5. vt quadratum ex $4\frac{4}{5}$ ad quadratum ex 8. Cum ergo ex 25. l.5. prima, & quinta quantitas ad secundam eandem obtineat rationẽ, quam tertia, & sexta ad quartam. Erit quadratum ex 4. & 3. ad quadratum 5. vt quadratum $6\frac{2}{5}$, & $4\frac{4}{5}$ ad 8. sed quadrata ex 4. & 3. sunt æqualia quadrato ex 5. Ergo etiam quadrata ex $6\frac{2}{5}$, & $4\frac{4}{5}$ æquabuntur quadrato 8.

Sed rursus quæratur si 5. dat 4. & 3. quid $4\frac{4}{5}$? Inuenienturque $3\frac{21}{25}$, & $2\frac{22}{25}$, qui æquabunt quadratum numeri $4\frac{4}{5}$, & consequenter cum quadrato numeri $6\frac{2}{5}$ æquabunt quadratum numeri 8. ex prædicta ratione, & sic efficies, si alios exoptabis plures, quam tres.

EXPENSIO VI.

De radice quadrata perquirenda, & medio proportionali, tertioque percrutando datis duobus.

Radicem quadratam exquirere est idem, ac datis duobus proportionalibus numeris medium proportionalem inuenire, quia ex prop. 19. lib. 7. Elem. quadratus numeri proportionalis est æqualis plano extremorum. Vnde sine cognitione huius extractionis medius numerus proportionalis venari nequit.

Præassumptum. Aduerte id quod notauimus Tract. 8. de Arith. simplici locum significare proportionem, quæ per decuplam multiplicationem numeri crescit; Ita primus numerus à dextra significat vnitates, secundus versùs sinistram decimas

mas, tertius decimas decimarum, & cæt.

Ideo quadratus numerorum, qui primò subtrahuntur incipiendo à sinistra erit maior, quam secundus, & sic de reliquis; quia significat, vel decimas, vel centesimas, vel millesimas. Cum itaq; quadrati numeri latus non inueniatur totum simul obstante numeri magnitudine; sed per partes, & per diuersa quadrata: ideo primus quadratus si vnus, vel duo significat quadrata numeri simplicis, si sint tres numeri erit centesimarum, & numerus ille quadrati, qui subducitur, significabit singulis vnitatibus decimas, & idem si sint quatuor; quia non possunt facere quadratum numerum decimarum; nisi tres, vel 4. numeri; sicut vnitatum quadratum facit vnus, vel duo numeri: Nam 10. per 10. ductus facit 100. qui tribus numeris exprimitur. At si sint quinque, vel sex quadrati radix, quæ extrahitur, erit centesimarum: nam 100. per 100. ductus facit 10000. qui quinque numeris exprimitur, nec minor numerus potest esse centesimarum quadratum; at si sint septem, radix quadrati, quæ extrahitur, erit millium; quia 1000. per 1000. ductus facit 1000000. quadratus numerus vnitatis millenariorum, qui, & poterunt esse dualitatis earundem, & trium, & quatuor, & ideo etiam octo numeris poterit exprimi, vt quadratum quatuor millium est 16000000. qui octo numeris exprimitur, & si sit centesimarum exprimetur, vt diximus sex numeris, vt 160000. & si sit decimarũ quatuor, vt 1600. & si sit vnitatũ duobus 16. Et sic dicendũ de alijs numeris etiã maioribus.

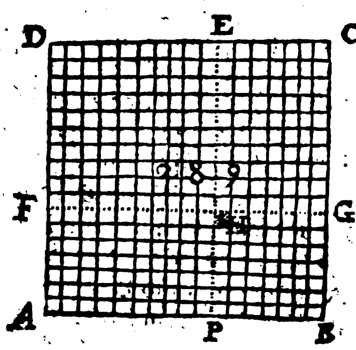
Præassumptum 2. Aduertendum secundo ex propos. 18. lib. 8. inter numerum quadratum, & alium semper cadere aliquem proportionalẽ numerum planum, qui sunt in quadrato duo complementa æqualia, vt ex propos. 35. lib. 1. Eucl. colligitur, & ex propos. 4. expens. præced. qui cum altero quadrato complent quadratum maiorem. Cum ergo habetur quadratum aliquod maius, & ex eo subducat aliquis quadratum minus relinquit Gnomonem scilicet quadratum aliud, & duo complementa: Sic si ex quadrato DCAB subducatur quadratum DEFH, relinquet gnomonem EBF circa se, qui continet quadratum HB, & duo rectangula CH, & HA, quæ sunt media proportionalia inter quadratum DEFH, & quadratum HB. Quare tum hac, tum ratione supradicta non ab omnibus numeris latus quadrati subducẽdus est tum ex prima ratione, cum secundus, quartus, sextus, octauus, & cæt. consignificent cum primo, tertio, quinto, septimo, & cæt. Tum quia ex præsenti ratione, rectangula quoque sunt subducenda; vnde semper reliquendus est vnus medius pro illis subducendis.

PROBL. I. PROPOS. XX.

Quadratam radicem subducere.

SIt subducenda radix quadrata à numero 289 punctum sub dextro 9. collocabitur procedendo ad sinistram, & intermisso vno, idest 8. sub tertio 2. & sic, si alij adsint, quia ab illis propriè radix quadrata subducitur; ab intermedijs verò media proportionalia, seu rectangula. Deinde videndum est, quinam quadratus numerus capiat in 1. ad sinistram, qui est 2. & video; quòd in numero 2. maior quadratus nõ continetur, quàm 1. quare scribo seorsim 1. & sub 2. cursus scribo 1. in se multiplicatus, & factus quadratus 1. Et deinde subduco ab 2. & remanet 1. nempe subduxi quadratum decimarum, qui est 100. ob locum tertium, in quo est, & æquale quadratum DFHE, & habeo latus DB, qui est 1. numerus sepositus, qui, quia in radice ponendus est secundo loco, vt constabit, erit numerus decimarum, & significabit 10. idest latus DB, remansitq; residuum 189. Sed quia rectangula etiam ipsa subducenda sunt, propter quòd numerus intermedius 8. non est punctatus, quæ sunt rectangula CH, & AH, quæ pro vno latere continent quantum continet radix quadrata, & pro alio radix illius quadrati subtrahendi adhuc incogniti, vt ex prop. 4. præced. colligitur: Siquidem latus 17. sectus est vt cumque in 10. & 7. Vnde duo plani numeri, qui cum duobus quadratis ex 10. & 7. integrant quadratum ex toto numero 17. continebuntur sub 10. & 7. inuicem multiplicatis, quare vnum latus erit 10. latus iam cognitum, & aliud 7. erit exquirendum.

```
. .
289 | 1
1   | ——
——
189
```



Ad hoc, vt ergo illa subtraham, quia sunt duo, habet consequenter duo latera æqualia radici EH, & HF. Quare radix duplicanda est vt faciat 2. significans 20. ob secundum locum quem occupabit radix 1. & ponendus seorsim sub radice.

Circa quem numerum 2. considero; an capiat, & quod vicibus capiat in numero residuo 18. & video, quòd capit 9. vicibus, & esset hoc 9. aliud latus HG rectangulorũ: sed quia quantum est hoc latus HG, tantùm debet esse latus aliud quadrati incogniti subtrahendi HB; ideo videndum est; an hic numerus 9. in se multiplicatus capiat in numero residuo, & punctato, à quo illud quadratum deducendum est, & quia à 189. ablatis 2. per 9. multiplicatis, nimirum 18. residuum est 9. in quo 9. in se multiplicatus nimirum 81. non capit ideo 9. non erit alterum latus planorum CH, & HA; quia non relinquit sufficientem numerum, qui faciat quadratum HB.

Accipiam igitur 7. pro latere HG, qui duobus vicibus continetur in 18. & relinquit insuper pro residuo 4. qui cum 9. faciunt 49. qui numerus est

```
. .
289 | 17
1   | ——
——    2
189
14
——
49
49
```

tantus, qui capiat 7. in se multiplicatum: Nam 7. ductus in 7. exhibet 49. Ideo iam reperi latus HG, vel EC planorum. Vnde ambo subducenda sunt; ergo 2. in 7. ducti faciunt 14. qui ob locum æquiua-

æquiualent numero 140 subtrahoque à 189. ita tamen, vt seruet suum locum, & 4. sub 8. situs sit, & 1. sub 1. neque vltimum numerum punctatum vllo modo tangat subtractio, remanentq; 49. Et quia iam cognoui latus parui quadrati HG esse 7. ideo multiplico 7. in se, & faciunt 49. qui subductus à 49. numero residuo nihil remanet: Vnde 7. ponendus est apud radicem sepositam 1. & efficiet 17. Vides itaque, quod 1. priùs significabat 10. cum modo cum numero 7. significet 17. qui est radix, seu latus DC 17. partium maximi quadrati capientis quadratula 289.

Sed quia aliquando casus occurrunt, qui ambiguum possent reddere operatorem: nisi de illis priùs monitus esset, ideo libet omnes casus, qui occurrere possunt recensere.

Primus est; si numerus primus ad sinistram punctum non habeat, tunc, vt diximus in præcss. 1. ille numerus est consignificator, & tota radix à duplici numero subducenda est, vt si fuissent dati 9289. tunc numerus 9. nō esset punctatus; quare radix non esset ab illo extrahenda, quæ esset 3: sed ab illo quidem vt cum numero 2. idest à 92. quæ est 9. cuius quadratum est 81. à 92. subducendus, & residuum erit 1189. Duplicetur ergo, vt supra radix 9. & facit 18 Video itaque, quot vicibus capiat 18. in 118 & video, quod capit quidem magis quā 6. sed numerus 6. est ille, qui relinquit numerum capacem recipiendi quadratum ipsius 6. & ideo multiplico 6. per 18. & faciunt 108. quos subduco à 1189. ponendo 8. sub 8. & reliqui numeri sub reliquis versùs sinistram, & residuum est 101. Multiplico deinde 6. in se, & faciunt 36. quos subduco à 109. ponendo 6. sub 9. & residuum est 73. fractus numerus à quo radix quadrata subduci nequit. Radix ergo quadrata huius numeri erit 96.

Casus secundus est, si numerus, qui datur non sit quadratus V.g. si numerus datus esset 115. ita vt ablato primo quadrato 1. remaneat 15. à quo radix quadrata duplata pro planis proportionalibus medijs subduci nequit, vt hîc: Nam 1. sepositus duplatus non potest subtrahi ab 1. qui est apud 5. Vel etiam si capiat numeros planos proportionales medios, adhuc tamen totus residuus numerus à radice quadrata primo extracta, & duplata adeo absorbeatur, vt non remaneat locus alteri quadrato, nec quidem vnitati, vt si daretur numerus 120. tunc subducto maximo quadrato ab 1. qui est 1 remanet 20. à cuius numero sinistro radix quadrata 1. duplata subtrahi quidem potest; sed nihil remanet tunc signum est, quòd non adsit tantus numerus quadratorum paruorum, qui integrent saltem seriem vnam ipsorum pro quolibet plano; nimirum 10. pro vno, & 10. pro alio, vt in numero 115. siquidem ablato maximo quadrato decimarum, nempe 100. quarum radix est 10. non remanent nisi 15. qui non possunt conficere duas series æquales radici 10. pro FH, & 10. pro HE; vt constat ex Cor. 2. propos.18. expens. præced. hæc verò series geminæ 10. & 10. idest 20, non adest, cum non sint, nisi 15. Quod si adesset, at non superesset saltem vnitas pro quadrato paruo nigro, ad H, vt ex supracit. Coroll. constat esse necessarium ad hoc, vt duo plana, & series quadratorum paruorum cum quadrato magno extracto faciant quoque quadratum. Ideo, si hoc occurrat, apud radicem ponendus est 0, vt dicat 10. & residuum 15. aut 20. erit numerus fractus.

Casus tertius est. Si id occurrat non in fine, sed in medio V.g. si esset numerus 12036. à quorū quinto 1. radix quadrata subducta relinquit 20. à quo si 1. radix duplata subducatur nihil remanet sub puncto nisi 0, à quo, nec vnitas subduci potest: Signum est; quòd ab eo numero radix quadrata, quæ esset decimarum subduci nequit; cum nullum adsit quadratum centesimarum, nempe nullum adest quadratum 100. vnitatem, seu quadratula continens: Quare apud 1. sepositam radicem, vt locum seruet ponendus est 0, & posthabito numero medio punctato, cuius loco ponitur 0, apud radicem, iam procedendum est ad educendam radicem quadratam ab vltimo: Vnde considero numerum, qui apud eum est non punctatum, 203. quot vicibus capiat radicem duplatam 10. quæ est 20. & video quod 9 vicibus, & adhuc remanet numerus talis, qui capiat 9. in se multiplicatum nempe 81. Ideo multiplico 20. per 9. & faciunt 180. quos subduco à 203. & sunt residui 23. quibus addo 6. vt fiat 236. à quo in se multiplicatus subducendus nempe 81. & residuum est 155. qui fracti sunt, nec ab eis radix quadrata amplius subduci potest. Itaque radix quadrata numeri dati 12036. est 109. & remanet aliquid, quia numerus quadratus non est. Vnde maximi quadrati, qui est 11881. qui in ipso capiat radix quadrata subducta est.

12036	109. Residuum 155.
11..	——
203	20
180	81
——	
236	
——	
155	

Casus quartus est, si remaneant reliquiæ maiores; quam par sit, & ferat regula, quomodo dignoscatur error. Hic itaque dignoscitur ex Cor. 2 propos.18. præced. Nam reperiatur talis numerus, qui cum numero, cuius radix quadrata extracta est, quadratum quoque efficiat; Cùm ergo sciamus radicem quadratam, eam duplicabimus, & fit præcedentis quadrati duplicata radix 218. & vt reperiamus minimum numerum, qui hoc quadratum constituat accipiemus 1. per quem multiplicabimus 218. & dabit eundem numerum, cui addemus 1. in se multiplicatum, vt faciat 1. & fiet 219. & hic erit minimus numerus, qui quadrato 11881. possit addi ad hoc, vt eius radix vnitate tantùm aucta adhuc efficiat quadratum; si ergo residuum V.g. 155. æquet hunc numerum; signum est, quòd radix quadrata non bene deducta, sit, & quòd ille, qui extractus est, licet sit radix quadrata

ta

ta alicuius numeri, non est tamen maximi quadrati, qui in numero illo capiat, cum maior potuisset capere, cuius radix vnitate esset maior.

PROBL. II. PROPOS. XXI.

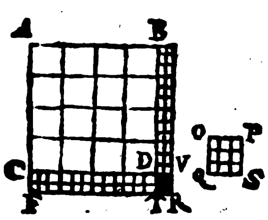
Radicem quadratam vtrum benè deducta sit inuestigare.

Extracta radix quadrata in se multiplicanda est, & si adsint reliquiæ addendæ. Nam, si restituat numerum priorem additis residuis, benè est extracta radix quadrata alicuius quadrati, qui in numero dato capiat; Ad hoc autem, vt sciamus, & securi simus, illum esse maximum quadratum; examinandæ erunt reliquiæ; vtrum possint superare, vel æquare numerum ex Casu Tertio, qui cum numero à quo radix quadrata deducta est quadratum constituat; Nam potest esse, quod quadratum sit benè deductum; sed non maius quàm fieri possit, ita si extracta esset radix quadrata 16. à 289. multiplicatis in se 16. & additis fragmentis 33. restitueret priorem numerum 289. cum tamen radix quadrata non sit 16. sed 17.

PROBL. III. PROPOS. XXII.

A numeris non quadratis radicem quadratam proximiùs, quàm possit, educere.

Qvoniam non omnis numerus quadratus est, si tamen quis vellit ab eo maximum quadratum, quem possit, proximiùs inuestigare, ita faciendum est.



Sit numerus 22. à quo radix quadrata subducta 4. qualis est quadrati ABCD reliquerit pro residuo quadrata 6. vt est OS. Volo cognoscere, quid radici quadratæ addendum sit propter hoc residuum. Multiplico radicem quadratam 4. pro vt mihi placet, V. g. per 3. (si per 10. vel 100. exactior erit, & facilior operatio) & faciet 12. & quia sunt duo plana facient 24. ita vt sint 12. pro vno, & 12. pro alio, quod nihil aliud est, quàm quod latus quadrati BD intelligatur diuisum in partes 12. & singula quadratulorum latera in 3. & item CD in partes 12. quæ sunt 24. Deinde me transfero ad residuum, nempe 6. & quia vnumquodque latus quadratorum paruorum, quę remanent, vt est OPQS, debet diuidi in tres partes, vt est diuisum quodlibet latus quadratorum paruorum in quadrato AB, & fieri quadrata parua; ideo multiplico 3. in se, & reddit 9. & quia habeo 6. quadrata multiplico 6. per 9. & faciunt 54.

Radix verò est solum 24. nempe deberent addi ad hoc, vt peruenirent ad longitudinem duorum laterum CD, & BD quadrata parua 24. & insuper vnum in angulo, quæ sunt 25. sed, quia numerus residuus est 54. multo maior, ideo forte potero ex istis quadratis adiungere duos ordines, nempe CD, & FR pro vno latere, & BD, & NV pro alio, ideo multiplico per 2. & faciunt 48. & rursus multiplico 2. in se, & faciunt 4. quos addo numero 48. & faciunt 52. Addidi verò 4. ob quadratum paruum DR, cuius latus est 2. ob duas tesseras quadratulorum 24. hinc, & inde additas: hos itaq; 52. subduco à 54 & residuum erit 2. de quibus non est curandum maximè, si ellegeris numerum maiorem, vt admonui. At quia latus multiplicaui per 3. & gemina vice duo latera radicis compleui; ideo efformo minutiam $\frac{2}{3}$. Latus ergo quadratum numeri 22. erit $4\frac{2}{3}$ ferè.

Obserua verò. Quod hoc est idem, ac si quadratula parua omnia 22. multiplicarentur per 3. in se ducto, idest per 9. & fierent 198. & ab eis ita multiplicatis radix quadrata erueretur: Nam subducta radix quadrata est 14. à numero 198. Quare si rursùs diuidatur 14. per 3. restituit $4\frac{2}{3}$, nempe partes 4. radicis prioris, & earum $\frac{2}{3}$. Vnde facilitatis gratia addes numero à quo radix quadrata subducenda est V. g. 22. binarium zifrarum, vt faciat 2200. ita enim multiplicabis numerum 22. per quadratum 100. numeri 10. & deinde ab eo extrahes radicem quadratam, vt supra docui; quæ erit 46. Diuides ergo 46. per 10. & erit $4\,\frac{}{1}\frac{6}{0}$ numeri 22. radix quadrata. Sic si addas duos binarios zifrarum numero 22 vt sint 220000 extrahes exactiùs: nã hęc additio habet vim multiplicationis per 10000. qui est quadratum numeri 100. radix verò quadrata numeri 220000. est 469. quã diuides per 100. & dabit 4. & $\frac{}{1}\frac{6}{0}\frac{9}{0}$. Minor vero, sed maxima, quę eo numero contineri possit. Et sic si cupias etiã exactiorem, binarium, vel duos, vel tres binarios addes, parique modo operaberis. Sufficiet autem detruncare tot numeros radici, quot binarij zifrarum additi sunt; quoniam duæ zifræ vnicum numerum in radice pariunt, & sub singulis figuris, seu numeris, interiectâ lineolâ addere zifram cum vnitate ad sinistram; nam hęc detruncatio habet vim diuisionis, vt patet. Si verò velis radicem maiorem vera, addes fractioni vnitatem V. g. fractioni 6. addita vnitas, vt sint 7. dat $4\frac{}{1}\frac{7}{0}$ maiorem vera. Sic, & fractioni $\frac{}{1}\frac{6}{0}\frac{9}{0}$ addita vnitas dat 4. & $\frac{}{1}\frac{7}{0}\frac{0}{0}$ maiorem vera radice.

PROBL. IV. PROPOS. XXIII.

Datis duobus numeris tertium proportionalem inuenire.

Ex propos. 20. septimi habemus, quod duo numeri extremi proportionales generant æqualem numerum inuicem multiplicati medio proportionali in se multiplicato, idest eius quadrato sicut ex propos. 19. l. 6. habetur, quòd rectangulum duarum linearum proportionalium est æquale quadrato ex media; quòd cum ita sit, si adsint duo numeri proportionales 24. 32. & tertius quęratur hic tertius quæsitus erit latus plani numeri æqualis quadrato numeri 32. Ergo in se multiplicetur 32. & fiet quadratum 1024. quia ergo iste numerus est etiam planus numerus, cuius latus est 24. & tertius proportionalis est aliud latus sicut ex defin. 1. lib. 8. se mutuo multiplicantes planum generauerunt, sic si diuidatur per alterum numerus alter restituetur. Ergo diuide 1024. per 24. & quotus erit $42\frac{2}{3}$ tertius proportionalis, et itq; 24. ad 32. vt 32. ad $42\frac{2}{3}$ nam 24. ad 32. & 32. ad 42. & $\frac{2}{3}$ est vt 3. ad 4.

PROBL. V. PROPOS. XXI.

Datis duobus numeris medium proportionalem inuenire.

QVoniam ex propos. 20. lib. 7. si sint tres numeri proportionales, planus numerus genitus ab extremis est æqualis medij in se multiplicati quadrato; Ideo, si duo numeri dati inuicẽ multiplicentur, & ab ipsorũ genito radix quadrata eruatur, hic numerus erit medius proportionalis. Sint dati duo numeri 20. & 45. Multiplicentur inuicem, & fiat 900. si ë 900. extrahatur radix quadrata erit 30. qui est intermedius proportionalis, & ita est 20. ad 30. vt 30. ad 45. quod si numerus genitus non sit quadratus, neque enim omnibus numeris tertius, aut quartus proportionalis inuenitur ex prop. 4 & 5 l. 8. elem. Auferendus est ex dato numero plano maximus quadratus, qui auferri possit, vt medius proportionalis viciniùs, quàm possit, obtineri queat.

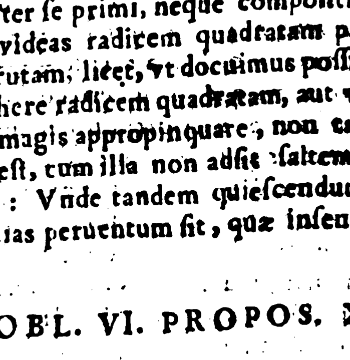
COROLLARIVM.

HInc poteris experiri illud, quod Eucl. probat propos. 5. lib. 8, non omnẽ numerũ habere, aut mediũ, aut tertiũ proportionale, quia sũt numeri inter se primi, neque compositi ex alijs: Quare, si videas radicem quadratam prima vice non esse erutam: licet, vt docuimus possis in reliquis extrahere radicem quadratam, aut veræ radici semper magis appropinquare, non tamen vera educi potest, cum illa non adsit saltem numeris exarabilis: Vnde tandem quiescendum, cùm ad eas minutias peruentum sit, quæ insensibiles habeantur.

PROBL. VI. PROPOS. XXV.

Numerum datum maiorem, ita diuidere, vt partes sint respectu alterius extrema proportionalia.

V. g. sit 10. qui ita debeat diuidi, vt partes sint, respectu numeri 4. extrema proportionalia. Diuidatur in duas partes, & sint 5 multiplicetur in se fiunt 25. subducatur deinde 4. in se ductus, nempe 16. remanent 9. cuius radix est 3, qui additus numero 5. facit 8. & alterum segmentum est 2. estque 2. ad 4. vt 4. ad 8.



PRobatur adhibito schemate propos. 16 secundi elem. HE quadratũ medietatis AG æquale est quadrato EB, & HB ex 11. propos. lib. 2. elem. quare ablato quadrato BE à quadrato HE residuum erit quadratum ex HB, si ergo requiratur HB latus, & addatur medietati AH lineæ HG constituet lineam AB; & residuũ medietatis erit BG. sed ex prop. 16. l. 6. elem. BG, & BE, & AB sunt proportionales. Ergo etiam numeri eas proportiones exprimentes, vt notauimus præass. ad propos. 18. huius.

EXPENSIO VII.

De radice Cubica, duobusq; numeris medijs proportionalibus.

EXtractio harum duarum radicum, nempe tùm cubicæ, tum quadratæ omnino necessaria est reliquis tractatibus; sed hæc præcipuè pro solidis inueniendis, & permutandis, aut proportionaliter augendis: Cæteræ verò radices Zensizensica, Surdesolida, & cæt. vix in vsum veniunt, & rarus, omnino casus dempta Algebra, & etiam in ipsâ, nec frequentior vsus; Propterea earum explicatio, & extractio huic libro parum conuenit, in quo omnia quidem Mathematica, sed relictis superfluis, & minus vtilibus tradere intendimus.

Præass. Cubica radix est numerus radicalis, qui gemina vice multiplicatus in se, & in genitum producit numerum cubum, V. g. 2. ex defin. 21. 8. Elem. erit radix cubica, quia multiplicatus in se facit 4. & iterum idem genitum multiplicans facit 8. & 8. erit cubus. Dato itaque numero cubo, vel numerum, qui cubum comprehendat, tradenda est regula, quâ ex ipso hæc radix possit educi.

Aliæ verò radices sunt numerorum, qui ne dum multiplicant se, & productum, sed insuper productum producti, vt Zensizensica. Vel producti etiam productum, vt Surdesolida, & sic in infinitum. Si ergo numeri V. g. 2. & 2. adhibeantur eos vnica vice inuicem multiplicando, numerus est quadratus; si etiam rursus 2. adhibeatur, & multiplicet productum 4. erit productus 8. cubus: Si rursus 2 adhibeatur ad productum 8. multiplicandũ erit productus 16. Zensizensus. Si 2. rursus adhibeatur erit numerus productus 32. Surdesolidus, & sic procedendo in infinitum.

Præass. 2. Quod adnotauimus in præass. 1. expens. præced. etiam hic aduertendum. Cubum numerorũ, à quo primo subducitur à dextra significare cubum vnitatum; secundum significare cubum decimarum, tertium cubum centesimarum; & ideo cubus vnitatum, scilicet, cuius radix sunt vnitates, exprimetur ad summum tribus numeris. Sic numeri 9. radix erit numerus cubus 729. tribus numeris expressus; at, si sit quatuor, iam incipit esse Cubus decimarum; nam numeri 10. cubus est 1000. quatuor numeris expressus, & quia cubus centesimarum incipit à 7. numeris, quia 100. per 100. faciunt 10000. & iterum hic per 100. facit 1000000. Ideo Cubus decimarum exprimetur, ne dum quatuor numeris, sed quinque & sex; cum vltimus cubus decimarum s. numeri 99. Sit 970299. sex numeris expressus. Quare, cum ob numeri magnitudinem totus cubus extrahi simul nequeat, & debeat extrahi per partes; prius extrahitur radix numeri cubi decimarum, V. g. deinde vnitatum si sex, vel quinque vel quatuor numeri sint: at, si sint septem vel octo, vel nouem figuræ; tunc ipsius extrahitur cubi centesimarum radix; deinde decimarum; postea vnitatum, & sic si adsint plures numeri.

Præassumpt. 3. Aduertendum quoque ex prop. 19.

19. lib. 8. inter duos cubos, duos medios differentes cadere proportionales numeros, qui sicut in radice quadrata erant duplandi. Sic in Cubica sunt triplandi, vt potes faciliter intelligere ex fig. Cubi hic apposita. Cubus enim QO, cuius bases nigræ, si dematur à cubo toto QT, remanet cubus OT, & remanent quoque duæ species solidorum; nempe solidum AB, quod habet superficiem AD eandem ac cubus demptus OQ, & altitudinē SO, quam cubus residuus OT. Remanet quoque solidum aliud KO habens superficiem cubi residui OT, & altitudinem SO cubi dempti OQ. Quę tamen solida ad cubum complendum triplicantur, nam primæ speciei sunt tria AB, & CI, & FD, sicut & secundæ speciei tria sunt KO, & LH, & EI, quæ omnia extrahenda sunt, vt habito latere, & radice FE, deinde residui eius FH obtineatur, quæ est eadem ac TK, vel FS. Hinc est, quod tum propter hanc rationem, tum propter rationem prædictam non ab omni numero radix cubica extrahitur; sed inter singulos duo medij prætermittendi sint.

PROBL. I. PROPOS. XXVI.

Radicem Cubicam extrahere.

SIt datus numerus 15625. à quo radix cubica extrahi debeat. Super primam figuram ad dextram punctum collocabitur, & duabus intermissis super quartam, & sic semper duabus intermissis: quia ab istis punctatis propriè radix quadrata subducitur; ab alijs verò intermedijs solida proportionalia educuntur.

Videndum est itaque quinam maximus cubus capiat in primo numero punctato etiam inclusis præcedentibus ad partem dextram, nempe in 15. ad quod expediet habere cubos iam deductos, cùm suis radicibus ab vno vsque ad 10. vt hic vides.

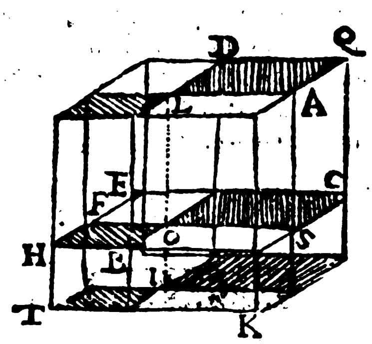
Itaque maximus cubus, qui capiat in 15. est 8, cuius radix est 2. itaque seorsum radix 2. statuatur, & subducatur 8. à 15. residuumque erit 7. & sic subduxi Cubum 10 ex primo præassumpto: quia numerus punctatus, à quo subduxi, est quarto locó, qui est millrarium: habeoque radicē, & latus 2 qui in radice ponendus est secundo loco, quod significet decimas, tunc cùm fuerit omnino extracta radix cubica.

Radix	Quad.	Cubus
1	1	1
2	4	8
3	9	27
4	16	64
5	25	125
6	36	216
7	49	343
8	64	512
9	81	729
10	100	10000

2.

7625.

Accedamus modo ad alterius cubi extractionem à punctato numero 5. sed quia prius deducenda sunt omnia solida, ideo accipiamus quadratum radicis 2. apposita vnica zifra, vt sit 20. quia,



vt dixi est numerus decimarum, eritque 400. quē triplico ob tria proportionalia solida maiora, & sunt 1200. Iste ergo numerus debet capere in residuo 7625. & insuper remanere aliquid, tum ob solida minora triplicata extrahenda, tum ob cubum numerum insuper deducendum. Et video, quòd quinquies capit, & insuper remanet talis numerus, qui, vt puto, erit capax recipiendi solida prædicta minora, & cubum. Ideoque apud radicem pono 5. vt altera radix, vt itaque faciam, & tramutem in solidos numeros, superficies supra factas 1200 multiplico per 5. nempe per altitudinem inuentam, & faciunt 6000. & habeo tria solida maiora. Deinde, vt habeam quoque solida minora, & cubum. Multiplico radicem 5. in se, & generat planum numerum 25. habeoque basim solidorum minorum, quam triplico; quia tria sunt, & faciunt 75. quem numerum multiplico per latus 20. vt obtineam altitudinem ipsorum, & faciunt 1500. tandem, vt obtineam cubum, multiplico quadratum 25. per radicem 5. & facit 125. Quos omnes numeros simul colligo, nempe 6000. solida maiora 1500. solida minora, & 125 cubum; eritque numerus 7625. Quem subduco à numero residuo 7625. & nihil remanet. Radix ergo cubica extracta fuit, & reperta 25. Si verò fuisset numerus 15637. non fuisset cubus numerus; vnde superfuisset aliquis numerus V. g. 12. à quo radix cubica vlteriùs extrahi non potuisset, vt supra de radice quadrata dixi, & illi casus, quos ibi aposui, sunt & hic obseruandi; sed omnia triplicando.

25

7625

Primus itaque casus est; si ante primum numerum dextrum reperiantur duo numeri, vel vnus; tunc primi sunt consignificatores, & illi tres pro vno sunt accipiendi; Secundus si numerus, qui datur non sit cubus V. g. si datus fuisset numerus 1330. tunc extracto cubo 1. remanet 330 à quo non possumus extrahere duas species proportionalium triplicatas, & cubum minorem. Nam 1. in se facit 1 addito 0. facit planū numerum 100. quē triplico; & facit 300. qui numerus capit in 330. vnica vice; itaque radix altera esset 1. Si ergo talis verè est oportebit, vt capiat eius cubus, & solida tria in residuo 30. multiplicatus ergo 1. in se facit 1. superficiem, quam triplico, & multiplico per 10. & facit 30. solidum. Deinde 1. in se, & facit 1. Vnio tandem simul 300 solida maiora 30. solida minora, & cubum 1. & faciunt 331. maior numerus; quam 330. Itaque nec quidem cubus vnius vnitatis in residuo 330. capere potest: Quare apud radicem pono ziffram, & erit 10. & 330. erit residuum; quod si fuisset hoc residuum 331. radix cubica fuisset 11. & nihil residui fuisset, quia numerus exhibitus fuisset cubus.

Tertius casus est. Si id occurrat non in fine operationis, sed in medio: tunc apposita, vt in pręc. casu apud radicem zifra, totum residuum sequentibus numeris est copulandum, & videndum, an à reliquo hoc consequentibusque ad punctum radix cubica extrahi possit.

Quartus casus est. Cum remanent reliquiæ cognoscere: an illæ sint maiores, quam oporteat. Quod vt cognoscatur radix cubica iam extracta V. g. 10. à numero 1333. multiplicetur in se, quę multiplicata triplicetur, vt sit 300: triplicoque 1. & per radicem 10. multiplico, & facit 30. & addo 1. & facit 31. quem addo numero 300. & sunt 331. Residuum verò numeri 1333. deducta radice Cubicâ 10. est 333. itaque cum numerus sit maior, quàm productus 331, signum est. quòd adhuc vnica vice Cubus vnius vnitatis capere potest, & quod radix cubica maxima sit 11. huius numeri 1333. remanetque fractus numerus 2.

PROB. II. PROPOS. XXVII.

Radicem cubicam, vtrum benè deducta fuerit? inuestigare.

HOc fit multiplicando radicem cubicam in se, & deinde in productum, & additis residuis, si consentiat cum numero exhibito erit bene facta deductio; sin minus aliquis error irrepsit; Hoc autem patet per se, nec indiget ostensione.

PROBL. III. PROPOS. XXVIII.

Dato numero non cubico, radicem cubicam proximiorem deducere.

ADdes proposito numero V. g. 15862. aliquot ternarios zifrarum V. g. duos, vt fiat numerus 15862000,000. à quo radix cubica subducatur, & fit 2512. Quia ergo duo ternarij zifrarum additi sunt, auferantur duæ figuræ sinistræ 12. tanquam numerus fractus, & supposito 1. cum duabus zifris iuxta ternarios zifrarum additos, erit radix cubica numeri 15862 valde proxima 25, & $\frac{12}{100}$. Ratio est eadem, quæ præcedent. Expens. prop. 22. eritque hic applicanda.

* Vel multiplicabis residuum 237. subductâ radice cubicâ per cubum 1000. numeri 10. & erit 237000. Deinde radicem cubicam 25. multiplicabis per 10. eritque 250. quam duces in se met, vt habeas numerum planum 62500. & ob tres proportionales interpositos per 3. multiplicabis, eritque 187500. videbis itaque quot vicibus capiat hic numerus 187500. in residuo 237000 & capit vnica vice. Ideoque hæc vnitas in se ducta multiplicabitur cum radice 250. & erit 250. quam triplicabis, vt faciat 750. ob tres proportionales minores, deinde duces vnitatem quoq; in se, & erit 1. Ergo isti numeri 187500. & 750. & 1 simul addantur, eruntque 188251. quos subduces à residuo 237000. Et quia in hoc vnica vice capit, & radix Cubica fuit multiplicata per 10. ideo erit minutia $\frac{1}{10}$.

THEOR. I. PROPOS. XXIX.

Si dentur quatuor numeri continuè proportionales, quadratum primi ad quadratum secundi est veluti secundus ad quartum.

SInt quatuor numeri continuè proportionales 3. 6. 12. 24. & sit quadratum primi 9. & secundi 36. Dico, quod ita est 9. ad 36. vt secundus 6. ad quartum 24.

* Probatur. Quoniam ponitur 3. ad 6. vt 6 ad 12. Ergo Rectangulum, & numerus planus ex primo 3. & tertio 12. æquabitur quadrato ex medio 6. Quare primus 3. multiplicando se faciet suum quadratum, & multiplicando tertium 12. faciet quadratum numeri 6. Ergo ex propos. 17. septimi erit 3. ad 12. nempe primus ad tertium, Sic quadratum primi 9. ad quadratum 36. secundi. Sed vt primus ad tertium, ita est secundus ad quartum. Ergo vt secundus ad quartum, sic erit quadratus primi ad quadratum secundi.

THEOR. II. PROPOS. XXX.

Si sint quatuor numeri proportionales, erit solidus primi in se ducti, & in extremum æqualis Cubo secundi.

SInt quatuor numeri proportionales 2. 6. 18. 54. Dico solidum genitum ex multiplicatione primi in se, & in quartum esse æqualem Cubo secundi.

* Probatur ex praeced. ita est quadratus primi 4. ad quadratum secundi 36 vt secundus ad quartum. Ergo ex 19. septimi Elem. Si multiplicetur primi quadratus cum vltimo, qui sunt extremi proportionales generabit æqualem numerum, ac secundi multiplicati in suum quadratum, qui sunt medij proportionales. Sed secundus multiplicans suum quadratum facit Cubum, & primus multiplicans se, & deinde quartum facit solidum. Ergo ille cubus, isteque solidus erunt æquales.

PROBL. IV. PROP. XXXI.

Inter duos numeros datos, duos medios proportionales adinuenire.

SInt dati duo numeri 54. & 2 inter quos duo medij proportionales sint conijciendi. Multiplico primum 54 in se, & deinde in alium 2. generabiturque numerus solidus 5832 Ab hoc itaque numero extrahatur radix cubica, & erit 18, secundus proportionalis apud primum 54 ponendus. Accipiatur deinde numerus 2. tanquam primus, & ducatur in se, deinde in vltimum 54 & generabit numerum solidum 216. Cuius radix cubica est 6. apud 2, collocandus, & sic erunt 54. 18. 6. 2. quatuor proportionales continui.

* Probatur. Nam cubus secundi proportionalis ex præced. æquatur plano numero ex primo in se, deinde in quartum ducto. Si ergo ab eo plano numero primo in se, deinde in quartum extrahatur radix cubica, ille erit secundus proportionalis post primum collocandus. Quam ob rem, si accipiatur vltimus 2. tanquam primus inuerso ordine dabit secundum qui erit idem, ac tertius, serie, vt prius acceptâ. Etenim tertius 6. est secundus respectu 2 vltimi, vt primus accepti, vt 18. est secundus respectu primi 54.

PROBL.

PROBL. V. PROPOS. XXXII.

A fractionibus quadratis, & cubicis radicem quadratam excerpere atque cubicam.

EXtrahatur radix Quadrata, seu Cubica, tum à numeratore, tum à denominatore, seu vera, seu propinqua: si quando non sit nec numerator, nec denominator numerus, aut quadratus, aut cubicus, & erit factum, quod desideratur. Nam illæ duæ radices numeratoris inquam, & denominatoris constituent minutiam radicem numeri propositi. Proponatur V. g. minutia $\frac{4}{9}$ à quâ deducenda sit radix quadrata. Radix numeratoris est 2. denominatoris 3. ergo $\frac{2}{3}$ erit radix quadrata minutiæ $\frac{4}{9}$, sic quoque $\frac{2}{3}$ erit radix cubica numeri $\frac{8}{27}$. Quod, si data minutia sit fractio alterius minutiæ reducenda est ex dictis ad eam minutiam. Quod, si hæreat integris, & ab integro simul cum minutia radix quadrata, vel cubica educenda sit; integer in minutiam reuocetur, & ab ea minutia radix cubica, vel quadrata eruatur. Sic si sit 5 $\frac{4}{9}$ primò 5 $\frac{4}{9}$ reducetur ad minutiam $\frac{49}{9}$, & extrahetur radix quadrata, tum à numeratore 49 quæ erit 7. tum à denominatore 9. quæ erit 3. itaque minutia $\frac{7}{3}$, erit radix quadrata minutiæ $\frac{49}{9}$, vel 5. & $\frac{4}{9}$.

PROBL. VI. PROPOS. XXXIII.

A fractionibus, nec cubicis, nec quadratis radicem proximiorem cubicam, vel quadratam excerpere.

SIt data minutia $\frac{5}{7}$, à quâ oporteat radicem proximiorem excerpere. Potest id exequi præcedenti regula duas radices nempe denominatoris, & numeratoris excerpendo proximiores, & ex eis duabus radicibus numeratoris quidem pro numeratore, denominatoris autem pro denominatore vtendo ad statuendam minutiam, quæ sit radix minutiæ datæ. Sic numeratoris 5. radix quadrata est 2 $\frac{2}{10}$, & denominatoris 7. est 2 $\frac{6}{10}$ essetque minutia.

* Verum, vt scribuntur ad modum minutiæ integri reducendi sunt ad fractiones, & vt earum valor cognoscatur per denominatorem numerator diuidendus, vt redigantur ad vnicam minutiam. Sic 2 $\frac{2}{10}$ erunt $\frac{22}{10}$, & 2 $\frac{6}{10}$ erunt $\frac{26}{10}$. Quia ergo ex propos. 4. huius 1. par. ita est minutia $\frac{22}{10}$ ad minutiam $\frac{26}{10}$, vt numerator ad numeratorem; ideo minutia $\frac{22}{26}$ erit ea, quæ quæritur relicto denominatore 10. qui non variat minutias. Vnde ita erunt minutiæ illæ, ac minutia $\frac{22}{26}$.

2 $\frac{2}{10}$	2 $\frac{6}{10}$
$\frac{22}{10}$	$\frac{26}{10}$

Verùm, & alio modo exactiori fieri potest. Multiplicetur denominator 7. per numeratorem 5. & fiet 35. eritque huius 35. radix quadrata 5. & $\frac{9}{10}$, seu $\frac{59}{10}$. Si ergo assumatur numerator 5. & statuatur pro numeratore huius radicis inuentæ $\frac{59}{10}$ eo modo, quo supra, redigendo ad eandem denominationem, in fractioneq; proiciendo, vt sit $\frac{50}{59}$ erit relicto denominatore 10. minutia radix quæsita $\frac{50}{59}$. Idem etiam eueniet, si radix inuenta $\frac{59}{10}$ statuatur pro numeratore, & denominator supponatur, & fit $\frac{59}{70}$.

* Probatur, quod hæc minutia sit eadem radix, ac illa, quæ esset educta, tum à numeratore, tum à denominatore propositæ minutiæ, & ideò quod & ipsa radix sit.

Nam, quia multiplicauimus duos numeros 5. & 7. extremos, & fecimus 35. cuius radix quadrata est 5. & $\frac{9}{10}$ ex prop. 20. septimi, erit eadē proportio 5. ad 5. & $\frac{9}{10}$ ac 5. & $\frac{9}{10}$ ad 7. (supponimus autē ostensionis gratia 5. $\frac{9}{10}$, esse radicem veram) Quare proportio 5. ad 7. est duplicata eius, quam habet 5. ad 5. $\frac{9}{10}$, vel 5. & $\frac{9}{10}$ ad 7. Sed etiam 5. ad 7. habet duplicatam proportionem radicis 5. ad radicem numeri 7. ex propos. 18. l. 8. Ergo est eadem proportio radicis numeri 5. ad radicem numeri 7. ac 5. numeratoris ad radicem numeri 35. vel radicis numeri 35. quam ponimus esse 5 $\frac{9}{10}$ ad denominatorē 7. quare erit ex Cor. prop. 3. p. 1. huius, eadem minutia radix numeratoris, & radix denominatoris V. g. $\frac{22}{26}$ supra inuenta, ac numerator 5. cum radice numeri 35. nempe $\frac{50}{59}$, aut ipsa radix 59. numeri 35. cum denominatore 70. cum in omnibus eadem sit proportio, quod earum omnium proportionum duplicata sit proportio numeratoris 5. ad denominatorem 7.

Ad extrahendā verò radicē Cubicā. Numerator 5. quadretur, & fit genitus 25. ducaturque in quadratum 25. denominator 7 & fiat 175. adiectisque cifrarum ternarijs, ab hoc numero extrahatur radix cubica. Nam si hæc statuatur tanquam numerator denominatoris 7. erit cubica radix minutiæ propositæ.

Sic numeri 175. radix cubica proxima est 5. & $\frac{6}{10}$. Si ergo hac radice vtar pro denominatore, & numero 5. pro numeratore modo prædicto, & faciam minutiam $\frac{50}{56}$ hæc erit radix cubica proxima datæ minutiæ $\frac{5}{7}$.

Probatur. Nam ex prop. 27. huius, radix solidi 5. in se, deinde in 7. ducti, nempe numeri 175, est secundus proportionalis post 5. primum collocandus; & 7. quartus proportionalis. Quare numerus 5. ad numerum 7. habebit triplicatam proportionem eius, quam habet 5. ad radicem numeri 175. Sed ex 19. l. 8. etiam 5. habet ad 7. triplicatam proportionem radicis cubicæ 5 ad radicem cubicam numeri 7. Ergo radix cubica numeri 5. sumpta, vt numerator ad radicem cubicam numeri 7. sumptam, vt denominator habebit eandem proportionem, quam 5. ad radicem cubicam numeri 175. Vnde ex propos. 3. huius 1. part. Coroll. erit eadem minutia, si sumatur 5. vt numerator, & radix cubica numeri 175. pro denominatore accipiatur, ac radix cubica numeri 5. vt numerator sumpta, & radix cubica numeri 7. vt denominator, quæ constituit cubicam radicem minutiæ $\frac{5}{7}$.

Potes etiam ducere numeratorem in quadratum denominatoris, & radix cubica erit numerator, cuius denominator erit ipse, qui priùs erat, constituesque minutiam $\frac{6}{7}$.

Ratio est eadem, quæ prædicta, solumque differt in hoc, quòd denominator, vt primus assumitur, vt radix extracta sit secundus proportionalis immediatus, & numerator quartus. Ibi verò numerator, vt primus assumebatur, & radix extracta tanquam secundus proportionalis, & tandem denominator tanquam quartus.

TRA-

TRACTATVS XIIII.

IN PROPORTIONES NVMERICAS. PARS I.

De Proportione Geometrica continua.

QVoniam ipsa fundamenta proportionum, numeros inquam simili ratione se referentes in præcedenti Tractatu inuenire docuimus, nunc ipsas proportiones, rationumque similitudines opus est speculari. Tres verò species proportionis sunt; nempe Geometrica, Arithmetica, Musica, de quarum naturâ agere opus est. Vnde in tres partes iste Tractatus abibit, in quarum singulis, singulas species exponemus.

EXPENSIO I.

De proprietatibus proportionis Geometricæ continuæ.

PRæcipua est, & quam in primis definit. lib. 5. defin. 4. Euclides, & de qua intelligit in propositionibus quinti, & sexti est proportio Geometrica, & de hac primò agendum est; cùm sit omninò eius cognitio necessaria ad Logarithmos inueniendos, & ordinandos; ob quem scopum de ea, hìc tandem pleniorem cognitionem exhibere fuit necessarium.

Proportio autem Geometrica in similitudine continentiarum consistit, quando quantitas continet, vel continetur ab alia similiter, ac aliqua alia quantitas continet aliam tertiam V. g. 4. 8. 16. sunt in proportione Geometrica, quia 8. continet 4. sicut 16. continet ipsum 8. nempe geminâ vice.

Datur duplex proportio Geometrica, *Continua*, & *Discreta*. Continua est illa, quæ est eadem inter tres, aut quatuor, aut plures numeros, ita ut quilibet sit sequens, & antecedens, terminus relationis, & fundamentum V g. 4. 8. 16. proportionem continuam habent; quòd fundamentum 4. referatur ad 8 vt terminum, qui tanquam fundamentum refertur quoque ad 16. terminum suum. At non continua est illa, in quâ nullus numerus rationem habet fundamenti simul, & termini, vt est illa, quæ intercedit inter 2. ad 4. & 5. ad 10. & 6. ad 12. Nam qualibet licet eadem proportio dupla habet suum fundamentum 2. 5. & 6. terminumq; 4. 10. 12. distinctum. Cum itaque multæ proprietates, tum de Geometrica proportione in genere, seu inter quantitates corporum, vt quinto, & sexto libro, seu inter quantitates numerorum, vt septimo, & octauo, & nono ab Euclide explicatæ sint; remanet hìc, vt solas proprietates Geometricæ proportionis continuæ explicemus.

THEOR. I. PROPOS. I.

Non omnes numeri continuari in suis proportionibus possunt.

PRobatur. Quia ex propos. 4. lib. 8. & prop. 5. eiusdem; nec numeri duo inter se primi, nec tres, aut plures proportionem dicentes continuam; si eorum extremi sint inter se primi continuari in numeris integris possunt. Quomodo verò cognoscendum sit, an dati numeri possint continuari in suis proportionibus, ibi explicatum est propos. 7.

THEOR. II. PROPOS. II.

Numeri, qui ab vnitate continuè proportionales sunt, primus in se multiplicatus producit tertium, & primus in tertium producit quartum.

PRobatur. Quoniam vnitas per ipsum primum primum metitur: nam vnitas, V. g. ter accepta facit 3. Vt itaque referatur 3. ad alium, vt 1. ad 3. ter debet accipi ipse 3. & ita in se multiplicari, vt fiat 9. Ad hoc autem, vt 9. se habeat ad alium, vt 1. ad 3. debet ter rursus accipi, vt fiant 27. & sic prosequendo. Ergo primus numerus post vnitatem in se ducendus, vt fiat secundus. Secundus autem multiplicandus per primum, vt fiat tertius in numeris ab vnitate continuè proportionalibus.

THEOR.

THEOR. III. PROPOS. III.

Si inter duos numeros, & aliquem alium numerum assumptum continui proportionales ceciderint numeri, quot inter eos, & assumptum numerum cadunt, tot, & inter ipsos medij proportionales cadent.

SInt à numero 8. continuè proportionales ABC, pro prima serie, & DEF pro secunda, & primæ numero æquali. Dico; *quòd tot inter eos cadunt numeri*, V.g. B, & E, vel C, & F quot inter quemlibet ipsorum B, vel C, & num. 8. proportionales cadunt.

C	27.	36.	48.	64	F
B	18.	24.		32	E
A	12			16	D
		8			
		64			
P	144	Q		256	R
S	20736.		3996.	66136	
		T		V	

Quod, vt probetur, quilibet ipsorum quadretur ducendo illum in se, & ex numerò 8. fiat quadratus numerus Q, & quadratus numerus P ex numero A, & quadratus numero R ex numero D; Cum ergo P, & Q sint numeri quadrati cadet inter eos medius vnus proportionalis ex prop. 8. octaui Euc. Sed inter B, & 8. cadit vnus medius proportionalis nempe A 12. quare erit B ad 8. numerum, vt numerus P quadratus ad quadratum Q.

Idem dicas de quadrato R, qui inter se, & quadratum Q admittit medium proportionalem vnicum; sicut E respectu numeri 8. Quare Q respiciet R quadratum, vt 8. numerus respicio numerum E. Ideo, cum sit B ad 8. vt P ad Q & 8. ad E, vt Q ad R erit ex æquo B ad E, vt P ad R. Sed cum P, & R. sint quadrati vnus inter eos proportionalis cadit, ergo etiam inter B, & E; Quia ergo inter B, & 8. vel E, & 8. vnus medius proportionalis cadit, vel A, vel D, inter etiam ipsos B, & E vnus medius proportionalis cadet, f. 24. & prop. 8. l. 8. Idem dicas de C, & F, inter quos duo medij proportionales cadent 36. & 48. sicut cadunt inter C, & 8. duo medij proportionales B, & A, vel sicut cadunt inter F: & 8. numeri medij E, & D. Quia inter S, & V cubos cadent duo medij proportionales.

THEOR. IV. PROPOS. IV.

Si sint quotcumque numeri continuè proportionales eandem inuicem proportionem dicent, tres numeri in eadem distantiâ assumpti relictis intermedijs.

SInt numeri continuè proportionales 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. Dico, quòd si assumantur *hinc tres numeri in eadem distantia*, V. g. 2. & 16. & 128. qui relictis duobus accipiuntur, quod eadem proportio adhuc est 2. ad 16. quæ est 16. ad 128.

Probatur. Nam vt est 2. ad 4. suum sequentem ita est 16. ad 32. suum sequentem, & vt 4. ad 8. ita 32. ad 64. & tandem, vt 8. ad 16. ita 64. ad 128. Ergo ex æquo, ita est 2. ad 16. vt 16. ad 128.

THEOR. V. PROPOS. V.

Trium numerorum continuâ proportione se respicientium quadratum medij est æquale rectangulo extremorum.

PAtet ex propos. 20. septimi. Nam numerus medius in se ductus, qui est quadratus ex defin. 18. septimi facit numerum genitum æqualē numero extremorum, qui est rectangulum numericum, aut planum, vt ex defin. 1. lib. octaui. Hoc idem posset probari in quantitate continua ex propos. 17. sexti.

THEOR. VI. PROP. VI.

Si sint quatuor numeri continuè proportionales planum factum ab extremis æquale est illi plano, quod fit à medijs.

PAtet quoque hæc propos. ex 19. propos. sept. vbi numerus ex multiplicatione extremorum probatur æquari numero ex multiplicatione mediorum; cum verò inuicem numeri multiplicantur in plana rediguntur, vt constat ex def. 1 octau. quod etiam est intelligendum de cubo facto ex medio, cui est æquale solidum numericum factum ex extremis multiplicatum per medium. Patet enim; quod cum plana sint æqualia, multiplicata per eundem numerum medium faciant idem solidum.

THEOR. VI. PROP. VII.

Quo maior est numerus, eò in ipso minutiores proportiones reperiri queunt continuâ proportione sibi inuicem respondentes.

PRobatur eo, quia ibi plures possunt inueniri relationes, vbi plura sunt fundamenta; talia autem sunt in multitudine maiori. Sed possunt etiam inueniri minutiores. Nam ea est minor proportio, quæ numeri, ad quem comparatur minorem partem, vel partes continet: sed numerus paruus acceptibilis à maiori numero continebit illius minorem partem, quam numeri minoris, V.g. 2. continebit pauciores partes numeri 1000. quam numeri 100. cum huius quinquagesimam partem amplectatur, illius verò quingentesimam. Ergo in maiori numero minutiores proportiones reperiri queunt.

THEOR. VII. PROPOS. VIII.

Differentiæ sunt in eadem proportione, ac ipsi proportionales in continuè proportionalibus.

SIt proportio continua 50. 60. 72. Dico differentias 10. & 12. esse in eadem proportione, ac ipsi termini, & sic esse 10. ad 12. vt 50. ad 60.

Pro-

* Probatur. Ita ponitur 50. ad 60. vt 60. ad 72. Ergo *diuidendo* ita erit 50. ad 10. vt 60. ad 12. Ergo *permutando*, ita erit 50. ad 60. vt 10. ad 12. quod erat ostendendum.

THEOR. IX. PROPOS. IX.

Differentiæ coaceruatæ in continuis proportionalibus constituunt cum numero radicali maximum terminum.

SInt tres termini continuè proportionales 4. 6. 9. & differentiæ 2. & 3 Sitque quidam numerus Ouium æqualis numero 4. & differentiæ 2. & 3. isti numero addantur. Dico fieri terminum æqualem termino 9. vltimo. Nam si addamus 2. ipsi 4. quâ differt 4. à 6 fiet Ouium æqualis numerus numero 6. & sic successiuè. Ergo cum omnes termini semper sint æquales etiam vltima æquali additione differentiæ Ouium completus numerus, vltimo termino erit æqualis.

THEOR. X. PROPOS. X.

Datis duobus terminis proportionalibus diuiso maiore per minorem Quotiens est denominator proportionis.

EXhibeantur duo termini 4. & 12. & diuidatur 4. per 12. quotiens erit 3. Dico *hunc quotientem 3. esse denominatorem proportionis, quam habet 4. ad 12.* Nempe 4. respectu 12. esse $\frac{1}{3}$.

Probatur ex defin. 1. septimi. Nam eam proportionem dicunt numeri, cum alterius fuerit eadem pars, vel partes, & cæt. Si ergo per diuisionem exquiratur, quę pars sit numerus 4. numeri 12. habebimus eius proportionem, quare ex propos. 40. septimi, pars numeri 12. quæ est 4. erit à quotiente denominata, nempe à 3. & dicetur tertia pars. Sic si velimus scire, quæ pars sit numerus maior 12. numeri 4. quia per diuisionem 4. per 12. habetur minutia $\frac{4}{12}$, aut $\frac{1}{3}$ habebimus proportionem, quam dicit 12. ad 4. nimirum triplam.

COROLLARIVM.

HInc verò est, quod secundus terminus contineat antecedentem ipso antecedente dempto, quot vnitates sunt in denominatore vna abiecta, & sic quod 12. minus 3. idest 9. contineat 3. toties, quot vnitates sunt in 4. sed demptâ vnâ.

THEOR. XI. PROPOS. XI.

* *Numerus maior in quacumque proportione multiplici continet reliquos omnes tot vicibus, quot sunt in denominatore vnitates vna dempta, & insuper numerum à quo denominatio incepit.*

SIt data continua multiplex denominata à 4. proportio, quæ sit 3. 12. 48. Dico 48. continere reliquos minores tricies nempe vna vnitate minus, quam sint vnitates in denominatore, qui est quaternarius, & insuper numerum 3. à quo incipit series.

Probatur. Nam progress. 1. ex suppositione n. 12. continet quater 3. ergo 3. tricies multiplicatus, idest acceptus quater minus vna vice æquabit 12. si cum 3. coniungatur numero, à quo incepit proportio. Progress. secundus sic dicas de numero 12. qui tricies acceptus, nempe per denominatorem quaternarium vnitate mancum multiplicatus, idest 36. & iunctus cum ipso 12. æquabit 48. Sed iam hoc ipsum 12. habemus, quo deficit numerus 36. ad adæquandum 48 ex primo progress. ex 3. tricies multiplicato, additoque ei numero ipso radicali 3. Ergo numerus 48. continebit reliquos tricies, nempe toties, quot vnitates sunt in denominatore minus vno, & insuper numerum radicalem, cùm 12. tricies acceptus cum 3. tricies accepto vna cum 3. radicali, nempe 12. æquet ipsum 48. Et idem dicas, etiam si sint plures termini, quàm tres.

Sic pronuncies etiam si proportio sit multiplex superparticularis, seu superpartiens: V. g. detur 9. 24. 64. cuius denominator est 2. & $\frac{2}{3}$. Si subtrahas 9. à 24. remanent 15. 51 $\frac{1}{3}$. Quare 9. acceptus iuxta denominatoris vnitates vnâ exclusâ, nimirum 1. & $\frac{2}{3}$, quæ faciant 15. addito ipso numero 9. æquant 24. Ita 24. acceptus semel cum duobus tertijs, & 9. cum duobus tertijs addito numero 9. radicali æquant ipsum 64.

* Probatur aliter data proportione 3. 12. 48. si dematur 3. à 12. erit 3. ad 9. Ratio denominata à 4. sed diminuto vnitate, idest à 3. Quia ergo est 3. ad 12. vt 12. ad 48. erit *diuidendo* 3. ad 9. vt 12. ad 36. Quare *permutando* erit 3. ad 12. vt 9. ad 36. & *Componendo* erit 3. ad 15. vt 9. ad 45. Quare etiam *permutando* erit 3. ad 9. vt 15. summa aliorum minorum ad 45. terminum maximum deducto primo. Sed 3. ad 9. habet rationem denominatam à 3, idest à denominatore 4. vnitate minuto. Ergo etiâ 15. summa ad 45. terminum maximum mancum 3. primo termino eandem obtinet.

THEOR. XII. PROPOS. XII.

Summa reliquorum in proportionalibus continuis proportionis superpartientis, & superparticularis excluso maximo diuisa per denominatorem proportionis differentiæ ad primum terminum dat quotientem, qui vnitus cum numero radicali ipsum maximum proportionalem numerum facit.

* SIt proportio data superparticularis 50. 60. 72. cuius denominator proportionis, quam habet differentia 10. ad radicalem terminum 50. sit $\frac{1}{5}$. Dico, quòd summa reliquorum dempto maximo, quæ est 110. diuisa per $\frac{1}{5}$ dat quotientem 22. qui vnitus cum numero radicali 50. facit maiorem terminum 72.

Prob. ex 8. prop. h. ita est differẽtia ad differentiã 10. ad 12. vt terminus 50. ad terminum 60. Ideoq; ex Coroll. 2. prop. 19. lib. 5. ita erit 10. ad 10. & 12. simul, idest summam 22. differentiarum, quemadmodum 50. ad 110. summam terminorum. Verum si diuidatur summa 110. per denominatorem 5. & per eundem 5. terminus 50. erunt adhuc ex prop. 19. lib. 7. quotiens numeri 50. ad quotientẽ numeri 110. vt 50. ipse terminus ad summam 110.

Cum

Cum ergo differentia ad summam differentiarũ, & quotiens radicalis termini ad quotientem summæ terminorum obtineat eandem proportionem, quã termini radicalis ad summam terminorum, erit etiam eadem proportio primæ ipsius differentiæ ad summam differentiarum, quæ quotientis radicalis termini ad quotientem summæ terminorum ex 16. lib. 5. Elem. & ideo *permutando* differentia prima ad quotientem radicalis termini habebit eam proportionem, quam summa differentiarum ad quotientem summæ terminorum. Sed Quotiens radicalis termini est æqualis differentiæ. Siquidem diuisor est $\frac{2}{5}$ denominator proportionis, quam differentia habet ad radicalem terminum ex propos. 10. huius. Ergo etiam summa differentiarum, & quotiens summæ terminorum erunt æquales.

Sed omnes differentiæ additæ primo termino constituunt vltimum terminum ex prop. 9. Ergo etiam Quotiens summæ termitorum diuisore existente denominatore proportionis, quam habet differentia ad primum terminum, additus primo termino dabit vltimum terminum, vnde quotiens 22. additus termino 50. constituit vltimum terminum 72. Sic dicas de proportione superpartiente; Datis enim tribus terminis 25. 40. 64. summa minorum 65. diuisa per denominatorem $\frac{3}{5}$, quæ fit multiplicando per 3. diuidendo per 5. dabit numerum 39. qui vnitus numero radicali 5. procreabit ipsum maiorem 64. Et idem argumentum valebit, etiam si plures sit termini, vt patet.

THEOR. XIII. PROP. XIII.

Secundus proportionalis detracto numero radicali, & primo dicit eandem proportionem ad numerum radicalem, quam numerus extremus detracto eodem primo ad summam reliquorum.

SIt data proportio continua 3. 12. 48. detrahaturque numerus radicalis, & minimus 3. à numero 12. & remaneat 9. sicut, & ab extremo 48. & remaneat 45. summa verò reliquorum est 15. Dico, quòd ita 9. est ad 3. vt refertur proportione 45 ad 15. summam reliquorum. Denominator autem proportionis est 4.

* Probatur ex propos. 11. huius. Nam maximus numerus continet summam reliquorum tot vicibus, quot denominator dempta vna habet vnitates, & insuper numerum primum, & radicalem. Ergo hoc numero primo, radicalique excluso continebit tot vicibus, quot reposcunt vnitates denominatoris vna exclusa; sed & secundus terminus minutus primo continet primũ tot vicibus, quot vnitates sunt in denominatore vna vnitate minuto ex propos. 10. Coroll. Ergo tot vicibus continetur primus in secundo minutus primo V. g. 3. in 9. quot summa reliquorum in extremo eodem primo minuto, vt 15 in 45. quare eamdem proportionem dicent ex 1. definit. septimi, & ita erit 9. ad 3 vt 45. ad 15. & ita dicas de reliquis. etiam si plures termini ponantur.

Idem quoque in proportione superpartiente, & superparticulari valet. Nam, si dentur 8. 12. 18. 27. cuius denominator proportionis differentiæ primę ad terminum radicalem est $\frac{1}{2}$. Erit ablato 8. à 12. vt sint 4. & à 27. vt sint 19. eadem proportio 4. secundi termini dempto primo. 8. ad primum terminum 8. quæ est extremi dempto primo 19. ad summam reliquorum 38.

Prob. ex 12. h. Nã quotiens summæ differentiarũ cum primo termino constituit vltimum, ergo ablato primo remanebit quotiens summæ differentiarum, cuius diuisor est denominator prædictus $\frac{1}{2}$. Cum ergo idem diuisor diuidat primum terminum, & constituat primam differentiam, & summã terminorum, & constituat summã differẽtiarũ, erit secũdus terminus ablato primo, idest differẽtia prima ad primũ terminum, vt summa differentiarum, idest ex propos. 9. vltimus terminus ablato primo, ad summam terminorum. Quòd autem $\frac{1}{2}$ diuidat primum terminum, & generet primam differentiam, patet ex 10. huius; quia diuiso primo termino per differentiam dat denominatorem proportionis differentiæ ad primum terminum. Ergo diuiso ipso termino primo per quotientẽ, & denominatorẽ differentiam dabit ex princip. 8. Tract. 8. Elem.

THEOR. XIV. PROP. XIV.

* *Denominatores proportionum in quolibet proportionali crescunt ab vnitate.*

SIt series proportionalium 4. 12. 36. 108. & denominator proportionis 3. Dico, quod 3. in singulis proportionalibus reperitur crescendo ab vnitate, nempe, quod semel est in 12. nouies est in 36. nonagies in 108.

* Probatur. Nam numerus radicalis 4. ter acceptus facit 12. ergo tot partes erunt in 12. quot vnitates erunt in 3. ergo 12. in suis partibus numerabit 3. semel, at 36. numerat etiam ter 12. ergo 12. ter ipsum 3. numerat, sic 108. ter capit 36. at 36. ter capit 12. ergo ter nouies capit 3. Sic verò procedere est procedere continua proportione ab vnitate ex propos. 2. huius.

EXPENSIO II.

De summandis proportionalibus Geometricis continuis.

SVmma proportionalium continuè fit etiam, si intermedij ignorentur, V. g. datis 24. & 64. summa omnium, qui inter 24. & 64. intercipiuntur sine intermedijs haberi potest; ideoque hìc oportet huius artis specimen exhibere.

PROBL. I. PROPOS. XV.

Datis terminis continuè proportionalibus primo, secundo, & vltimo omnium summam inuenire.

3. 12. —— 768.

* SInt dati termini continuè proportionales 3. 12. 768. inter quos intercipiuntur 48. & 192. continuè proportionales, qui tamen ignoti præsupponuntur, cum eorum cognitio in acquirenda eorum summâ non sit necessaria. Detrahatur ter-

minus primus 3. à secundo 12. & residuum sit 9. sic idem 3. terminus primus detrahatur à 768. & residuum sit 765. Hoc verò residuum multiplicandum est per primum terminum adhibita regula proportionum, & diuidendum productum 2295. per residuum secundi 9. Nam quotiens erit 255. summa omnium excepto maximo. Si ergo hanc summam maximo addas, erit omnium summa cognita 1023.

* Probatur. Quia ex propos. 13. huius, est eadem proportio primi termini ad secundum, cui ipse primus demptus fuerit, quæ est summæ omnium vsque ad vltimum exclusiuè ad ipsum vltimum, & maximum, cui similiter primus demptus sit; quare plana, ex primo, & vltimo ex istis quattuor proportionalibus erunt æqualia plano ex medijs ex propos. 6. huius. Quare planum factum ex 3. minimo, & 765. maximo erit æquale plano ex 9. secundo, & summa omnium excepto vltimo; vnde si diuidatur per 9. latus cognitum, planum illud latus alterum 455. exeret, quod est omnium proportionalium summa excepto vltimo.

PROBL. II. PROPOS. XVI.

Dato termino maximo, & minimo, & denominatore proportionis summam omnium terminorum continuè proportionalium inuenire.

3. 9. 27. 81.

*SInt dati termini continuè proportionales 3. 9. 27. 81. & denominator 3. ex vltimo primus demendus nimirum 3. & erunt 78. qui diuidendus est per denominatorem proportionis, cui vnitas ablata fuerit, nempe 2. & erunt 39. qui coniuncti cum 81. efficient omnium summam, & hoc in proportione multiplici; & multiplici superparticulari, vel superpartiente.

Probatur ex prop 11. huius. Quia numerus maior continet minores omnes, quot sunt vnitates in denominatore vna dempta vnitate ab ipso denominatore. Ergo si diuidatur per illas vnitates minus vna prodibit summa omnium aliorum.

Sic dicas de non multiplici, nam datis.

8. 12. 18. 27.

Sublato primo ab vltimo remanent 19. qui per denominatorem proportionis 1. differentiæ ad primum terminum, qui est $\frac{1}{2}$ dabit 38. summam omnium, excepto primo.

* Prob. ex prop. 12. h. Nam summa omnium diuisa per denominatorem proportionis prædictum dat quotientem differentiarum, qui cum primo ipsum facit vltimum. Ergo extracto primo, & residuo per denominatorem eundem multiplicato dabit summam omnium; quia illud residuum erit quotiens ex proportionis denominatore diuidente relictus. Vnde per multiplicationem ab eodem denominatore factam in pristinam multitudinem restitutus summam omnium, dempto vltimo exhibebit, & coniunctus cum eo erit omnium summa.

EXPENSIO III.

De proportione Geometrica propaganda.

DVplici modo potest extendi in infinitum proportio Geometrica, vel diminuendo, vel augendo; ideoque de duplici hac extensione erit agendum.

PROBL. I. PROPOS. XVII.

Datis duobus terminis, & proportionis denominatore extendere proportionem, seu augendo, seu diminuendo in infinitum.

MVltiplicetur terminus datus maior datis duobus terminis 2. & 6. per denominatorem proportionis, quam habet minor ad maiorem, qui est 3. & producetur terminus maior tertius 18. & si per eundem denominatorem multiplicetur 18. fient 54. & sic in infinitum se augendo.

2. 6. 18. 54. 162. & cæt.

At si cupias eam extendere diminuendo diuide minorem terminum per denominatorem eundem, & habebis minorem terminum tertium $\frac{2}{3}$; & si iterum diuidas producentur $\frac{2}{9}$; & rursus enascent $\frac{2}{27}$.

$\frac{2}{12}$ $\frac{2}{6}$ $\frac{2}{3}$ 2. 6.

Vel si dati sint 54. & 162. quorũ denominator proportionis 3. si diuidas per 3. numerum 54. acquires tertium terminum 18. & cæt.

Probatur. Nam illi numeri sunt in proportione Geometrica; qui easdem partes habent, ex def. 1. l. 7. elem. Nempe ab eodem numero denominatas; cum ergo quilibet V. g. tertius, vel quartus terminus se augendo comprehendat tres partes minoris ob multiplicationem sicut datus terminus minorem datum comprehendebat, patet esse in eadem proportione; & idem dicas de diminutione. Nam terminus tertius ob diuisionem erit tertia pars secundi dati, sicut ipse secundus est tertia pars primi.

PROBL. II. PROPOS. XVIII.

Proportionem extendere, vel in augmentum, vel in diminutionem nullo dato proportionis denominatore.

SI sit proportio extendenda in augmentum duc maiorem in se. Deinde diuide per minorem, & tertius terminus prodibit; quod si diminuendo sit procedendum, ducendus erit minor terminus in se, & diuidendus per maiorem. Sic datis 12. & 18. si ducatur 18. in se fiet 324. qui diuisus per 12. dabit tertium terminum maiorem 27. Sic si ducatur 12. terminus minor in se, erit 144. qui diuisus per 18. dabit minorem tertium terminum 8.

Probatur ex propos. 5. huius. Nam rectangulum, seu planum ab extremis confectum est æquale le quadrato medij; Vnde medio ducto in se habebimus quadratum tale; quod erit ęquale rectangulo extremorum; cùm verò vnum ex extremis habeamus, obtinemus latus huius rectanguli; quare, si diuidatur per hoc latus, aliud latus prodibit, nempe aliud extremum; sicut enim rectangula numerica fiunt ex multiplicatione laterum ex defin.16. sept. Elem. ita habetur quilibet per diuisionem totius ab altero effectam.

THEOR. I. PROPOS. XIX.

Aliquæ proportiones per solam additionem, vel subtractionem possunt extendi.

PRobatur. Nam talis est proportio dupla vt 4. 8. 16. 32. subductus enim terminus minor à maiore dat proportionem decrescentem, at additus terminus minor ipsi minori dat proportionem crescentem.

PROBL. III. PROPOS. XX.

Datâ successiuâ proportione subducendo alias proportiones successiuas reperire.

DAta proportione aliqua, subducatur minor à maiore, & ordine eodem differentiæ notentur. Nã illæ in eadẽ proportione erũt V.g. dentur proportionales 27. 81. 243. 729. & 2187. crescentes in tripla proportione: Si dematur continuè minor à maiore erunt differentiæ 54. 162. 486. & 1458. similiter in tripla proportione, & si rursus horum proportionalium sumantur differentiæ, erunt eodem modo proportionales; vt 108. 324. 972.

Probatur. Nam ex 23. propos. septimi. Ita dicunt proportionem numeri proportionales, vt eorum partes aliquotæ, quæ sunt in eadem proportione: Quando verò aufertur terminus minor à maiore aufertur pars aliquota, vtpote quod sit maioris pars aliqua, quam numerat denominator; vt 3. est pars aliquota numeri 9. & 9. numeri 27. Ergo reliquæ partes aliquotæ, quæ superant, dicent eandem proportionem. Probatur etiam ex propos. huius 8.

PROBL. IV. PROPOS. XXI.

Data serie proportionali alias series diuidendo reperire.

ASsume quemlibet numerum diuisorem V.g. 4. & datam seriem partire 27. 81. 243. 729. habebisque 6 $\frac{3}{4}$, 20 $\frac{1}{4}$, 60 $\frac{3}{4}$, 182 $\frac{1}{4}$, & rursus hos diuidas, habebis alios proportionales in eadem proportione in infinitum.

Probatur ex eadem propos. 18. l. 5. & 7. vel 8. huius. In eadem enim proportione sunt totum, & partes.

THEOR. II. PROPOS. XXII.

Si summa proportionis alicuius diuidatur successiuè per terminos proportionis. Quotientes in eadem proportione inuerso ordine inuenientur.

SIt summa 155. terminorum 5. continuè proportionalium 5. 10. 20. 40. 80. & per ipsos terminos diuidatur; habebimus hos terminos continuè proportionales 31. 15 $\frac{1}{2}$, 7 $\frac{1}{2}\frac{1}{4}$, 3 $\frac{3}{4}\frac{1}{8}$, 1 $\frac{7}{8}\frac{1}{16}$.

* Probatur ex propos. 19. septimi. Nam 155. est rectangulum, vel planum, cuius vnum latus est 5. & alterum latus 31. vel 10. & alterum latus 15 $\frac{1}{2}$, vel 20, & alterum latus 7 $\frac{1}{2}\frac{1}{4}$, & cæt. Quare, cùm hæc latera faciant planum semper eundem erunt in eadem proportione 5. ad 10. vt 15 $\frac{1}{2}$ ad 31. quòd etiam ostenditur ex propos. 17. sexti, & ex dictis propos. 6.

COROLLARIVM I.

HInc est, quod si horum proportionalium postremò repertorum summam diuiseris per eosdem proportionales, efficies rursùs alios in eadem proportione, & si horum summam rursus per hos diuiseris, alios inuenies in infinitum.

COROLLARIVM II.

HInc quoque satisfaciemus exquirenti duos proportionales, quorum summa æqualis sit numero vnius in alterum procreato. Nam sumptis proportionalibus duobus, & collectis in summã, ea dabit diuisa per eosdem, duos quotientes proportionales, quorum summa æqualis erit numero ex multiplicatione vnius in alterum procreato.

Sic sũptis numeris 4. & 8. quorum summa 12. diuisa per 4. dabit 3. diuisa per 8. dabit 1 $\frac{1}{2}$, quorum summa 4 $\frac{1}{2}$ est æqualis numero per mutuam multiplicationem effecto: Nam 1 $\frac{1}{2}$, & 3. inuicem multiplicati dant 4 $\frac{1}{2}$.

* Probatur. Cum enim 3. multiplicans 4. restituat 12. & multiplicans 1 $\frac{1}{2}$ faciat 4 $\frac{1}{2}$ erit eadem proportio 1 $\frac{1}{2}$ ad 4. quam 4 $\frac{1}{2}$ ad 12.

Rursus, cum sit quotientium 1 $\frac{1}{2}$ ad 3. vt 4. ad 8. ex præced. vel ex 17. l. 9. erit cõponendo 1 $\frac{1}{2}$ ad 4. $\frac{1}{2}$, summam, vt 4. ad 12. quare permutando erit quoque 1 $\frac{1}{2}$ ad 4. vt 4 $\frac{1}{2}$ summa ad 12. Cum ergo 4 $\frac{1}{2}$ quatenus summa, & 4 $\frac{1}{2}$, vt genitus ex mutua proportionalium multiplicatione 3. & 1 $\frac{1}{2}$ habeat eandem proportionẽ, quam 1 $\frac{1}{2}$ ad 4. ad eundem numerum 12. erit idem numerus genitus ex proportionalibus, & collectus, vel summatus ab ipsis ex propos. 9. Elem. lib. 5.

EXPENSIO IV.

De proportionalibus in Geometrica proportione interserendis.

INterpositio proportionalium dificilis est maximè si in prolixam seriem proportio debeat extendi

tendi

tendi, cum non inter quoscunque numeros numeri proportionales cadant, sed solum planos, vel solidos similes. Vnde cum procedendo tandē plani dissimiles euadant, necesse est tandem incidere in laboriosas fractiones, vt patebit experimentum capienti.

PROBL. I. PROPOS. XXIII.

Inter duos numeros constituere medium Geometricè proportionalem.

Sint dati duo numeri 3. & 75. inter quos reperiendus sit medius proportionalis. Multiplicentur simul, & sit numerus multiplicationis 225. cuius radix quadrata 15. est medium proportionale, & 3. ad 15. erit in eadem proportione, ac 15. ad 75. Et si rursus velimus scire 15. & 75. quem medium proportionalem habeant, multiplicabimus eodem modo numeros exhibitos, & subducemus radicem quadratam, quæ erit $33\frac{1}{2}$ proxima, sed non vera, cum numerus ex datorum numerorum multiplicatione exerens non sit quadratus: Ita ergo erit 15. ad $33\frac{1}{2}$, vt $33\frac{1}{2}$ ad 75.

Probatur ex propos. 5. huius. Quia enim quadratum medij est æquale plano extremorum; hinc est quòd ex mutua multiplicatione duorum numerorum, quos extremos volumus esse proueniat numerus æqualis quadrato medij: Vnde ex eo deducta radix quadrata erit latus numericum illius quadrati, & ideo dicet eandem proportionem hoc latus suis extremis, cùm sit latus quadrati æqualis plano extremorum.

PROBL. II. PROPOS. XXIV.

Inter duos datos numeros plures proportionales numeros interserere.

A Datis duobus numeris 81. & 1296. extrahemus radices quadratas 9. & 36. & iterum ex istis radices quadratas 3. & 6. si fieri possit. Deinde multiplicandæ radices ipsæ, vt intermedij proportionales prodeant; sic multiplicata radix quadrata 3. cum 9. dabit 27. & 6. cum 36. dabit 216. & habebimus duas series numerorum ab vnitate continuè excrescentium ex propos. 2. huius, deinde subscribendæ singulis datis suæ radices, & proportionales ordinatim decrescentes, & hinc multiplicandæ inuerso ordine, maxima cum minima, maior cum minore, mediocris cum mediocri, & cæt. Nam numeri producti dabunt medios proportionales; ita 6. multiplicatus cum 27. dabit secundum proportionalem 162. & 3. cum 216. tertium proportionalem 648. & 9. cum 36. numerum 324.

Probatur hæc operatio ex propos. 9. lib. 8. elem. Nam tot cadunt medij proportionales inter duos datos numeros, quot inter vtrumlibet ipsorum, & vnitatem; Cùm ergo inter vnitatem, & 81. inuenti sint cadere 27. 9. & 3. & inter 1296. cadere 216. 36. 6. Ergo, & inter 81. & 1296. tot medij proportionales cadent nempe tres. Patet autem ex illa propositione; quod ij ipsi sunt qui ex mutua, & alterna multiplicatione, maximi cum minimo, & cæt. fiunt.

81.	162.	324.	648.	1296.
27				216
9				36
3				6
1				1

Nam, vt ibi probatur, habent intermedij eam proportionem, quam 3. ad 6. Cum ergo 3. multiplicando 27. produxerit 81. ergo 6. multiplicando eundem 27. producet secundum proportionalem, qui se habeat ad primum, vt 3. ad 6. ex propos. 17. septimi, cum idem numerus 27. multiplicet 3. & 6. Verum non omnis numerus talis est naturæ, vt æquali proportionalium numero distet ab vnitate, ac alter datus, nec talis, vt radix quadrata ab eo extrahi possit. Vnde vt plurimum laboriosa erit hæc operatio, & non præcisa; nisi forte numeri, inter quos medij proportionales desiderantur ab vnitate continua proportione excrescant.

PROBL. III. PROPOS. XXV.

Numerum datum in partes iuxta datam proportionem proportionales distribuere.

Sit datus numerus 992. qui diuidendus sit in partes quinque habentes proportionem duplam disponantur numeri quinque eiusdem proportionis 2. 4. 8. 16. 32. quorum summa sit 62. per hanc summam diuidatur numerus 992. & habebimus numerum 16. qui multiplicatus per terminos prædictos dabit partes quæsitas 32. 64. 128. 256. 512. quæ simul conflatæ restituent numemerum 992.

Probatur autem. Quia summa proportionalium continet omnes proportionales, simul: Quotiens verò à diuisione numeri dati 992. proueniens, qui est 16 secat ipsum in tot partes, quot vnitates sunt in summa proportionalium, quæ est 62. quia 16. multiplicatus per 62. facit 992. Ergo, si summa hæc 62. habet tot vnitates, quot vnitates reperiuntur in omnibus proportionalibus, etiam numerus datus 992. capiet tot vicibus 16. quot vnitates sunt in omnibus proportionalibus. Et quia ita est 1. ad 62. vt 16. ad 992. etiam compositus 1. & 1. idest multiplicatus per 2. ad 62. vt eodem modo compositus 16. & 16. ad 992. ex prop. 24. lib. 7. elem. & sic de alijs. Cùm ergo sit quilibet proportionalis 2. 4. & cæt. ad 62. vt 32. & 64. & cæt ad 992. Etiam simul omnes ex prop. 24 lib. 7. elem. proportionales 2. 4. & cæt. ad 62. erunt vt omnes simul 32. 64. & cæter. ad 992. sed illi sunt æquales ex Thesi numero 62. vtpote suæ summæ, ergo etiam, & isti 32. 64. & cæt erunt æquales numero 992.

Quod verò 32 64. & cæt. sint proportionales, vt 2. 4. & cæt. Prob. quia per eundem numerum 16. multiplicati fuere, vnde ex 17. lib. 7. ita erunt multiplicati 2. ad 4. vt geniti 32. ad 64.

PROBL. IV. PROPOS. XXVI.

Numerum extremum intermissis multis medijs in proportione Geometrica reperire.

Sint dati aliqui termini 3. 9. 27. 81. possum reperire alium 2187. qui distet ab 81. duobus interme-

intermediis 243. & 729. vt ipse vltimus 81. distat à 3. Id verò executioni mandatur multiplicando 81. in se, & diuidendo per primum 3. & dispositi in seriem erunt.

3. 9. 27. 81. 243. 729. 2187.

Probatur. Quia, ita ex propos. 4. huius, 3. est ad 81. vt 81. est in proportione ad alium sequentẽ duobus intermissis pro vt 3. distat ab 81. Ergo ex propos. 5. huius quadratum ex medio 81. est æquale plano ex extremis. Quare diuisum per latus 3. dabit alterum latus 2187. quod distat ab 81. duobus intermissis, & à 3. quinque intermissis. Vnde poteris reperire ab hoc distantẽ quinque terminis multiplicando 2187. in se, & diuidendo per 3. &c.

TRACTATVS XIV.

PARS SECVNDA.

De proportione Arithmetica.

COgnatio arcta intercedit, vt videbimus, inter Arithmeticam, & Geometricam proportionem, vt altera alteri ritè deseruiat, & operationibus alterius sedulè ministret; Ideo post tractationem proportionalitatis Geometricæ statim Arithmeticæ discursus subnectendus est.

EXPENSIO I.

De proprietatibus Arithmeticæ proportionis.

SImiles sunt effectiones harum duarum proportionum Arithmeticæ, & Geometricæ; nisi quòd huius multiplicatione, & diuisione, vt plurimùm innotescunt; illius ex subtractione, & additione. Proportio verò Arithmetica consistit in æqualitate excessuum, vt vna excedat aliam eodem excessu, quo hæc aliam excedit. V. g. numerus 8. excedit 6. eodem excessu, nempe dualitate, sicut 6. excedit 4. quia ergo isti tres numeri 4. 6. & 8. æquali excessu dualitatis se superant, dicuntur Arithmeticè proportionales.

Præass. 1. Sed in primis notandum, quod si sint numeri quotcumque Arithmetico interuallo, vel etiam quocumque incerto crescentes, vel decrescentes, quilibet maior est æqualis minori, & omnibus interuallis numericis, quibus distant V. g.

Sint 7* 12* 17* 22* 27* 32* 37* & cæt.

Dico, quod 37. est æqualis numero 7. si tamen ei addatur interuallum 5. toties quot intercapedines sunt inter 7. & 32. quæ stellulis notatæ sunt, & sunt sex. Si ergo multiplicetur 5. per 6. & fiunt 30. & addatur numero 7. erunt 37. quod patet; quia tot vicibus à numero 7. excreuit 37. per additionem numeri interuallaris 5.

THEOR. I. PROPOS. I.

Si sint quatuor quantitates continua proportione Arithmetica excrescentes, summa mediorum est æqualis summæ extremorum.

DEntur quatuor numeri, qui se superent æqualiter, nimirum ternario 8. 11. 14. 17. Dico quod additi 8. & 17. faciunt eundem numerum, quem additi simul faciunt 11. & 14. nimirum 25.

Probatur. Numerus 8. excreuit vsque ad numerum 14. per continuam additionem ęqualis partis idest ternarij, qui semel additus est numero 8. vt fiant 11. gemina vice numero 8. iterum, vt fiant 14. iuxta interuallorũ multitudinem, quibus ab 8. distat 11. & 14. vt prænotaui in præass. ergo ternarius additus ter ipsi 8. semel in 11. & iterum bis in 14. faciunt medios.

Sed etiam ter idem ternarius additus est primo 8. vt fieret extremum 17. semel quando excreuit ab 8. in 11. semel cum excreuit ab 11. in 14., & semel cum excreuit à 14. in 17. iuxta tria interualla, quibus distat à primo 8. Cum ergo ter ternarius additus primo numero 8. duplato faciat duos medios, & ter additus eidem 8. faciat extremum, patet, quod duo medij simul erunt æquales primo, & extremo; cùm tam medij, quàm extremus cum primo, componantur ex primo bis accepto, & ex tribus ternarijs.

THEOR.

THEOR. II. PROP. II.

Si sint tres quantitates continua proportione Arithmetica se respicientes duplum medij est æquale summæ extremorum.

SInt tres quantitates 7. 11. 15. quæ proportione Arithmetica, nempe æquali crescant augmento, & medium 11. dupletur. Dico, *quod hoc duplum erit æquale summæ extremorum*.

* Probatur. Nam diximus propos. anteced. quòd terminus tertius componitur ex duplici additione æqualis partis, quæ hic est quaternarius bis additus numero primo 7. Numerus verò secundus Arithmeticus ex numero eodem 7. & simplici additione æqualis partis, nimirum quaternarij; Ergo si bis accipiatur hoc duplum constans gemino quaternario, & gemino numero radicali 7. erit æquale extremo, primo ei addito, qui etiam semel continet primum cum gemina parte equali, nempe quaternario; & sic faciet summam, quæ bis continet primum, & bis partem equalem, quâ proportio augetur.

THEOR. III. PROPOS. III.

Si sit quotcunque numeri Arithmetico interuallo crescentes, seu decrescentes, primus multiplicatus per numerum interuallorum minutum vnitate iunctus cum vltimo erit æqualis secundo multiplicato per interuallorum numerum totum.

SIt 2 6* 10* 14* 18* 22* 26* 30* 34 &c. numerus interuallorum sit 8. quę stellulis notantur. Dico, quòd si 2. multiplicetur per numerum interuallorum vna vnitate abiectâ, nempe per 7. & iungatur extremo 34. quòd est æqualis secundo 6. multiplicato per interuallorum numerum 8.

* Progress. 1. Si primus terminus 2. multiplicetur per 8. numerum interuallorum, & fiat 16. & si per eundem 8. multiplicetur numerus differentiæ 4. & fiant 32. isti duo numeri collecti erunt æquales numero illi, qui ex multiplicatione secundi termini V. g. 6. cum numero interuallorum eodem 8. nascitur, qui erit 48. Patet, quia 6. cōponitur ex 4. interualli numero, & 2. primo radicali; vnde, siue seorsim, & deinde iuncti, siue simul multiplicati eandem summam efficient 48.

Progr. 2. Differentię numero 4. multiplicato per 8. addito 2. radicali est ęqualis numerus vltimus 34 ex primo progress. Ergo abiecto numero radicali à multiplicato numero differentiali, vt restet 32. remanet 34. numerus vltimus illo 32. maior in ipso numero radicali: Quare, & si adderetur vtrisq; numerus ex interuallorū 8. & numeri radicalis 2. multiplicatione cōsurgēs, qui est 16. adhuc esset maior, ita auctus vltimus terminus eodē æqualiter aucto numero differentiali 32. in ipso 2. radicali. Quamobrem, vt sit æqualis demendus est à 16. numerus ipse radicalis, & itaerit 14. nempe numerus 2. radicalis multiplicatus non per 8. sed per numerum vna vnitate minorem, nempe per 7. Quamobrem numerus radicalis multiplicatus per numerum interuallorum minus vna vnitate, V. g. per 7. vt sit 14 iunctus vltimo termino 34. erit ęqualis numero 16. ex multiplicatione interuallorum 8. & numeri radicalis 2. & numero differentiarū 32. s. 48. Ergo etiā erit æqualis numero consurgenti ex multiplicatione secundi termini 6. cum numero interuallorum; quem ex primo progress. probauimus ęqualē numero differentiali 32. & 16. radicali per interuallorum numerū multiplicato, & in vnam summam redacto, idest eidem 48.

THEOR. IV. PROPOS. IV.

Numeri proportione Arithmetica procedentes, dempto radicali, ita quilibet ad sequentem est in proportione, vt numerus interualli vnius ad numerum interualli alterius.

SInt numeri 2* 6* 10* 14* 18* 22* 26* 30* 34. 38. 42. & numerus interceptus inter quemlibet eorum sit 4. Dico, *quòd si à numeris immediatis 34. & 38.* numerus radicalis expungatur, vt fiant 32. & 36. interuallorum numerus 8. qui mediat inter primum 2. & 34 dicit *eam proportionem Geometricam ad 32.* quam 9. numerus interuallorum medians inter primum 2. & sequentem 38. dicit ad 38. numero radicali deducto, idest 36.

* Prob. Nam 4 octies continetur in 32. ex primo notabili huius, toties nempe quot sunt interualla, sicut eodē modo 4. nouies continetur in 36. ergo numerus octonarius interuallorum quater continetur in 32. sicut numerus nouenarius interuallorum quater continetur in 36. Quare cum 8. & 9. per eundem 4. multiplicatus fit: ita erit 8. ad 9. vt 32. ad 36. ex propos. 17. lib. 7. Elem.

COROLLARIVM

HInc est, quod planum ex medijs 8. & 36. sit æquale plano extremorum 9. & 32.

THEOR. V. PROPOS. V.

Numeri proportione Arithmetica procedentes eandem dicunt proportionem Geometricam quilibet ad suum numerum interuallorum, si tamen ab eis numerus radicalis dematur.

PRobatur. Nam data eadem numerorum serie, quæ in præcedenti propositione; ostensum est; ita esse numerus interualli 8. ad numerum 9. interualli alterius, vt 32. Arithmeticus ad sequētem numerum Arithmeticum 36. à quibus tamen Arithmeticis demptus fuit numerus radicalis 2. Quare, & *vicissim* erit 32. ad 8. vt 36. ad 9. numerum interuallorum.

THEOR.

THEOR. VI. PROPOS. VI.

* *Si aliquis terminus Arithmeticus maior multiplicetur per numerum interuallorum carentem vna vnitate, numerus productus addito ei termino radicali est æqualis numero, qui fit ex eodem numero interuallorum toto, & termino immediato minori.*

*Sit eadem dispositio terminorum, quæ priùs 2. 6. 10. 14. 18. 22. 26. 30. 34. 38. 42. & numerus interuallorum inter 2. & 38. sit 9. Dico, quòd si multiplicetur 38. per 9. minutum vna vnitate videlicet per 8. procreabitur terminus 304. cui si addatur terminus radicalis 2. efficietur æqualis numero 306. qui fit ex multiplicatione totius numeri interuallorum 9. cum minori 34. termino Arithmetico immediatè sequente.

Probatur, si dematur à duobus terminis Arithmeticis 34. & 38. terminus radicalis 2. dicent proportionem ad inuicem, vt numerus interuallorũ, ex præced. propositione, & ita erit 8. ad 32. vt 9. ad 36. Quare, & plana eorum erunt æqualia, nempe productũ ex 32. & 9. ac productum ex 8. & 36. ex Coroll. præced. quæ sunt 288. Si verò singulis addatur terminus radicalis, & fiat 34. & 38. & deinde multiplicentur per 9. numerus 34. vt fiat 306. & per 8. numerus 38. & fiat 304. addet 9. ei plano ex 32. tot terminos radicales, quot addit 8. & insuper vnum terminum radicalem, & faciet 306. Quare maior terminus 38. multiplicatus per numerum interuallorum minus vno, vt est 8. restituet numerum addito termino radicali 2. æqualem ei numero, qui fit ex multiplicatione termini immediate minoris 34. & toto numero interuallorum 9. vt est 306.

COROLLARIVM

Elicitur hinc, quòd idem euenit etiam, si duo numeri dati Arithmetici non sint immediati; sed secundum distantiam, ita interualla sumantur. V. g. si elligeres 30. & 38. interualla essent 7. inter 30. & primum radicalem, & inter 38. interualla essent 9. cum ergo ita se habeat 7. ad 28. vt 9. ad 36 dempto videlicet ab vtroque numero radicali; sequitur, quòd planum ex medijs 9. & 28. fit æquale plano ex extremis, nimirum 7. & 36. addito verò vtriq; numero radicali per interuallorum numerum multiplicato productus continebit insuper, qui oritur à 9. & 28. nouem numeros radicales; qui verò à 7 & 36. septem insuper numeros radicales; Vnde erit ei æqualis, si bis addatur numerus radicalis.

THEOR. VII. PROPOS. VII.

Inter quoscumque numeros Arithmeticè dispositos eadem est ratio Geometrica interualli ad interuallum, quæ est differentiarum ad differentias.

Sint numeri 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. interualla inter 3. & 17. erunt 7. differentia subducto 3. à 17. prodibit 14. sic inter quoscumque alios inter 7. & 13. differentia est 6. interualla 3. Dico itaque, quòd ita 7. est ad 3. vt 14. ad 6. nempe numeri interuallorum, & differentiarum numeri in eadem proportione sunt.

* Probatur. Nam multiplicato numeso differentiali ex præass. 1 per interualla, dat differentias omnes, quibus distat vnus terminus ab alio. Sic 2. multiplicatus per 7. dat differentiarum numerum 14. & idem 2. multiplicatus per 3. dat differentiarum numerum 6. nempe differentias omnes, quibus 9. distat à 3. vel 17. distat à 3. Ergo ex 17. lib. 7. Elem. cum numerus interuallorum per eundem numerum 2. multiplicatus producat numerum differentiarum, habebunt eandem rationem geniti, & multiplicati. Vnde ita erit 3. ad 7. numeri interuallares multiplicati, vt 6. ad 14. differentiales geniti.

COROLLARIVM

Hinc est, quod *permutando* sit quoque numerus interuallaris ad differentias aggregatas nempe 3. ad 6. vt 7. ad 14.

THEOR. VIII. PROPOS. VIII.

Numeri Arithmeticè procedentes, si æqualiter remoti ab extremis addantur simul, illi omnes sunt æquales.

Sit series 7. 11. 15. 19. 23. 27. Dico 7. & 27. esse æquales additi simul numeris 11. & 23. sicut etiam 15. & 19 additi simul, qui sunt æqualiter remoti ab extremis.

* Probatur. Nam tantùm 7. & 27. faciunt 34. ad quem numerum ad hoc, vt perueniat numerus 23 deficit ei 4. nempe numerus interualli, quo termini distant, & primus terminus; at numerus 11. continet ambos, ergo additus 23. facit 34. sic 19. vt perueniat ad 34. deficit ei numerus interualli gemini 4. & 4. & primus 7. numerus verò 15. vtpote duobus interuallis à primo distans 4. & 4. continet, & 7. Quare additus numero 19. conficiet 34. & sic de alijs.

EXPENSIO II.

De proportionalibus Arithmeticis continuis in vnam summam colligendis.

Faciliùs trahuntur in opus Arithmetici proportionales, quàm Geometrici; cùm sola additione, & subtractione tractentur.

PROBL. I. PROPOS. IX.

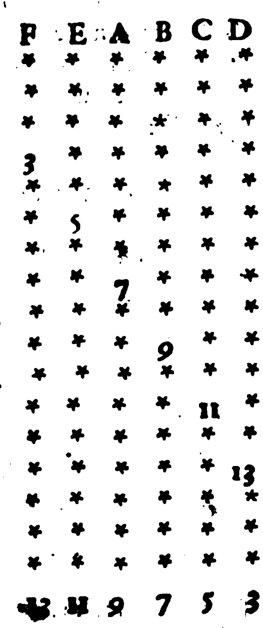
Arithmeticos proportione continua procedentes; tum pares, tum impares in vnam summam colligere dato vltimo, & primo, & terminorum numero.

Sint dati quicumque termini impares proportione Arithmetica procedentes V. g. septem 4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. Oporteatque omnium sum-

summã noscere. Vltimus terminus 22. iungatur cũ primo 4. & sit 28. diuidatur deinde in geminas partes, quarũ vna sit 14. numerus, qui per numerũ terminorum multiplicetur nempe per 7. dabit summam omnium 91.

Si vero numerus terminorum par fuerit 7. 11. 15. 19. 23. 27. Addatur similiter vltimus terminus primo, vt fiant 34. & multiplicetur per numerum dimidium terminorum 3. vt fiant 102. & erit omnium summa.

* Probatur. Nam additi numeri æquè ab extremis remoti sunt omnes æquales ex propos.8. quare Arithmet. numerus iunctus primus extremo, & multiplicatus per numerũ terminorum æquabit numerum planum omnium numerorũ simul vnitorum, qui æqualiter remoti sint ab extremis, & facti sint omnes æquales V.g. 3.5.7. 9. 11. 13. facti sint omnes æquales, nempe minimus 3. per adiectionem maximi 13. & maximus 13. per adiectionem minoris 3. Item sequens minor 5. per adiectionẽ penultimi 9. Sicut, & 9. penultimus per adiectionem minoris 5. erunt sex numeri æquales 16. qui multiplicati per 6. dabunt planum numerum 96. qui est summa omnium sex cõstantium vnitatibus 16. quia



ergo numerorum ita additorũ summa est numerus 16. per numerum terminorũ multiplicatus, & addita est medietas; dum singuli suis correspondentibus additi sunt, tot enim sunt additi, quot erant. Ergo summa omnium erit dimidia huius plani numeri, nempe 48. sed si dimidium terminorum multiplicetur cum vltimo 16. generat dimidium plani numeri, idest 48. Ergo vltimus terminus V.g. 13. additus primo 3. vt fiat 16. multiplicatus cum dimidio terminorum, vt sint 48. erit omnium summa. Quod autem dimidium terminorum, cum vltimo, addito primo multiplicatũ, producat dimidium plani ex toto numero terminorum, & eadem summa vltimi, & primi geniti, patet ex 2. prop. lib. 9. quia duo plani tales æquant planum totius.

Nec interest, si dimidium terminorum multiplicetur cum toto extremo, seu dimidium extremum multiplicetur cum omnibus terminis, nam semper conficiet dimidium planum, ex 2. propos. lib. 9. Elem. ita seu 3. multiplicetur cum 4. seu 2. multiplicetur cum 6. dimidium planum 12. constituent. Hoc autem dimidium planum erit summa omnium terminorum Arithmeticorum.

COROLLARIVM

IN progressionibus naturalibus ab 1. incipientibus quadratum maximi dempta radice, & dimidiatũ est summa omniũ ipso dempto. Sic si sint 1. 2. 3. 4. 5. quadratũ 25. numeri 5. dempta radice 5. vt faciant 20. dimidiatum nempe 10. est summa omnium quatuor. Quia addita vnitate numero 4. fit 5. qui multiplicatus per dimidium terminorum daret summam omnium, idem verò est multiplicare per dimidium, & per totum si genitum postea diuidas, & idem est multiplicare per 4. & per 5. ipsum 5. si à genito auferas ipsum 5. vt fiant 20.

EXPENSIO III.

De proportione Arithmetica propaganda.

FAcilis est propagatio huius proportionis, vnde breuiter eam explicabimus.

PROBL. I. PROPOS. X.

Data differentia proportionem Arithmeticam extendere.

HOc faciliter fit addendo illam successiuè singulis terminis, sic si 4. addatur 5. differentia fient 9. secundus terminus, & si eidem 9. addantur rursus 5. fient 14. eruntque 4. 9. 14. tres termini Arithmetici.

Ratio quoque euidens; quia proportio Arithmetica oritur ab additione eiusdem partis.

PROBL. II. PROP. XI.

Datis duobus terminis Arithmeticis tertium inuenire.

A Maiore duplicato detrahe minorem, eritq; residuum tertius terminus maior, vel è contrà à minore duplicato detrahe maiorem, & minor terminus exeret; ita datis duobus terminis 8. 15. si duplices maiorem, erunt 30. à quo detractus minor residuum exhibebit terminum maiorem 22. & è contra, si duplices 8. & detrahas 15. remanebit 1. terminus minor.

Probatur ex propos. 2. huius. Quia medius terminus duplicatus est æqualis summæ extremorum; vnde, si ab eo alterum ex extremis deducatur, alterum prodire necesse est.

PROBL. III. PBOPOS. XII.

Datis numero terminorum, maiori seu minori extremo, & differentia reperiemus alterum extremum.

SInt dati 10. Termini Arithmetici, quorum primus sit 7. differentia 2. Dico, quòd reperiemus aliud extremum maximum, si ducamus differentiam 2. in terminorum numerum proximè minorem V. g. in 9. vt fiant 18. & huic genito primum terminum adijciamus, vt fiat 25. nam hic numerus 25. erit terminus maior.

Probatur. Differentiæ sunt additæ, primo termino, tot, quot sunt interualla. Nã interualla tot sunt, quot termini vno dempto. Ergo ex primo præass. vltimus terminus factus est, cum vltimus sit æqualis primo, & differentiæ per interualla multiplicatæ.

Aduerte, quòd si progressio incipiat à zifra, quod ipsa, vt numerus est auferenda sicut, & in sequenti Probl.

PROBL.

PROBL. IV. PROPOS. XIII.

Dato primo, & secundo termino, & numero intervallorum reperire vltimum, quem elegeris.

MVltiplicetur secundus per numerum interuallorum, & à genito dematur primus per interuallorum numerum minus vno multiplicatus.

Probatur. Quia ex propos. 3. isti geniti sunt æquales; nempe primus per interuallorum numerum minutum vnitate, cum vltimo, & secundus per numerum interuallorum multiplicatus. Quare si à genito ex secundo, & numero interuallorum detrahatur ille genitus; residuum erit vltimus terminus; sic ibi 6. secundus multiplicatus per 8. interuallorum numerum dat 48. à quo demptus 14. nimirum 2. multiplicatus per 7. interuallorum numerum vnitate minorem dat 34. vltimum terminum.

PROBL. V. PROPOS. XIV.

Dato vltimo, & penultimo termino, & numero interuallorum reperire primum.

MVltiplicetur penultimus per numerum interuallorum, & ex ipso genito deducatur vltimus multiplicatus per eundem interuallorum numerum; sed minutum vna vnitate, & residuum erit primus terminus.

Probatur ex propos. 6. huius. Nam isti duo sunt æquales, vltimus multiplicatus per interuallorum numerum minus vno iunctus primo, & penultimus per interuallorũ numerũ multiplicatus. Vnde si ex hoc genito deducatur ille genitus prodibit primus: Sic ibidẽ penultimus 34. per interuallorũ numerũ 9. ductus dat 306. à quo dẽptus 304. ex 8. interuallorũ numero vnitate minori, & 38. vltimo proueniens dat 2. primum terminum.

Aduerte in is omnibus, quod si progressio Arithmetica incipiat à 0. vt 0. 4. 8. 12. 16. 20. 24. tunc ex hac operatione proueniet 0. ostendens primũ terminũ zifrã esse, vt 6. numerus interuallorum dat 120. multiplicatus per penultimũ 20. sed 24. vltimus multiplicatus per interuallorum numerum minus vno, nimirum per 5. dat 120. at 120. iste deductus ab illo relinquit 0.

PROBL. VI. PROPOS. XV.

Datis duobus terminis extremis, & numero interuallorum reperire differentiam.

MInorem à maiori subducito, & residuum diuide per numerum interuallorum.

Probatur, quia tot sunt ex primæ Expens. huius præss. differentiæ additæ primo, quot interualla vt fieret vltimus; Ergo vt fiat differentia subducendus est primus, & reliquum per interuallorum numerum diuidendum.

EXPENSIO IV.

De proportione Arithmetica interserenda.

INterpositio terminorum in Arithmetica proportione non est grauis laboris, eamque istis præceptis in opus reducemus.

PROBL. I. PROPOS. XVI.

Inter duos terminos Arithmeticos medium proportionalem inuenire.

COniũgatur primus 5. cum altero 9. & summa 14. diuidatur per medium, & medietas 7. erit medium proportionale inter 5. & 9. eritque arithmeticè 5. ad 7. vt 7. ad 9. sic si sint 9. & 8. summa erit 17. & medietas 8. & $\frac{1}{2}$ erit medius terminus.

Probatur ex propos. 2. huius partis. Nam duplum medij est æquale summæ extremorum. Vnde summa extremorum diuisa per medium dabit medium terminum Arithmeticum.

PROB. II. PROPOS. XVII.

Inter duos terminos Arithmeticos plures medios inuenire.

HOc executioni mandatur reperiendo differentiam, quæ inter terminos illos debet mediare. Sit ergo 5. & 68. inter quos debeant inueniri 8. proportionales. Subducatur 5. à 68. & residuum erit 63. assumatur verò numerus terminorum minutus vnica vnitate, nempe 7. & diuidatur numerus residuus 63. per 7. & fiet differentia 9. Si ergo numero 5. addas differentiam 9. continuè septem vicibus, efficies 8. terminos; quorum primus erit 5. vltimus 68. vt 5. 14. 23. 32. 41. 50. 59. 68.

PROBL. III. PROPOS. XVIII.

Datum numerum Arithmeticum in partes proportionales Arithmeticas distribuere.

DAtum numerum 152. diuidemus per dimidium numerũ terminorũ 4. & quotiens erit 38. hunc quotiẽtem in duas partes inæquales diuidemus, vt placet in 3. & 35. quos constituemus pro extremis, inter quos vt libet volumus esse 8. proportionales. Horum differentiam proportionalem inueniemus, vt propos. 17. huius part. quæ erit 5. cum iam habeamus electos terminos primum 3. & nouissimum 35. & numerum terminorum 8. & consequenter interuallorum 7. cum tot sint, quot termini minus vna vnitate: Si ergo differentiam repertam 5. addamus primo termino successiue efficiemus terminos arithmeticè progredientes 3. 8. 13. 18. 23. 28. 33. 38. quorum summa erit 152.

Probatur ex 9. propos. huius partis. Nam vltimus terminus iunctus primo multiplicatus per dimidium terminorum facit summam omnium; Ergo diuisa per dimidium terminorum summa omnium, qualis debet esse numerus 152. dabit numerum, qui in se continebit maius, & minus extremum. Et hinc possumus diuidere in duas partes inæquales, vt placet, cum possimus eligere maius, & minus extremum, vt voluntas erit; Vnde dato maiori, minorique extremo, & numero terminorum habebimus interuallorum numerum quapropter rectè differentiam reperiemus.

Si verò numerus interuallorum sit impar, nec commodè in duas partes possit diuidi, per ipsum totum poterimus partire numerum datum, & quotiens duplicatus erit numerus terminorum, qui rursus in duas partes inæquales diuisus dabit maius, & minus extremum, & cæt.

Sic 152 diuisus per 8. dat quotientem 19. qui duplatus restituit 38.

Ratio est, quia maius, & minus extremum ex propos. 9. in vnam summam collectum, & bifariam diuisum dat, si hæc eius medietas multiplicetur cum numero omnium terminorum, summam omnium. Vnde etiam summa omnium diuisa per totum numerum terminorum dabit dimidium numerum, in quo maius, & minus extremum latet.

THEOR. IX. PROPOS. XIX.

* *Data terminorum Arithmeticorum serie, aliam similem inuenire.*

ID faciliter operi consignantur multiplicando per eundem numerum proportionales Arithmeticos datos. Sic si dantur 2. 5. 8. 11. reperiemus aliam seriem Arithmeticam eos per numerum 3. placitum multiplicando, & producti erunt 6. 15. 24. 33. Arithmetici.

* Probatur. Quoniam 3 multiplicauit 2. & 8. eadem proportio erit genitorum 6. ad 15. quæ generantiū 2. ad 5, & 15. ad 24. quæ 5. ad 8. Quare ex *æquo* erit 2. ad 8. vt 6. ad 24 Et *diuidendo* erit 2. ad residuum 6. ex 8. proportio, quæ est 6. ad 18. residuum ex 24 & *permutando* erit 2. ad 6 vt 6. residuum ad 18. Et pariter, Quia respondet 2. ad 5. vt 6. ad 15. erit *diuidendo*, 2. ad residuum 3. ex 5. vt 6. ad residuum 9. ex 15. Et *permutando* 2. ad 6. vt 3. residuum ad residuum 9. Cum ergo residuua 6. ad 18. & 3. ad 9. dicant eandem proportionem, quæ est 2. ad 6. erit etiam inter eosdem eadem proportio, & 6. erit ad 18. vt 3. ad 9. Quare *permutando* 6. erit ad 3. vt 18. ad 9. Numerus verò 6. est differentia, inter 2. & 8. & ideo dupla differētiæ 3. quæ est inter 2. & 5. terminos datos; & ideo etiam 18. differentia, quæ est inter 9. & 24. erit dupla differentiæ 9 quæ est inter 6. & 15. quare 6. 15. 24. erunt Arithmetici, vt sunt 2. 5. 8.

TRACTATVS XIIII.

PARS TERTIA.

De Proportione Harmonica.

PRoportio Harmonica in eo existit; quòd eadem proportio Geometrica sit inter extrema, quæ est inter differentias, quibus numerus medius dissidet ab extremis; Ita inter 2. 3. 6. est proportio harmonica; quia extrema 2. & 6. ita geometricè proportionalia sunt, vt est 1. ad 3. quæ sunt differentiæ, quibus dissidet extremum 2. à medio 3. & extremum 6. ab eodem 3. Hæc autem proportio, licet dicatur Harmonica, est tamen potiùs Optica. vt suo loco ostendemus; pro nunc ipsius vniuersalia tantùm simptomata adferemus.

EXPENSIO I.

De proportione Harmonica inuenienda, & aliquibus eius proprietatibus.

PRoportio Harmonica videtur quiddam inter Geometricam, & Arithmeticam. Nam in comparatione terminorum Geometrica est; quod verò originem, ab Arithmeticâ ortus suos desumit, vt modo videre licebit.

PROBL.

PROBL. I. PROPOS. I.

Datis tribus numeris Arithmeticè proportionalibus, tres alios Harmonicè proportionales inuenire.

Sint dati 3. 7. 11. continuè Arithmeticè proportionales, & differentia sit 4. multiplicentur extremi inuicem, & sint 33. Multiplicetur deinde medius cum extremis, & erunt 21. & 77. Dico itaque 21. 33. 77. esse inuicem in Harmonica proportione.

* Probatur. Quia 3. extremum multiplicauit medium 7. & fecit 21. Multiplicauitque aliud extremum, & fecit 33. erit 7. ad 11. ex prop. 17. l. 7. vt 21. ad 33. Quare *diuidendo* erit 7. ad 4. differentiam, vt 21. ad 12. differentiam.

Rursus. Quia 11. multiplicauit extremũ 3. & mediũ 7. & generauit 33. & 77. erit 3. ad 7. vt genitus 33. ad genitum 77. ex prop. 17. l. 7. elem. Quare *diuidendo* erit 3. ad 4. differentiam, vt 33. ad 44. differentiam. Quapropter etiam *componendo* erit 3. cum 4. nempe 7. ad 4. differentiam, vt 33. cum 44. s 77. ad 44. differentiam. Cùm ergo sit 7. ad 4. vt 21. terminus, ad 12. differentiam, & 7. ad 4. vt 77. terminus ad 44. differentiam ex prop. 11. quinti erit eadem proportio 21. ad 12. quæ est 77. ad 44 Propterea que *permutando* 21. terminus primus ad 77. vltimum terminum erit proportio, quæ est differentię 12. ad differentiam 44. Quamobrem erunt tres termini 21. 33. 77. continuè harmonicè proportionales ex definit.

COROLLARIVM I.

Hinc est. Quod ita sit 3. ad 11. termini Arithmetici, vt 21. ad 77. terminos musicos, & vt 12. ad 44 differentias. Patet. Medius 7. multiplicauit 3. & genuit 21. & 11. & genuit 77. Ergo ex propos. 17. septimi eadem proportio est 3. ad 11. quæ est 21. ad 77. sed vt est 21 ad 77. ita est 12. ad 44. quæ sunt differentiæ, ergo ex *æquo*, vt 3. ad 11. ita est differentia 12. ad differentiam 44.

COROLLARIVM II.

Hinc emanat illa proprietas, quòd differentia primorum multiplicata in tertium, seu extremum generet numerum æqualem differentiæ posteriorum ductæ in primum, vt hic vides.

	12	44
21	33	77
	924	

Ratio petitur ex propos. 19. lib. 7. Elem. Quoniam extrema dicunt eãdem proportionem, quam differentiæ, & ita est 21. ad 77. vt 12. ad 44. Ideoque multiplicati medij inuicem 77. & 12. & extremi inuicem 21. & 44. dabunt genitos æquales, & idem dicas ob eandem proportionem de extremis arithmeticis & differentijs Harmonicis, seu extremis Harmonicis.

3	7	11	3	7	11
21	33	77	12		44
	231			132	

Nàm, quia, ita est 3. ad 11. vt 21. ad 77. ex Coroll. 1. ideo multiplicati inuicem 21. & 11. sicut 3. & 77. dant 231. Et quia ita est 3. ad 11. vt differentiæ 12. ad 44. ex Coroll. 1. ideo 11. & 12. inuicem ducti sicut, & 3. & 44. dant 132.

COROLLARIVM III.

Colligitur Arithmeticos tres esse in eadem proportione Geometrica; ac Harmonici, sed conuerso ordine. Quia enim 3. V. g. generauit 21. & 33. primos Harmonicos. Multiplicando duos extremos Arithmeticos 7. & 11. ideò isti postremi erunt in eadem proportione, ac Harmonici primi 21. & 33. Rursus; quia 11. multiplicando duos primos Arithmeticos 3. & 7. produxit Harmonicos postremos 33. & 77. ideo in eadem proportione erũt isti postremi Musici cum Arithmeticis primis.

PROBL. II. PROP. II.

Datis duobus terminis tertium in Harmonica proportione reperire, siue maiorem, siue minorem.

Terminorũ datorũ differentiã à minore subductâ termino, diuidẽdus est residuo genitum ex eorũ multiplicatione, nam quotiens cum datis duobus constituet Harmonicum maiorem. V.g. sint dati 6. & 8. quorum differentia est 2. quæ deducta à minore termino 6. relinquit 4. Numerus verò genitus ex eorum multiplicatione terminorum est 48. qui diuisus per 4. relinquit 12. tertium terminum; dico itaque quod 6. 8. 12. sunt in proportione Harmonica.

* Probatur. Nam subducta differentia à minore termino dato relinquit residuum, qui cum duobus antecedentibus proportionem Arithmeticam habet; nempe 4. 6. 8. differentia enim, quę subducto 6. ab 8. remanet, eadem à termino minori 6. subducitur. Vnde multiplicati, vt superius in 1. propos. producent tres terminos in proportione Harmonica. Nempe 6. multiplicando 4. & 8. extrema, dabit 24. & 48. & extrema 4. & 8. se multiplicando facient medium 32. Si ergo omnes diuidantur per 4. patet quotiẽtes in eadem proportione mãsuros esse. Sed iam quotiẽtes 24. & 32. diuisorum per 4. residuũ sũt ipsi multiplicati 6. & 8. Ergo reliquus diuisus quoq; per 4. residuũ dabit tertium Harmonicum proportionalem 12. Siquidem diuisio æquiualet multiplicationi, & sicuti multiplicati numeri per eundem numerum ex propos. 17. septimi faciunt genitos in eadem proportione, in qua ipsi multiplicati se respiciunt, ita etiam diuisi generant quotientes in eadem proportione, in qua ipsi erant. Si verò cupias reperire vtroque dato minorem: Differentiam eorum maiori adde, & per hanc summam numerum ex eorum mutuâ multiplicatione genitum diuide; quotiens enim erit terminus vtroque dato minor, vt si dentur 6. & 9; addo differentiam eorum 3. maiori 9. & summa fit 12; diuidò deinde numerum 54. ex eorum multiplicatione genitum per hanc summam 12. & prodit tertius terminus minor $4\frac{1}{2}$.

* Probatur eodem modo. Nam addita differentia eorundem, maiori V.g. ipsi 9. ex ipsis fiunt tres termini in proportione Arithmetica, vt 6. 9. 12. idem enim interuallum 3. mediat: quare fient ex ipsis Harmonici 54. 72. 108. ex prima propos. qui, si diuidãtur per maiorem 12. dabunt quotien-

tes eiusdem Harmonicæ proportionis: sed iam 6. & 9. sunt quotientes duorum 72. & 108. ex diuisione per 12. consurgentes; si quidem & ipsi 72. & 108. ex multiplicatione 6. & 9. per 12. consurgunt: ergo reliquus quotiens inuentus 4. $\frac{1}{2}$ ex diuisione primi proportionalis 54. prouenient erit primus terminus ipsorum 6. & 9.

COROLLARIVM.

*Hinc est quòd non semper duobus datis tertius Harmonicus proportionalis inueniri queat vtroque maior; licet possit reperiri vtroque minor in infinitum.

* Ratio est, quia quandoque occurrere potest, vt differentia datorum à minore subduci nequeat, eò quòd sit maior, quàm ipse minor numerus, vel ipsi æqualis, vt essent 3 & 9, nam 6. differentia non potest subduci à 3. & sicuti si darentur 4. & 8. differentia ipsa 4. non posset subduci à 4. quia nihil remaneret. At potest diminui in infinitum, quòd differentia semper possit addi maiori termino, & sic semper numerus ex eorum multiplicatione genitus per eum diuidi possit.

EXPENSIO II.

De proportione Harmonica continuanda.

Dvplici modo Harmonica proportio continuatur. Prima est, cùm datis tribus terminis Harmonicis tertio, duo alij in eadem proportione Harmonica adiunguntur. Secunda quando tribus datis, duobus extremis tertius Harmonicè proportionalis adiungitur, quæ, seu prima, seu secunda non potest dici propriè continua. Non quidem prima, eo, quòd secundus, tertius, & quartus deinde non habeant proportionem Harmonicam, vt 2. 3. 6. 9. 18. Nam 2. 3. 6. & 6. 9. 18. eam, & eandem Musicam proportionem possident; non autem 3. 6. 9. qui distant Arithmeticè. Secunda verò non est eadem priorum trium, quæ posteriorum, nam 3. 4. 6. & 4. 6. 12. sunt secundo modo continuè proportionales; sed non eadem proportione 3. refertur ad 6. vt 4. ad 12.

PROBL. I. PROPOS. III.

Proportionem Harmonicam datis tribus terminis primo modo continuare.

Denominator proportionis inter extrema ducitur in duos terminos medium, & extremũ, duoq; alij adiungẽtur tertio termino, qui in eadem proportione erunt cum eo, ac tres dati inuicem V.g. datis 2.3.6. si per 3. denominatorẽ proportionis, quã habet 2. ad 6. multiplicetur 3. mediũ & 6 extremum producentur 9. & 18. qui in eadem proportione erunt ad 6. quã tres dati 2. 3. & 6. ita vt sint 2. 3. 6. 9. 18. continuè modo primo proportionales: & sic si multiplices hos vltimos per eundẽ ꝓportionis denominatorẽ, erũt numeri geniti 27. 54. alijs quoq; adiũgendi, ita vt sint continuè proportionales harmonicè 2.3.6.9.18.27.54.

* Præass. Antequam deueniamus ad probationem obserua priùs, quòd denominator ternarius rationis numeri 2. ad numerum 6. multiplicando 2. facit 6. Quare si adhuc 3. vt iussimus, multiplicet 6. & faciat 18, erit eadem proportio 2. ad 6. quæ 6. ad 18. Sed idem ternarius multiplicauit quoque, vt præcepimus, intermedium numerum 3. & fecit 9. quare ita erit 3. ad 9. vt 2. ad 6, & ideo, vt 6. ad 18. quæ est ob proportionem Musicam eadem, ac differentiarum 1. ad 3

* Quo supposito in propos. probanda sit primus progress. Primus terminus 2. ad extremum 6. est vt medius terminus 3 ad inuentum 9. Ideo *permutando* erit 2. ad 3. vt 6. ad 9. & *diuidendo* residuum 1. erit in proportione ad totum 3. vt residuum 3. ad totum 6. Quare *permutando* rursus erit residuum 1. differentiaque datorum numerorum ad differentiam 3. extremi dati 6. ab inuento 9. vt 2. ad 6. primus, & vltimus datus.

Progress. 2. Eodem modo, ita erit 3 medius ad 9. inuentum, vt 6. extremus datus ad 18. inuentum. Ergo *permutando* erit 3. ad 6. vt 9. ad 18. & *diuidendo* differentia 3. ad terminum 6. vt differentia 9. ad terminum 18. & *permutando* erit differentia 3. ad differentiam 9. vt 6. ad 18. termini, quę est eadem, ac 2. ad 6. terminorum, vt progr. 1.

Progress. 3. Cum ergo sit 1. differentia primi 2. à medio termino 3. ad differentiam 3. extremi termini 6. ab inuento 9. veluti 2. ad 6. ex primo progr. & ex secundo differentia 3. medij 3. ab extremo 6. ad differentiam 9. inuenti minoris 9. ab inuento maiore 18. sit vt 2. ad 6. Erit itaque eadem proportio 1. differentia minor datorum ad 3, differentiam minorem extremi ab inuento minore quæ est differentia 3. maioris datorum ad 9. differentiam maiorem inuentorũ. Quare *permutando* erit minor 1. ad maiorem 3. datorum, vt minor 3. ad maiorem 9. inuentorum terminorum. Differentię verò 1. minoris ad 3. maiorem proportio est, vt 2. terminus primus datus ad vltimum datum 6. & ex præass. vt 6 ad 18. quare erit differentia 3. ad differentiam 9. inuentorum, vt terminus vltimus 6. datus ad vltimum inuentum 18. Quare 6. 9. 18 erunt in Musica proportione, vt 2. 3. 6. quòd erat tandem probandum, cùm sit 6. ad 18. vt differentia 3. termini 6. à 9. ad differentiam 9. termini 9. à termino vltimo 18.

COROLLARIVM.

Hinc est, quòd secundus, tertius, & quartus in istis harmonicis, & quartus, quintus, sextus, sint Arithmetici. Quod vt pateat.

* Aduerte idem esse multiplicare numerũ ꝑ numerum suarũ partiũ, & deinde per numerũ illas partes numerantẽ productum multiplicare, ac in se multiplicare; quia numeri plani facti ex toto numero, & eius partibus, si simul sumantur, æquant ipsum quadratum numeri in se ducti ex propos. 2. lib. 9. Vnde, si habeamus numerum partium, & rectangulum sub vna ex ijs partibus, & toto numero comprehensum, & hunc planum per numerum, earum partium multiplicemus, habebimus omnia rectangula, quæ ipsum quadratum dati numeri exęquant. Sic si 2. tertia pars numeri 6. multiplicet 6. & faciat 12. deinde hunc numerum planum multiplicemus per numerum partium, qui est 3. ponemus tres numeros planos duodenarios simul, qui æquabunt quadratum numeri 6. Sint ergo Arithmetici 2. 4. 6. à quibus Musici prodeunt 8. 12. 24 36. Quia 6. multiplicauit 2. & genuit 12. & rursus 4. & genuit 24. & tandem se, & genuit 36. ex propos. 19. præc. partis

erunt

erunt 12. 24. 36. Arithmetici. Multiplicauit autem se numerus 6. vt diximus supra: nam multiplicauit priùs 2. & fecit numerum planum 12. deinde fuit multiplicatus per denominatorem 8. ad 24. ex propos. 3. quæ ex Coroll. 1. propos. 1. est idem, ac denominator proportionis 2. ad 6. & cõsequenter cum fuit multiplicatus numerus planus 12. per numerum continentiarum 2. in 6. fit quòd genitus æquet quadratum numeri 6. & virtualiter in se ipsum fuerit multiplicatus, quia per numerum partes numerantem fuit multiplicatus.

PROBL. II. PROPOS. IV.

Proportionem Harmonicam secundo modo continuare.

SEcundo modo continuabitur proportio Harmonica. Datis enim tribus terminis Harmonicè proportionalibus 2. 3. 6. inueniemus duobus vltimo, & penultimo alium proportionalem iuxta ea, quæ docuimus propos. 2.

PROBL. III. PROPOS. V.

Etiam alio modo proportionem Harmonicam propagare.

* DIsponantur fracti ab vnitate incipientes, aut quoquo alio numero, & erunt in proportione Harmonica, ita erunt Harmonici.

$\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{6}$, & cæt. Sic $\frac{3}{4}\ \frac{3}{5}\ \frac{3}{6}$, & cæt.

Patet primo. Si ad eandẽ denominationem redicantur $\frac{60}{120}\ \frac{40}{120}\ \frac{30}{120}\ \frac{24}{120}$, & $\frac{20}{120}$, qui omnes proportionem consequuntur harmonicam secundo modo continuatam.

A — — D C — — — — — — — — — B

Vt autem probetur monendum. Si eadem quãtitas AB diuidatur in tres partes, quarum vna AC, & rursus in quatuor, quarum vna AD; certum est, quòd ablatis à tertijs partibus minores quartæ relinquent differentias æquales, vtpote, quòd æquales ab æqualibus demptæ sint; & quia sunt tres tertiæ partes, tot etiam relinquent differentias, quas, dico, tres differentias esse æquales vni quartæ parti. & ostẽdo. Nam tres tertiæ partes æquãt AB, à quibus auferuntur tres quartæ, vt DC, & relinquunt tres differentias, sed auferãtur tres quartæ partes à tota AB æquali tribus tertijs relinquet vnam quartam partem AD: Ergo 3. differentiæ æquant vnam quartam partem; quia ambo residua sunt ablationis æqualium trium quartarum ab æqualibus tota AB, & eius tribus tertijs.

Ergo tres differentiæ æquant quartam partem, & addita vna, quatuor differentiæ æquabunt partem maiorem tertiam.

* Sint ergo $\frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{5}$ eiusdem totius. Dico hos numeros musicos esse: Nam differentia vnius tertij ab vnico quarto erit vnius quartæ partis $\frac{1}{3}$, & rursus differentia, quæ est inter vnam quartam, & vnicam quintam partem totius, est vnica quinta pars eiusdem totius, nempe vnius quartæ ex prec. præassumpto. Ergo differentiæ erunt $\frac{1}{3}$, & $\frac{1}{5}$ sui totius, sicut fracti dati extremi sunt $\frac{1}{3}$, & $\frac{1}{5}$ eiusdem totius; cùm ergo sint differentiæ eadem minutia, ac extremi fracti dati, erunt in eadem proportioue; vnde $\frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{5}$ erunt Musici ex pr. 3. Cor. Tract. 3.

COROLLARIVM

HInc est quoque, quod numerus factus ex differentia maiori Harmonica, & minori extremo, vel è contrà minori differentiâ in maius extremum ductâ facere numerum, qui continet tres harmonicos, tanquam suas partes; ideoque Harmonici sunt fractiones, cuius genitus est denominator, vt $\frac{\;\;2\;\;1}{9\;2\;4}$ $\frac{\;\;3\;\;3}{9\;2\;4}$, & $\frac{\;\;7\;\;7}{9\;2\;4}$, quòd enim cõtineat duo extrema, patet quia fit ex eorũ multiplicatione; quod autem contineat medium 33. Prob.: Nam illius partes continentur in extremis, cùm ex mutua Arithmeticorum extremorum multiplicatione fit genitus; quæ produxere etiam extrema Harmonica multiplicata per medium Arithmeticum, vt ex 1. propos. huius part. constat; imò, & si tres Arithmetici simul ducantur; numerus productus erit denominator, cuius numeratores erunt Harmonici: Nam Harmonici, cum generentur ex multiplicatione Arithmeticorum non possunt continere alias partes, quam quæ in ipsis sunt, cum autem Arithmetici omnes simul ducuntur, patet, quòd genitus omnes partes, quas ipsi continent, obtineat: Vnde & continebit omnes partes Harmonicorum, sic 231. qui fit ex ductione 3. in 7. & 7. in 11. Arithmeticos continent 21. vndecies 33. septies 77. tricies.

EXPENSIO III.

De proportione Harmonica interserenda.

NOn potest prætermitti Intersitio proportionis harmonicæ, vtpote aliquando eius continuationi necessaria, huicque cognitioni addemus etiam diuisionem dati numeri in Musicos terminos.

PROBL. I. PROPOS. VI.

Inter duos datos numeros medium Harmonicum reperire.

IStud operi mandatur Regula aurea. Nam primo eorum differentiam reperies, & deinde eos in vnam summam rediges, quæresque summa, & minore termino, & differentia, differentiam, quæ debet esse inter primum, & medium, quâ repertâ ipsi minori addatur, vt constituatur terminus medius. Sint pro exemplo dati 15. & 25. Inter quos medius proportionalis harmonicè sit inueniendus; Differentia est 10. summa 40. Dico itaque si 40. dant 15. quid dabit 10. differentia? & multiplicatis 10. per 15. & diuisis per 40. prodibit differentia 3. $\frac{3}{4}$, quę addita minori termino 15. faciet 18. $\frac{3}{4}$ pro medio, ita vt sint tres harmonicè proportionales 15. 18. $\frac{3}{4}$, & 25.

* Probatur ex propos. 24. septimi elementorum. Nam si diuisi numeri proportionales fuerint, hi quoque compositi proportionales erunt; Quia ergo ita est extremum ad extremum, vt medij differentia à primo ad eiusdem differentiam ab vltimo, sequitur, vt eadem proportio sit aggregati extremorum ad vnum ex extremis, quæ est aggre-

aggregati ex differentijs ad vnã earundem. Datis autem duobus terminis habes per additionem eorum aggregatum per subductionem verò summã differentiarum, vt probabo: Ergo habes tres terminos proportionales: nam ita est aggregatum extremorum ad vnum ipsorum, vt aggregatum differentiarum ad alteram ex ipsis, quę debet inquiri per regulam proportionum.

Quòd verò differentia inter duos numeros extremos sit aggregatum differentiarum, patet: medius enim numerus non potest magis differre ab ambobus maiori, & minori, quam ipsi inuicem differant V. g. datis 3. 7. 11. non potest 7. magis differre à 3. & à 11. quã, quòd ipsi differunt, nempe à 3. num 4. & à 11. numero 5. quæ simul faciunt 9. differentiã ipsorum, vt per se patet alioquin esset distantia maior, vel minor, quàm quod esset, namque esset 9. vnitatum, at mensurata per 4. & 5. distantiam eorundem à medio, non esset talis.

PROBL. II. PROPOS. VII.

Datum quemlibet numerum in proportionem Harmonicam distribuere.

SIt datus quisque numerus V. g. 54. & oporteat secundùm proportionem Harmonicam illum distribuere, diuidatur per terminos Arithmeticos V. g. 1. 2. 3. 4. eruntque partes in proportione Harmonica, quæ sunt 54. 27. 18. 13. $\frac{1}{2}$.

Probatur. Quia 54. numerus, vel quilibet alius respectu partium, in quibus diuisus est, est veluti integer, cuius vna pars est quotiens. Ergo dicent partes singulę, & quotientes eandem proportionem, quam $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$, de quibus probatum est prop. 5. dicere proportionem Harmonicam.

COROLLARIVM.

HInc est; quòd si numeri Arithmetici 1. 2. 3. 4. vel quilibet alij in vnam summam continua multiplicatione redigantur, & summa deinde per singulos diuidatur, quòd producentur Harmonici continuè proportionales ob eandem rationem, quòd summa se habeat veluti integer, & denominator, cuius numeratores sint partes diuisæ, sic 24. summa numerorum Arithmeticorum 1. 2. 3. 4. ex mutua multiplicatione resultans diuisa per eosdem numeros, dat 24. 12. 8. 6. in Harmonica proportione continuos.

EXPENSIO IV.

De comparatione Proportionum.

TRibus modis inuicem proportiones comparari possunt; vel vt eorum differentiæ dignoscantur, vel vt inuicem termini intermisceantur, vel vt omnes, aut aliquas proportiones ipsi termini obtineant; Tribus itaque expensionibus breuiter ab ista speculatione nos expediemus; cum nihil de cætero Mathematicę deseruiat.

THEOR. I. PROPOS. VIII.

Conueniunt in hoc omnes proportiones, quòd per eundem numerum termini multiplicati generent numeros eiusdem proportionis.

SIc 2. 4. 6. Arithmetici multiplicati per quemlibet numerum V. g 4. generant 8. 16. 24. terminos quoq; Arithmeticos; Sic 3. 4. 6. Harmonici per 4. multiplicati generant 12. 16. 24. Harmonicos sic dicas de Geometricis.

Probatur verò propositio ex præcedentibus, & ex propos. 17. septimi Elementorum.

THEOR. II. PROPOS. IX.

Differunt proportiones; quod Arithmetica progrediatur in infinitum crescendo, non decrescendo, nisi incidat in fractos, Harmonica solum decrescendo, Geometrica crescendo, & decrescendo.

PRobatur ex dictis, & maxime da Harmonica ex Coroll. propos. 2.

THEOR. III. PROPOS. X.

Differũt quoq; Quod Arithmeticæ proportionis differentiæ æquales sint, & proportiones inæquales, idest dissimiles: at Geometrica proportiones habet similes, & terminorum differentias similes cum differentiæ in eadem proportione sint, & Harmonica neque differentias similes, neque proporti ones possidet similes in suo continuo progressu. Patet ex dictis.

SVnt aliæ, quæ oriuntur ex eorum multiplicatione, diuisione additione, & subtractione supra explicatis praxibus, quas, si voluerit, potest quilibet conferre, & differentias etiam in istis operationibus tractandis agnoscere.

EXPENSIO V.

De maxima, & minori Harmonia.

CVm quatuor termini, ita sint ordinati; vt in ipsis omnes tres proportiones inueniantur, dicunt Mathematici habere Harmoniam maximam, quòd si solum duæ inueniantur, dicunt, Harmoniam minorem possidere. Oportet itaque docere modum inueniendi quatuor terminos, qui vel duas, vel omnes proportiones consequantur,

PROBL.

PROBL. I. PROP. XI.

Quatuor numeros habentes proportionem Arithmeticam, & Geometricam inuenire.

CApe tres terminos, quorum extrema, vel paria ambo sint, vel ambo imparia; sed Geometricâ proportione nexos, vt 16. 24. 36. interque istos extremos numerum Arithmeticum, interijce eos vniendo, vt docuimus, & deinde bifariam diuidendo, & erit numerus 30. itaque in quatuor numeris 16. 24. 30. 36. proportio Geometrica, & Arithmetica reperietur, vt ex ipsa constructione est manifestum.

PROBL. II. PROPOS. XII.

Quatuor numeros reperire, in quibus Harmonica proportio, cum Geometrica reperiatur, vel cum Arithmetica.

ACcipe tres numeros continue Geometricè proportionales, vt 16. 24. 36. & ex dictis propos. 5. vel 4 h. exquire inter extrema 16 & 24. Harmonicum proportionalem numerum, eritque 19. $\frac{1}{5}$. Vnde quatuor termini 16. 19. $\frac{1}{5}$ 24. 36. duas proportiones propositas obtinebunt, vt patet ex constructione. Si verò cupias inter 16. & 36 extremos idem ages, eritque 22. $\frac{8}{13}$.

Eodem modo inter duos Harmonicos 4. & 6. extremos trium 3 4 6. intericietur terminus Arithmeticus 5. eruntq. quatuor termini 3. 4. 5. & 6. Harmonicè, & Arithmeticè proportionales.

PROBL. III. PROPOS. XIII.

Quatuor terminos reperire, in quibus omnes proportiones sint, & extrema proportionem datam Geometricam consequantur.

EX tribus Arithmeticis paribus, vt docuimus propos. 3. huius creentur tres Harmonici proportionales, quorum extrema proportionem habeant datam, & inter extremos horum statuatur terminus Arithmeticè proportionalis, & erunt quatuor termini in Maximâ Harmonia, vt exposcis.

Sint V. g. tres numeri Arithmetici 4. 6. 8. ex quibus creo tres Harmonicos 24. 32. 48. interque extrema 24. & 48. interpono Arithmeticum in se 6. multiplicando, vt fiat 36. Sunt ergo termini 24. 32. 36. 48. habentes omnes proportiones requisitas.

Probatur. Nam primo 24. & 48. sunt in proportione data 4. ad 8. vt patuit supra propos. 1. huius, & Coroll.

Secundo obtinent proportionem geometricam non continuam, & ita est 24 ad 36. vt 32. ad 48. Nam quia 6. multiplicauit 4. & fecit 24. & se & fecit 36. Ergo eadem proportio erit inter 4. & 6. quæ est inter 24. & 36. Sic quia 8. multiplicauit 4. & 6 ex prop. 17. septimi elementorum, ita erunt geniti 32. & 48. vt 4. ad 6. Ergo, cùm proportionem eandé, quam 4. ad 6. dicant 24. & 36. ac 32. & 48. eandem Geometricam rationem habebunt. Sunt etiam 24. ad 32. vt 36. ad 48. in eadem ratione. Nam 4 multiplicauit 6. & 8. Ergo geniti 24. & 32. habebunt eandem rationem, quam 6. ad 8. & quia 6. multiplicauit se, & 8. geniti 36. & 48. habebunt eandem rationem, quam 6. ad 8. Ergo & inter se eandem, quam 6. ad 8. consequentur.

Probatur tandem de proportione Arithmetica numerus enim 6. multiplicauit se, 4. & 8. Ergo geniti 24. 36. 48. erunt in eadem proportione, quam 4. 6. & 8. sed hæc ex Hypothesi est Arithmetica, ergo, & genitorum 24. 36. 48. ex 19. prop. part. præced. 2.

Probatur tandem de Harmonica ex ipsa constructione. Imperatum est enim ex tribus datis Arithmeticis 4. 6. 8. tres Harmonicos reperire 24. 32. 48.

TRA-

TRACTATVS XV.

De Linearum, Segmentorumque proportionibus.

QVamuis quædam fundamentalia de lineis secandis lib. 6. Expens. 3 tetigerimus; ea tamen fuere pauca, & quæ solùm elementi necessitas exposceret. Verùm linearum amplioribus terminis clauditur speculatio, latiorque admodum est, & quæ cognitionem multarum propositionum, quæ deinde ostensæ sunt, requirat, & ideò earum speculationem, necesse fuit, in hunc locum reicere.

EXPENSIO I.

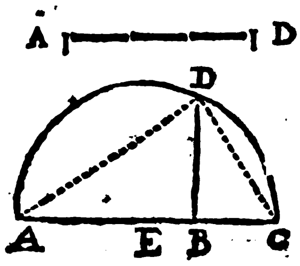
De linearum proportionali inuentione in proportione Geometrica.

QVamuis supra cum Euclide lib. 6. Expens. 3. inuenerimus lineas proportionales datis lineis. Quia tamen faciliter id, alio modo executioni demandatur; ideo ad tractatus perfectionem hic eum docebimus, & præter hoc docebimus quoque reperire alias lineas proportionales, seu potentia, seu commensurabilitate, vel inæqualitatis, vel æqualitatis, vt plena linearum proportionalium cognitio habeatur.

PROBL. I. PROPOS. I.

Datis duabus lineis alteram proportionalem Geometricam, seu extremam, seu mediam reperire.

SIt inquirenda media proportionalis datis AB, & AC. Fiat super AC semicirculus, & erigatur perpendicularis à puncto B in peripheriam, ducaturque AD punctata: nam hæc ex 2. Coroll. propos. 8. sexti inter AC & AB est media proportionalis, diciturque diuidere proportionem AB, ad AC *per interpositionem* AD *in duas partes æquales.*

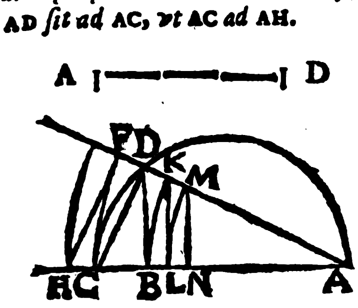


Si verò datis maiore AC, & media AD exquiratur minus extremum; facto super AC semicirculo accommodetur media AD in ipso, & à puncto D. cadat perpendicularis. Nam AB ex cit. Coroll. erit minus extremum. Si verò dato minore extremo AB, & mediâ AD seorsim exposita exquiratur maius extremum, ex B excitetur perpendicularis BD; prolungeturque AB quantum opus est, & cẽtro altero extremo A interuallo AD media ducatur circulus, l. eũ fig. non exprimat, qui secet perpendicularem BD in D. A puncto ergo D, quo illã secat, excitetur perpendicularis DC, quę secabit minus extremum productum in C Dico ergo AC ex eodem Coroll. esse maius extremum.

PROBL. II. PROP. II.

Datis duabus rectis lineis proportiones earum propagare in infinitum.

DEntur duæ AB, & AD, & secundùm proportionem minoris ad maiorem crescendo sit propaganda proportio: Quia datur minus extremum AB, media AD seorsim data; ideo ex propos. anteced. erecta perpendiculari BD centro A interuallo AD ducatur circuli portio l. in fig. non sit, & à pũcto D quo secat exeat data A D in A, & ei normalis DC, & CA erit tertia ꝓportionalis ex pręc. Rursusque ex puncto C ducto arcu CF interuallo AC: ab F, in quo secat, ducatur rursus perpendicularis FH ad AF, seu parallela primò ductę CD, *&* *in* H *erit quarta proportionalis, ita vt* AB *sit* AD, *vt* AD *ad* AC, *&* AD *sit ad* AC, *vt* AC *ad* AH.



Probatur, quia AB est ad AD, vt AD ad AC ob rectum angulum D ex Coroll. 2. prop. 8. lib. 6. Ergo etiam AD erit ad AF, idest AC, quæ ei vtpote radius, æquatur, vt AF ad AH ob rectum angulum H, ex dict. Coroll. propos. 8. & sic in infinitum crescendo.

Si verò requiratur proportio continuata in decrescendo maioris AD ad minorem BA. A puncto B interuallo AB ducatur portio circuli BK, & à puncto K demitatur perpendicularis KL. Rursusq; à puncto L ducatur portio circuli LM; & à puncto M demitatur perpendicularis MN. Dico hoc modo

do

do proportionem continuari in se diminuendo, & AD esse ad AB, vt AB ad AL, & AB esse ad AL; vt AL ad AN; & sic quousque placuerit.

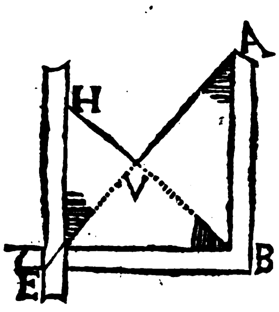
Probatur. Nam ex præced. vt est AD ad AB hoc est ad æqualem AK; ita est AK ad AL. Rursusque, vt AB hoc est AK ad AL ob rectum angulum L sic AL, idest AM ad AN; & sic quousque placeat, poteris continuare. An verò hæc continuatio possit verè in infinitum produci infra videbimus, cum de proportionum progressione.

PROBL. III. PROPOS. III.

Duobus datis extremis proportionalibus inter ea duas medias continuè proportionales in data proportione conijcere.

HOc problema antiqui, non nisi organicè soluere potuerunt ob infinitam, linearum multitudinem, quæ inter lineas possunt poni; Multas autem eorum inuentiones singulari ingenio excogitatas Clauius affert lib. 6. propos. 15. Geometr. pract. & quasdam valde amplificat Betinus Aerarij Math. propos. 13. tom. 2. Nos afferemus modum facillimum Platonis.

Sit regula lignea, vel cuprea AB placitæ longitudinis, cui alia regula BE eiusdem rationis rectangulè infixa sit, & stabiliter. Huic verò rectangulè altera inseratur EH tali modo, vt per illam mota, nunquam tamen ab angulo recto deficiat, & ecce instrumentum paratum erit.



Vsus verò instrumenti talis est. Sint duæ datę extremę lineę AV, & VH, quę rectâgulè vniātur in V, & producantur per punctatas, quantum satis erit. Applicetur verò instrumentum extremo A regula AB, & ita accommodetur trasferendo regulam HE, vel viciniùs, vel longinquiùs vsq; dum alterum extremū H alterius datæ VH extremum ipsa regula mobilis lambat, & simul continuatæ punctatę VB, & VE transeant per angulos rectos, regularum; nempe VE per angulum E, & VB per angulum B. Dico *quatuor* AV, *&* BV, *&* VE, *&* VH *esse quatuor continuè proportionales.*

Hocque, diciturque à Mathematicis diuidere in tres partes æquales proportionem AV ad VH.

Prob. Nam triangula AVB, & BVE, & EVH sunt æquiangula. Anguli enim ad V recti, & anguli nigri æquales; Cùm albus, & niger ad basim AB in triangulo AVB vni recto sint æquales; & ideo, cum totus apud B sit rectus, residuus āgulus niger ad B erit æqualis nigro ad A, & idem dicas de alijs.

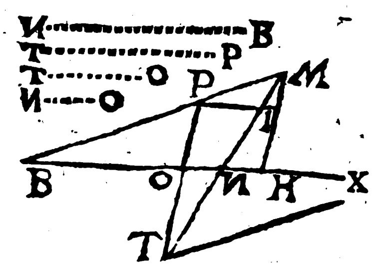
Cum ergo triangula æquiangula sint, erit AV crus maius ad BV minus in triangulo AVB, vt BV idem; sed maius in triangulo BVE ad crus minus VE, & hoc BV maius ad suum minus VE erit, vt ipsum VE maius in triangulo VEH ad minus VH. Quare BV, & VE sunt duæ mediæ proportionales inuentę inter extremas AV, & VH.

PROBL. IE. PROPOS. IV.

Datam lineam exhibere, quæ ad aliquam compositam habeat proprortionem ex duabus lineis ad duas alias, cum fieri potest.

SIt data proportio BN ad NO, & proportio TP ad TO non eadem, ac pręcedens, sed diuersa, vt proportio composita sit, non duplicata.

Ductis lineis BH, & TP, vtcumque, quæ faciant quemcumque angulum in O: mensuretur NO punctata super alteram earum V. g. super continuam NB à puncto O in N; & à puncto N altera punctata ei correspondens NB; Sic in altera TP punctata TO mensuretur super OT à puncto O in T, & à puncto T altera punctata TP correspondens perque extrema P, & B ducatur MB, & per N, & T linea TN, quę conuenient in M, *& erit reperta* MB, *quæ ad* PM *habebit proportionem compositam, ex proportione* NB *ad* NO, *&* OT *ad* PT.



* Probatur primo, quod MB, & MT conuenient, in M. Nam si non conuenient, essent TM, & MB parallelæ; Quare triangula POB, & NOT essent proportionalium laterum, vtpote æquiāgula V.g. si TX esset ipsa TN parallela ipsi BP; esset OB ad OX, vt OP ad OT, & *componendo* OB ad OB simul, & OX esset, vt OP sola ad OP simul, & OT: Quare contra pręsuppositionem proportio esset similis datarum linearum, quòd nolumus: nam posuimus NB ad ON dissimilem à proportione TO ad TP. Quare non erunt parallelæ; idcircò conuenient E. g. in M.

Probatur. Quod proportio BM, ad PM sit composita ex proportione NB ad NO, & TO ad TP. Ducaturque parallela PI ad NB V. g. à puncto P.

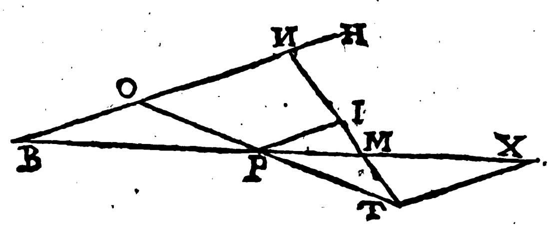
Eritque ex 4. lib. 6. MB ad MP, vt NB ad IP. Interponatur quælibet, vt aduertimus posse fieri Tract. 9. part. 1. Expens. 3. Scilicet NO, quæ interponatur inter IP, & NB. Erit igitur proportio NB ad IP composita ex duabus, sc. ex proportione NB ad NO, & NO ad IP: Sed ex 4. lib. 6. vt NO ad IP ob parallelismum linearum ON ad IP; Sic est in proportione TO ad TP: Ergo (posita proportione TO ad TP loco proportionis NO ad IP) proportio MB ad MP eadem, quæ NB ad IP erit composita ex proportione NB ad NO, & TO ad TP, quod si cupias proportiones componentes ambas esse maioris ad minorem vtere figura prop. seq.

PROBL. V. PROPOS. V.

Data linea, quæ dicatur componi ex proportione vnius lineæ ad aliam exhibere duas lineas, quæ reliquam proportionem contineant.

Dicatur linea BM ad MP composita ex proportione BN ad ON; & ex alia, quæraturque reliqua proportionum, quæ proportionem MB ad PM compleat.

Accomodetur in hac, seu præc. fig. NB longior, vt faciat cum MB quemcumque angulum, & ducatur indefinita MT ab M per N. Deinde ab N, mensuretur NO super NB, & à puncto P parallela ducatur ad NB, quæ sit IP, & à P per O transeat PT conueniens cum TM. *Dico proportionem* TP *ad* TO *esse proportionem, quæ componit cum proportione* NB *ad* NO *proportionem* BM *ad* PM.



Probatur. MB est ad MP, vt NB ad IP interponatur NO; eritque proportio NB ad IP composita ex proportione NB ad NO, & NO ad IP. Quare, & proportio BM ad MP erit composita ex proportione NB ad NO, & NO ad IP, scilicet ex TO ad TP, vel TN ad TI, & aduerte, quod si TP non conueniet cum TM versùs T conueniet versùs M; cum in proportione composita, vt dixi in præcedenti TP, & TM non possint esse parallelæ, vt est BN, & XT.

PROB. VI. PROPOS. VI.

Datâ mediâ trium in continua ratione existentium, & aggregato extremarum proportionalium primam, & vltimam exhibere.

Super aggregato HI duarum extremarum fiat circulus ACBD, & mediâ datâ duplâ BC accommodetur in circulo; siquidem oportet aggregatum extremarum, quæ diametrum faciunt circuli esse maius ipsâ mediâ duplatâ, quia duæ extremæ sunt maiores, quàm mediæ, & tantò magis cùm mediæ sunt inuicem æquales ex propos. 13. lib. 5. Elem.

Deinde ipsi CB erigatur perpendicularis AD ab eius medietate E. *Dico factum esse id, quod desiderabatur.*

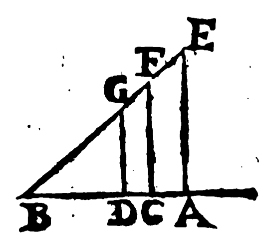
Probatur. Quia AE est ad EC, vt EC ad ED ex Coroll. propos. 16. lib. 6. Linea AD verò, vt diameter æquatur aggregato HI.

PROBL. VII. PROPOS. VII.

Datis duobus excessibus trium magnitudinum in continuâ proportione existentium exhibere tres continuas.

Sint dati excessus AC, & CD, qui in vnicam lineam ponantur AD, quę, & extendatur ad placitum vsque ad B: Deinde à punctis A, C, D erigantur perpendiculares, quę ex 14. lib. 6. eandem proportionem seruent, quę AC ad CD, & ducatur EG per puncta E, F, G, donec cum altera AB conueniat in B. *Dico factum esse id, quod expostitur, & esse* BD *ad* BC, *vt* BC *ad* BA.

Probatur, vt AE ad CF, sic est AB ad CB ex propos. 4. lib. 6. sed AE ad CF, effecta est sic vt AC ad CD; Ergo vt est AC ad CD, sic ex 16. l. 5. est tota AB ad CB. Sed, vt est CF ad DG, ita est CB ad DB; ex propos. 4. lib. 6. At CF respicit in proportione DG, vt AE respicit CF, vt AC respicit CD ex effect. & ideo vt proportionatur AB ipsi CB. Ergo proportionata est AB ipsi CB, vt CB ipsi DB. Quare tres AB, & CB, & DB sunt in continua analogia.



PROBL. VIII. PROPOS. VIII.

* *Dato termino maiori, & differentia termini maioris à medio reperire ipsum medium terminum, atque minorem.*

Sit datum maius extremum AB in propos. præced. figurâ, & differentia AC: Detrahatur hęc differentia AC à maiore extremo AB, & residuum CB erit medius terminus; Rursus ex propos. 15. sexti, fiat. vt AB ad suam differentiam AC est in proportione, sic CB ad aliud; & inueniatur CD. *Dico itaque, quod* AB, *&* CB, *&* DB *erunt in continua proportione.*

* Probatur, vt AB est ad AC; sic CB est ad CD. Ergo componendo, vt AB est ad AC cum CB; sic CB est ad CD cum DB: Quare diuidendo, vt AB est ad CB; sic CB erit ad DB: quapropter AC, & CB, & DB, erunt in continua proportione.

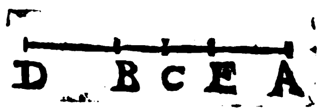
EXPENSIO II.

De proportionali linearum additione.

Additio proportionalis linearum maximas in Geometria secum fert vtilitates, & plurimis prębet speculationibus fundamentum, interque multas propositiones, quę exhibentur, hę sunt vtiliores, & admodum necessarię.

PROBL. I. PROPOS. IX.

Datam lineam rectam, vtcumque sectam tali segmento augere, vt tota cum adiuncta sit ad adiunctam, vt maius segmentum ad minus.



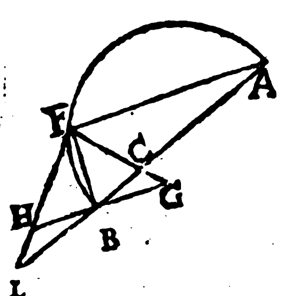
SIt linea AB secta, vt cumque in C, & iubeamur adiungere talem partem V. g BD; quæ faciat rectam AD; & hæc tota AD sit ad adiunctam, & segmẽtum BD, vt maius segmentum primitiuum AC est ad minus CB.

Ponatur CE æqualis ipsi CB: Fiatque per 15. propos. lib. 6. vt AE ad EC: Sic tota AB ad BD: reperieturque BD: *Dico itaque totam* AD *esse ad* BD *adiunctam veluti proportionatur segmentum maius* AC *segmento minori* CB.

Probatur. Quoniam enim AE respicit EC veluti AB respicit BD; erit quoque componendo AB, & EC ad EC, vt AB, & BD ad BD: sed EC est æqualis ex effectione minori segmento CB: Ergo erit etiam, vt AE, & EC, hoc est AC ad CB; sic AB cum BD, idest tota AD ad BD.

* Potest etiam fieri alio modo. Sit data AB diuisa, vt cumque in C. Facto super AB semicirculo, i puncto C erigatur, si placet perpendiculari CF. & fiat triangulum rectangulum AFB, lineęq; AF ducatur GH parallela per punctum B, & occurrat ipsi CF in G. Sit deinde BH æqualis ipsi GB, & ducatur per H linea FH, vsque ad L; & AB prolungetur, vsque ad L. *Dico* BL *esse eam additionem, quæ requiritur; &* AL *esse ad* BL, *vt* AC *ad* CB.

Probatur AF est ad BH, vel æqualem GB ob earum parallelismum in triangulo AFL, vt AB ad BL: sed vt AF ad GB; sic AC ad CB, ob triangulorum AFC, & GCB similitudinem: cum sint ad verticem, & inter parallelas ex 9. sexti: Ergo vt tota AL ad adiunctam BL, sic AC segmentum maius ad CB segmentum minus.

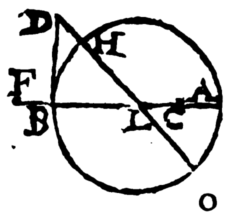


PROBL. II. PROPOS. X.

Datæ lineæ, vtcumque sectæ tale segmentum addere, vt tota cum addita sit ad totam, vt segmentum ad ipsam additam.

INter AB, & AC media proportionalis inueniatur BD; Eritque quadratum ex BD factum æquale rectangulo ex AC segmento, & tota AB effecto ex propos. 19. lib. 6. Erigatur itaque hæc media ex B perpendiculariter, & facto super AB totâ datâ circulo, per centrum eius L ducatur à vertice D linea OD: *Dico, quòd portio* HD *inter media inter* DB *tangentem, & peripheriam intercepta est illa, quæ addita ipsi* AB *facit* AF, *quæ est ad totam* AB, *vt segmentum* AC *est ad additam* BF.

Probatur. Quia rectangulũ ex tota, & addita pro vno latere AF, & addita BF pro alio est ęquale rectãgulo ex DO tota, & segmento HD ob æqualitatem laterum HD, & BF. Rectangulum verò ex OD, & HD est æquale quadrato BD, ex 36. lib. 3. vnde etiam erit æquale rectangulo AB, & AC, quod æquatur ex dictis quadrato ex BD. Quare ex prop. 10. lib. 6. OD, idest æqualis AF tota cum additâ erit ad AB totam, vt eius segmentum AC ad additam HD idest æqualem BF.

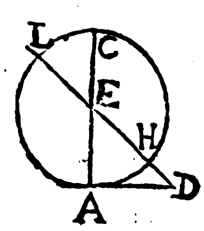


PROBL. III. PROPOS. XI.

Datis duabus lineis, alteram ipsarum, ita continuare, & tota cum additâ sit ad alteram, vt altera ad additam, idest sint continuè proportionales.

SIt data recta maior AC, & minor AD, quæ orthogonaliter ad verticem A coniungantur. Diuisaque bifariam alterâ ipsarum, puta AC minorem, dimidiæ EA interuallo describatur circulus, & ducatur ex D per centrum E linea DL. Dico totam HL, idest AC datam cum adiunctâ HD simul, idest LD esse ad datam AD, vt AD ad AC.

Probatur. Nam ex DL tota adiecta cum HD pro latere, & adiecta HD solum pro alio fiet rectangulum ęquale quadrato tangentis AD ex 36. lib. 3. Eucl. Ergo ex propos. 10. lib 6. vt DL ad AD; sic AD erit in proportione ad DH; quare AC æqualis HL aucta eodem incremento DH erit ad DA, vt DA ad DH.



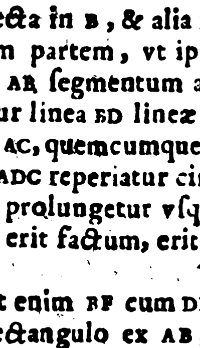
PROBL. IV. PROPOS. XII.

Lineæ datæ adiungere talem partem, vt alterius segmentis data, & adiuncta sint proportionales.

SIt linea AC secta in B, & alia DB, cui oporteat addere talem partem, vt ipsa DB sit ad segmentum BC, vt AB segmentum alterum ad additam BF: Addatur linea BD lineæ AC ad punctum B, & faciat cum AC, quemcumque angulum. Per tria verò pũcta ADC reperiatur circulus transiens ex 5. lib. 4. & DB prolungetur vsque ad circumferentiam in F, & erit factum, eritque AB ad BF, vt DB ad BC.

Probatur. Et enim BF cum DB faciunt rectãgulum æquale rectangulo ex AB, & BC, & ideo erunt, vt AB ad BF, sic BD ad BC ex 18. lib. 6.

Quod autem rectangulum ex BD, & BF sit ęquale rectangulo ex AB, & BC ostenditur ex 35. lib. 3.

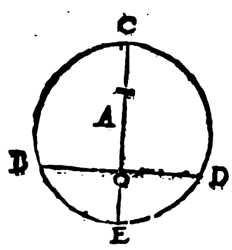


PROBL. V. PROPOS. XIII.

Datam lineam sectam, vtcumque, ita augere, vt segmentum maius cum addita sit ad segmentum maius, vt segmentum maius ad minus.

SIt linea AE diuisa in O, & segmentum maius OA; debeatque huic segmento addi talis pars; vt ipsum cum parte addita sit ad segmentum maius AO, vt maius ad EO minus.

Erigatur perpendicularis OB, & OD æqualis ipsi AO à puncto O, & per tria puncta B, E, D transeat circulus. Prolongeturque CA ad peripheriam in C, & erit factum.



Eritque ex 35. lib. 3. rectangulum CO, & EO æquale quadrato OB, idest OA ei æquali ex effectione.

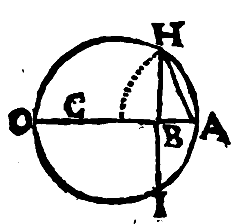
Vnde ex propos. 19. lib. 6. CO segmentum, cum addita erit ad OA, vt OA ad AC.

PROBL. VI. PROPOS. XIV.

Datam lineam, vtcumque sectam, ita addere; vt tota cum addita sit ad segmentum maius, vt segmentum maius ad minus.

SIt data linea AC, quam oporteat adiungere; vt tota AC cùm additâ CO, s. AO sit ad BC segmentum maius, vt BC ad AB segmentum minus.

Erigatur à puncto B perpendicularis, & à centro A interuallo segmento maiori BC portio circuli ducatur, quæ secet BH in H, cui BH fiat æqualis HI; perque tria puncta H, A, I transeat circulus, & prolongetur BC in O. Dico AO nempe totam AC cum addita CO esse ad CB segmentum maius, vt ipsa CB ad BA segmentum minus.



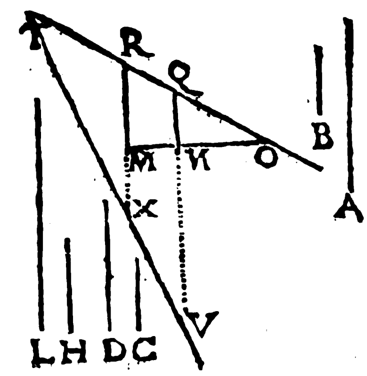
Patet, quia ex Coroll. propos. 8. lib. 6. ita est AO ad AH idest BC, vt AH ad AB.

PROBL. VII. PROPOS. XV.

Datæ sint duæ lineæ inæquales, & ratio data. Sintque addendæ talibus partibus, vt rationem datam inuicem obtineant, sed compositæ aliquam aliam rationem datam consequantur.

SCiendum est hoc problema non semper operi demandari posse; sed aliquando, prout rationes exhibentur, iuxta quas addendum sit, vel detrahendum; Ipsa verò experientia docebit, cùm operi demandari poterit, abque eo, quòd omnes casus ponamus; Sunt enim multi, & qui prolixis verbis indigerent.

Sint ergo datæ duæ lineæ A, B, ad quas duæ aliæ addendæ sint, quæ sint, vt C ad D, & efficiant compositæ proportionem, quam H ad L.



Fiat ON ad MO, veluti proportione respicit C ipsam D, & ex punctis M, & N erigantur perpendiculares, & parallelæ ipsis datis æquales A, & B, quæ sint NV, & MX; iunganturq; puncta VX. Deinde fiat ex propos. 15, l. 6. exp. vt H ad L, sic XT ad VT: Postmodum à puncto T per punctum O ducatur recta OT; Producanturque NV in Q, & XM in R. eruntque lineæ XR ad VQ in data proportione H ad L.

Probatur sunt enim TX ad TV. sic RX ad QV; ob parallelismum lineatum VQ, & XR in triangulo VQT, sed XT ad TV ita effecimus, vt H ad L: Ergo erunt RX ad VQ, vt H ad L: Sunt verò NQ ad MR, vt ON ad OM, & ON ad OM, vt B ad A ex effectione, & pariter MX ad VN, vt C ad D; ergo effecimus id, quòd propositum fuit. Nam partes additæ NQ, & MR obtinent rationem datam C, & D totæ verò XR ad VQ rationem datam H ad L ipsæ verò lineæ, quibus facta est additio, sunt æquales lineis datis A, & B.

EXPENSIO III.

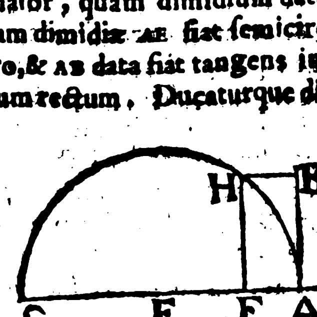
De linearum diuisione.

REctam lineam secare proportionaliter præter ea, quæ traddimus lib 6. hic docemus, cùm id multis operationibus deseruiat, multisque propositionibus, quæ deinde tradendæ sunt hæc doctrina necessaria euadat.

PROBL. I. PROPOS. XVI.

Rectam lineam ita secare, vt inter segmenta altera recta sit media proportionalis, quæ data debet esse, aut subdupla, aut minus, quàm subdupla illius, quæ secanda est.

SIt secanda AC in duo segmenta, ita quòd inter segmenta tanquam media proportionalis sit BA, non maior, quàm dimidium datæ AC. In E ad distantiam dimidiæ AE fiat semicirculus super AC diametro, & AB data fiat tangens in A, & faciat in A angulum rectum. Ducaturque diametro pa-



rallela

rallela BH ab altero extremo B, quæ secabit, vel tanget semicirculum AHC; quòd AB ex hypothesi minor sit, quàm semidiameter AE, vel ei æqualis, Deinde ab H; in quo secat, ducatur HF perpendicularis ad AC, secabitque AC in F.

Dico itaque quod inter AF & FC segmenta, media proportionalis est AB.

Probatur. Nam ex propos. 16. lib. 6. FH inter segmenta est media proportionalis; sed FH est æqualis AB, cum sint inter parallelas, & parallelæ. Ergo etiam AB est media proportionalis inter AF, & FC.

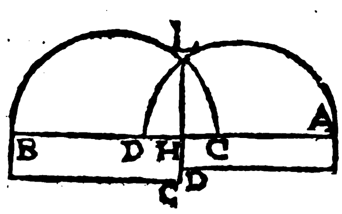
COROLLARIVM

Hinc data aliqua V. g. BA inuenies illius extrema proportionalia, nempe AF, & FC per præcedentem praxim, si simul iungas, vt vnam longitudinem efficiant, vt per se constat.

PROBL. II. PROPOS. XVII.

Rectam lineam duobus punctis in tres partes diuisam, in quatuor partes iterum diuidere per punctum intermedium; vt segmenta facta remaneant proportionalia.

Sit linea AB diuisa in punctis C, & D, quæ oporteat iterum diuidi in H, vt segmentum AH sit ad segmentum CH, vt segmentum HB ad segmentum HD. Diametro AD describatur circulus, & iterum diametro CB alius circulus describatur,



& à puncto, quo se intersecant in L ducatur perpendicularis ad H, & erit factum, quòd exposcitur. *Talisque erit proportio* AH *ad* CH; *qualis est* HB *ad* HD, *vel* CA *ad* CH, *vt* BD *ad* DH.

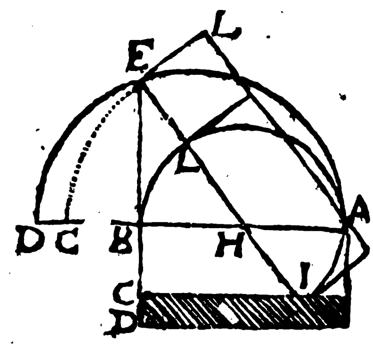
Probatur. Nam rectangulum ex AH, & HD est æquale quadrato HL ex 19. lib. 6. eo, quòd ex 8. lib. 6. HL sit media proportionalis, sic rectangulum ex CH, & HB erit æquale eidem quadrato ob eandem rationem; quare hæc rectangula erunt æqualia inuicem: quare ex propos. 10. lib. 6. AH latus vnius erit ad HC latus alterius, vt HB latus huius ad HD latus rectanguli, cuius alterum latus AH. Quare etiam *diuidendo* AC erit ad CH, vt DB ad DH.

PROBL. III. PROPOS. XVIII.

Datam lineam semel sectam, iterum denuò secare, vt partes sint in continua proportione.

Sit linea AD diuisa, vtcumque in B, quam oporteat iterum secare in C, vt partes sint in continua analogia, & sit AB ad BC, veluti est BC ad CD.

Diametro AB fiat circulus, & diametro AD alius circulus deducatur, & à puncto diuisionis datæ B erigatur perpendicularis, quæ secet peripheriam maioris circuli in E; & ducatur EH, cui fiat æqualis HC. Dico factum esse, quòd mandatum fuit, & AB, BC, & CD *in continua proportione reperiri.*



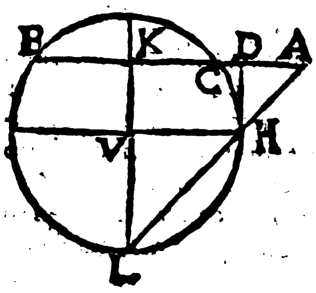
Probatur rectangulum ex IB, & EL est æquale quadrato ex BE ex 35. lib. 3. & ex 19. lib. 6. eidem quadrato ex BE, rectangulum ex AB, BD æquale est, quia AB, & CE, & BD ex 8. l. 6. sunt in cõtinua proportione. Rectangulum verò ex AB, & BC æquatur rectangulo ex AB, BC, quòd est AC, & rectangulo nigro ex AB, & CD. Pariter ex IB, & EL rectangulum æquatur rectangulo ex IL, & LB, & quadrato ex LE. Rectangula verò ista ex IL, & LE, & ex AB, & BC sunt æqualia, cum sint ex diametro, & LE, vel æquali BC: Quare ablatis istis rectangulis æqualibus rectangulum nigrum, & IL quadratum remanebũt æqualia, quamobrem ex 19. l. 6. latus nigri rectanguli, idest AB erit ad EL, hoc est ad BC; vt BC ad CD, quòd erat probandum.

PROBL. IV. PROPOS. XIX.

Datam lineam sectam ita secare; vt pars intermedia sit vltima proportionalis trium continuè proportionalium.

Sit data linea AB, quæ, vtcumque sit diuisa in C: Oporteatque iterum eam diuidere in D, vt DC pars intermedia sit extrema proportionalis, & ita sit DB ad AD, vt AD ad DC.

Diuidatur BC bifariam in K, & erigatur ex K perpendicularis KL æqualis lineæ AK. Ducaturque AL per extrema A, & L: perque tria puncta C, B, L circulus transeat, & à centro V ducatur parallela ad AB, quæ occurrat AL in H puncto, & ex pũcto H deducatur perpendicularis HD, & erit factum. Nam ita erit BD ad AD, vt AD ad DC.



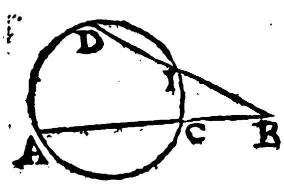
Probatur AK æquatur KL, & HV est parallela ad AK: Ergo, & ipsa æquatur radio VL. Quare HV est etiam radius. Eadem ratione cum DH sit parallela ad KL erit æqualis lineæ AD, & HD ad angulos rectos incidet in HV radium: Vnde erit tangens: quare eius quadratum erit æquale rectangulo DB, & CD ex 36. lib. 3. & consequenter quadratum æqualis AD erit æquale rectangulo eidem CD; & DB; vnde ex 19. lib. 6. DB erit ad AD, vt AD ad DC.

PROBL.

PROBL. V. PROPOS. XX.

Datam lineam ita secare, vt tota sit ad segmentum alterius, vt tota altera est ad segmentum huius.

Sit data AB, in quâ segmentum CD. Volumus autem ita secare BD in I V.g. vt tota DB sit ad CB, vt AB ad IB, idest reciprocè proportionentur totæ, & partes. Vniantur ad verticem B; vt faciant quemcumque angulum. Per tria verò puncta A, C, D agatur circulus ex prop. 11. l. 3. Nam dico IB esse segmentum, quod requiritur, & esse DB ad CB, vt AB ad IB.



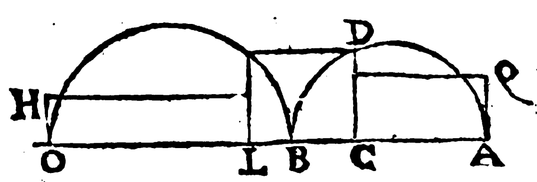
Probatur ex propos. 36. lib 3. elem. Coroll. Nam rectangulum ex AB, & CB est æquale rectangulo ex DB, & IB. Vnde ex propos. 10. lib. 6. ita erit DB ad CB, vt AB ad IB.

PROBL. VI. PROPOS. XXI.

Datas duas rectas ita secare, vt segmenta sint reciproca in proportione.

Sit data AB minor pro libito secta in C, & maior BO secanda sit similiter, vt segmenta V.g. OL, & BL sint proportionalia segmentis AC, & CB reciprocè, nimirum OL sit ad CB, vt AC ad BL.

Inter segmenta data AB & CB inueniatur media proportionalis CD: Factoque super BO maiori, semicirculo reperiatur duo segmēta, quibus CD sit media proportionalis ex propos. huius 16. & sint BL, & LO. Eritque factum, quòd postulatur, & OL erit ad CB, vt AC ad BL.



Probatur rectangulum ex AC, & CB, idest CQ, est æquale rectangulo LH, ex OL, & BL; quòd inter ambo segmenta sit CD eadem media proportionalis; & ideo ex 19. lib. 6. sint æqualia quadrato ex CD facto. Vnde, & erunt æqualia inuicem. Quadere ex 19. lib. 6. erit OL ad CB, idem latus quod AQ, vt AC ad BL, idem latus quam OH, quod erat præstandum.

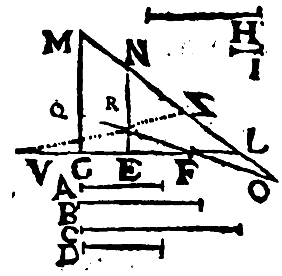
PROBL. VII. PROPOS. XXII.

Auferre à lineis duabus datis partes, quæ inuicem habeant proportionem datam; ita tamen, vt residua correspondeant inuicem in proportione datâ, cùm fieri potest.

Sint datæ duæ lineæ A, & B, à quibus demendæ sint duæ partes in ratione C ad D, ita tamen, vt residua inuicem eam proportionem dicant, quam dicit H ad I.

Fiat FG ad FB, vt C ad D, & ex punctis E, & C erigantur perpendiculares EN, æqualis A, & GM æqualis B, coniungaturque MN, & fiat ex propos. 15. lib. 6 OM ad ON, vt H ad I. Si MO est maior, quam ML linea, in quam FG terminat, producta si fuerit, & FG non pertingat ad L, sed debeat produci, problema fieri potest, secùs, si id non eueniat. Igitur ex O per F ducatur OQ. Dico factum esse, quòd exposcitur, & QG esse ad ER, vt C ad D; residuas verò QM ad NR esse, vt H ad I.

Probatur. Nam QG ablata correspondet proportione ad ER ablatâ, vt FG ad FE, quæ ex effectione est eadem proportio, quæ C ad D. Sic MQ est ad RN, vt OM ad ON, quæ ex effectione est eadem, quæ H ad I. Ergo residuum MQ ad residuum NR est, vt H ad I; quod fieri oportebat.



Aliquando tamen fieri potest, sed reciprocè, vt si ZM inuenta, quæ esset, vt H ad I non pertingeret vltra H in O; sed esset minor, quàm ML, & esset MZ, tunc enim deberet fieri EV ad VG, vt C ad D, & ex Z ad V ducenda esset ZV punctata; quæ secaret in reciproca segmenta. Nam residuum à punctata vsque ad M esset ad MR, vt H ad I; at verò ablata ER ad G vsque ad punctatam, vt C ad D: ita vt fundamentum, & terminus essent in eadem quantitate V. g. EN.

PROBL. VIII. PROPOS. XXIII.

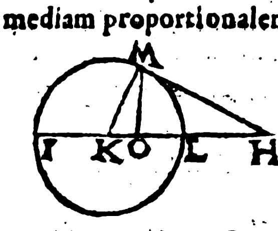
Lineam diuisam extrema, & media ratione proportionali diuidere.

Diuidere extremâ, & mediâ ratione proportionali lineam est eam secare in tria segmenta facta, vt tota ad segmentum primum sit, vt segmentum, aliud secundum ad tertium.

Sit ergo linea data IH secta in L, quæ ita secāda sit in tria segmenta in aliquo puncto V. g. O, vt tota IH sit ad segmentum datum LH, vt alterum segmentum IO est ad OL.

Super segmentum IL fiat circulus, & à puncto H ducatur tangens HM, connectaturque punctum contactus MK, & ob eodem puncto contactus M demittatur perpendicularis MO. Et dico esse factum, id, quod postulatur. Nam tota IH erit ad LH, vt segmentum factum IO est ad OL.

Præassumpt. Obseruandum est lineam OM esse mediam proportionalem inter basis segmenta OH, & OK in triangulo rectangulo KMH ex 8. Eu. Et eandem OM esse mediam proportionalē inter duo diametri segmenta IO, & OL ex prop. 16. lib. 6.



Quare si fieret ex OM quadratū ei esset æquale rectangulum ex HO, & KO ex propos. 19. lib. 6. necnon, & rectangulum ex diametri segmentis IO, & OL ob eandem rationem. Quare hæc rectangula inuicem essent æqualia. Vnde ex prop. 10. lib. 6. habebunt latera reciprocè proportionalia: Ideoq; ea proportione respondebit HO ad OL, vt OL ad OK. Quo posito.

Probatur Propos. & progress. 1. Cum HO, sit ad OI, vt OL ad OK. Vtendo itaque *compositione rationum*, ita erit HO cum OI, idest tota HI, ad OI, vt OL cum OK, idest LK ad OK.

Progress.

Progress. 2. Rursus; si HO est ad OI, vt OL est in proportione ad OK ex praesumpto vtemur *permutatione*, & erit antecedens HO ad OL antecedentem vt OI ad OK terminos. Vtemur deinde *diuisione* rationũ; & erit LH pars ad LO compartẽ, vt KI pars & radius, vel LK item radius ad KO compartem.

Progress. 3. Cum ergo istæ proportiones æquales sint, & similes *ex æquali arguendo* erit HI ad OI, quam primo progr. ostendimus, velut IK, vel LK ad OK: nimirum tota HI ad partem interceptam IO; vt pars extrinsecùs assumpta HL ad alteram partem interceptam OL.

Progress. 4. Cùm ergo IH correspondeat proportione ad IO, vt LH ad OL poterimus denuo vti *permutatione*, & erit IH ad HL antecedentes, vt IO ad OL sequentes, nempe tota IH ad segmentum datum HL, vt segmentũ factum IO est ad OL, quod erat demonstrandum.

EXPENSIO IV.

De proportione linearum Arithmetica.

Licet proportio Arithmetica sit facillima, non licet tamen eam omnino præterire ad tractatus integritatem, ideo breuiter.

PROBL. I. PROPOS. XXIV.

Tres proportionales datis duabus lineis in Arithmeticâ proportione inuenire.

Hoc faciliter fit: Datis enim duabus A, & B inquiratur maius extremũ. Fiat CL æqualis ipsi A, & addatur differentia VI semel, & fit LQ, & erit CQ maius extremum.

Si verò exquiratur minus extremum fiat CL æqualis ipsi AV mediæ, & ei semel differentia LQ detrahatur, & fiet B minus extremum. Si verò inquiratur media datis B, & CQ fiat AI æqualis ipsi B, & differantia OQ, quæ est inter minus, & maius extremum bifariam diuidatur, addaturq; ipsi AI, & fit AV media proportionalis. Patet inuentas esse extrema proportionalia arithmeticè, quia singulæ lineæ altera super alteram excrescunt augmento æquali; quòd est de ratione proportionis arithmeticæ: sic VA excedit B linea VI, & CQ excedit AV linea IQ, & IQ, & VI sunt differentiæ æquales.

EXPENSIO V.

De linearum proportione Musica.

PROBL. I. PROPOS. XXV.

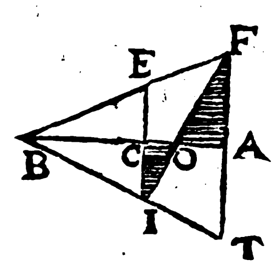
Datis duabus lineis alteram proportionalem Harmonicam, siue mediam, siue extremas inuenire.

Sit primo datum maius extremum AB, & minus CB, cui oporteat mediam proportionalem Harmonicam reperire.

A puncto C excitetur perpendicularis CB, sicut & à puncto A perpendicularis AF; Sitque CE, cuiuscumque magnitudinis. Prolungetur vsq; ad I, quantum est CE, & à E per B ducatur linea recta vsque ad AF, & vbi secat in F ad I recta ducatur, quæ secabit AB in O; quam esse sectam Harmonicè affirmo, & OB esse *mediam proportionalem inter* CB, & BA Harmonicè, idest esse CB ad CA Geometrica in proportione, vt est differentia OC inter primam, & mediam ad differentiam OA inter mediam, & extremam.

Probatur. Nam ob parallelismum linearum AF, & CE in triangulo AFB, ita erit AB ad CB, vt AF ad CE.

Progress. 2. Deinde considerandum quoque est, quod triangula nigra sunt similia, quòd sint rectangula, & habeant angulos ad O ad verticem æquales, vnde, & reliquos: quare erit AO ad AF, vt OC ad CI, vel æqualis CE & *permutando* ita erit AO ad OC, vt AF ad CI, vel CE: Sed AF ad CE erat in primo progress. vt AB ad CB; Ergo etiam differentia AO ad differentiam OC est, vt maius extremũ AB ad minus CB, quare OB erit media proportionalis, cuius differentia à maiori extremo AO, ita refertur ad differentiam suam à minori extremo CB, vt maius extremum ipsum refertur ad minus.



Si verò libeat minus extremum data media OB, & maiori AB reperire excitabis perpendicularem AF à puncto A, cuius longitudinis placeat V.g. AF, æqualemque deduces AT perpendicularem ab A, iungesque TB, & ab F per O duces FI, & à puncto, quo secat in I rectam BA deduces perpendicularem IC, & vbi cadit in C erit extrema minor proportionalis harmonica CB.

Patet. Quia est eadem constructio, ac antecedens solo ordine variata.

Si verò, quis cupiat dato minori extremo CB, & media BO maius extremum. Is excitabit perpendicularem IC, cuius longitudinis libeat, & producet æqualem CE, perque punctum E à puncto B ducet rectam, & rursus ab I per O aliam rectam, quæ se intersecabunt sicubi V.g. in F. Ab F ergo puncto ad OB prolungatum duces perpendicularẽ, quæ cadet in A. Linea itaque AB erit maius extremum. Quod autem conueniant, patet: Maior est enim angulus externus B, quã angulus niger I internus acutus I, quod crus CO crure BC necessariò fit minus in triãgulo OCI, ideoq; IF, & BF non possunt esse parallelæ, quod incidens EI non faciat angulos internum externo æquales.

Probatur verò prop. ex eo, quòd fit alio ordine eadem operatio, quæ priùs in prima parte propositionis, vt patet.

TRAC-

TRACTATVS XVI.

DE PROGRESSIONE PROPORTIONALI.

PARS PRIMA.

De Linearum Progressione Geometrica.

VIdimus progressionem numeris procedentem, & eius singulares affectiones speculati sumus; modo linearum progressionem proportionalem oportet animaduertere in multis à prima diuersam, & præcipuè in eo, quòd in progressione numerali Geometrica vltimus numerus assignari nequit, ad quem progressio perueniat; hìc autem assignari potest vltimus lineę terminus, ad quem licet infinita progressio tendat, illumque consequatur, ita vt inter assignata extrema omnis multitudo innumera proportionalium concludatur, quamuis ad illud extremum successiuè procedendo nunquam sit peruentura, in duas verò partes hunc Tract. secabimus, agendo priùs de Geometrica proportione, deinde de Musica. Arithmeticam prætermittentes, vtpote à numerica non discrepantem.

EXPENSIO I.

De principijs.

ANtequam de progressionibus pertractemus ipsa principia, definitionesque videre oportet.

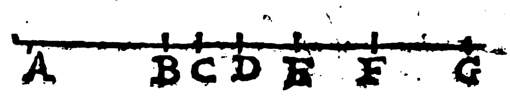
DEFINITIO I.

S*Eries Progressionis est quantitas finita diuisa secundum proportionem Geometricam datam.*

Sit quantitas aliqua finita data AB, quæ diuidatur secundùm proportionem AB ad AC, ita quod AB sit ad AC, vt AC ad AD, & rursùs AC ad AD, vt AD ad AE, & cæt. hæc est series Progressionis Geometricæ.

DEFINITIO II.

G*Eometrica progressio est quæcumque terminorum secundum eandem rationem continuatio.*



Geometrica itaque progressio est illa continuatio diuisionis secundùm eandem datam rationem eiusdem quantitatis, ita vt nullum includat finem secundum se. Iam verò vt de progressione numerica dictum est, alia est discreta, alia continua. Discreta est, quæ non progreditur per easdem rationes: continua verò per eandem datam rationem, aut perpetuò augetur, aut perpetuò diminuitur.

DEFINITIO III.

T*Erminus progressionis est seriei finis, ad quem nulla progressio pertinget, licet in infinitum continuetur. Sed ei perpetuò accedet.*

Itaque progressionis GF ad GE, & GE ad GD, & cæt. est A: quia licet diuisiones perpetuò contingant viciniores puncto A illud tamen punctum consequi non valebunt vt infra ostendetur.

EXPENSIO II.

De progressionum terminis inuicem comparatis, & differentijs.

PRiùs considerabimus progressionem in se comparando terminos terminis; deinde comparabimus progressiones inuicem; tandem accessum terminorum ad finem animaduertemus. Tripliciter autem comparari possunt inuicem termini, vel quoad ipsam proportionem, quam cum alio dicunt, & hoc sufficienter aduertimus in proportionibus; tum numericis, tum quantitatis continuæ: at verò differentiæ terminorum, & eorum aggregata restant hic consideranda.

THEOR.

THEOR. I. PROPOS. I.

Continuè proportionalium differentiæ se eadem proportione respiciunt, quà termini ipsi.

SInt in continua proportione AG, & AF, & AE, & AD, & cæt. *ostendendam differentias quoque in continua correspondentia, & eadem, quà propositi termini reperiri. & GF esse ad FE, vt FE ad ED, &c.*

Probatur Progress. 1. Tota AG est ad AF, vt AF ad AE. Ergo *diuidendo* GF erit ad FA, vt FE ad EA; & *permutando* GF ad FE erit, vt FA ad EA: quæ est eadem, ac proportio AG ad AE in fig. defin. 1.

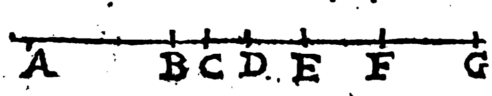
Progress. 2. Repete idem argumentum de sequentibus terminis FA est ad EA, vt EA ad AD. Ergo *diuidendo* FE erit EA, vt ED ad DA. Igitur *permutando* erit FE ad ED, vt EA ad DA; quæ est eadem, quam obtinet GA ad FA.

Itaque ex primo progress. GF differentia est ad FE differentiam, vt GA ad FA: Rursusque ex secũdo progress. FE est ad ED, quæ sunt differentiæ, vt GA ad FA. Ergo eadem proportione fruuntur differentiæ GF, & FE, & ED, qua reperitur inter GF, & FA: Quare sunt continuè proportionales: ideq; dicas de differentijs aliorum terminorum continuò proportionalium.

THEOR. II. PROPOS. II.

Si differentiæ sint continuæ proportionales; etiam alij termini eadem proportione continua gaudebunt, dummodo duo primi gaudeant.

SInt differentiæ continuè proportionales GF, & FE, & ED in eadem figura, addaturque ipsis EA, ita quod terminus AG sit ad AF, vt differentia GF ad differentiam FE. *Dico omnes terminos* AG, & AF, & AE, & AD *esse continuè proportionales.*



Probatur ex primo Progress. Differentia GF est ad FE; vt AG terminus ad AF terminũ: Ergo *permutatim* differentia GF ad terminum AG refertur, vt differentiã FE ad terminum AF. Ergo *diuidendo* GF refertur ad FA, vt refertur FE ad EA. Quare *permutando* rursus GF respicit FE veluti FA respicit EA, quæ est eadem proportio, quæ est GA ad FA, & ex datis FE ad FD. Quare GA, FA, & EA erunt in eadem proportione.

Progress. 2. Sic quoque eodem discursu differentia FE refertur ad differentiam ED, vt FA ex primo progress. respicit EA ideo *permutando* FE in proportione se geret ad FA sicuti ED est ad EA: Quare *diuidendo* FE erit ad EA proportionata, sicut ED ad DA: Quare rursùs *permutando* FE erit ad ED, vt EA ad DA.

Quamobrem cum ex datis termini GA sit ad FA, GF ad FE differentiæ, quæ ex datis est eadem proportio, ac FE ad ED; & rursus FA sit ad AE ex primo progress. vt eadem FE ad eandem ED; & ex secundo progress. EA sit ad DA pariter, vt eadem FE ad eandem ED, patet, quod quatuor termini GA, & FA, & EA, & DA erunt in eadem proportione, & sic dicas de alijs.

THEOR. III. PROPOS. III.

Si plures fuerint quantitates in continuâ proportione, & aggregentur binæ, & binæ, erunt aggregata in continua proportione.

SInt V. g. in preced. fig. quatuor quantitates continuè proportionales GF, & FE, & ED, & DC; & simul sumantur GF, & FE. Deinde FE, & ED, tandem ED, & DC. *Dico hæc aggregata esse quoque continuè proportionalia.*

Probatur Progress. 1. GF est ad FE ex datis, vt FE ad ED. Ergo *componendo* GF, cum FE ad ipsam FE, erit vt FE cum ED ad ED: Igitur *permutando* GF cum FE erit ad FE cum ED, vt FE ad ED.

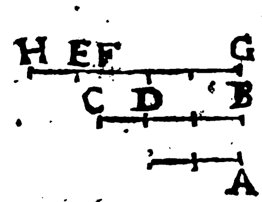
Progress. 2. FE est ad ED veluti ED ad DC. Ergo simili discursu *componendo* FE, cum ED ad ipsam ED erit in proportione, vt est ED cum DC ad DC, & *permutando* FE simul cum ED erit ad ED cum CD, vt ED ad DC. Sed hæc proportio ED ad DC eadem est ex datis, quę est FE ad ED: Ergo sunt in eadem proportione aggregata GF cum FE, ad FE cum ED. & hoc FE cum ED ad ED cum DC, cum habeant eam proportionem, quæ est FE ad ED; quod erat præstandum.

THEOR. IV. PROPOS. IV.

Si sint tres magnitudines, & minor terminus, differentiaque à mediocri, & huius differentiæ, differentia à maiori differentia sint continuè proportionales, ipsi quoque termini erunt continuè proportionales.

SInt tres quantitates A, & BC, & GB, minorq; differentia CD, & hæc conferatur cum differentia maiori HF, & differat quantitate EF; sintq; continuè proportionales EF, & CD, & A. *Dico ipsas quantitates* HG, & CB, & A *futuras esse continuè proportionales.*

Probatur. Ponitur differentia CD respicere minorem terminum A, vt EF differentia differentiæ respicit ipsam differentiam CD. Ergo *componendo* CD cum A, idest CB erit ad A, veluti EF cum CD idest HF, est ad CD: Quãobrem etiam *permutando* CB erit ad HF fundaméta veluti A respicit CD termini. Quapropter rursùs *componendo* medius terminus CB, cum HF maiori differentia hoc est terminus maximus HG, erit ad CB, vt proportionem dicit terminus A cum differentia CD, hoc est CB terminus medius ad ipsum A terminum primum, quod erat probandum.



COROLLARIVM I.

Colligitur propos. conuersa. Nam si quantitates A & BC, & GH fuerint continuè proportionales etiam differentia differentiæ maioris à minori, minor differentia, & primus terminus minor erunt continuè proportionales.

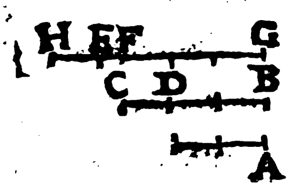
COROLLARIVM II.

Quod si differentia differentiæ EF differentia CB, & terminus primus minimus DA simul addantur, quod erunt continuè proportionales, patet ex prima huius.

THEOR. V. PROPOS. V.

Differentia differentiæ maioris, à minore ipsa differentia maior, & terminus maximus in quantitatibus continuè proportionalibus sunt continuè proportionales.

Sint quantitates, vt in præced. figura continuè proportionales A, BC, & GH, & differentia EF differentiæ maioris HF à minori CM, & terminus maximus HG. *Dico esse continuè proportionales* EF, *&* HF, *&* HG.



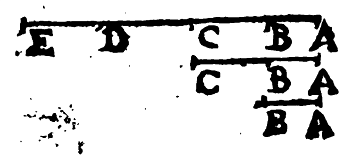
Probatur ex primâ huius, vt differentia HF ad differentiam CD, talis quoque est proportio termini HG ad terminum CB: quare *diuidendo*, vt HF residuum est ad CB ablatum, idest FG æqualem. Sic EF residuum ad differentiam CD, vel æqualem HE; Ergo *componendo*, vt HF cum FG, quæ est maior terminus ad HF maiorem differentiam. Sic erit EF cum HE, quæ est HE maior differentia ad EF differentiam differentiæ.

THEOR. VI. PROP. VI.

Si sint tres quantitates continuè proportionales, & maiori termino bis medius, semel vltimus aggregetur; Mediocri verò semel vltimus, erunt hæc aggregata, cum vltimo termino in continua proportione.

Sint tres quantitates continuè proportionales AB, & BC, & CD. Dico, quod si sumantur omnes simul, & addatur BD æqualis medio termino; deinde sumatur medius terminus semel cum minimo, & sit CA, & tandem minimus, quod omnes *adhuc erunt continuè proportionales, & ita erit* BA *ad* CA, *vt* CA *ad* AE.

Probatur. Quoniam ponuntur continuè proportionales DC, & CB, & BA. Si arguatur à *compositione* rationum erit DC cum CB, ad CB in eadem proportione, ac CB cum BA ad BA. Ergo *permutando* erit DC cum CB linea proportionata ad CB cum BA, veluti est CB ad BA: Rursusque *componendo* erit DC cum CB, & CB cum BA simul, hoc est EA ad CB cum BA hoc est CA, vt CB cum BA, hoc est CA ad BA.



Itaque omnes termini BA, CB, & DC, & insuper iterum medius CB, vel æqualis BD ad medium CB cum primo BA habent eandem proportionem, quã ipse medius CB cum primo BA habet ad ipsum primum BA, quod erat ostendendum.

EXPENSIO III.

De serie linearum proportionalium inuicem comparatarum.

Visis proprietatibus differentiarum, simulque aggregatorum proportionalium terminorum, restat contemplari series linearum ad inuicem comparatas, & maximè earum, quæ ab eodem principio enascuntur: hæc enim cognitio in primis deseruit ad inueniendas areas Parabolarum, & Ellipsium, corporibusque solidis, vt plurimùm dimetiendis.

THEOR. I. PROPOS. VII.

Si sint duæ series linearum proportionalium, & perueniant ad eundem terminum, etiam si sequantur, termini sequentes vnius seriei ad terminos alterius erunt, vt antecedentes, dummodò in eadem remotione à communi termino summantur.

Sint ABC series vna decrescens, FGC crescens, & terminus communis C, & sequantur in sua progressione, & fiant termini in prima serie A, B, C, D, E; at in secunda F, G, C, H, I. *Dico, quod sicut est* B *ad* G, *ita sit* D *ad* H, & sicut est A ad F, sic respondeat in proportione E ad I.

Probatur. Quia B C D ponuntur continuè proportionales erit rectangulum ex B, & D ex propos. 19. lib. 6. elem æquale quadrato ex C facto: sic ponuntur proportionales G C H erit æquale rectangulum ex G, & H quadrato C: Quare erunt æqualia rectangulũ ex B, & D, & rectãgulũ G, & H: habebunt itaque reciprocè latera ex 10. lib. 6. proportionalia, & ita erit B ad G, vt H ad D.

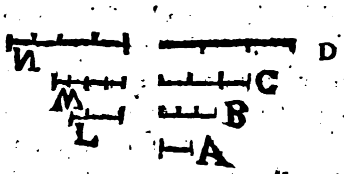
Similiter

Similiter A, B, C, D, E sunt continuè proportionales: Ergo erunt ex *æquo* ACE continuè proportionales: Vnde vt priùs rectangulum ex AE erit æquale quadrato C. Paritérque FCI ex *æquo* erunt continuè proportionales; quapropter rectangulum ex F, & I erit æquale quadrato ex C. Vnde rectangula ipsa inuicem erunt æqualia, vtpote æqualia vni tertio, & hinc etiam latera ex 10. lib. 6. elem. erunt reciprocè proportionalia, & A erit ad F, vt I ad E.

THEOR. II. PROPOS. VIII.

Si sint duo ordines continuè proportionalium incipientes ab eodem termino. Tertij termini primo incluso erunt in duplicata ratione secundorum ad inuicem, & quarti in triplicata, & quinti in quadruplicata, & sic in infinitum.

QVoniam ABC, & ALM sunt continuè proportionales erunt quadrata ex A, & C æqualia quadrato B, & ex A, & M æquale quadrato ex L: sed quadrata ipsa sunt ex 21. lib. 6. Eucl. in duplicata ratione suorum laterum: Ergo etiam rectangula illis quadratis æqualia: Sed rectangula, vtpote eiusdem altitudinis A sunt inuicem, vt bases C, & M, ergo C, & M erunt in duplicata ratione linearum B ad L.

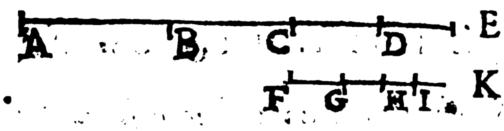


Lineæ verò quartæ erunt in triplicata: Nam quadrata ex C, & M sunt in duplicata ratione suorum laterum, quibus æquatur quadrato quidem C rectangulum ex B, & D, & quadrato ex M rectangulum ex L, N: quare inuicem ea rectangula erunt vt quadrata: sed quadrata ex C, & M obtinent proportionem duplicatam laterum C ad M, quæ latera dicunt proportionem duplicatam respectu B ad L, ergo quadrata prædicta ex C, & N habebunt proportionem quadruplicatam eius, quæ est B ad L. Quamobrem rectangula quoque ex B, & D, & ex L, & N æqualia quadratis consequentur rationem quadruplicatam linearum B ad L; sed proportio rectangulorum est composita ex proportione laterum B ad L, & D ad N. Tolle itaque proportionem B ad L, cui erat quadruplicata, & remanebit proportio linearum D, N triplicata eius, quæ est B ad L; & sic concludes de alijs.

PROBL. III. PROPOS. IX.

Series composita, ex paribus numero terminis ad aliam ex tot terminis conflatam, & in eadem proportione continuatam habet eandem multiplicatam proportionem, quæ ex terminis conflatur.

SInt duæ series quantitatum in eadem proportione, sed pari numero terminorum constantes AE, & FK V. g. quatuor, ita vt sit AB ad BC, & hic ad CD, & hic ad DE, & hic ad FG in eadem proportione. *Dico, quod tota series, seu quantitas AE ad quantitatem FK habet proportionem quadruplicatam vnius termini ad alium puta* AB *ad* BC.

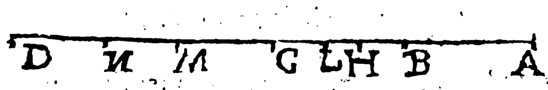


Probatur quilibet terminus obtinet proportionem quadruplicatam ad quemlibet terminum alterius seriei, & AB huius ad FG alterius quadruplicatam proportionem habet eius ex def. 7. Tract. 9. quæ est AB ad BC, quia per quatuor terminos AB, & BC, & CD, & DE vsque ad FG continuatur. Idem dicas de termino BC respectu termini alterius seriei GH, & sic de alijs: Quare omnes antecedentes termini in AE, qui constituunt AE ad omnes consequentes in FK, nempe KF habebunt proportionem quadruplicatam quoque cum vnus antecedentium AB ad alterum consequentium FG talem consequatur proportionem, vt patet ex propos. 17. lib. 5. elem.

PROBL. I. PROP. X.

Duas series similium proportionalium datis tribus terminis continuè proportionalibus exhibere.

SInt disponendæ duæ series continuè proportionalium, & dentur tres termini AB, & AC, & CD: Inueniatur inter AB, & AC, media proportionalis AH, & inter AC, & AH media proportionalis AL, & sic semper fiat, & erit inuenta vna series. Rursus inter AC, & CD media proiciatur AM, & inter AM, & AD media proiciatur AN, & sic semper fiat. Dico, *quod hæ duæ series inuentæ erunt similes, & quilibet terminus erit ad alium terminum similis; ac quilibet terminus eiusdem seriei erit ad alium sibi correspondentem.*



Probatur. Quoniam inter continuas proportionales AB, & AC, & AD medias proiecimus HA, AM erunt omnes in continuâ proportione: Quare ex prima h. etiam differentiæ erunt in continua eadem proportione MC, & MD: HB, & CH.

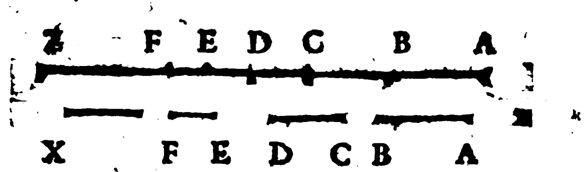
Progress. 2. Et quia inter AH, & AC est media proportionalis AL, erunt AH, & AL, & AC continuè proportionales, sicut, & AM, & AN, & AD, quod NA sit media, tales erunt, & ideo ex 1. huius etiam differentiæ erunt in eadem proportione, & HL erit ad LC, vt AL ad AC; Et pariter MN erit ND, vt AN ad DA, quæ est eadem, quæ AL ad AC, ex Thesi eo quod sint mediæ proportionales AL, & AN inter similes proportiones AH, & AC atque inter AM, & AD: Vnde, & differentiarum proportiones erunt similes, eritque HL ad LC, vt MN ad ND.

Progress. 3. Et quia ex primo progr. est HB ad HC; vt CM ad MD. Erit quoque *componendo* BH cum HC, idest BC ad ipsam HC, vt CM cum MD idest CD ad ipsam DM.

Progress. 4. Sic quia est ex 2. progr. HL ad LC, vt MN ad ND, erit componendo HL cum LC, idest HC ad LC, vt MN cum DN idest MD ad ND: Vnde erit HC ad CH veluti CD ad DM ex 3. progr. & ex 4. progr. CH ad CL, vt MD ad DN, & sic consequenter, si alij termini adsint.

THEOR. IV. PROPOS. XI.

Si ab aliqua data serie desumantur alternè termini, & fiat series, hæc series ad primum terminum duplicatam habet rationem eius, quam habebat data series ad suum primum terminum.



SIt AZ data series, a qua desumantur alternè termini intermedio semper relicto vt AB, CD, & EF, & cæt. & fiat series AX. Dico seriem AX esse ad primum terminum AB in duplicata ratione AZ ad AB.

Prob. AB est ad BC, vt BC ad CD, ergo ex æquo AB erit ad CD in duplicata ratione eius, quæ est AB ad BC, sed, vt AB ad CD, ex 9. prop. h. ita est AX ad CX, cũ illę series AX, & CX ob duplicãdam eandem rationē sint quoq; cõtinuè proportionales, ergo AX ad CX duplicatã habet rationē AB ad BC, sed vt AB ad BC, ita ex propos. 9. huius est AZ series ad BZ seriem; ergo AX series ad CX seriem duplicatam habet rationem seriei ZA ad seriem ZB, ergo p conuersionem rationis erit quoque AX totum ad compartem AB, & primum terminum in duplicata ratione eius, quæ est totius AZ ad compartem AB, & primum terminum.

EXPENSIO IV.

De progressionis termino.

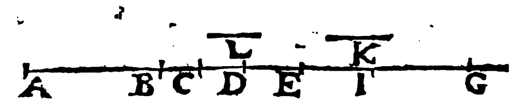
MOdo consideramus progressiones linearum in partibus suis, sed quatenus finitæ sunt, & est vtilissima consideratio maximè ad quadrandas superficies Ellipticas, & Parabolicas, & huiusmodi.

THEOR. I. PROPOS. XII.

Si in aliqua finita quantitate fuerit pars assignata in proportione ad residuum, vt pars residui in proportione eadem ad remanens aliud residuum; hæ partes in quantitate finita in infinitum multiplicari possunt.

SIt data magnitudo AG, & sit in ea pars IG ad residuum suum IA, vt pars huius residui EI est ad suum residuum EA. Dico, *quod in infinitum in quantitate GA istæ partes poterunt multiplicari*: fiat GI ad IE sic IE ad K.

Prob. Pr. 1. Quoniam itaque est IE ad residuum IA, vt IE pars residui ad id, quod hinc restat EA; Erit quoq; *permutando* pars GI ad IE partem, nempe IE ad K ex constructione, veluti residuum IA ad aliud residuum EA. Quare rursus *permutando* erit IE ad AI, vt K ad AE; Verũ IE est minor, quàm IA. Ergo ex propos. 12. lib. 5. elem. etiam K erit minor quam EA. Vnde ex EA poterit sumi æqualis ED: Eruntque GI, & IE, & ED tres continuè proportionales: Sicut ex effectione erant IG, & IE, & K, & pariter erit IE ad IA, vt ED æqualis ipsi K ad EA vt ostensum est.



Progr. 2. Quoniã itaq; est IE ad IA, vt ED ad EA erit quoq; *diuidendo* IE ad EA, veluti ED ad DA. Quare si inueniatur duabus IE, & ED tertia proportionalis L idem argumentum, quod supra iterabis. Nam, quia est pars IE ad residuum EA, vt pars ED ipsius residui ad residuum aliud DA, erit *permutando* IE pars ad ED partem, idest ex effectione ED ad L, vt residuum EA ad aliud DA, & rursus permutando ED ad AE proportione respondebit, vt L ad DA. Verum ED est minor, quàm EA, vt dictum est. Ergo etiam L minor erit, quàm DA: Vnde ex DA poterit abscindi DC æqualis ipsi L, & sic in infinitum continuari.

COROLLARIVM.

QVod si fuerit pars ad residuum, vt huius pars ad secundum residuum, & proportio partis ad partem continuetur; continuabitur etiam proportio partium quarumcumque inuentarum ad sua residua V. g. quòd si ED sit tertia proportionalis tribus GI, IE, & ED, erit etiam IE ad EA in eadem proportione, vt ED ad DA: quia ostensum est in 2. progr. quando argumentati sumus ex *diuisione rationis* IE esse ad EA, vt ED ad DA.

Et idem dicas de parte DC: Nam; quia vt in fine 2. prog. ostensum est ED est ad EA, vt L, vel DC ad DA, ergo *diuidendo* ED erit ad DA, vt DC ad CA, & sic continuè.

COROLLARIVM II.

HInc est; quod si linea, vel magnitudo aliqua proportionali aliquo decrescente crescat augmento, quod illæ partes decrescentes in infinitum poterunt in ea multiplicari. Nam in linea AG. Quia GI est ad IA, vt IE ad EA, erit etiam permutando GI ad IE, vt IA ad EA. Ponitur quoq; IE ad EA, vt ED ad DA ex effectione, ergo permutando erit IE ad ED, vt EA ad DA. Quia ergo est GI ad IE, vt IA ad EA. Et IE ad ED, vt EA ad DA. Ergo erunt GI, & IE, & ED partes continuæ proportionales, vt residui IA, EA; & DA; & ideo ex præc. in infinitum procedent.

THEOR. II. PROP. XIII.

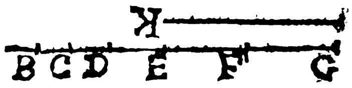
Si proportio maioris inæqualitatis continuetur magnitudo vltra omnem datam magnitudinem augetur.

SIt data proportio CB ad BD, & assignata quantitas K. Dico, quòd si hæc proportio continuetur

nuetur

nuetur; quantitatem illam maiorem quantitate K quantumlibet magnâ euasuram.

Probatur. Differentia DC replicata multoties, certum est, quod tandem superabit quantitatem K. Sed Additiones, quæ ipsi DB accrescunt, ex prosecutione, & continuatione CB ad DB proportionis, sunt maiores singulæ; quàm DC. Ergo continuatæ toties, quoties replicata est quantitas DC superabunt ipsam K.



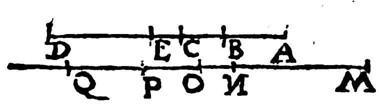
Quod autem differentiæ, seu additiones DC, & ED, & EF, & cæt. sint maiores; quam DC; patet ex prima huius. Nam sunt in eadem proportione, ac termini. Quadere, vt est DB ad BE terminis; sic differentiæ DC ad DE; sed maior est BE, quàm DB, Ergo ex propos. 12. lib. 5. elem. etiam ED, quam DC maior erit.

THEOR. III. PROPOS. XIV.

Si à quantitate aliqua partes auferantur, vt sit prima pars ad suum residuum, vt pars ipsius residui ad residuum suum; fiet tandem residuum datâ quacumque quantitate minus.

Sit quantitas AD V. g. linea, ex quà auferatur quantitas, & pars AB, & à residuo BD pars BC: ita quòd sit AB ad BD, vt BC ad CD. Dico, *quod si hoc continuè fiat, relinqui tandem partem, qua libeat assignata MN minorem.*

Sit quantitas MN data, & reperiatur alia NO, cui sit MN, vt residuum BD est ad totam AD, & continuetur hæc proportio, donec euadat maior in Q, quam AD; hoc enim eueniet aliquando ex præced. Deinde in ratione prædicta partis ad residuum diuidatur toties AD, quoties MQ diuisa est, hoc enim poterit fieri in infinitum ex 12. huius.



Progress. 1. Quoniam MN, & MO, & MP, & MQ sunt continuè proportionales, erit MN ad MO, vt MP ad MQ; sed ex effectione MN est ad MO, vt residuum BD est ad AD. Igitur MP erit ad MQ, vt DB ad AD. Et ideo *inuertendo* QM erit ad MP; vt AD ad DB.

Progr. 2. Rursus *permutando* MQ erit ad AD, vt MP ad DB: sed ex effectioue MQ maior est, quam AD: Ergo etiam MP maior erit, quam BD.

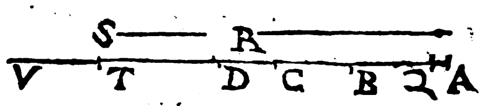
Progress. 3. Deinde quia est AB ad BD, vt BC ad CD erit quoque *componendo* AB cum BD idest AD ad BD; vt BC cum CD, idest BD ad CD; ideoque proportio AD erit ad BD, vt BD ad AD, & etiam erit, vt MQ ad MP eadem, quæ est AD ad BD, vt dixi Progr. 1. & ex effectione MQ ad MP, est veluti MP ad MO: Quare cum sit BD ad CD, vt PM ad MO, erit quoque permutando BD ad PM, vt CD ad MO: Sed maior est MP ex probatis, quàm BD. Ergo maior quoque erit MO, quam CD.

Idem autem ostendes de MN respectu ED: quare erit maior MN data quantitas; quam ED, quod erat ostendendum.

PROBL. III. PROPOS. XV.

Si fuerit proposita talis quantitatum series, vt quilibet ablatus terminus ab aliqua alia sit ad eius reliquum, vt sequens terminus à reliquo ablatus ad id, quod denuò remanet; erit illa alia quantitas æqualis toti seriei infinitæ terminorum propositæ.

Sit series infinita terminorum proposita AB, BC, CD, & cæt. qui auferantur à quantitate AV; & quilibet V. g. AB relinquat residuum BV, ad quod sit AB, vt BC alius terminus ablatus à residuo est ad reliquum suum CV. Dico; *quòd hæc quantitas AV æquat totam seriem.*



Probatur non erit maior tota serie; sed nec minor: Ergo totam seriem æquabit.

Quod non sit minor, patet ex 11. propos. Quia tota series poterit intra ipsam continuari in infinitum; ita quòd numquam perueniatur ad V: Ergo quantitas AV minor non erit serie terminorum infinita.

Quod verò non sit maior ostenditur: nam si esset maior aliquo excessu esset maior. Sit is TV, & continuetur proportio AB ad BC in linea AV, donec sit minor pars residua, quam TV, quod ex propos. præc. fieri potest: cum ergo series infinita superet AT: Ergo AV non superat seriem terminorum omnem quantitate TV; sed minore, cùm iam continuata minus relinquat, quam TV contrà hypothesim; & semper idem argumentum vrgebit: Ergo quantitas AV nulla assignabili quantitate excedet infinitam seriem: sed nec ea minor est: Ergo illam æquat, quod erat ostendendum.

PROBL. I. PROPOS. XVI.

Datâ serie infinitâ terminorum per eandem proportionem procedentium, & primâ differentiâ inuenire magnitudinem, summæ omnium terminorum æqualem.

Sit series infinita AB, & BC, & CD, & cæt. & differentia maioris termini à sequenti BC, sit AZ, & fiat differentia AZ ad primum terminum AB, vt AB ad aliud; & inueniatur AV ex prop. 11. l. 6. elem. Dico *lineam AV toti magnitudini infinitæ terminorum æqualem esse.*

Probatur. Quoniam ex constructione AZ differentia est ad AB primum terminum, vt terminus AB ad quantitatē AV. Etiam *diuidendo* AZ erit ad BZ, est AB ad VB. Ideoque *componendo* AZ cum BZ ad BZ, vt AB cum AV ad BV, hoc est AB erit ad BZ equalem BC, vt AV ad BV.

Rursusque *permutando* AB erit ad AV, vt BZ idem terminus, qui BC ex effectione ad BV. Quare *diuidendo* AB erit ad BV, vt BZ, vel BC ad CV. Quare ex præced. AV æquabit totam seriem datorum terminorum.

CO-

COROLLARIVM I.

Hinc est, quòd, si fuerit AB ad AV, vt BC ad BV; quod AV æquabit totam seriem in finitorum terminorum. Item si fuerit AB ad BC, vt AV ad BV, vel BV ad CV: erit enim *permutando*, vt priùs AB ad AV, vt BC ad BV. Quare, & *diuidendo* AB erit ad BV BC ad CV.

Item si AV, BV, & CV, sint continuè proportionales, quoniam *diuidendo* erit AB ad BV, vt BC ad CV. Quare semper quantitas AV æquabit infinitam terminorum seriem.

COROLLARIVM II.

Hinc quoque educitur, quod cùm sit AB ad BC, vt AV ad BV, & AV contineat omnes antecedentes alicuius seriei, & BV omnes consequentes, licet in infinitum procedentes; quod tota collectio infinitorum antecedentium ad collectionem infinitorum consequentium erit, vt vnum antecedens ad vnum consequens.

COROLLARIVM III.

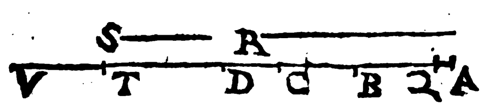
Deducitur quoque differentiam maioris termini à minore, & maiorem terminum, & totam collectionem terminorum esse in continuâ analogiâ: siquidem fecimus, vt AZ differentia ad AB primum terminum; sic AB ad aliud; & inuenimus totam collectionem terminorum infinitorum AV.

PROB. II. PROPOS. XVII.

Datam magnitudinem iuxta proportionem datam, ita diuidere; vt progressio secundum eandem seriem continuata terminetur in punctum destinatum.

Sit data proportio R ad S, & secundùm hanc proportionem sit diuidenda AV, vt progressio terminorum finiat in V.

Diuidatur taliter AV, vt proportio AB ad BV sit ea, quam habet R ad S ex prop. 13. Cor. 6. Elem. deinde iuxta proportionem AV ad BV, sic fiat AB ad BC, & erit factum id, quod desiderabatur.

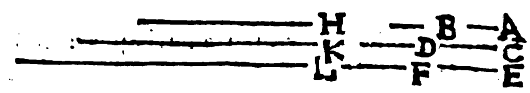


Probatur. Vt AV ad BV; sic est AB ad BC. Ergo etiam ex propos. 22. lib. 5. Reliquum VB erit ad reliquum VC, vt AB ad BC. Vnde ex propos. 16. huius, terminus progressionis est V, hæc autem progressio ex effectione est vt R ad S.

PROBL. III. PROPOS. XVIII.

Datis pluribus rationum progressionibus inuenire quantitatem, quæ omnes adæquet.

Sint datæ tres proportionũ AB, & CD, & FE series, & ex 16. h. inueniantur tres quantitates, quę illas adæquent H, K, L, & hæ quantitates in vnam

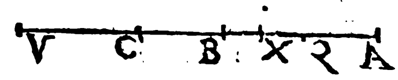


summam redigantur, eritque factum, quòd exoptatur.

Patet. Nam, cùm quælibet quantitas vt H æquet suam seriem V. g. proportionis A ad B, sicut K seriem proportionis C ad D, & tandem L seriem proportionis F ad E; si simul colligantur eas omnes series propositas tota æquabit.

PROBL. IV. PROPOS. XIX.

Datam magnitudinem, ita secare, vt duplicis seriei idem sit terminus.



Sit AV quantitas, & secetur in B; vt AB sit ad BV, vt BC ad CV ex propos. 15. lib. 6. Elem: Rursusque secetur in Z, & fiat, vt AZ ad ZV; ita ZX ad XV, & ex propos. 15 harum duarum proportionum erit idem terminus V. Quod patet ex constructione ipsa.

TRAC.

TRACTATVS XVI.

PARS SECVNDA.

De Linearum Progreßionibus Harmonicis.

ALij antecedentes Tractatus à diuersis Auctoribus selecti sunt, aliqui etiam multa additione cumulati, & omnes aliqua saltem propositione, aut ostensione adaucti: hic Tractatus omnino meus. Licet; vt nostri instituti est plurimis intermissis in compendium redactus.

EXPENSIO I.

De progreßionis Harmonicæ continuatione.

DOcuimus supra datis duabus lineis, vel interserere lineam mediam harmonice proportionalem; sicut, & extremas inuenire: Modo docendum est eas continuare, & in plures terminos propagare, & priùs declarationes dictionum nonnullarum oportet precedere,

DEFINITIO I.

CEntrum harmonicum est punctum, in quo plurimæ lineæ conueniunt musicas in proportiones aliquam lineam; vel aliquas lineas diuidentes.

Sic N in fig. sequenti erit centrum, si lineę NO, & NP diuidant AB in partes proportionales.

DEFINITIO II.

LInea intercepta vocatur, quæ inter centrum, & primæ lineæ harmonicè diuisæ extremum intercipitur.

Sic NB erit intercepta inter AB lineam harmonicè diuisam, & N centrum.

DEFINITIO III.

BAses æquales triangulorum sunt partes æquales cuiusdam lineæ interceptæ parallelæ, quæ radios terminant.

DEFINITIO IV.

RAdij harmonici sunt lineæ quædam, quæ à centro eodem discedentes in bases æquales terminant, & lineam aliquam, vel aliquas harmonicè diuidunt.

Lineæ itaque, quæ bases æquales vocantur sunt vt AO, & OP, & cæt. quæ radios NO, & NP, & cæt. recipiūt. Si ergo lineam aliquam V.g. AB in partes harmonicè proportionales diuidant, illi radij vocabuntur radij harmonici.

PROBL. I. PROPOS. I.

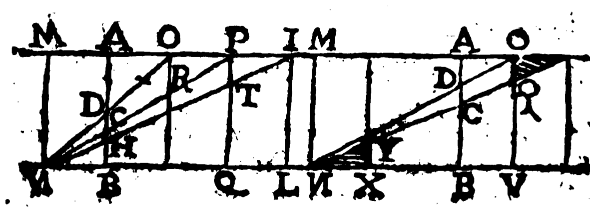
Datam lineam ita secare, vt singulæ partes successiuè proportionem musicam obtineant.

SIt AB diuidenda in partes musicè continuè proportionales ita, quòd sit BC, BD, BA in proportione musicâ sicut etiam sunt BH, & BC, & BD, & sic successiuè. Ducantur duę parallelę per vertises AB, quæ sint MI, & NL, & à puncto A sumpta qualibet parte MA, singulæ fiant æquales in infinitum AO, OP, & PI. Sicut, & NB, iunctisque punctis N, & M à puncto N, ducantur rectæ NO, & NP, & IN in infinitum. Dico, *has partes, quas ductæ in linea* AB *designant eße musica proportione singulæ toti correspondentes*, & BH, & BC, & BD, & BA esse musicè proportionales.

Aduerteq; quod non est necesse, parallelas MI, NL esse perpendiculares ipsi AB; sed ad quemcunque angulum.

* Probatur ea est proportio musica, quàm in proportione Geometricâ, ita est primus terminus ad vltimum, vt differentia ad differentiam. Sed CB est ad BA; vt differentia CD ad differentiam DA. Ergo sunt in proportione musicâ.

Probatur verò assumptum: Ita est CB ad FQ, idest æqualem BA, vt OR ad MN, idest BA ob triangu-



lorum similitudinem MNP, & NPQ: Quare RD, & CB erunt ex propos. 9. lib. 5. æquales: Cùm itaque sit ob parallelismum linearum OR ad DC, vt NO ad DN, & vt NO ad DN, sic MN ad DA; erit etiam OR, idest BC ad DC, vt MN hoc est BA ad DA: Quare permutando erit quoq; terminus BC ad BA totam, vt DC differentia ad DA differentiam.

Idem

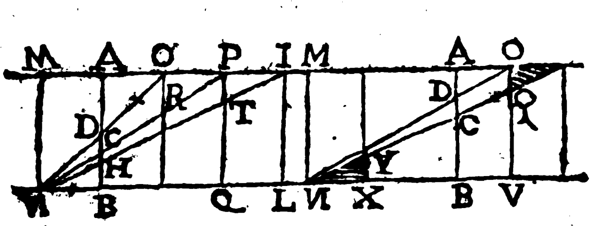
Idem ostendemus de tribus BH, & BC, & BD, quod sit BH ad BD termini extremi, vt CH ad CD differentiæ. Nam BH æquatur ipsi PT ob triangulorum PTI, & NHB in angulis ob parallelas æqualitatem, & æquales bases NB, & PI ex hypothesi: Quare erit, vt CH ad PT, vel BH; sic NC ad NP; sed NC æquatur ipsi RP: Ergo sicut RP ad NP, sic CH ad PT: sed vt RP ad PN sic RO ad MN. Ergo ex 9. lib. 5. RO erit in proportione ad NM, vt CH ad PT, vel æquali BH, idest, quæ CB ad BA, vt supra diximus. Sed OB ad NM, idest CB ad BA habent eam proportionem ex ostensis, quam DC ad DA; hoc est DB ob similitudinem triangulorum DAO, & NDB: Ergo CH ad PT, idest BH, vt supra dixi est, vt DC ad BD: Quare permutando CH erit ad DC differentiæ BH ad BD termini. Quòd si ND non sit æqualis reliquis AO, & OP, sed qualibet, vel irrationalis, probl. tamen ostendetur præsupponendo tamen AO, & OP æquales, vnde ex 4. lib. 6. Coroll. etiam CQ, & QP ob similitudinem triangulorum ex parallelis ortum erunt æquales.

Quoniam ita est DA ad NM, vt AO ad OM, & OD ad ON, & ideo, vt QC ad QN. Fiat NX æqualis OP, & ducatur XY. Erit igitur YX ad QV, vt NY, quæ æquatur ipsi QP, & ideo ipsi CQ est ad NQ. Quod enim NY sit æqualis ipsi QP: patet: Quia ob parallelas triangula NYX, & OQP sunt æqualia in angulis, imo etiam in lateribus ex eo, quia fecimus NX æquale OP: vnde, & cætera crura vnius, alterius cruribus erunt æqualia. Cùm itaque sit YX hoc est OQ ad QV, vt NY, idest QP, & ideo CQ ad NQ, & OQ ad VQ, vt CD ad CB ex propos. 4 Elem. Coroll. Ergo DC erit *ex æquo* ad CB, vt CQ ad NQ, ideoq; ex *æquo* rursùs, vt DA ad MN. Cum ergo sit DC ad CB, vt DA ad MN erit *permutando* DC ad DA, vt CB ad MN, idest æqualem AB, nempe, vt differentia DC ad differentiam DA, sic erit terminus BC extremus ad terminum extremum BA.

PROBL. II. PROPOS. II.

* *Plurimas lineas in infinitum inuenire, quæ proportione Musicâ decrescant, vel accrescant.*

Fiat eadem operatio, quæ priùs, & vtere eadem fig. & dico NM, DA, OB, PT *continua proportione musica decrescere.*



* Probatur. Similitudo enim triangulorum efficit; vt PT æquetur ipsi BH; sunt enim similia triangula NHB, & PTI ob angulos ob parallelismum linearum æquales. Sic OB æquatur ipsi CB. Sic DA ipsi BD; sed BH, & BC, & BD, & BA sunt in proportione musicâ, vt ostendimus. Ergo etiam PT, & OB, & DA, & MN, erunt in proportione musicâ.

Sit deinde data PT, cui plurimas in proportione musicâ respondentes volumus inuenire. Ducatur ad eius extremum P linea MI, & assumpta in ea placita parte PI in reliqua numerantur partes quotquot voluntas erit ei PI æquales, vt PO, OA, & AM; eriganturque MN, AB, OR parallelæ ipsi PT a punctis M, A, O, & ducetur ab I per T extremum datæ recta, quæ illam secet in N, & à puncto N rectæ ad singula puncta ducantur A, O, P; Eruntque segmenta intercepta NM, DA, OB, & PT musicè continuè proportionales; patet ex præcedenti.

THEOR. I. PROP. III.

* *Linea diuisa successiuè; secundum proportionem musicam erit diuisa in partes successiuæ denominationis.*

Sit linea AB diuisa in partes Harmonicè proportionales DB, & CB, & HB. Dico *eam esse diuisam in partes successiuè denominationis* V. g. primo in duas, secundo in tres, tertio in quatuor; ita vt primus terminus sit tota, secundus dimidia, tertius tertia pars, quartus quarta, & cæt.

Aduerte tamen, quòd non intendimus probare quod necessariò ordo incipiat à dimidia, cum possit incipere à qualibet alia denominatione V. g. à quarta, seu quinta parte, seu etiam irrationalis omninò sit; nec possit subire denominationem aliquam series harmonica.

* Probatur autem ita est DA ad MN, vt AO ad OM ob parallelas ex 4. propos. lib. 6. Elem. sed AO est dimidium OM ex effectione. Ergo, & DA erit medietas lineæ AB. Sic CB erit tertia pars lineæ totius AB.

Prob. autem; quia CB est ad PQ, vel AB, vt NB ad NQ; sed NB ex effectione est tertia pars NQ. Ergo etiam CB taliter erit in proportione geometrica respectu totius AB.

Sic ostendetur de HB quod sit tertia pars totius AB, & sic de reliquis. Quod si AM sit irrationalis respectu AO etiam tota composita MO ad AD irrationalis erit ex propos. 10. lib. 10. quare, & omnes MO, MP, & cæt. vtpote ex incommensurabilibus composita magnitudo, vnde DA quoque ad MN incommensurabilis erit, & sic dices de alijs.

COROLLARIVM

Hinc est quod si lineam quamcumque successiuè, primò in tres V. g. secundo in quatuor, tertiò in quinque, quartò in sex diuidas, hæ omnes partes erunt musicè proportionales, eritque tertia pars ad quartam, & hæc ad quintam, & cæt. successiuè in proportione Harmonica proportionalis.

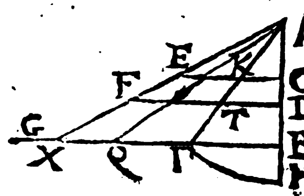
PROBL. III. PROPOS. IV.

* *Datâ lineâ harmonicè secta alias quascumque in infinitum harmonicè similiter secare.*

Sit data recta AB secta in C, & D harmonicè, & oporteat alias similes secare. Ducantur à punctis BCD parallelæ CE, & DF, & BG, mensureturq; super AB prolungatam, si necessarium sit, longitudo lineę diuidędę AH: Facto ergo centro in A interuallo AH portio circuli ducatur HI, & punctum, quo secat BC connectatur cum A centro recta AI. Dico AI sectam esse, vt BA harmonicè [illegible] & [illegible].

* Pro-

* Probatur. Nam ex Propos.4.lib.6. vt est AC ad CB, vt AK ad KI, ergo componendo AC est ad AB, vt AK ad KI, quod memoriâ tenendum.



Rursus AC ad AK; sic est AB ad AI; & AD ad AT. Ergo ex p 22. l.5. erit pars CD residua ad partē KT residuam, & pars DB ad partem TI, vt AB ad AI totum, vel vt DA ad AT alterum totum. Cum ergo sit CD ad KT, vt DB ad TI erit etiam *permutando* CD ad DB, vt KT ad TI: Sed CD est ad DB, vt AC ad AB, ex hypothesi: Ergo etiam KT erit ad TI, vt AC ad AB: sed vt AC ad AB, ita est AK ad AI. Ergo erit AK ad AI, sic differentia KT ad differentiam TI: sed etiam ex propos.13. lib.6. est secta similiter, ac AB, ergo habemus intentum: Sic dices de alijs lineis AQ, & AX, & quibuscumque similibus.

EXPENSIO II.

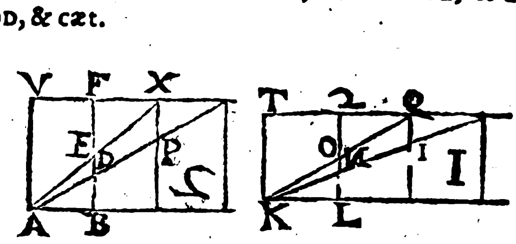
De comparatione vnius seriei harmonicæ ad aliam.

VIsa continuatione seriei musicæ; modo eam alij seriei comparare oportet.

THEOR. I. PROPOS. V.

* *Duæ series Harmonicorum proportionalium basibus suis sibi inuicem æqualibus sitæ, & à linea aliquota incipientes; eandem proportionem inuicem semper seruant.*

SInt duæ series proportionalium Harmonicorum secunda BF, & BE, & BD, & AC. Prima LZ, & LO, & LN, & quarum radij cuiuscumque in bases æquales terminent, & primus sit tota linea FF, vel LZ secundus medietas BE, & LO, & sic de reliquis. Dico eam proportionem, quam habet LZ ad BF primus terminus vnius seriei, cum primo termino alterius perpetuò seruari respectu terminorum sequentium ita, vt alter alteri correspondenti sit in eadem proportione, nempe ita erit, vt tota LZ ad totam BF, sic OL ad BE, & LN ad BD, & cæt.



* Prob.Prog.1. Nam cum QZ sit medietas TZ, & pariter XF sit medietas lineæ XV; ita erit QZ ad QT vt XF ad XV, ideoque ZO ad KT, vt BF ad AV. quare permutando erit OZ; idest OL ad BF, vel ED vt KT ad AV. Deinde Pr.2. vt KO ad KQ, sic est ON ad QI, idest æqualem NL, & vt AE ad AX, sic ED ad XP, idest æqualē CB, sed vt KO ad KQ sic est AE ad AX, ergo, vt ON ad NL, sic est ED ad DB, vel *conuertendo* NL ad ON vt DB ad ED. Quare erit OZ ad KT, vt EF ad AV ex primo progr. & ON ad NL, vt ED ad DB ex secundo, & ideo permutando OZ ad EF, vt KT ad AV, & ON ad ED, vt NL ad DB.

Cum ergo sit quoque ZO ad KT, idest EF ad VA, vt ON ad NL, idest ED ad DB, vt demonstrationis serie dictum est, erit quoque *permutando* ZO ad ON, ideoque EF ad ED, vt KT ad NL, & ideo, vt VA ad DB. Igitur erit permutando, vt KT ad VA, sic NL ad DB.

Quod vt clarius innotescat faciamus, quòd linea FB sit 48 partium, & linea TK, seu ZL 36. nimirum $\frac{3}{4}$ ipsius FB. In prima ergo diminutione ex propos. 3. huius BB erit $\frac{1}{2}$, idest 24. & OL $\frac{1}{2}$ idest 18. At vero 18 ad 24. seruat proportionem, quam habet tota ad totam, quæ est $\frac{3}{4}$. Sic linea DB erit partiū 16. & NL partiū 12. quia quælibet erit $\frac{1}{3}$ totius, at vero 12. ad 16. est eadē proportio 3. ad 4 &c.

PROBL. I. PROPOS. VI.

* *Seriem proportionis Musicæ similiter alteri ordini propagare.*

SIt datus ordo primus, & oporteat alium ordinem in data proportione extendere: Fiat primus terminus AB ordinis propagandi maior, vel minor iuxta placitam longitudinem, & tot numero partes cuiuscumque magnitudinis illæ sint inuicem æquales intermedient inter centrum A, & primū terminū BF in hac secunda serie, quot numero intermediant inter centrum K, & terminum primum ZL in primâ serie, & in præced. propos. schemate, & deinde ordo consequens terminorum propagetur, vt docuimus propos.2. huius, & erit progressus harmonicus 2. similis proposito primo.

Probatur eodem modo, ac præced. propos.

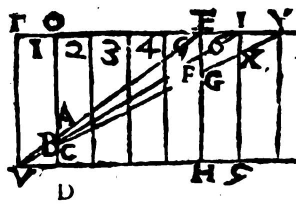
THEOR. II. PROPOS. VII.

* *Omnes proportiones musicæ similes sunt in proportione Geometrica alteri ab vnitate denominatæ, si tamen sint rationales.*

SIt proportionis Musicæ series AD, & BD, & CD tres termini. Dico tres terminos EH, & FH, & GH esse quoq; musicè proportionales, & quamuis alius denominationis; esse tamen geometricè similes præcedentibus.

* Probandum itaque primo tres terminos EH, & FH, & GH esse musicè proportionales, & hoc ostenditur. Quoniam vt est primus EH ad vltimum GH, sic est differentia EF ad differentiam FG. In ea proportione est EF ad TV ex 4. prop. lib 6. vt EI ad IT, & IF ad IV, & XQ ad XV, vel æquales VC ad VX, sed vt VC ad VX; ita est CD ad XZ, sed CD æquatur IX, sunt enim æquales ob similitudinem triangulorum VCD, & XIY æqualium quoque laterum YI, & VD ex hypothesi. Quare erit VC ad VX, vt IX ad XZ: sed vt XI ad XZ, sic ex Coroll. prop. 4 lib.6. est FG ad GH. Ergo FG ad GH, erit, vt VC ad VX: sed vt VC ad VX, sic est VB ad IV, vel æquales FI ad IV, & vt FI ad IV, sic est BI ad IT, & EF ad TV. Ergo ex 16.l.5.el. vt FG ad GH, sic est BF ad TV, idest æqualem EH. Vnde *permutando*, vt est FG ad EF differentiæ sic GH ad EH terminos. Vnde cum sit differentia ad differentiam, vt terminus ad ter-

terminum erunt termini EH, & FH, & GH Harmonicè proportionales.



Probatur quoque. Sint alius denominationis, quam ea prius proposita, quæ denominatur ab vnitate, vt ea in quam diuideretur OD, quæ est tota $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{9}$. Nam FH primus terminus post totam lineam HE est ad totam HB, vel IZ, vt VF ad VI: sed VF ad VI se habet ex hypothesi, vt 5. ad 6. Ergo etiam secundus terminus HG se habebit ad primum, vt 5. ad 6. Sic tertius terminus GH ad totam se habet, vt VG ad VY; sed VG ad VY se habet, vt 5. ad 7. Ergo etiam GH ad totam HE se habebit, vt 5. ad 7. & sic procedendo quartus erit, vt 5. ad 8. vnde series erit tota $\frac{5}{6}$ $\frac{5}{7}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{5}{9}$, &c.

Probatur tãdem, quod sint in eadem proportione Geometrica cum serie, quæ denominatur ab vno. Nam ex Coroll. prop. 4. lib. 6. vt differentia AB ad differentiam BC, sic EF ad FG, differentiæ quoq; alius seriei, & vt CA ad CD, sic EG ad GH. Quare *componendo* AC cum CD idest AD terminus maior ad CD minorem, sic EG cum GH, idest EH terminus maior in alia serie ad GH terminum minorem. Patet etiam, quia $\frac{1}{6}$, & $\frac{5}{6}$ ex Tract. 13. Coroll. prop. 27. se habent, vt 1. ad 5. & sic $\frac{1}{9}$, & $\frac{5}{9}$ habent 1. ad 5. & sic semper eodem modo se habet.

PROBL. II. PROPOS. VIII.

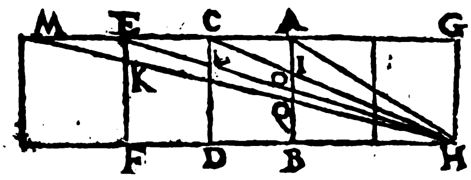
Series Harmonicas proportionalium reperire datæ denominationis in aliqua linea.

Sit Schema præcedens, & velimus reperire proportionem harmonicam in data linea EH, quæ se habeat ad aliam in eadem linea continuatam, vt 1. ad 5. Per extremum E ducatur linea TI, & quinque æquales partes, vt EI numerentur ab E versus T; erigaturque TV æqualis datæ EH. Deinde rursus in alteram partem portiones primis æquales numerentur, quantùm placet, vt BI, & IV, & cæt. ducanturque ab V rectæ, vt VI, & VY, & cæt. nam diuident lineam EH in partes, quæ ad aliam seriem datam, in quam diuisa est OD erunt singuli termini, vt 1. ad 5. Patet ex præced. ostensione.

PROBL. III. PROPOS. IX.

Series harmonicas proportionalium reperire iuxta datam proportionem in pluribus lineis.

Sint reperiendæ plures lineæ, quæ dicant inuicem proportionem harmonicam, & sint ad alias proportionem harmonicam dicentes vt 3. ad 1. fiant lineæ parallelæ AB; CD, & EF, & æquali distent interuallo, & recta coniungantur A, E puncta, & erunt æquales AC, & CE. Sumantur ergo in AG duæ partes æquales ipsi AC, & ducatur parallela GH ipsi AB. Deinde per B recta parallela ipsi GE ducatur, quæ cum GH conueniet in H: Ab H ergo ad C, & E, & cæt. radij ducantur, & ex præc. AB erit diuisa in terminos harmonicos iuxta datam proportionem, ita vt AB tota $\frac{2}{2}$ IB $\frac{2}{3}$ OB $\frac{2}{4}$ QB $\frac{2}{5}$, & se habebunt ad aliam $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$, vt 2. ad 1. modo dico, quod etiam lineæ AI, CL, & EK sunt in eadem proportione ac IB, & OB, & QB. Vnde se habebunt ad seriem $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$ eodem modo ac 3. ad 1, cum, & etiam ipsi sint 2 $\frac{2}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{2}{5}$.



Probatur triangulum HIB est æquiangulum triangulo AIC, ob angulos C, & H inter parallelas alternos, & angulos apud I ad verticem. Quare erit ex 4. lib. sexti AC ad AI, vt HB ad IB, & *permutando* AC ad HB, vt AI ad IB. Rursus HOB triangulum est æquiangulum triangulo CLB ob eandem rationem. Quare similiter arguendo ex 4. l. sexti & *permutando* CA erit ad HB, vt CL ad OB. Rursusque triangulum HQB est æquiangulum triangulo EKM, quare erit eodem modo EM ad HB, vt EK ad QB. Sed tres, vtpote æquales AC, & CE, & EM habent eandem proportionem ad eandem HB. Ergo etiam tres AI, & CL, & EK ad tres IB, & OB, & QB, vtpote eiusdem proportionis trium æqualium ad HB habebunt eandem proportionem. Quare erit IA ad BI, vt CL ad OB, & EK ad QB. Quare permutando AI erit ad CL, vt IB ad BO, & CL ad EK, vt OB ad QB.

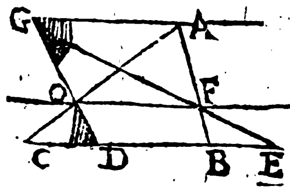
LEMMA I. PROP. X.

Si inter duas parallelas crura duorum triangulorum æqualium basium se intercipiant, linea per eorum intersectiones ducta erit parallela basi, & triangula, quæ fiunt æqualis altitudinis.

Sint duo triangula quæcumque ABC, & GED quorum crura se decussent in F, & O. *Dico, quòd linea FO ducta per F, & O est parallela basi* FC.

Probatur triangulum AFG est æquiangulum triangulo EFB, quod angulus B sit æqualis angulo C nigro, vtpote alterni inter parallelas ex propos. 30. lib. 1. Elem. & anguli quoque apud F sint ad verticem, & ideo æquales: vnde, & reliqui ex Coroll. 2. prop. 17. lib. 1. Elem. Quare AG ad AF, vt EB ad FB, & *permutando* AG ad EB, vt AF ad FB: Sic quoque dicendum de triangulis AOG, & BOC ob angulos alternos nigrum ad D, & seminigerrimum ad G æquales, & angulos ad verticem æquales quoque. Quadere erit, vt AG ad AO, sic DC ad OC. Quare *permutando* erit AG ad DC, vt AO ad OC, sed EB, & DC sunt æquales cum bases triangulorum præsupponantur æquales; Vnde ablata parte BD communi, reliquum EB, & DC est æquale. Quare AG ad EB, & eadem AG ad DC dicet eandem proportionem ex 7. lib. 5. vtpote ad æquales. Quaderè erit etiam eadem proportio AF ad FB, quæ AO ad OC. Quare cùm crura trianguli sint diuisa proportionaliter linea transiens per diuisiones F, & O erit parallela basi BC ex prop. 2. lib. 6. & triangula EFB, & DCC ex propos. 40. lib. 1. Coroll. 2. erunt æqualis altitudinis.

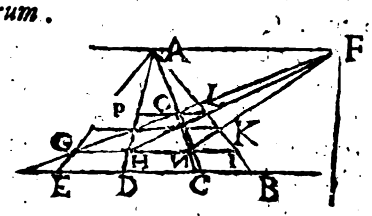
THEOR.



THEOR. III. PROP. XI.

Si plurima triangula æqualia æqualiũ basium in vnum verticem conueniant, & recta aliqua basi non parallela in ea incidat, & secet, parallelæ basibus à sectionibus crurum ductæ omnia crura secabunt harmonicè proportionaliter.

Sint triangula ABC, & ACD & AED, & cæt. quæ in vnum verticem A conueniant, & eorum sint æquales bases: secetque eorum crura aliqua FG. Dico, *quod si ducantur per eorum intersectiones parallelæ basi* BE *istæ in partes harmonicè proportionales diuident omnes lineas sectas, & crura triangulorum.*



Quod vt ostendatur ducatur basi BE parallela FA à verticibus triangulorum; donec occurrat obliquæ secanti GF; occurret enim, cùm incidens FG basibus parallela non sit, & à puncto F, ducatur FH, & FN Quia ergo HN, NI, & HG sũt æquales, q ex Cor. prop. 4. l. 6. el. HG est ad HN, & NI; vt, æquales ex thesi, DE ad DC, & CB. Ex I. propos. AB erit secta harmonicè proportionaliter, & AI, & KA, & AL erunt tres termini harmonici, quo supposito.

Probatur. Parallelæ ductæ ab intersectionibus O, P, G crurum ab FG incidente factis transeunt necessariò per puncta IKL. Ergo eam diuidunt in partes proportionales harmonicè IA, & KA, & LA. Triangula HPO ex præced. & IKN sunt æqualis altitudinis. Ergo parallela à P discedens incidet in punctum K ex prop. 39. Cor. l. I. in verticem trianguli IKN. Sic triangulum NOG æqualis altitudinis est velut ILH: Ergo parallela discedens ab O incidet in punctum L: Quare eodem modo IA diuidetur in partes proportionales, sic à radijs NF, FH, & FG, vt à parallelis LO, & KP, & IH. Cùm ergo IA sit diuisa in partes harmonicè proportionales, etiam omnes CA, DA, & EA ab ijsdem parallelis erunt diuisæ ex propos. 4. huius.

COROLLARIVM.

Hincque patet quomodo possimus diuidere in partes harmonicas plurimas lineas simul, & plures series harmonicorum terminorum efficere.

EXPENSIO III.

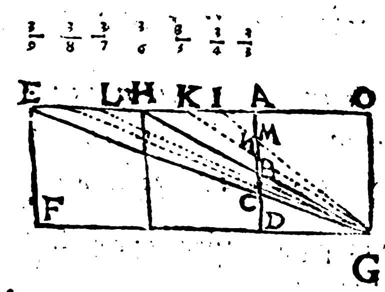
De interpositione Harmonicorum terminorum.

Interpositio terminorum est cum inter duos terminos alij termini interiaciuntur, ita tamen, vt sit adhuc continua series proportionalium eo modo, quo continuatur proportio Harmonica.

PROBL. I. PROPOS. XII.

Terminos continuè proportionales harmonicè inter terminos harmonicos conijcere.

Sint dati tres termini continuè proportionales harmonicè AD, & BD, & CD nempe $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$. & oporteat inter eos alios terminos interponere, qui proportionem continuent. Sint verò termini AD, & BC, & CD inter parallelas AF, & EF, lineisq; à centro G egredientibus GH, & GE determinati, eruntq; æquales AH, & HE. Diuidantur itaq; AH, &



HE secundum terminos, quos volumus interponere. V. g. 3. ita quòd primus terminus sit, vt 3. ad 3. secundus, vt 3. ad 4. tertius, vt 3. ad 5. &c. Deinde ad singulas diuisiones à centro G rectæ ducantur GI, & GH, & GL, & cæt. & erit factum, & sic procedent termini.

$$\frac{3}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{3}{6} \quad \frac{3}{7} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{3}{9}$$

Probatur. Nam ex prælibatis huius in prima propos. AD primus terminus erit ad AD vltimum, vt differentia AM ad differentiam MN, & MD erit ad BD, vt differentia MN ad differentiam NB. Ergo inter AD, & BD duos terminos termini duo interpositi sunt MD, & ND. Et sic dicas de cæteris, quod verò sint datæ denominationis patet ex prop. 8. huius.

EXPENSIO IV.

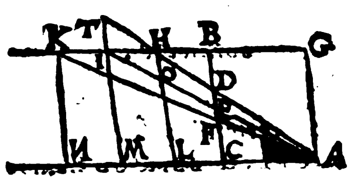
De terminis inuicem comparatis, & differentijs.

Iam ex ipsa definitione proportionis harmonicè notum est duas differentias harmonicas inter tres terminos esse inuicem, vt primus terminus ad tertium, & ideo etiam permutando esse, differentiam maiorem ad maiorem terminum, vt minor differentia ad minorem terminum: reliquas igitur proportiones indagabimus.

THEOR. I. PROP. XIII.

* *Maior terminus est ad summam omnium differentiarum, vt æquales bases cum intercepta ad ipsas æquales bases.*

Sit secta BC in partes proportionales harmonicè in D, E, F. Differentiæ erunt BD, & DE, & EF, & summa earum BF. Dico, quòd ita se habet AG *primus terminus ad totam seriem, & summam differentiarum* BF, *vt* AO *intercepta vel æqualis* GB *cum æqualibus basibus* omnibus simul sumptis BH, & HI, & IK, ad ipsas æquales bases simul sumptas.



Probatur. Nam ex 4. lib. 6. vt BK ad KG, sic est BF summa differentiarum ad AG primum terminum.

THEOR. II. PROPOS. XIV.

* *Minor terminus omnium ita est ad summam omnium differentiarum, vti intercepta ad omnes bases æquales.*

Sit figura, quæ præcedentis propos. Minor terminus omnibus alijs terminis erit FC, & summa differentiarum erit FB. Intercepta AC omnes bases æquales BK. *Dico, quòd* FC *sit ad* BF, *vt* AC *est ad* BK.

* Probatur AFC triangulum est æquiangulum triangulo BFK: quia anguli apud F sunt ad verticem anguli verò ad A, & K alterni. Ideoque ex propos. 11. lib. 6. elem. AC erit ad FC, vt BK ad FB ideo *permutando* AC erit ad BK, vt FC ad FB.

THEOR. III. PROPOS. XV.

* *Termini ad inuicem maior ad minorem sunt in eadem proportione, ac æquales bases cum intercepta ad ipsas æquales bases cum intercepta minus vna æquali basi.*

Sit eadem fig. quæ supra. *Dico* BC *terminum esse ad* DC, *vt* GH *ad* GB, *&* DC *esse ad* EC, *vt* GI *ad* GH, *& è contra inuertendo.*

Probatur. Nam ADC, & DBH sunt æquiangula triangula: Ergo ex 11. lib. 6. AC erit ad DC, vt BH ad BD: Quare *permutando* AC. vel GB ei æqualis erit ad BH, vt DC ad DB, & ideo *componendo* AC, vel GB cū BH erit ad GB, vt DC cum DB ad DC, idest HG addita basis, & intercepta erit ad interceptam BC, vt terminus BC ad terminum DC.

* Probatur quoque de reliquis terminis: nempe de termino DC respectu termini EC. *Dicoque quòd* DC *sit ad* EC, *vt* GI *ad* GH.

Triangulum HIO est æquiangulum triangulo AIC ob parallelas, inter quas est. Quare vt priùs AC erit ad EC, vt HI ad HO; quapropter *permutando* AC, vel GB æqualis erit ad HI, vel æqualem BH, vt EC ad HO: sed eadem AC erat in præced. part. huius prop. ad FBH, & ideo ad æqualem HI ex hyp. vt CD ad BD. Ergo ex 16. l. 5. vt CD ad BD ita EC ad HO, & hinc *permutando* CD ad EC, vt BD ad HO: Sed producta AH in T ob æqualitatem triangulorum HTI, & HBD ipsa TI æquatur ipsi BD: Proportione autem respondet TI, idest BD ad HO, vt TA ad AH, & vt IG ad GH, & consequenter ex 16. l. 5. CD erit ad EC, vt IG intercepta cum additis omnibus ad GH interceptas cum additis vna minus, ita in quam erit terminus CD ad terminum EC.

Est autem IG ad HG, vt TA ad HA, quia ob triangulorum THI, & HGA similitudinem TH est ad HA, vt IH ad HG, ideoque *componendo* TA est ad HA, vt IG ad HG, & ideo, vt TI, vel BD ad OH.

THEOR. IV. PROPOS. XVI.

* *Si intercepta sit irrationalis, etiam termini Musici erunt irrationales, idest nullo numero exprimibiles.*

Sit AC intercepta irrationalis: Dico, *quòd termini erunt irrationales* BC, *&* DC, *&* EC.

* Probatur. Quia AC ponitur irrationalis ipsi BH idest æqualis CL etiam compositum LA erit irrationale ex propos. 10. lib. 10. vtrique parti componenti, nempe ipsi CL, & ipsi AC. Sed vt est AL ad AC, sic BC terminus ad DC terminum: Ergo ex propos. 5. lib. 10. elem. termini ipsi inuicem erunt incommensurabiles BC, & DC.

Idem argumentaberis de terminis DC, & EC. Nam AC ponitur incommensurabilis ipsi GL: Ergo etiam ipsi æquali LM. Quamobrem, & compositū ipsarū AL erit incōmensurabile ipsi LM. Vnde si LM, & AL incōmensurabiles cōponantur AM totū erit incommensurabile ipsi AL; sed vt MA ad AL, seu, vt IG ad GH: sic est ex 15. huius DC ad EC. Ergo, & DC ipsi EC erit incommensurabilis, & sic dicas de reliquis.

THEOR. V. PROPOS. XVII.

Posita intercepta incommmensurabili, reliquæ omnes differentiæ inuicem erunt incommensurabiles.

Ponatur intercepta incommensurabilis. Dico differentiam DB esse incommensurabilem ipsi differentiæ DE.

Probatur DE est ad FB differentia, vt termini DC ad CF: sed termini sunt incommensurabiles, ergo ex 5. lib. 10. & ipsæ differentiæ, quòd verò primus terminus ad tertiū incōmensurabilis. Prob. sit DC est ad EC, vt AN ad AL, & ex prop. 15. huius EC est ad FC, vt AN ad AM: Ergo DC est ad FC ex æquo, vt AN ad AL, Sed NA, & AL ex dictis in præc., si AC sit incommensurabilis, sunt incommensurabiles, Ergo etiam DC, & FC termini.

EXPEN-

EXPENSIO IV.

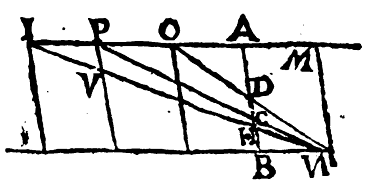
De progressionis Harmonicæ extremo.

SIcut in progressionis Geometricæ continuatione extremum est, ad quod nulla progressio, quantumuis multiplicata, peruenire potest; ita & Harmonicum extremum est, quòd nulla progressio harmonica valet consequi, quod vt demonstratione firmetur sit.

THEOR. I. PROPOS. XVIII.

** Nulla progressio harmonica extremum suum consequi potest, quamuis vt vtlibet multiplicata.*

SInt termini harmonici AB: & DB, & CB, & HB. *Dico, quod etiam si sine meta multiplicentur nunquam poterunt consequi extremum* B.



* Probatur ex propos. 15. huius. Nam terminus penultimus CB erit ad vltimum HB, vt MI ad MP; sed MI ad MP habet minorem proportionem. quàm omnes alij termini præcedentes, & ideo MP ad MI maiorem. Ergo BH ad CB habebit maiorem proportionem omnibus terminis præexistentibus: sed CB est linea: Quare etiam BH linea erit. Quoniam comprehendit plures partes ipsius CB, quàm omnes antecedentes termini cōprehendant terminorum maiorum. Quod autem MP ad MI sit maior proportio, quàm MO ad MP patet. Quia crescit linea MI per continuam additionem vnius. Maior est autem proportio 2. ad 3. quàm 1. ad 2. & 3. ad 4. quam 2. ad 3. & sic successiuè.

* Probatur quoq; alio modo. Nam quaecunq; positâ terminorum multiplicatione semper NHB erit triangulum, & centrum N distabit à puncto B. Ergo etiam H distabit ab eodem puncto B.

Tandem Probatur 3. Refertur BN ad AI, vt HB ad HA, & ideo *permutando*, vt BN ad HB ita est AI ad sūmā differentiarum HA: sed omnes differentiæ HA ad omnes bases AI sunt quid quantum; Ergo etiam BH respectu BN.

THEOR. II. PROPOS. XIX.

** In qualibet data linea absque fine quæcumque progressio Harmonica continuari potest.*

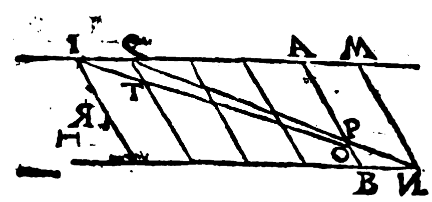
PRobatur in præced. fig. ad partes æquales assumptas in linea basium æqualium MI à centro N, possunt duci infiniti radij; quià partes AO, & OB, & PI possunt multiplicari in infinitum, & à singulis ab N radius duci potest: sed omnis radius in AB designat terminum harmonicum ex dictis propos. 1. huius; nec ex præc. datur terminus harmonicus, cuius longitudo excedat punctum B: Ergo in AB termini harmonici in infinitum multiplicari poterunt absque eo, quòd perueniatur ad punctum B.

THEOR. III. PROPOS. XX.

Assignatâ qualibet in proportionis harmonicæ serie ad minorem perueniri poterit.

PEr additionem partium æqualium fit semper minor proportio totius cum addito ad totum solùm V.g. 3. habet proportionem minorem ad 2. quam 2. ad 1. & 4. ad 3. quàm 3. ad 2. & 5. ad 4. quàm 4. ad 3. & sic continuè.

Assignetur ergo linea R, cui habeat minorem proportionem intercepta NB, quam E. g. 7. ad 3. eritque R ad NB maior proportio, quam 7. ad 3. Ad MA addantur tot partes, vt maior sit proportio MI cum additis ad MN; quam 7. ad 3. & ducatur ad illud extremum radius NI.



Quoniam igitur triangulum MIN est triangulo IQT, & ideo æquali NOB æquiangulum erit MI ad MN, vt NB ad BO: sed MI habet maiorem proportionem ex effectione ad NM, quàm 7. ad 3. Ergo etiam NB habet maiorem proportionem ad BO, quàm 7. ad 3. sed eadem NB habet minorem proportionem ad R, quam 7. ad 3. Ergo R maior erit, quam BO. Vnde lineâ assignatâ R poterit in AB minor linea assignari in proportione harmonica.

THEOR. IV. PROPOS. XXI.

Termini harmonici vltra omnem assignatam quantitatem diminui possunt.

SIt aliqua data R in præcedenti fig. Dico, quod in progressione Harmonica procedendo terminus aliquis minor, quàm R dari potest.

Assignata R habeat aliqua ex ipsis basibus, vt QI minorem proportionem, quam quilibet assignatus numerus 30. ad 3. Addanturque tot bases donec MI ad MN habeat maiorem proportionem, quam 30. ad 3. quo posito.

Probatur Propos. Triangulum QIT est æquiangulum triangulo MIN. Quare erit MI ad MN, vt QI ad QT: Sed MI habet maiorem proportionem ad MN, quàm 30. ad 3. Ergo etiam QI habebit maiorem proportionem ad QT, quàm 30. ad 3. sed QI ad R habet minorem proportionem ex hypothesi, quam 30. ad 3. Ergo R est maior, quàm QT. Est autē QT terminus harmonicus, vt ex prop. 2. h.

THEOR.

THEOR. V. PROPOS. XXII.

Si series infinitorum terminorum musicorum continuetur relinquet tandem aliquam differentiam assignata qualibet quantitate minorem.

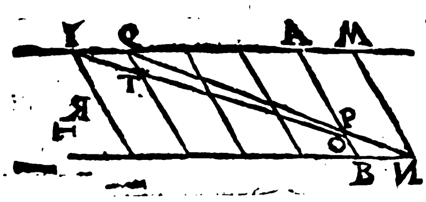
Assignetur quantitas aliqua minima R. *Dico in* AB *differentias musicas adeo posse multiplicari, vt tandem aliqua sit minor, quam* R.

Probatur. Nam termini adeo possunt multiplicari, vt aliquis sit minor, quàm R ex præced. multiplicentur, & sit QT minor, quam R; Ducaturque NQ. Dico differentiam PO esse minorem, quam R. patet. Nam PO est ad QT, vt NP ad NQ, vel MA ad MQ: sed MA minor est, quam MQ ex hypothesi. Ergo PO minor est quam QT. Ergo minor etiam est, quàm R.

THEOR. VI. PROP. XXIII.

Quæcumque infinita differentiarum musicarum series æquat primum terminum.

Probatur. Nam enim minor erit, quia in primo termino infinitæ differentiæ capere possunt ex propos. 18. h. & ideo infinitam differentiarum multitudinem capere. Sed nec erit maior. Si enim est maior sit maior V. g. quantitate OB: Multiplicentur itaque termini adeo, vt aliquis tandem inueniatur ex propos. 20. minor assignata quantitate BO. Ergo series illa in infinitum procedens in quantitate AB relinquit minus residuum, quam BO. Quare BA primus terminus non superat seriem infinitam differentiarum quantitate BO, & sic semper valebit argumentum: ergo series infinita differentiarum musicarum æquat primum terminum.



TRACTATVS XVII.

De Proportionalitatibus Rationum.

LIcet iste Tractatus sit vniuersalis, & omne genus quantitatis complectatur, tum discretæ, tum continuæ; quia tamen numeris faciliùs, & euidentiùs proportionum similitudines explicantur, hinc est, quòd numeris exempla dabimus, non lineis, aut superficiebus, cum tamen propositiones genericè sint intelligendæ, & omni generi quantitatis applicandæ.

EXPENSIO I.

De principijs.

EGimus in præcedentibus de similitudine Rationum, & continentiarum, iuxta quas vna quantitas aliam continet: nunc autem agimus de similitudine ipsarum similitudinum Rationum, & in eo consistit, quòd ipsæ rationes, quibus inuicem duæ quantitates, & duæ in se continendo assimilantur ipsæ quoque inuicem sint similes. Quamobrem proportionalitas requirit ad minus duas proportiones, & ideo quatuor Rationes, nam duæ Rationes vnam proportionem efficiunt, & tandem octo terminos, inter quos quatuor rationes reperiantur.

DEFINITIO I.

P*Roportionalitas est proportionum similitudo.*

Sint duo numeri $\frac{2}{4}$ duobus numeris proportionales $\frac{3}{6}$; sint deinde etiam alij duo $\frac{1}{2}$ duobus alijs $\frac{4}{8}$ proportionales, hæc proportio, quæ inter primos quatuor reperitur si sit similis proportioni, quæ inter hos extremos proportionatur, dicitur *Proportionalitas*.

DEFINITIO II.

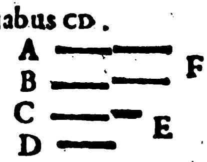
R*Ationum denominatores vocantur quantitates, quæ suis partibus exprimant continentiam vnius quantitatis respectu alterius.*

Sint $\frac{2}{8}$, & $\frac{3}{9}$ Denominatores harum quantitatum sunt primæ 4. secundæ 3. quia indicant quot vicibus vna quantitas in alia contineatur; sic quater 2. continetur in 8. & 3. in 9. ter continetur; Sic si exhiberentur duæ lineæ pertica, & palmus. Linea quædã, quæ demonstret suis partibus continentiam palmi in pertica, dicetur denominator. V. g. semipalmus diuisus in 6. vncias poterit dici denominator, quia indicabit suo sexagenario partium continentiam sex pedum, quas pertica complectitur.

DEFINITIO III.

S*Imilitudo proportionum consistit in similitudine denominatorum.*

Et hoc quidem verum est in quantitatibus rationalibus, & in irrationalibus, nam exprimuntur earum similitudines per mutuam duarum quãtitatum habitudinem. Sic sit $\frac{2}{6}$ $\frac{3}{12}$, poterit exprimi denominator proportionis, quam habet 2. ad 6. & 3. ad 12. esse eam, quæ est inter 3. & 4. nempe ipsos denominatores, qui indicant, quot vicibus capiat 2. in 6. & 3. in 12. Sic si sint duæ irrationales AB similes aliijs duabus CD.



Sintque duæ aliæ lineæ, quæ exprimant V. g. F continentiam B in A, & E, quæ demonstret continentiam D in C, istæ rationum similitudines licet irrationales poterunt exprimi per illos duos Denominatores F, & E, & dicere, quod sicut est F ad E, ita est proportio AB ad proportionem CD.

DEFINITIO IV.

P*Roportiones similes illæ sunt, quæ ijsdem, vel æqualibus denominatoribus gaudent.*

Sint V. g. $\frac{2}{4}$, & $\frac{8}{16}$: istæ proportiones sunt similes, quia ita 4. continet 2. gemina vice, sicut 16. continet 8. gemina vice: quare sunt similes in continendo, cùm contineant, tam vna, quam alia ijsdem vicibus, quarè, & ipsæ continentiæ sunt similes.

PRINCIPIVM.

Q*Vantitas rationis, siue denominator ductus in consequentem producit antecedentem, si sit maioris inæqualitatis, at è contra si sit minoris, nam diuisus consequens per denominatorem, antecedentem, & manifestat.*

Sit

$$\frac{C\,4}{A\,12 \qquad D\,3} \qquad\qquad C\,\frac{1}{4} \quad A\,3 \quad D\,12$$

Sit proportio A 12 ad D 3. quæ exprimatur denominatore 4. C. Si 4. ducatur in 3. producet 12. quia 4. suis vnitatibus indicat vices continentiæ 3. in 12. Sit rursus proportio rationis A 3. ad D 12. denominator $\frac{1}{4}$, quia 4. numerat vices, seu partes ex quibus A 3. sibi assumit vnicam, ideo si 12. diuidatur per 4. denominatorem producetur antecedens 3. Sic si denominator 2. & $\frac{2}{5}$, quam habet 5. ad 12. diuidat 12. producet 5. at si detur ratio 12. ad 5. & 2. $\frac{2}{5}$, denominator multiplicet 5. producet 12.

Aduerte autem; si quando iubemus reperire, vel tertium, vel quartum, vel medium proportionale, id præcipimus iuxta regulas, vel in numeris traditas lib. 7. & 8. Elem. & iuxta Tract. 13. de numeris proportionalibus. In lineis iuxta dicta lib. 6. element. Expens. 4. Si agatur de superficiebus, vel de corporibus iuxta tradenda suis locis, licet enim exempla in numeris exhibeamus, in omni tamen genere quantitatis valet iste Tractatus. Vnde iuxta cuiuscunque quantitatis modum præcepta sunt operi demandanda.

EXPENSIO II.

De Proportionibus ad denominatores collatis, & ad terminos.

PRiùs videndum est, quomodo Denominatores, terminique in proportionibus exprimendis se gerant, vt deinde earum compositioné cognoscere, multitudinemque possimus.

THEOR. I. PROPOS. I.

Proportiones eundem terminum habentes inuicem referuntur, vt denominatores.

* SIt A $\frac{3}{7}$, & B $\frac{4}{7}$. Dico *has proportiones esse inuicem, vt denominatores*, ideoque A $\frac{3}{7}$ esse ad B $\frac{4}{7}$ in proportione, vt denominator C 2 $\frac{1}{3}$ proportionis A ad denominatorem D 1 $\frac{3}{4}$ proportionis B.

$$\text{Denomin. } C\,2\,\frac{1}{3} \quad D\,1\,\frac{3}{4}$$

$$A\,\frac{3}{7} \qquad B\,\frac{4}{7}$$

* Probatur. Nam toties fundamentum A 3. continetur in termino 7. quot vnitates sunt in suo denominatore C 2 $\frac{1}{3}$, nempe gemina vice, & $\frac{1}{3}$: Sed etiam fundamentum 4. continetur in termino 7. quot vnitates sunt in denominatore D 1 $\frac{3}{4}$ proportionis B; Silicet vnica vice, & $\frac{3}{4}$: Ergo denominatores sunt similes in vnitatibus, vt termini, seu consequentes in continentijs fundamentorum, & ita vnitas continetur in Denominatore C 2 $\frac{1}{3}$, vt fundamentum 3. in termino 7. & vnitas inest in denominatore 1 $\frac{3}{4}$, vt fundamentum 4. in termino 7. quare ex defin. 1. lib. 7. elem. ita erit C 2 $\frac{1}{3}$ ad D 1 $\frac{3}{4}$, vt A $\frac{3}{7}$ ad B $\frac{4}{7}$.

Et idem dicas etiam si proportio esset maioris inæqualitatis, vt A $\frac{6}{2}$ B $\frac{8}{2}$; nam terminus 2. multiplicatus per denominatorem C 3. producit antecedentem 6. proportionis A, & idem consequens B 2. per denominatorem proportionis E 4. multiplicatus producit 8. Ergo multiplicatur continentia 2 in 6. toties, quoties vnitas in denominatore 3. continetur, & vt 2. in termino 8. comprehenditur ita vnitas in denominatore 4. ipsius. Ergo ex defin. 1. lib. 7. elem. vt est 3. ad 4. denominatores, ita est proportio A $\frac{6}{2}$ ad proportionem B $\frac{8}{2}$.

THEOR. II. PROP. II.

Duæ rationes habentes commune consequens eam sortiuntur rationem, quæ inter fundamenta reperitur.

SInt rationes A $\frac{3}{7}$, & B $\frac{4}{7}$. *Dico eas eam consequi rationem, quæ inter fundamenta reperitur*; nimirum 3. & 4. Si tamen eodem termino gaudeant, & ita esse Rationem A $\frac{3}{7}$ ad Rationem B $\frac{4}{7}$, vt 3. ad 4.

Probatur. Nam fundamentum A 3. ductum in denominatorem suum 2 $\frac{1}{3}$ producit terminum 7. & rursùs fundamentum B 4. ductum in suum Denominatoré D 2 $\frac{3}{4}$ pducit terminum eundem 7. Ergo ex 17. lib. 7. ita erit A 3. ad B 4. vt Denominator C 2 $\frac{1}{3}$ ad denominatorem D 1 $\frac{3}{4}$. Sed, vt denominator C 2 $\frac{1}{3}$ ad denominatorem $\frac{3}{4}$ sic est Ratio A $\frac{3}{7}$ ad rationem B $\frac{4}{7}$. Ergo Ratio A $\frac{3}{7}$ ad Rationé B $\frac{4}{7}$ est vt 3. fundamentũ ad fundamẽtũ 4.

Et idem erit in proportione minoris inæqualitatis, vt A $\frac{3}{2}$, & B $\frac{4}{2}$, nam erit A ad B, vt 3. ad 4. eadem ratione: & fundatur in propos. 17. lib. 7.

THEOR. III. PROPOS. III.

Proportiones eosdem antecedentes habentes, erunt inuicem, vt termini inuerso ordine, vt secundus terminus ad primum.

$$A\;\frac{2}{B\;3} \qquad A\;\frac{2}{C\;4} \qquad E\,1\,\frac{1}{2} \quad B\;3$$

FIat enim, vt C ad A; nimirum 4. ad 2. ita B 3 ad aliud E, 1 $\frac{1}{2}$; erit ratio AB ad rationem EB, vt A 2. ad E 1 $\frac{1}{2}$ ex anteced. sed eadem est ex effectione EB proportio, ac AC. Ergo proportio AB $\frac{2}{3}$ ad proportionem AC $\frac{2}{4}$ est, vt A ad E, sed ex effectione, vt C est ad A; sic B est ad E. Ergo permutando, vt C 4. terminus secundus est ad B 3. primum; sic A est ad E, & ideo etiam proportio AB $\frac{2}{3}$ ad proportionem AC $\frac{2}{4}$, quæ ostensa est, vt A ad E, erit etiam, vt terminus secundus C 4. ad primum B 3.

PROBL.

PROBL. I. PROPOS. IV.

Datæ sint quotcumque rationes earum denominatores reperire.

Datæ sint proportiones A $\frac{4}{6}$, & B $\frac{2}{4}$, & oporteat reperire harum proportionum denominatores.

Duplici modo id fit. Primo efficiatur, vt 4. ad 2. in proportione B, sic in proportione A 6. ad aliud, quòd sit E 3. quartum proportionale in eadem specie quātitatis. Dico E 3. & B 4. *esse Denominatores* A 4. *quidem proportionis* A, & E 3. *proportionis* B.

$$A\ \frac{4}{6} \qquad B\ \frac{2}{4} \qquad E\ 3$$

Probatur. Nam ex effectione B 4. terminus est ad suum fundamentum 2. vt A 6. terminus est ad aliud 3. Ergo *inuertendo* in proportione B 2. erit ad 4. vt E 3. aliud inuentum ad A 6. Cum ergo sit ratio alius E 3. ad A 6. quæ 2. ad 4. erit etiam ita proportio A $\frac{4}{6}$ ad B $\frac{2}{4}$, vt proportio eadem A $\frac{4}{6}$ ad aliud inuentum E $\frac{3}{6}$, cum ergo 4. & 3. habeant eosdem terminos 6. & 6. erit proportio fundamentorum 4. & 3. eadem, ac Denominatorum ex 1. propos. huius, ideoque 4. & 3. erunt Denominatores proportionum, ita, quòd, vt refertur 4. ad 3. ita continentia A 4. ipsius 6. ad continentiā B 2. ipsius 4. Potest etiā fieri alio modo. Nam datis pro-

$$A\ \frac{4}{6}\ \&\ B\ \frac{2}{4} \qquad A\ \frac{4}{E\ 8}$$

portionibus fiat, vt 2. ad 4. terminum in proportione B, sic 4. ad aliud E 8. in proportione A. Dico, *quòd 6. & 8. erunt Denominatores*.

Probatur. Nam ex effectione in B proportione 2. est ad 4. vt in A proportione 4 est ad 8. Quare ita erit proportio A $\frac{4}{6}$ ad proportionem B $\frac{2}{4}$, vt ad proportionem E $\frac{4}{8}$: sed proportio $\frac{4}{8}$ ad proportionem B $\frac{4}{6}$ est, vt 8. ad 6. ex 3. huius. Ergo proportio A $\frac{4}{6}$ ad rationem B $\frac{2}{4}$ est, vt 8. ad 6. quare 8. & 6. erunt Denominatores 8. quidem rationis A, & 6. rationis B.

COROLLARIVM.

Colligi hinc: Quomodo duæ proportiones diuersorum consequentium, seu antecedentium reducantur ad idem consequens, seu antecedens: nimirum, si fiat, vt in praxibus prædictis. Sic $\frac{4}{6}$, & $\frac{2}{4}$ eædem proportiones sunt, quæ $\frac{4}{6}$, & $\frac{3}{6}$. Sic $\frac{4}{6}$, & $\frac{2}{4}$ sunt eædem, ac $\frac{4}{6}$, & $\frac{4}{8}$, vt in demonstratione ostensum est.

COROLLARIVM II.

Ruitur hinc: Rationes esse inuicem in proportione, vt sunt denominatores. Siquidem proportio A $\frac{4}{6}$ est ad proportionem E $\frac{3}{6}$ ob eundem terminum 6. vt 4. ad 3. Sed proportio E $\frac{3}{6}$ est eadem, ac proportio B $\frac{2}{4}$. Ergo est proportio A $\frac{4}{6}$ ad proportionem B $\frac{2}{4}$, vt Denominator 4. ad denominatorem 3.

PROBL. II. PROP. V.

Data ratione, & duabus quantitatibus, alias duas quantitates reperire, quæ sint in proportione data cum istis exhibitis.

Sit data Ratio AB $\frac{2}{5}$, & quantitates C 3. & D 6. & alias duas quantitates oporteat inuenire, quæ faciant proportionalitatem similem ad datas quantitates collatas, vt est proportio AB $\frac{2}{5}$.

$$\text{Proportio}\ \frac{A\ 2}{B\ 5}\ \text{Data}\ \frac{C\ 3}{D\ 6}$$

$$\frac{G\ 7\frac{1}{2}}{D\ 6} \qquad \frac{E\ 5}{F\ 4}$$

Fiat, vt A ad B rationes, sic C ad aliud G $7\frac{1}{2}$. Deinde fiat, vt D 6. ad inuentum G $7\frac{1}{2}$. Sic quælibet alia quantitas F 4. ad aliud E 5. Dico, *quòd proportio* CD $\frac{3}{6}$ *ad proportionem* EF $\frac{5}{4}$ *est, vt* A 2. *ad* B 5.

Probatur. Quoniam ex effectione, & inuertendo, vt G $7\frac{1}{2}$ est ad D 6. ita est proportio E 5. ad F 4. Et ex 1. huius, proportio CD ad proportionem GD ob eundem terminum D est, vt C ad G: Ideo proportio CD ad proportionem EF, eandem cum GD, erit vt C ad G; sed, vt est A ad B ita effectum est C ad G: Ergo, vt A 2 ad B 5. ita est proportio CD $\frac{3}{6}$ quantitatum datarum ad proportionem EF $\frac{5}{4}$ quantitatum inuentarum.

PROBL. III. PROPOS. VI.

Duas Rationes exhibere, quæ datam habeant rationem.

$$\frac{A\ 3}{B\ 7} \qquad \frac{A\ 3}{C\ 8} \qquad \frac{B\ 7}{C\ 8} \qquad \frac{E\ 6}{F\ 16}$$

Sit data Ratio AB $\frac{3}{7}$, & postulentur duæ similes huic rationi; Componatur A 3. alicui cuicumque quantitati C 8. & sic etiam B 7. eidem copuletur, sintque proportiones AC $\frac{3}{8}$, BC $\frac{7}{8}$, & erit factum, quod postulatur. Nam ex propos. 3. huius, proportio AC ad rationem BC, est vt A ad B.

Quod si nolimus consequentes eosdem esse fiat, vt A ad C, sic quælibet alia E 6. ad quamlibet aliam F 16. & erit, vt constat EF $\frac{6}{16}$ ad BC $\frac{7}{8}$, vt AC proportio eadem ex effectione, ac EF, ad BC; Sed AC ad BC sunt, vt A ad B: Ergo etiam EF ad BC sunt, vt A ad B.

PROBL. IV. PROPOS. VII.

Rationes duas assignare duabus datis proportionales eiusdem denominationis.

Sint duæ datæ Rationes AB $\frac{2}{5}$, & CD $\frac{3}{4}$, & oporteat exhibere duas rationes illis proportionales; quæ eosdem obtineant Denominatores. Fiat, vt D 4. ad C 3. Sic B 5. ad aliud E $3\frac{3}{4}$. Erit

 ratio

ratio BA ad rationem BE, vt E ad A ob idem antecedens B ex 2. huius, & inuertendo aperit ad EB, vt A ad E; & quia est eadem Ratio B ad E ex effectione, quæ D 4. ad C 3. & inuertendo C ad D, quæ E ad B, ideo erit ratio AB ad rationem CD, vt A ad E. Probatur itaque quæuis alia V. g. F 6. Dico Rationem EF, & Rationem AF eosdem denominatores habere.

B 5 B 5

A 2 C 3 E 3¼ A 2

B 5 D 4 F 6 F 6

Probatur. Proportio AF $\frac{2}{6}$ ad proportionem $\frac{1}{4}$ EF est, vt A 2. ad B 3. $\frac{1}{4}$ ex 2. huius: Sed vt A 2. ad E 3 $\frac{1}{4}$, ita ustensa est Ratio AB ad rationem CD. Ergo ratio AF ad Rationem EF est, vt Ratio AB ad Rationem CD. Ideoque, cum Rationes habeant eandem proportionalitatem; obtinebunt quoque eosdem denominatores.

PROBL. V. PROPOS. VIII.

Assignare proportionalitatem similem proportioni datæ, cui quantitates quoque datæ sint antecedentes, vel consequentes.

SIt data Ratio AB $\frac{2}{3}$, & quantitates C 4. & D 5. & voluntas sit reperiendi duas alias proportiones, quibus sint C, D quantitates antecedentes, sed similes, ac proportio A ad B.

A 2 C 4 quantitates L 6 G 12

Propor.

B 3 D 5 datæ L 6 E 10

Sumantur quæuis L, & fiat, vt A ad L; sic C ad aliud G: Deinde fiat, vt B ad L, sic D ad aliud E. Dico *proportionem* CG *ad proportionem* DE *esse, vt* A *ad* B.

Probatur. Nam Ratio AL ad Rationem BL est vt A ad B; sed, vt est A ad L, sic ex effectione est C ad G; Vnde eius loco substitui potest, & vt B ad L, sic est D ad E; Vnde pariter vicaria illius BL hæc DE esse potest: Substitutis ergo istis CG, & DE, erit Ratio CG ad rationem DE, vt A ad B.

At è contrario efficies, si placeat terminos datos C, & D esse consequentes.

L 6 A 2 C 4 G 1$\frac{1}{3}$

L 6 B 3 D 5 E 2$\frac{1}{2}$

Vt L 6. quælibet est ad A 2. sic C 4. ad aliud G; & vt L 6. eadem prius electa ad B 3. sic D 5. ad E 2 $\frac{1}{2}$. Eritque ratio GC ad rationem ED, vt A ad B.

Probatur. Vt Ratio AL est ad Rationem BL, sic est A ad B: Sed vt A ad L, sic est G ad C; quia affectum est L ad A, vt C ad G; ideoque inuertendo erit A ad L, vt G ad C: Quare proportio GC potest substitui loco proportionis AL. Sic dicas de proportione L ad B, quæ ex effectione est, vt D ad E; ideo inuertendo B ad D erit, vt E ad L: ideoque proportio ED poterit poni loco proportionis BL: istis itaque illarum loco positis Ratio GC erit ad Rationem ED, vt A ad B sicut erant prius AL ad BL, vt A ad B.

PROBL. VI. PROPOS. IX.

Data Ratione, & quantitate aliqua cum duobus denominatoribus assignatæ quantitati terminum reperire, vt Ratio data sit ad rationem, cuius, quæsitus est terminus, vt Denominator ad Denominatorem.

SInt Denominatores C 4. & D 3. & proportio data AB $\frac{2}{6}$, & quantitas E 5. cui terminus debeat assignari V. g. F: ita vt proportio BA sit ad proportionem EF vt Denominator 4. ad Denominatorem 3.

A 2 C 4

Propor. Denomin.

B 6 D 3

G 1 $\frac{1}{2}$ F 1 $\frac{1}{4}$

B 6 E 5

Fiat, vt C ad D, sic A ad aliud G 1 $\frac{1}{2}$. Deinde B 6. ad G 1 $\frac{1}{2}$; sic quantitas data E 5. ad aliud F 1 $\frac{1}{4}$ & erit F terminus quæsitus. Dicet *quæ AB Ratio proportionem ad Rationem* FE, *vt Denominator* C *ad Denominatorem* D.

Probatur. Ex effectione: vt E 5. ad F 1 $\frac{1}{4}$, sic B 6 est ad 1 $\frac{1}{2}$, & *inuertendo*, vt F est ad E, sic G ad B. Proportio verò AB ad proportionem GB ob eundem terminum B refertur, vt A ad G, ideoque AB erit ad FE loco rationis GB eiusdem positam, vt A ad G. Sed vt A ad G, ita factum est C ad D: Ergo vt C ad D, ita est Ratio AB ad rationem FE.

A 2 C 4 E 5

G 1$\frac{1}{2}$

B 6 D 3 F 20

Quod si quis cupiat quantitatem datam E 5. esse non consequentem, sed antecedentem: Postquam fecit, vt C ad D, ita A ad G: Deinde è conuerso faciat, vt G est ad B, sic data quantitas E 5. ad aliquam aliam F 20. eritque AB ad rationem FE, vt C ad D.

Probatur. Ex effectione E est ad F, vt G est ad B, sed vt Ratio AB est ad rationem GB, sic est A ad G ex 2. huius, ideoque erit etiam AB ad rationem FE eandem, quæ GB, vt A ad G; sed A ad G ita facta est, vt C ad D: Ergo, vt C ad D, ita erit proportio AB ad proportionem EF, in qua quantitas E data est antecedens.

EXPENSIO III.

De proportionum compositione.

EXplicauimus Tract. 9. in Elementis, quid sit compositio proportionum: modo aliquas insigniores compositionum proprietates, quæ ad arguendum in proportionibus sunt necessariæ, demonstrare oportet.

THEOR.

THEOR. I. PROPOS. X.

Inter magnitudines; si interponatur qualibet magnitudo, proportio primæ ad vltimam dicetur componi ex proportione primæ ad interpositam, & interpositæ ad extremam.

*SInt propositæ duæ magnitudines A 2. & B 12. & interponatur qualibet V.g. 4. C, proportio 2. ad 12. componitur ex proportione A 2. ad C 4. & 4. ad B 12.

Reperiantur denominatores proportionum 2. ad 4. & fit D 2. & C 4. ad B 12. & fit F 3. Dico, quòd, & si 2. multiplicet 3. quantitates denominatoresque propotionum producetur H 6. quæ quantitas erit denominator proportionis 2. ad 12. & ideo, quòd proportio A 2. ad B 12. componetur ex proportione 2. ad 4. & 4. ad 12. Quia quantitates, seu denominatores ipsarum proportionum D 2. & F 3. inuicem multiplicati producunt quantitatem proportionis, quam habet A 2. ad B 12. vt vult definitio 8. Tract. 9. part. 1.

Termini	A	2	C	4	B	12	
Denominatores		D	2	F	3		
Quantitas Proportionis inter AB.		L	*	H	6	Quantitas D in F.	

* Prodatur. Reperiatur Denominator, seu quantitas proportionis A ad B, & fit quantitas L, & ostendam; quòd hęc quantitas L est eadem, quam quantitas H 6. ex multiplicatione denominatorum D 2. & F 3.

Quantitas ergo L est illa ex principio huius 1. quæ multiplicans terminum A 2. producit B 12. alium terminum: sed etiam quantitas H 6. multiplicans terminum 2. producit 12. B; Ergo sunt quantitas L, & H 6. æquales ex prop. 19. lib. 7. Eucl.

Id autem patet: Nam D 2. multiplicans F 3. facit H 6. & idem D 2. multiplicans 2 A facit C 4. interpositam; Ergo ex propos. 19. lib. 7. ita erit F 3. ad A 2. multiplicati, vt H 6. ad C 4. geniti, & permutando ita erit F 3. ad H 6. vt A 2. ad C 4. Quare ex propos. 19. lib. 7. extremæ quantitates 3. & 4. producent eandem quantitatem inuicem ductæ, ac mediæ H 6. & A 2. nempe 12. Quod etiam erit verum; quamuis maior quantitas interponatur V. g. C 16. inter A 2. & B 12. Nam Denominator proportionis 2. ad 16. est D $\frac{1}{8}$, & 16. ad 12. est F $\frac{4}{3}$: Si ergo 8. multiplicet 2. producet interpositam 16. & si multiplicet alterum denominatorem $\frac{4}{3}$ facit 6. Ergo ita erit $\frac{4}{3}$ ad 2. vt 6. ad 16. ideo producent eundem numerum 12.

	A	2	C	16	B	12	
Denominatores	D	8	F	$\frac{4}{3}$			
Quantitas Proportionis inter A, & B.	L	*	H	6	Quantitas ex D in F.		

THEOR. II. PROPOS. XI.

Proportio Rationum componitur ex proportione terminorum antecedentium, & consequentium inuersè sumptorum.

SInt datę Rationes A 3. ad B 4. & C 5. & D 8. Dico *proportionem* AB $\frac{3}{4}$ *ad* CD $\frac{5}{8}$ *componi ex proportione* A 3. *ad* C 5. *& proportione* D 8. *ad* B 4.

$$\frac{A\ 3}{B\ 4} \qquad \frac{C\ 5}{D\ 8} \qquad E\ 2\frac{1}{2}$$

Fiat, vt D ad C, sic B ad aliud E. Erit ex prop. 4. huius AB proportio ad CD proportionem, vt A ad E: Quia est ex lectione B ad E, vt D ad C, & inuertendo E ad B, vt C ad D: Est autem A B ad EB proportionem, vt A ad E; ideoque AB ad CD proportionem, vt A ad E. Sed ratio A ad E componitur ex proportionibus A ad C, & C ad E ex præass. 2. Tract. elementaris; quia sufficit ponere quid intermedium, vt extrema ex ea proportione dicātur composita. Igitur proportio Rationis AB ad rationem CD componitur ex proportione A ad C, & C ad E; quia verò ex constructione est, vt D ad C, sic B ad E, & permutando est, vt D ad B, sic C ad E: Ergo proportio A ad E componitur ex proportionibus, nedùm A ad C, sed etiam D ad B, quæ est eadem, quæ C ad E, quare etiam proportio AB ad CD componitur ex proportione A ad C, & D ad B.

Quod verò AB componatur ex proportionibus A ad C, & C ad E, nempe 3. ad 5. & 5. ad 2 $\frac{1}{2}$ potes etiam videre ex præced.

THEOR. III. PROPOS. XII.

Proportio Rationum componitur ex proportione terminorum alterius, quidem directè alterius autem proportionis inuersè sumptorum.

$$\frac{A\ 1}{B\ 3} \qquad \frac{C\ 2}{D\ 5} \qquad E\ 1\frac{1}{5}$$

SIt A 1 ad B 3. at C 2. ad D 5. *Dico proportionē* AB $\frac{1}{3}$ *esse compositam ex proportione* A 1. *ad* B 3. *&* D 5. *ad* C 2. *inuersè sumptorum* fiat, vt D 5. ad C 2. sic B 3. ad aliud E 1. $\frac{1}{5}$. Erit ex 4. huius, vt in præc. Ratio A ad E, quam habent rationes AB ad CD: Sed ratio A ad B 1 $\frac{1}{5}$ est cōposita ex Ratione A 1. ad B 3. & B 3. ad E 1 $\frac{1}{5}$ ex 10. h: proportio verò B ad E est eadem, quę D ad C: Ergo etiam Ratio AB ad Rationem CD est composita ex ratione A ad B, & B ad E hoc est D ad C, sicut est composita proportio A ad E, quæ est eadem, ac Rationum AB, & CD.

THEOR. IV. PROPOS. XIII.

Duas Rationes similes non inuicem, sed cum alijs duabus compositæ producunt proportionem similem alteri ex duabus Rationibus similibus compositis consurgenti.

*SIt data proportio AD $\frac{6}{3}$ similis proportioni FE $\frac{4}{2}$, & alia proportio CB $\frac{5}{4}$ similis alteri HL $\frac{16}{8}$. Dico, quòd, si inuicem proportiones componantur AD, & CB inter se dissimiles, sed similes alijs duabus FE, & HL, quæ inuicem etiam componantur atq; producant proportiones IK $\frac{30}{12}$, & MN $\frac{40}{16}$. Dico inquam *proportiones esse similes*, esseque I ad K, vt M ad N.

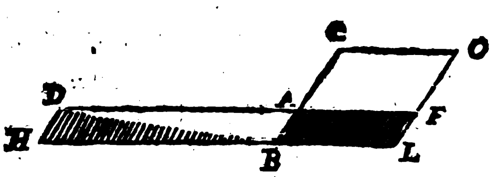
A 6 F 4 C I 30
—— —— Denomin. I 2. 2 K 12
D 3 E 2

C 5 H 16 1 1 M 40
—— —— Denom. 1 —— 1 ——
B 4 L 8 4 4 N 16

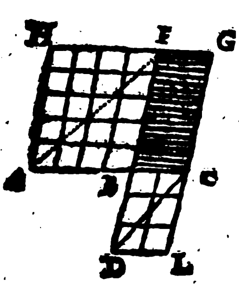
Sint Denominatores proportionis AD 2. & FE pariter 2. eo quod proportiones ponantur similes scilicet ab eodem, vel æquali denominatore denominatas ex defin. 3. huius.

Item denominatores CB, & HL erunt 1 $\frac{1}{4}$, & 1 $\frac{1}{4}$. Si ergo denominatores isti componantur 2. cum 1 $\frac{1}{4}$, & 2. cum 1 $\frac{1}{4}$, quæ compositio fit multiplicando, producent denominatorem æqualem 2 $\frac{2}{4}$ & 2 $\frac{2}{4}$. Sed isti sunt denominatores proportionum compositarum IK, & MN ex def. 8. Tract. 9. Ergo ex defin. 3. huius compositæ proportiones IK, & MN erunt similes.

Et licet hęc propositio sit vniuersalis, etsi numeris explicata, eam tamen, & rectangulis applicabimus ad maiorem explicationem aliquarum prop. Conicarum, cui est necessaria.



* Sit basis AC ad AB in rectangulis AO, & AH sicut in rectangulis BH, & BL basis AB ad CB, & AF ad AD, in primis, vt FB, & BD in alijs. Ergo rectangulum AO super AC erit ad nigrũ AL eiusdem altitudinis super AB, vt rectangulum BH super alteram basim AB ad nigrum BG eiusdem altudinis super BC. Sed nigrum AL est ad eiusdem altitudinis rectangulum seminigrum BD, vt BG nigrum, & eiusdem altitudinis ad BL ex prop. 26. lib. 6. Quia basis priorum AF ad AD ponatur, vt BF ad BD in postremis. Quare ex ęquo in prima fig. rectangulum AO erit ad seminigrum AH, vt AF rectangulum ad rectangulum BL in postremâ.



THEOR. V. PROPOS. XIV.

Si ex duabus proportionibus similibus auferantur duæ proportiones similes, reliquæ proportiones remanent similes.

SInt proportiones IK, & MN, vt in præced. propos. & detrahantur ex ipsis duæ proportiones similes AD, & FE. *Dico residuas esse quoque proportiones similes* CB, *&* HL.

Probatur. nam sint proportionum integrarum IK, & MN denominatores 2 $\frac{2}{4}$, & 2. & $\frac{2}{4}$ erunt enim denominatores æquales, quia proportiones dicuntur similes ex definit. 3. huius. Rursusque sint denominatores ablatarum proportionum 2. & 2. qui etiam erunt æquales ob ablatarum proportionum similitudinem. Auferantur itaque isti denominatores à primis, quæ ablatio proportionalis fit diuidẽdo, cùmq; ab ęqualibus ęqualia demãtur, vel æqualia per æqualia partiãtur, residua remanebunt æqualia 1 $\frac{1}{4}$, & 1 $\frac{1}{4}$, quare etiam proportiones remanentes ex defin. 3. h. erunt similes.

COROLLARIVM

HInc ergo patet modum argumentandi in compositione rationum similium, vel diuisione efficaciter conuincere, quà ex eò, quòd duæ proportiones sint compositæ ex proportionibus similibus arguitur esse similes etiam compositas ex ipsis. Sicque ex eo quòd à proportionibus similibus auferantur proportiones similes, efficaciter deducitur residuas proportiones esse inuicem similes, quos modos arguendi descripsimus ad definit. 27. Tract. 9. Elem. part. 1.

PROBL. I. PROPOS. XV.

Componere proportiones.

DAtæ sint proportiones AB $\frac{2}{4}$, & CD $\frac{3}{5}$, quas oporteat multiplicare.

Fiat, vt C 3. ad D 5. sic B 4. ad aliud E 6 $\frac{2}{3}$. *Dico proportionem* AE *esse compositam ex proportione* AB, *&* CD.

A 2 C 3 E 6 $\frac{2}{3}$
—— ——
B 4 D 5 B 4

Prob. proportio AE est composita ex proportione A ad B, & B ad E: sed proportio BE est eadem, ac proportio CD. Ergo proportio BE componitur ex proportione AB, & CD; quòd verò AE componatur ex proportione A ad B, & B ad E patet ex propos. 12 huius Expens.

PROB. II. PROPOS. XVI.

Ratio quæuis ducta in rationem æqualitatis producit se ipsam.

SIt data ratio æqualitatis AB $\frac{2}{2}$, & alia ratio CD $\frac{3}{5}$. *Dico; si ducatur* AB *in* CD, *quòd ipsam* CD *Rationem producet.*

Fiat

Fiat, vt C 3. ad D 5. sic B 2. ad aliud E $3\frac{1}{3}$ ex antecd. Ratio AE erit composita ex AB Ratione, & CD Ratione.

$\frac{A\ 2}{B\ 2}$ $\frac{C\ 3}{D\ 5}$ E $3\frac{1}{3}$

Sed Ratio AE est eadem, ac ratio BE; quia A, & B sunt æquales, & Ratio BE eadem, ac retio CD ex effectione: Ergo Ratio CD ducta, seu composita ex proportione æqualitatis AB semet generat.

COROLLARIVM.

Hincque educitur; quòd multiplicatio rationum per proportionem æqualitatis nihil addit rationibus; sed relinquit, vt erant.

PROBL. II. PROPOS. XVII.

Datis quatuor Rationibus exhibere proportionem, quam producunt duæ rationes inuicem ductæ ad duas alias Rationes inuicem ductas atque compositas.

Sint quatuor Rationes AB $\frac{2}{3}$, CD $\frac{1}{2}$ EF $\frac{3}{6}$, & GH $\frac{4}{5}$. quarum duæ componantur AB, & CD, aliæ duæ EF, & GH. componantur, & sit inquirendum, quam proportionem producant.

$\frac{A\ 2}{P\ 6}$ $\frac{A\ 2}{B\ 3}$ $\frac{E\ 3}{F\ 6}$ $\frac{E\ 6}{Q\ 15}$

L $2\frac{1}{2}$ $\frac{C\ 1}{D\ 2}$ $\frac{G\ 4}{H\ 5}$ O 3

Fiat vt propos.15. vt C 1. ad D 2. sic B 3. ad aliud P 6. eritque proportio AP $\frac{2}{6}$ composita ex proportionibus AB, & CD ex propos.15. huius. Rursus fiat, vt G 4. ad H 5. sic F 6. ad aliud Q $7\frac{1}{2}$; eritq; proportio E Q 3. $7\frac{1}{2}$, vel $\frac{6}{15}$ composita ex proportione EF, & GH.

Si ergo ex propos.4. denominatores proportionum compositarum reperiantur AP $\frac{2}{6}$, & EQ $\frac{6}{15}$ qui erunt huius O 6. & illius L 5. Et erit proportio O 6. ad L 5., seu, vt explicemus alijs terminis 3. ad $2\frac{1}{2}$ illa, quę est inter compositas proportiones AP ex Rationibus AB, & CD, & aliam EQ ex Rationibus EF, & GH confectam.

Prob. ex eadem propos.4. nam ibi probatur ita esse proportio ad proportionem, vt denominator denominatorem.

THEOR. VII. PROP. XVIII.

Si quatuor quantitates dentur; proportio primæ, & secundæ ducta in proportionem secundæ, ad quartam eandem producit rationem, quã proportio primæ, & tertiæ ducta in Rationem tertiæ ad quartam.

Sint quantitates A 2. B 3. C 5. D 4. Dico, quod Ratio AB $\frac{2}{3}$ in BD $\frac{3}{4}$ ducta producit eandem Rationem, ac AC $\frac{2}{5}$ in Rationem CD $\frac{5}{4}$ ductam.

Probatur. Ratio AD $\frac{2}{4}$ componitur, seu producitur ex proportionibus AB, & BD. Eademque Ratio AD $\frac{2}{4}$ componitur, seu producitur ex proportione AC, & CD ex 10. huius. Ergo Ratio AB ducta in Rationem BD eandem producit Rationem AD, ac AC retio ducta in CD rationem.

THEOR. VII. PROP. XIX.

Ratio ducta in seipsam conuersis terminis producit rationem æqualitatis.

Sit ratio AB $\frac{2}{4}$, quæ ducatur in se, sed conuersis terminis BA $\frac{4}{2}$. Dico, quòd *producit antecedens, & consequens æquales*. Assumatur quantitas C 2. æqualis ipsi A 2. & ordine positis terminis A 2. B 4. C 2. Ratio AB componitur ex proportione A ad B, & B ad C: sed ratio BC est eadem, ac ratio BA; Ergo AC producitur quoque ex multiplicatione rationum AB, & BA conuersis terminis, sed ratio AC $\frac{2}{2}$ est ratio æqualitatis. Ergo ratio AB ducta in rationem BA producit rationem æqualitatis.

EXPENSIO IV.

De proportionum similitudine commutatis terminis.

Vt possimus in proportionibus argumentari aliqua de earum similitudine priùs consideranda sunt, in quã vis argumentorum fundatur.

THEOR. I. PROPOS. XX.

Si sint datæ rationes, & termini inuersi sumantur; inuersæ quoque Rationes eandem proportionem habebunt, quam priùs habebant.

Sint duæ rationes AB $\frac{2}{4}$, & CD $\frac{3}{5}$ inuertantur termini DC $\frac{5}{3}$, & BA $\frac{4}{2}$. Dico, quod ita erit AB ad CD, vt DC inuersis terminis ad BA ipsas proportiones inuertendo.

Fiat ex 4. huius, vt D ad C, ita B ad E $2\frac{2}{5}$, & erit, vt A ad B; ita Ratio AB ad Rationem CD.

$\frac{A\ 2}{B\ 4}$ $\frac{C\ 3}{D\ 5}$ E $2\frac{2}{5}$

Prob. Proportio BE ad BA ob idem fundamentũ B est, vt A ad E ex 3. h. Sed ratio B ad E eadẽ est, ac Ratio D ad C ex constructione. Ergo Ratio DC ad BA est, vt A ad E; sed vt A ad E, ita est AB ad CD ex dictis prop.4. Ergo vt AB ad CD, ita est DC ad BA.

THEOR. II. PROPOS. XXI.

Proportiones duæ adsint, quarum termini permutatè sumantur, dicent quoque eandem proportionem.

Sit AB $\frac{2}{3}$, & CD $\frac{4}{5}$, & termini permutatè sumantur AC $\frac{2}{4}$, & BD $\frac{3}{5}$. Dico, quod Ratio

AB ad

ad rationem CD est, vt AC ad BD proportionem.

$A\,\frac{2}{B\,3}$ $C\,\frac{4}{D\,5}$ $A\,\frac{2}{C\,4}$ & $B\,\frac{3}{D\,5}$ $\frac{F\,2\frac{2}{5}}{E\,2\frac{2}{5}}$.

Fiat ex 4. huius, vt D ad C, sic B ad aliud E $2\frac{2}{5}$ Eritq; vt AB ad CD rationem ita A ad E.

Fiatque Rursus ex rationibus quarum permutati termini, vt D ad B; sic C ad aliud F.

Probatur itaque. Quia est, vt D ad C, sic B ad E ex effectione. Erit permutando D ad B, vt C ad E: Sed, vt D ad B, ita facta est ratio C ad F. Et ideo cũ C ad F sit idem cum ratione D ad B ex 16. l. 5. erit C ad E eadem ratio, ac C ad F: quare ex nona quinti E, & F erunt quantitates æquales.

Cum ergo sit AB ad CD rationem ex effectione, vt A ad E, & inuersis terminis ratio AC ad BD rationem, vt A ad F, & AE, & AF sint eędem rationes etiam AB ad CD, & AC ad BD eandem habebunt similitudinem.

THEOR. III. PROPOS. XXII.

Si sint datæ duæ Rationes, quarum inuertantur, & permutentur termini erunt adhuc in eadem ratione.

Sint AB $\frac{2}{3}$, & CD $\frac{4}{5}$, & inuersè permutatèque sumantur termini DB $\frac{5}{3}$, & CA $\frac{4}{2}$. Dico quod AB est ad CD, vt DB ad CA.

$A\,\frac{2}{B\,3}$ $C\,\frac{4}{D\,5}$ $D\,\frac{5}{B\,3}$ $C\,\frac{4}{A\,2}$

Proportio AB est ad CD ex 20. vt Ratio DC ad BA sed ex præced. vt DC ad BA, sic est DB ad CA. Ergo ratio AB ad rationem CD est, vt ratio DB ad rationem CA.

EXPENSIO V.

De proportionum Dialectica.

Sicut quatuor terminis argumentamur in Tract. elementarijs; sic etiam octo terminis possumus argumentari. Scilicet cũ pro terminis ponuntur non quantitates ipsæ, sed quantitatum Rationes, quæ dicantur similes alijs duabus rationibus, ex quarum similitudine deducatur arguendo similitudo inter easdem rationes; sed alio modo combinatas, vnde 7. modi argumentandi, quos ex Euclide enumerauimus Tract. 9. etiam proportionibus conuenire hic ostendemus.

THEOR. I. PROPOS. XXIII.

Sit Ratio fundamentum ad rationem terminum sit, vt alia ratio fundamentum ad aliam rationem terminum; Erit quoque permutãdo Ratio fundamentum ad aliam rationem fundamentum, veluti ratio terminus ad aliam rationem terminum.

Sit Ratio A $\frac{2}{4}$ ad rationem B $\frac{2}{6}$ terminum, vt alia ratio C $\frac{5}{10}$ ad aliam rationem D $\frac{3}{9}$. Dico *quod permutatione* vti poterimus, eritque A $\frac{2}{4}$ fundamentum ad rationem C $\frac{5}{10}$ fundamentum, vt B $\frac{2}{6}$ terminus ad D $\frac{3}{9}$ terminum.

E 2 F 5

$A\,\frac{2}{4}$ ad $B\,\frac{2}{6}$ vt $C\,\frac{5}{10}$ ad $D\,\frac{3}{9}$ Ergo $A\,\frac{2}{4}$ ad $C\,\frac{5}{10}$. vt $B\,\frac{2}{6}$ ad $D\,\frac{3}{9}$

H $1\frac{1}{3}$. L $3\frac{1}{3}$.

Reperiãtur ex propos. 4. huius Denominatores proportionum E 2. rationis A $\frac{2}{4}$, & F 5. rationis C $\frac{5}{10}$. Sic H $1\frac{1}{3}$ rationis B, & tandem L $3\frac{1}{3}$ rationis D. Eritque ex Coroll. propos. 4. huius A ratio ad B Rationem, vt denominator E ad denominatorem H.

Sed ex hypothesi, vt est ratio A ad rationem B sic est ratio C ad D rationem, & C ratio est ad D rationem, vt Denominator F est ad denominatorem L, quare ex *æquo*. Ita erit denominator E ad H denominatorem, vt denominator F ad denominatorem L, quare, & permutando erit E ad F, vt H ad L denominatores, vnde ex Coroll. propos. 4. erit etiam ratio A ad rationem C, vt ratio B ad D.

THEOR. III. PROPOS. XXIV.

Si sit ratio fundamentum ad rationem terminum, vt alia ratio fundamentum ad aliam rationem terminum: erit etiam inuertendo ratio terminus ad rationem fundamentum, vt alia ratio terminus ad aliam rationem fundamentum.

Sint rationes eædem, quæ superiores,

E 2 F 5

$A\,\frac{2}{4}$ vt $C\,\frac{5}{10}$ ad $B\,\frac{1}{3}$ ad $D\,\frac{4}{12}$ Ergo $B\,\frac{1}{3}$ ad $A\,\frac{2}{4}$ vt $D\,\frac{4}{12}$ ad $C\,\frac{5}{10}$

H $1\frac{1}{3}$ L $3\frac{1}{3}$

Dico, quod si Ratio A sit ad Rationem B, vt ratio C ad rationem D erit etiam inuertendo ratio B ad rationem A, vt ratio D ad rationem C.

Probatur. Nam denominator E rationis A est ad H denomicatorem B, vt ipsa ratio A ad B ex Cor. 2. Propos. 4. & ratio A est ad rationem B, vt C est D rationes, & ratio C ad D, est, vt denominator F rationis C ad denominatorem L rationis D. Ergo ex æquo denominator E rationum A ad H denominatorem rationis B erit, vt denominator F rationis C ad denominatorem L Rationis D. Quare, & inuertendo H erit ad E denominatores, vt L ad F. Quare ex Coroll. propos. 4. etiam ratio B erit ad A, vt D ad C inuertendo.

THOR.

THEOR. II. PROPOS. XXV.

Sit ratio pars ad rationem compartem alicuius totius rationis, vt alia ratio pars ad aliam rationem compartem alterius totius rationis: erit etiam componendo totum ad suam partem, vt alterum totum ad aliam suam partem.

INuentis enim denominatoribus cuiuscumque proportionis.

E 3 F 6

A $\frac{3}{4}$ C $\frac{6}{8}$ AB $\frac{3}{12}$ CD $\frac{60}{120}$

Ergo ad ad vt

B $\frac{5}{15}$ D $\frac{10}{15}$ A $\frac{3}{4}$ C $\frac{6}{8}$

H 2 $\frac{2}{3}$ L 5 $\frac{1}{3}$

Vel etiam

A $\frac{3}{4}$ C $\frac{6}{8}$ AB $\frac{3}{12}$ CD $\frac{60}{120}$

Ergo ad vt

B $\frac{5}{15}$ D $\frac{10}{15}$ B $\frac{3}{5}$ D $\frac{10}{15}$

Sint E 3 rationis A, & H $\frac{2}{3}$ rationis B; sic F 6 rationis C, & L 5 $\frac{1}{3}$ rationis D denominatores. Erit itaque ex inductione præcedentium propos. duarum E ad H, vt F ad L ob rationum suppositam similitudinem A ad B, vt C ad D.

Sed E, cum H, denominatores, est ad H, vt F cum L, denominatores, est ad L *componendo*. Ergo etiam ratio AB simul, vt totum ad A partem erit, vt ratio CD simul, vt totum ad rationem C partem, quòd est componendo arguere.

Potest autem etiam referri compositum AB ad compartẽ B, vt compositum CD ad compartem D.

THEOR. IV. PROPOS. XXVI.

Si sit ratio totum ad partem suam, vt aliud totum ad partem quoque suam: Erit etiam diuidendo pars ad suam compartem, vt alia pars ad aliam compartem suam.

SIt eadem dispositio proportionum, quę prius, & ratio composita AB sit ad rationem simplicem A, vt ratio composita CD ad rationem simplicem C. Dico, *quòd ratio simplex, & pars* A *erit ad suam compartem simplicem* B *diuidendo, vt simplex ratio* C *est ad suam compartem rationem simplicem* D.

EH 1 FL 2 E 3 F 6

AB $\frac{6}{12}$ CD $\frac{60}{120}$ A $\frac{3}{4}$ C $\frac{6}{8}$ vt

Ergo ad ad

A $\frac{3}{4}$ C $\frac{6}{8}$ B $\frac{2}{3}$ D $\frac{10}{15}$

E 3 F 6

H 2 $\frac{2}{3}$ L 5 $\frac{1}{3}$

Constituãtur singularum proportionum denominatores E, H, F, L. Quoniam Ratio AB ad A est, vt ratio CD ad C: erit etiam denominator EH ad E prioris combinationis rationum, vt denominator FL ad F posterioris rationum combinationis ex Coroll. 2. propos. 4. huius. Quare diuidendo, quia EH est ad E, vt FL est ad F erit etiam E ad H, vt F ad L suos denominatores partiales. Quare etiam ex Coroll 2. prop. 4. huius ratio A erit ad rationem B, vt ratio C est ad rationem D.

THEOR. VI. PROPOS. XXVII.

Si sit ratio composita ad rationem simplicem suam partem, vt alia ratio composita est ad aliam rationem suam partem simplicem: Erit etiam ratio prior composita ad suam alteram compartem rationem simplicem, vt secunda ratio composita ad suam alteram portionem simplicem.

SIt quoque eadem dispositio rationum, vt in præcedenti.

EH 1 FL 2 EH 1 FL 2

AB $\frac{6}{12}$ CD $\frac{60}{120}$ AB $\frac{6}{12}$ CD $\frac{60}{120}$

Ergo

A $\frac{3}{4}$ C $\frac{6}{8}$ B $\frac{2}{3}$ D $\frac{10}{15}$

E 3 F 6 H 2 $\frac{2}{3}$ L 5 $\frac{1}{3}$

Et sint inuenti rationum denominatores compositarum EH compositæ rationis AB, & FL rationis CD. Sicque denominatores rationum simplicium F, & H, nec non, & F, & L.

Igitur ex Cor. 2. p. 4. quia est AB ad A, vt CD ad C: Erit etiam denominator EH ad E, vt FL ad F, cum eorum rationes sint eædem, ac rationum proportiones. Quia itaque est EH ad E, vt FL ad F erit quoque *conuertendo* EH ad H, vt FL ad L: quare etiam proportiones similes suis denominatoribus ex Coroll. propos. 4. simili correspondentia conuenient, & AB, erit ad B, vt CD erit ad D.

THEOR. VI. PROPOS. XXVIII.

Si sit ratio ad rationem, vt altera ratio ad aliam rationem, & ista altera sit ad tertiā rationem, vt hæc alia ad tertiam quoque rationem aliam, erunt etiam ex æquo prima ratio ad tertiam, vt alia ratio prima ad aliam tertiam.

A $\frac{1}{3}$ C $\frac{4}{9}$ E $\frac{4}{8}$ A $\frac{1}{3}$ E $\frac{4}{8}$

Ergo

B $\frac{2}{6}$ D $\frac{8}{12}$ F $\frac{2}{4}$ B $\frac{2}{6}$ ad F $\frac{2}{4}$

Sint datæ Rationes, & prima in priori serie A sit ad C, vt in posteriori B est D; At in priori C sit ad E, vt in posteriori D est ad F. Dico, *quòd ex æquo erit quoque ratio A ad rationem E, vt ratio B ad rationem F.*

Probatur Progreß. 1. Ratio A est ad C, vt B ad D, ergo permutando A erit ad B, vt C ad D.

Progreß. 2. Rursus, vt respicit ratio C rationem E respicit quoque similiter ratio D rationem F: Quare permutando C erit ad D, vt E ad F.

Sed iam ostensum est C referri ad D progreß. 1. vt A ad B. Ergo etiam A referretur ad B, vt E ad F. Quare rursus permutando A proportione correspondebit ipsi E, vt B correspondet ipsi F, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM

Hinc est, quòd etiam si proportio sit perturbata idem eueniet: vt vides in expositis rationibus.

A $\frac{1}{3}$ C $\frac{6}{9}$ E $\frac{3}{4\frac{1}{2}}$

B $\frac{4}{12}$ D $\frac{2}{6}$ F $\frac{8}{12}$

Ergo, vt

A $\frac{1}{3}$ ad E $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{2}$

B $\frac{4}{12}$ ad F $\frac{8}{12}$

EXPENSIO VI.

De proportionum Algorithmo.

Hic agimus de multiplicatione, diuisione, subductione, additioneque proportionum ostendendo omnes istas varietates operationum, quæ conueniunt numeris, etiam proportionibus suo modo conuenire.

THEOR. I. PROP. XXIX.

Partium simul sumptarum ratio est ad quantitatem datam eadem, ac compositum ex ipsis ad eandem quantitatem datam.

A $\frac{2}{D\ 4}$ B $\frac{1}{D\ 4}$ AB $\frac{3}{D\ 4}$

Sit data quantitas A, & B, & simul comparentur ad D. *Dico, quod si comparetur AB composita ex ipsis ad D, eadem omnino proportia est.*

Probatur Ratio A ad D, & B ad D est illa ipsa quantitatis A ad B ex 8. huius. Ergo componendo erit Ratio AD vnà cum ratione BD ad BD, vt ratio A vnà cum ratione B refertur ad B, hoc est, vt AB 3. ad B 1. Quamobrem proportio AD cum BD ad BD erit, vt AB 3. compositum ad D quantitatem datam.

PROBL. I. PROPOS. XXX.

Datæ rationis duplam assignare, aut dimidiatam, aut aliam in alia ratione.

Sit data ratio AB, cuius duplum, aut dimidium postuletur. Fiat quantitas aliqua C dupla quātitatis A. Dico rationem C ad B esse duplam proportionis A ad B, & rationem BC esse dimidiam eius, quam habet B ad A.

A 3 C [illegible]
B 4

Probatur. Ratio CB ad AB est eadem, quam habet C ad A ex propos. 2. huius; sed C ad A ex effectione habet proportionem duplam, ergo ratio AC ad AB habebit proportionem duplam.

Ratio quoque B ad C, & B ad A est, vt A ad C, sed A ad C habet proportionem dimidiatam. Ergo etiam BC ad BA habebit proportionem dimidiatam.

THEOR. II. PROPOS. XXXI.

Datas proportiones diuersorum antecedentium, vel consequentium ad eadem antecedentia, seu consequentia habentem proportionem reducere.

Docuimus id Coroll. 2. propos. 4. sed in quātitatibus rationalibus multiplicabimus simul terminum vnius, cum fundamento alterius, & huius terminum cum fundamento prioris, & deinde termini inuicem V. g. data proportione $\frac{3}{5}$ & $\frac{4}{7}$, quæ reducenda sit ad eundem terminum multiplicabimus 4. per 5. & generabitur 20. deinde 3. per 7. & generabitur 21. & tandem termini 5. & 7. & producetur 35. Proportio itaque $\frac{3}{5}$ erit ea, quæ habebit eundem terminum 35. ac proportio $\frac{4}{7}$.

$$\frac{3}{5} \times \frac{4}{7} \quad \frac{20}{35} \quad \frac{21}{35}$$

Probatur

Probatur: Quia cum 5. multiplicauit 4. & 7. erit ex propos. 19. septimi 4. ad 7. vt genitus, 20. ad 35. Rursus. Quia 7. multiplicauit 5. & 3. erit eadem proportio 3. ad 5. quæ 21. ad 35. Ergo erunt $\frac{20}{35}$ eadem proportio, quæ $\frac{4}{7}$, & $\frac{21}{35}$, quæ $\frac{3}{5}$.

Si vero quis cupiat antecedentes multiplicet, vt priùs terminos, cum fundamentis alternatim, deinde fundamenta inuicem, & producet $\frac{12}{20}$, & $\frac{12}{21}$, quæ rationes habent idem antecedens 12.

Patet eadem ratione. Nam quia 4. multiplicauit 5. & 3. erit eadem proportio generantium 5. & 3. quę genitorum 12. & 20. ex 19. septimi. Sic, quia 3. multiplicauit 4. & 7. erit eadem proportio generantium 4. ad 7. ac genitorum 12. ad 21. ergo erit eadem ratio $\frac{3}{5}$, ac $\frac{12}{20}$, & eadem quoque $\frac{4}{7}$, & $\frac{12}{21}$.

PROBL. III. PROPOS. XXXII.

Datis quibuslibet rationibus eas in vnicam summam aggregare.

SInt rationes AB, & CD vnà aggregandæ. Reperiantur denominatores faciendo, vt D ad C, ita correspondeat proportione B ad aliud F. Deinde assumatur aliqua quantitas H illis A, & F denominatoribus simul sumptis æqualis. Dico HB *esse summam proportionum* AB, & CD.

A 3 C 4 F 3 $\frac{1}{5}$ H 6 $\frac{1}{5}$ I 3 M 1 $\frac{1}{2}$ N 7 $\frac{7}{10}$
B 4 D 5 B 4 L 8 B 4

Ratio AB, & FB est eadem, ac ratio AB, & CD. quia CD, & FB eadem ratio est ex Coroll. 2. prop. 4. huius: sed ratio HB est æqualis illis duabus ex 30. prop. Ergo proportio AB, & CD in vnam summam redacta est.

Quod si placeat, & alias aggregare ipsi HB, idem fiat; sit V. g. IL $\frac{3}{8}$, & debeat aggregari proportioni HB; Fiat, vt 8. ad 3. sic 4. ad aliud M, assumaturque quantitas æqualis quantitati H, & M s. N, & erit proportio NB ex omnibus illis aggregata; nempe ex AB, CD, & IL, vt patet: quia NB ob eadem prædictam rationem est aggregatum proportionum HB, & IL. Proportio verò HB est aggregatum proportionum AB, & CD. Ergo NB erit aggregatum proportionum earundem AB, & CD, & insuper rationis IL.

Si verò agatur de numeris ipsis, vel quantitatibus, quæ proportionum præbent fundamenta. Addenda simul sunt antecedentia; simulque consequentia, & numerus ex additione collectus erit summa exoptata. V. g. sint 2 $\frac{2}{5}$, idest $\frac{12}{5}$, & 3 $\frac{1}{4}$, vel $\frac{13}{4}$ in vnam summam colligendi. Colligantur simul fundamenta proportionum 12. & 13. in minimas partes redacta, & fundamentum fiet 25. deinde termini 5. & 4. & fient 9. erit ergo summa collecta $\frac{25}{9}$, vel 2 $\frac{7}{9}$. Patet, quia cum additi sint simul, & antecedentia, & consequentia, etiam simul additas earum proportiones hoc in sensu necesse est fateri. Patet quoque, quia si auferatur à proportione $\frac{25}{9}$ proportio $\frac{12}{5}$ restituitur proportio $\frac{13}{4}$.

Aduerte tamen, quod Denominatores non sunt simul addendi V. g. 2 $\frac{2}{5}$ cum 3 $\frac{1}{4}$; sed ipsa proportionum antecedentia 12. & 13. neque hic modus addendi est propriè addere proportiones: sed proportionum terminos.

PROBL. IV. PROPOS. XXXIII.

Datam proportionem minorem à maiore detrahere.

SIt data proportio minor AB, quam oporteat subducere à proportione maiore CD.

E 4 $\frac{1}{2}$ F 1 $\frac{1}{2}$
A 2 C 6
B 4 D 9 D 9 D 9

Fiat, vt B ad A, sic D ad aliud E. Subducaturque quantitas E 4 $\frac{1}{2}$, vel detrahatur à quantitate C 6. & remanebit F, 1 $\frac{1}{2}$, & F, 1 $\frac{1}{2}$ ad D 9. habet proportionem residuam, & quod proportio FD sit residua proportionis AB à proportionis CD subductione.

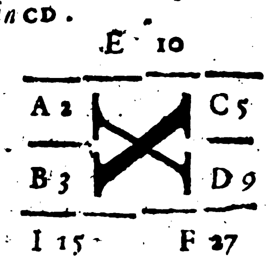
Probatur. Nam ex 29. huius rationes ED, & FD rationi quantitatũ E, & F simul sumptarũ ęquantur, idest ipsi C ad D: sed proportio ED est eadem, ac AB, ergo proportio AB, & FD æquantur ipsi CD. Quare proportio FD erit residuum subducta proportione AB à proportione CD. Quantitates autem tenùs non autem quoad proportiones subductio fit detrahendo fundamenta à fundamentis, & terminos à terminis proportionum. Sic si velimus à proportione $\frac{25}{9}$ deducere proportionem $\frac{12}{5}$ subducemus 12. à 25. antecedentia, & 5. à 9. termini ambo, & residuum erit proportio $\frac{13}{4}$. Patet, quia si simul vt priùs addantur, restituitur proportio $\frac{25}{9}$, cuius denominator est 2 $\frac{7}{9}$.

PROBL. V. PROPOS. XXXIV.

Datam rationem per aliam multiplicare.

MVltiplicare idem est, ac componere; ideoque eodem modo, ac propos. 15. hoc prob. operi demandabimus, quod si placeat efficere, vel multiplicando, ita faciendum erit.

Sit data proportio AB $\frac{2}{3}$, & alia CD $\frac{5}{9}$, quas oporteat multiplicare. Assumatur toties quantitas 2. quot partes sunt in 5. nempe quinque duenarios, idest 10. F, & toties quantitas 3. quot partes sunt in 9. eritque quantitas composita F 27. Dico, *quòd proportio* 10. *ad* 27. *est proportio genita ex multiplicatione* AB *in* CD.



Probatur. Nam assumatur toties quantitas 3. quot vnitates sunt in 5. & fient I 15. ordineque ponantur quantitates E 10. I 15 F 27. proportio E ad F componetur ex proportione E 10. ad I 15. & I 15. ad F 27. ex propos. 10. huius.

Sed ex propos. 17. lib. 7. quia 5. multiplicat 2. & 3. & facit 10. & 15. eadem proportio erit inter genitas quantitates 10. & 15. quæ inter generantes 2. & 3. Sic quia 3. multiplicauit 5. & 9. & fecit

15.& 27. eadem proportio erit genitorum 15.& 27. quæ generantium 5.& 9. Cùm ergo 10. & 15. sit eadem proportio, quæ 2. ad 3. & 15. ad 27. quæ 5. ad 9. Proportio 10. ad 27. dicetur quoque composita ex proportionibus 2. ad 3. & 5. ad 9.

Iste verò modus erit optimus pro numeris, & quantitatibus rationalibus; præscriptus autem propos. 15. huius prorsus est vniuersalis.

PROBL. VI. PROPOS. XXXV.

Datis rationum Denominatoribus ipsas rationes multiplicare.

SInt datæ rationes AB $\frac{2}{4}$, & CD $\frac{3}{9}$, & dentur denominatores ipsarum AB denominator GH, & CD denominatur EF, qui simul multiplicentur ex propos. 15. huius; Et producetur denominator alius, qui proportionem compositam denominabit N $\frac{2}{12}$.

E 1 $\frac{1}{3}$ 2
— N —
F 4 12

A 2 C 3 Denom. G 2 Vel 2 $\frac{2}{3}$
— N —
B 4 D 9 H 4 16

Probatur ex defin. 8. Tract. 9. Elem. Nam rationum quantitates, idest denominatores inter se multiplicati efficiunt rationem compositam. Vnde N $\frac{3}{18}$ erit proportio composita ex AB, & CD.

Et hic modus, tum quantitatibus rationalibus, tum irrationalibus conuenit.

PROBL. VII. PROPOS. XXXVII.

Datam rationum proportionem per alteram proportionum rationem multiplicare.

SInt datæ duæ rationes AB $\frac{2}{3}$, & CD $\frac{3}{5}$, sic, & aliæ duæ EF $\frac{2}{4}$, & GH $\frac{5}{6}$. Reperiantur earum denominatores; & quidem rationis AB sit P 2. rationis verò DC sit Q 1 $\frac{2}{3}$. Deinde rationis EF sit M 2. & rationis GH sit N 3 $\frac{2}{6}$.

A 2 E 2
10 P 2 — — M 2 — 12
B 3 F 4

15 14

C 3 G 5
9 Q 1 $\frac{4}{5}$ — — N 3 $\frac{2}{6}$ 20
D 5 H 6

Probatur. Ratio P ad Q denominatores est, vt rationis AB ad rationem CD; item proportio denominatorum M ad N est eadem, ac rationum EF ad GH. Quare si methodo præc. vel 15. h. rationes denominatorum inuicem multiplicentur, & Q, 1 $\frac{4}{5}$ ad P 2. vel redacta ad easdem partes 9. ad 10. & ratio M 3 $\frac{2}{6}$ ad rationem N 2. vel 20. ad 12. multiplicentur simul, & fiant 9. ad 6. Ratio 9. ad 6. erit ea, quæ ex ratione denominatorum, & ideo ipsarum rationum consurgit, vel alio modo erit proportio 180. ad 120. vt docuimus prop. 34. huius.

PROBL. VIII. PROPOS. XXXVIII.

Datam rationem in duas ipsam componentes rationes partiri, quæ inter se datam obtineant rationem.

SIt data proportio A 6. ad B 27. & oporteat hanc proportionem in duas diuidere, quę inuicem datam obtineant rationem E 2. ad F 4.

A 6 E 2 A 6 B 27 A 6 C 9
Rat. Prop. data — — C 9 —
B 27 F 4 D 3 D 3 C 9 B 27

Fiat itaque, vt refertur F ad E, quòd sic referatur A ad aliud D. Deinde inter D, B media proportionalis statuatur C. Dico factum esse, quòd proponebatur, & rationem AB esse diuisam in rationes AC, & CB, quæ inter se rationem obtinent, quæ est inter E, & F.

Probatur. Quoniam B est ad C, vt C ad D per constructionem, erit etiam inuertendo D ad C, vt C ad B: sed vt A ad D, sic ex 3. huius est ratio AC ad rationem DC ob eundem terminum C, & ratio DC, est eadem, ac CB: Vnde ratio AC ad rationem CB est A ad D hoc est ex constructione, vt E ad F.

Proportio autem AB componitur ex proportione AC, & CB interposito termino C ex 10. huius. Ergo Ratio AC, & ratio CB sunt duæ rationes, quæ se habent, vt E ad F, quæ componunt proportionem AB.

PROBL. IX. PROPOS. XXXIX.

Datam rationem diuidere.

SIt ratio AB $\frac{4}{7}$ diuidenda per rationem CD $\frac{3}{5}$ fiat, vt D ad C, ita B 7. ad aliud, & prodibit E 4 $\frac{1}{7}$, itaque ratio AB $\frac{4}{7}$ subductâ ratione CD $\frac{3}{5}$ remanet ratio E 4 ad 4 $\frac{1}{5}$, idest 20. ad 21.

Probatur. Nam toties AB continet rationem CD, quoties A continet E, quia A, & E sunt denominatores Rationum: & sicuti diuiso numero quotiens demonstrat vices, quibus diuisor continetur in diuisore; sic, & hìc denominatores A, & E ostendunt quoties ratio CD continebatur in ratione AB nempe, vt 20. in 21.

Si verò agatur de numeris, vel de quantitatibus rationalibus; fundamenta Rationum cum terminis alternatim multiplicentur.

V. g. Sit proportio AB $\frac{3}{5}$ auferenda à proportione CD $\frac{4}{7}$ multiplicetur fundamentum huius 3. cum termino alterius 7. & producetur 21. Deinde fundamentum 4. alterius cum termino huius 5. & fient 20. eritque proportio $\frac{20}{21}$, illa, quæ erit quotiens, & demonstrabit, quomodo proportio $\frac{3}{5}$ contineatur in proportione $\frac{4}{7}$.

Probatur. Nam fundamenta 3. & 4. quoque multiplicentur simul; producent 12. Itaque quia 3. multiplicauit modo 4. & priùs 7, erit eadem proportio 4. ad 7. quæ genitorum 12. ad 21. ex prop. 17. lib. 7. Proportio verò 12. ad 21. est composita ex proportione 12. ad 20. & 20. ad 21. ex propos. 10. huius: Proportioque 12. ad 20. est eadem, quę 3. ad 5. cùm sint 12. & 20. numeri geniti ab eodem 4. qui vtrosque 3. & 5. multiplicauit ex propos. 17. lib. 7. Quare subducta proportione 12. à 20. eadem, quę 3. ad 5. remanebit proportio 20. ad 21.

Quod

Quod autem ratio 20. ad 21. sint quoque quotiens, patet; si inuicem multiplicentur termini: Fiet enim terminus 35. communis vtrisque, vt suprà docuimus propos. 13. huius; ideoque ex propos. 2. huius erit ratio $\frac{2}{3}\frac{\cdot}{5}$ ad rationem $\frac{2}{3}\frac{1}{5}$, vt 20. ad 21. quare proportio 20. ad 21 indicabit, quoties ratio $\frac{2}{3}\frac{\cdot}{5}$ contineatur in ratione $\frac{2}{3}\frac{1}{5}$. Vnde proportio $\frac{2}{3}\frac{\cdot}{5}$ erit quotiens.

COROLLARIVM.

HInceque patet idem esse in proportionibus subducere, ac diuidere, sicut idem est multiplicare, & componere, quia subductâ vnâ ratione ab aliâ, ratio residua est quoque quotiens, & multiplicata ratione per aliam, vt diximus, fit ratio composita

PROBL. X. PROPOS. XL.

Datis rationibus, quæ inuicem habeant rationem inæqualitatis assignare excessum minoris proportionis, super maiorem.

A $\frac{3}{12}$ B   C $\frac{6}{10}$ D   E $7\frac{2}{10}$

I $1\frac{9}{12}$

K 5

SIt data ratio AB $\frac{1}{1\ 2}$, & Ratio maior CD $\frac{6}{1\ 0}$. Fiat, vt D ad C, ita B ad aliud exhibebit E $7\frac{2}{1\ 0}$ Ideoque ex 4. huius, vt AB ad CD rationem; ita erit A ad E: ponitur autem maior ratio CD ratione AB; erit ergo maior E quantitas, quantitate A. Subducatur itaque, & auferatur ab E quantitas æqualis ipsi A 3. & remanebit residuum E $4\frac{2}{1\ 0}$ denominatoris subducto denominatore A 3. Fiat itaque, vt denominator A 3. ad residuum denominatoris A $4\frac{2}{1\ 0}$ sic AB $1\frac{1}{1\ 2}$ ad aliam rationẽ IK ex propos. 9. huius, & 5. Dico *rationem* IK *esse excessum, quò superat ratio* CD *rationem* AB.

Probatur. Quoniam, vt A ad E totum, denominatores, sic AB ad CD, rationes. Ergo, ex 22. l. 5. vt sublatũ ad residuum denominatoris E, sic AB ablatũ ad residuum rationis CD. Sed vt A ablatum ad residuum denominatoris E, sic ex effectione est ratio AB ad rationem IK. Ergo ratio IK est eadem, ac residuum rationis CD. Quia eadem vna ratio AB eisdem CD, & IK dicit eandem proportionem, quam A denominator ablatum ad residuum denominatoris, E, quod erat ostendendum.

Hęc autẽ IK est eadẽ ac 3. ad $1\frac{3}{1\ 2}$ vt patet, solũq; excessus sub alijs terminis, si placeat exquiri potest. Patet verò 3. ad $4\frac{2}{1\ 0}$, vel 30. ad 42. esse, vt denominator 4. proportionis AB $\frac{3}{1\ 2}$ ad denominatorem IK $1\frac{9}{1\ 2}$ ad 5. vel 21. ad 60 qui est 2. & $\frac{2}{1\ 0}$, quoniam redacti ad numeros planiores sunt 60. & 84. qui sunt in eadem proportione, ac 30. ad 42.

EXPENSIO VI.

De proportionum similium continuatione.

SIcut datis duabus quantitatibus, vel tertia, vel media proportionalis reperitur, & datis tribus quarta proportionalis reperitur, idem sentiendum est de proportionibus ipsis, in quibus si detur duæ, media, vel extrema poterit inueniri, & tribus datis quarta perscrutari valebit.

PROBL. I. PROPOS. XLI.

Inter duas datas rationes mediam rationem proportionalem inuenire.

DAtæ sint rationes AB $\frac{2}{5}$, & GH $\frac{9}{10}$, inter quas oporteat reperire mediam proportionalem. Fiat, vt H ad G; nempe 10. ad 9. sic 5. ad aliud E $4\frac{1}{2}$. Interque A 2. & E $4\frac{1}{2}$ media proportionalis quantitas inueniatur A 2. K 3. & E $4\frac{1}{2}$. Deinde fiat, vt A 2. ad K 3. sic ratio AB $\frac{2}{5}$ ad rationem CD $\frac{3}{5}$ ex propos. 9. huius, vel 5. Dico *hanc esse mediam proportionalem, esseque* AB, *&* CD, *&* GH *in continua proportione.*

A $\frac{2}{5}$ B   G $\frac{9}{10}$ H   A 2   K 3   E $4\frac{1}{2}$

AB $\frac{2}{5}$ CD $\frac{3}{5}$ GH $\frac{10}{9}$

Probatur. Nam, vt A ad K; sic effecimus rationem AB $\frac{2}{5}$ rationi CD $\frac{3}{5}$ correspondere proportione. Ratio autem A ad E est duplicata rationis A ad K ex 10. h. erit quoq; ratio A ad E duplicata rationũ AB $\frac{2}{5}$ ad CD $\frac{3}{5}$. Sed ratio A ad E est eadem, quæ ratio AB ad rationem GH, cùm A, & E sint denominatores ex 4. huius, Ergo AB ad rationem GH est duplicata rationis AB ad CD, & sic CD est media proportionalis, quæ exposcitur, & AB, CD, & GH erunt in continua proportione.

PROBL. II. PROPOS. XLII.

Datis duabus rationibus tertiam rationem proportionalem inuenire.

DEntur duæ rationes AB $\frac{2}{5}$, & CD $\frac{8}{12}$, & oporteat ipsis tertiam proportionalem inuenire. Fiat, vt D ad C, sic B ad aliud I. 3. & $\frac{4}{12}$, vt autem A 2. ad I. $3\frac{4}{12}$, seu 24. ad 40. sic fiat ratio CD ad rationem aliam GH $3\frac{1}{3}$ ad 3. vt docuimus pr. 5. ad 3. Dico, quod proportio GH est tertia proportionalis, & quod Ratio AB. & GD sit in continuâ Analogiâ trium AB, CD, & GH.

A $\frac{2}{5}$ B   C $\frac{8}{12}$ D   G $\frac{3\frac{1}{3}}{3}$ H   B $\frac{5}{3\frac{1}{3}}$ I

Probatur. Nam ratio AB est ad rationem CD ex propos. 4. huius, vt A ad I; sed vt A ad I, sic facta est ratio CD ad rationem GH: Ergo Ratio CD ad

GH habet eandem proportionem, quam AB ad CD. Vnde tres AB, CD, & GH sunt in continuâ Analogiâ.

PROBL. III. PROPOS. XLIII.

Datis tribus rationibus quartam proportiolem adinuenire.

SInt datæ tres rationes AB $\frac{1}{3}$, CD $\frac{2}{4}$, EF $\frac{3}{5}$, & oporteat inuenire quartam proportionalem.

Fiat, vt D 4. ad C 2. sic B 3. ad aliud X, $1\frac{1}{2}$; inueniaturque ex propos. 6. huius ad rationem EF alia ratio GH, quæ sit in proportione, vt A, 1 ad, X, $1\frac{1}{2}$, & erit GH $\frac{9}{10}$. Itaque GH est illa, quæ exquiritur, proportioque AB est ad proportionem CD, vt ratio EF ad rationem EH.

A $\frac{1}{3}$ B	C $\frac{2}{4}$ D	X $1\frac{1}{2}$	E $\frac{3}{5}$ F	G $\frac{9}{10}$ H

Probatur. Ratio AB est ad rationem CB ex 4. huius, vt A ad X, sed vt A ad X; ita effecta est ratio EF ad rationem GH: Ergo ratio AB ad rationem CD erit, vt ratio EF ad rationem GH.

Vbi vides, quòd ad hoc, vt rationes ipsæ sint similes, non est necesse, quòd termini ipsi sint proportionales, & quod ita sit A 1. ab B 3. vt C 2. ad D 4. nec E 3. ad F 5. vt G 9. ad H 10. vti est necesse in similitudine ipsorum terminorum ad hoc, vt enim similis sit ratio A ad B, quæ C ad D, necesse est, vt etiam ipsi termini sint similes, & A 2. sit ad B 4. vt C 3. ad D 6. & tunc ratio 2. ad 4. dicetur eadem, quam 3. ad 6. Sed in rationibus ipsis AB $\frac{1}{3}$ ad Rationem CD $\frac{2}{4}$ est, vt ratio EF $\frac{3}{5}$ ad rationem GH $\frac{9}{10}$, & tamen termini ipsi sunt dissimiles: Imo, & rationes ipsæ: neque enim eadem ratio est $\frac{1}{3}$, quæ $\frac{2}{4}$, aut $\frac{3}{5}$, quæ $\frac{9}{10}$, vt patet; & tamen ita est AB ratio ad rationem CD, vt EF ad GH, quod, & ipso experimento percipies, si reducas omnes proportiones ad eosdem terminos AB $\frac{4}{12}$ CD $\frac{6}{12}$ EF $\frac{30}{50}$, & GH $\frac{45}{50}$: nam cum istæ proportiones habeant eosdem terminos erunt, vt antecedentes, & erunt, vt A 4. ad C 6. sic E 30. ad G 45. vt patet.

PROBL. IV. PROPOS. XLIV.

Propagare proportiones secundum datam rationem.

SIt data ratio AG $\frac{2}{3}$, & oporteat reperire rationem triplicatam ad rationem AG, sed in ratione A ad G.

Disponantur quantitates proportionales ab eadem quantitate incipientes in ratione AG 2. ad 3.

A	2	B	4	C	8	D	16	E	32
A	2	H	6	L	18	M	54	N	162
						K	36	P	108

Dico, quod factum est id, quod requiritur. Nam proportio tertia DM habet ad proportionem ad primam BH duplicatam proportionem B ad H, & EN quadruplicatam ad eandem BH eius, quam habet B ad H.

Nā expr. 8. tr. 16. p. 1. D ad M habet pportionē triplicatā eius, quæ est B ad H. Fiat, vt H ad B, sic M ad K, eritque ex 4. h. ratio DM ad rationem BH, vt D ad K. Ratio verò DK componitur ex proportione D ad M, hoc est, vt dixi triplicata rationis B ad H eius, quam habet A ad A, cuius denominator 1, & M ad K, quę ex effectione est eadem, ac ratio HB. At qui rationes BH, & HB producunt compositæ rationem æqualitatis ex propos. 19. huius.

Ergo ratio D ad K componitur ex ratione eius, quam habet A ad A triplicatā rationis BH, & ideo duplicatam B ad H, & ratione æqualitatis, sed Ratio æqualitatis nihil addit ex Coroll. propos. 15. in compositione rationum, ergo ratio D ad M est duplicata rationis B ad H. Sed vt D ad M, ita ratio DK ad rationem BH, ergo ratio DM ad rationem BH habet duplicatam proportionem.

Ita dicas de ratione EN, quæ est triplicata rationis BH. Fiat enim, vt H ad B, sic N ad aliud P. Eritq; ex 4. h. E ad P, vt proportio BH ad proportionē ED.

Ratio vero E ad P componitur ex proportione E ad N, & N ad P, & ideo quadruplicata eius, quam habet A ad A, & triplicata eius quam habet B ad H, & H ad B, siquidem ex effectione NP est eadem ac HB, sed HB, & BH producunt rationem æqualitatis, quę nihil addit in pportionibus, ideo pportio E ad P est triplicata rationis, quam habet B ad H, sed vt est E ad P, ita est ratio BH ad proportionem EN, ergo proportio EN est triplicata rationis BH.

Et idem erit si cupias quintuplicare rationes, & sextuplicare addendo terminos in eadem proportione.

COROLLARIVM.

ERuitur itaque ex hoc Tractatu multos vnius cuiuscumque proportionis reperiri denominatores; & si agatur de denominatoribus numericis.

Primo reperitur denominator propriè dictus, qui ita est ad vnitatem, vt aliqua quantitas ad suam partem, V. g. Proportio 6. ad 3. habet denominatorem propriè dictum numerum 2. quia ita 2. est ad 1. vt 6. ad 3. ex hoc sensu multi numeri, nempe omnes primi in ijs proportionibus, non possident alium denominatorem, nisi se ipsos; quia ex propos. 1. lib. 8. Element. sunt minimi in illis rationibus, & ipsis minores eiusdem proportionis dari nequeunt. vt sunt $\frac{4}{5}$ $\frac{1}{2}$, & de istis intelligitur principium illud, quod multiplicantes consequens producant antecedens, vel diuidentes iuxta exigentiam proportionis maioris, vel minoris inæqualitatis.

Secundo adesse denominatores impropriè dictos, sub quo genere, ne dum numerici; sed, & quantitatis continuæ concluduntur, nempe quantitates; quæ sint in proportione ad aliquam suam partem, vt duæ quantitates sunt ad inuicem. quarum proportionem denominant; & hoc sensu omnes etiam irrationales proportiones obtinent suum denominatorem; si non minorem saltem maiorem; vt proportio 6. ad 3. habet denominatorem $\frac{4}{2}$ $\frac{8}{4}$, & irrationales, vt explicauimus in definit. 3. h.

Tertio adesse denominatores proportionales, qui sua habitudine ad aliam ostendunt proportionalitatem, quam habet vna ratio ad aliam V. g. proportio 6. ad 3. habet denominatorem 2. & 4. ad 10. numerum $2\frac{1}{2}$, vel prima 4. & secunda 5. vel prima 12. & secunda 15. Isti ergo omnes denominatores sunt proportionales, quia suis partibus

tibus

tibus idem officium exequuntur, quod denominatores simplices 2. & $3\frac{1}{2}$.

Quarto reperiri denominatores proportionis maioris inæqualitatis; qui exprimuntur numeris integris, etiã fractionibus copulatis, sed tali modo, vt vel vnitas in propriè dictis, vel pars aliquota supposita subintelligatur vt $\frac{2}{1}$ $\frac{6}{2}$ proportionis 2. ad 6. quo significetur, antecedens continere in se duas partes, quarum consequens est vna. At minoris inæqualitatis vnitas, vel pars aliquota superposita est subintelligenda, vt $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{4}$, quo notetur quantitatem antecedentem esse partem, vel secundã, vel tertiã sequentis. Id tamen scribi non solet, eo quia commodè non possit, cum denominator, cui adhæret fractio (vt multoties euenire solet) ad modum fractionis exarari non debeat, nec possit; quamuis si denominatores calculo subigantur interest, vt ad eorum significationem percipiendam aliquo modo notetur.

In proportionalibus autem denominatoribus nullo modo id sit necessarium; cùm sufficiat habitudo ipsa quantitatum ad exprimendam proportionem rationum.

TRAC-

TRACTATVS XVIII.

De Flexis.

VIsis lineis rectis secundum se, antequam videamus de ipsis, prout circulo inexistunt, vel secant, vel eum tangunt, & vt latera quoque sunt omnium figurarum, quæ circulo describuntur, & ideo omnes etiam, vt earum latera considerentur; priùs de ipsis Flexis agendum est, & in primis de circulo.

EXPENSIO I.

De circuli descriptione, atque mensura.

FLexæ; aliæ sunt, quæ ex corporum sectionibus exoriuntur, quæ per motum puncti, & lineæ in plano nullo modo explicari possunt; aliæ, quę in plano solùm describuntur, itaut ad corpus nullam relationem possideant, aliæ vero, quæ & plano describi queant, & tamen sectiones quoque corporum sint; aliæ, licet corporum sectiones non sint; solis tamen corporibus rotundis, & flexis describi queunt.

Primi generis sunt, Hiperbola, & aliqua talis quæ per lineæ motum, vel puncti nullo modo explicari possunt, vel saltem de facto non explicantur, & sectiones Coni sunt. Quarti verò generis Helix Cilyndro, seu Cono, seu sphere circumuoluta, quæ essentialiter poscunt illud subiectum; nec plano describi queunt. Secundi verò generis est spiralis Conchilis, Asymtotos; & huiusmodi. Tertij verò Circulus, qui & plano, & sphera eodem modo describi potest, sicut Ellipsis, & Cylindro Conoque, & etiam plano duobus centris adhibitis, vel motu lineæ per angulum rectum, vt infrà. Hic agemus de lineis, quæ plano describuntur: reliquæ enim lineæ, cognitiones ipsorum corporum poscunt: vnde eas suo loco seruabimus: at hìc in primis de circulo.

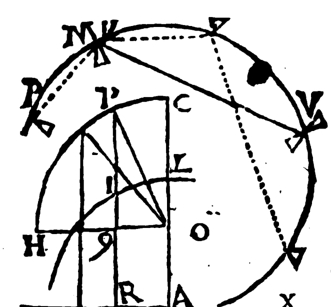
Licet facilis descriptio circuli sit cum planum liberum est, & breue: cum tamen magnum, & impeditum non est adeo facilis: quare de hoc loquentes sit.

PROBL. I. PROPOS. I.

Arcum circuli, cuius centrum haberi nequeat, describere.

SIt describendus circulus, & centrum A haberi nequeat. Fiat angulus VMP obtusus, & claui figantur plano in punctis M, & P, moueanturque altera lambendo clauos, V. g. à P per M vsque ad V; vertex enim M describet portionem circuli PMV, quam produces. Si latus MP transferas per arcum factum: nam aliud latus MV sua extremo arcum XV continuabit.

Probatur ex propos. 24. lib. 3. Nam in segmentis æqualibus eiusdem circuli capiunt anguli æquales. Cum ergo angulus VMP, sit semper æqualis, erit semper in æquali circumferentia eiusdem circuli vertex eius M, & eius extrema V, & P; quare eundem circulum describent. Huius autem circuli inuenies diametrum ex 1. lib. 3. vel per calculos.



* Sed etiam alio modo describi poterit. Nempe faciendo centrum O in alio loco, & ducendo circulum CH cum non possit in A, nam LC longitudo, seu maior seu minor ea fuerit mensurata à circulo CH in qualibet linea parallela ipsi OC velut est PI suo extremo I circulum describet.

Probatur. Nam ablato impedimento sit AL radius æqualis radio OC, & ducatur perpendicularis AR ad AO. Cum ergo sit LA æqualis OC: ablata ergo communi LO, erit LC æqualis ipsi OA: sed IP est æqualis LC ex hypothesi. Ergo & OA, & consequenter æquali QR, & ideo QR erit æqualis IP: si addatur itaque QI vtrisque erit RI æqualis QP; sed QP suo extremo P est in circumferentia circuli: Ergo etiam RI vel PI suo extremo I erit in circumferentiâ circuli æqualis.

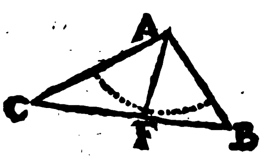
THEOR.

THEOR. LEMMAT. I. PROPOS. II.

Secto angulo alicuius trianguli bifariam, ambo crura ad basim totam, habent eandem proportionem, quam ipsum crus ad segmentum basis sibi vnitum.

SIt triangulum ABC. Diuidaturque angulus ad A bifariam per lineam FA. Dico *quod* AB, *&* AC *simul eandē proportionē habent ad* BC *crus alterū, quā ipsū crus* AC *ad segmentum basis sibi vnitum* FC.

Probatur ex propos. 3. lib 6. ita est CF ad FB, vt CA ad AB. Quare *componendo*, ita CB, & FB basis segmenta simul ad alterum segmentum basis CF; vt crus AC, & crus AB simul ad crus AC illi segmento CF vnitum: Quare, & *permutando* ita erit CF, & FB segmenta basis ad crura AC, & AB, vt segmentum basis CF ad crus sibi vnitum AC. Vel *inuersè* CA, & AB ad CB, vt CA ad CF. Hoc est fundamentum Archimedeę demonstrationis sequentis.

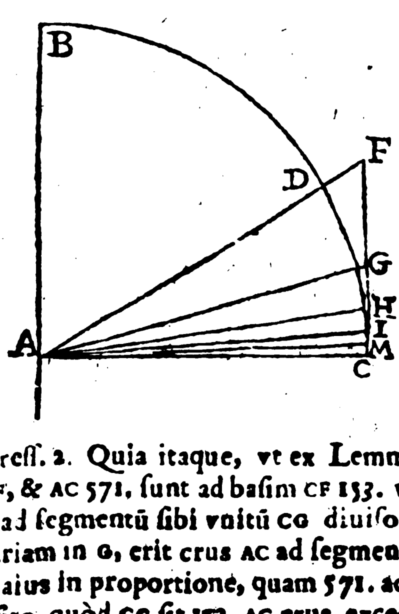


THEOR. I. PROPOS. III.

Cuiuslibet circuli peripheria est tripla diametri, & adhuc parte septima ipsius insensibiliter minor est.

SIt circulus, seu quadrans, quòd sufficit ABC. Sitque in eo angulus DAC ad centrum 30. Gr. Latus CF trianguli AFC erit dimidium basis FA, ex illis, quæ dicta sunt lib. 4. elem. propos. 15. Siquidem est latus hexagoni FV cuius duplum, seu 60. Gradus subtendit, & ideo æquat basim AF, & cum CF sit tangens, CAF triangulum est rectangulum.

Progress. 1. Si ergo CF ponatur 153. partium FA eius dupla erit 306. Vnde ex propos. 11. elem. lib. 2. exquiremus latus AC. Nam quadratum numeri 153. est 23409. quo dempto à quadrato numeri 306. quod est 93636. remanet quadratum 70227. à quo subducta radix quadrata ex prop. 20. Tract. 13. dat latus AC paulo maius, quam 265. vnde iunctum simul lateri AF 306. erunt 571.



Progress. 2. Quia itaque, vt ex Lemmate duo crura AF, & AC 571. sunt ad basim CF 153. vt vnum crus AC ad segmentū sibi vnitū CG diuiso angulo FAC bifariam in G, erit crus AC ad segmentum CG paulo maius in proportione, quam 571. ad 153. & ideo posito, quòd CG sit 153. AC crus excedet 571. sed non integra vnitate, neque enim perueniet ad 572.

Progress. 3. Cum ergo habeamus nota AC, & CG in triangulo ACG rectangulo, eodem prorsus modo progrediemur, vt in primo progr. Nam diuiso angulo GAC bifariā in H eodē tenore argumēti procedemus. Quia posuimus segmentum CG esse 153. partium quadratum eius erit, vt dictum est 23409. & quia posuimus AC esse 571. & paulo magis, quadratum eius erit 326041. & simul faciēt ferè quadratum AG ex 11. lib. 2. elem. partium 349,450. licet quadratum ipsius AG sit paulo maius, eiusque radix paulo maior, quam radix 591 $\frac{1}{8}$ prædicti numeri 349450. Vnde proportio AG ad CG erit 591 $\frac{1}{8}$, & aliquid amplius ad 153. basim CG. & si iungantur simul duo crura AC, & AG 571. & 591. & $\frac{1}{8}$ erunt vt 1162 $\frac{1}{8}$ ad basim CG 153.

Quamobrem argueemus, vt secundo progressu. Quia ex propos. 2. duo crura AC, & AG ad basim CG sunt, vt crus AC ad segmentum sibi vnitum CH, ideo si ponatur CH 153. partium, erit crus AC 1162 $\frac{1}{8}$, & paulo maius.

Progr. 4. Secabimus rursus in triangulo HAC angulum A in duas ęquas partes in I: & eodem argumentandi ritu procedemus. Iungemus enim quadratum AC paulò maius, quàm 1350534 $\frac{3}{6}\frac{3}{4}$ quadratum inquam numeri 1164 $\frac{1}{8}$ ei cruri pęnè æquale, & quadratum basis CH 23409. & facient quadratum 1373943 $\frac{0}{6}\frac{1}{4}$, quod pęnè æquabit duo quadrata facta ex crure AC, & basi CH, quadrato ipsi ex crure AG ex 11. lib. 2. æqualia, & deficiet, nec quidem integra vnitas; vnde extracta radix quadrata dabit numerū 1172 $\frac{1}{8}$, qui proximè æquabit crus HA. Vnde HA erit ad CH ferè vt 1172 $\frac{1}{8}$ ad 153. & paulò ampliùs, & si simul iungantur duo crura AH 1172 $\frac{1}{8}$, & AC 1164 $\frac{1}{8}$ erunt, vt numerus 2334 $\frac{2}{8}$ ad 153. & paulò ampliùs, quā ipse numerus 2334 $\frac{2}{8}$. Quapropter cum duo crura AC, & AH sint ad totam basim CH; vt crus AC ad segmentum CI, ob diuisum angulum bifariam in I. Si ponamus hoc segmentum CI esse 153. partium crus AC, erit 2334 $\frac{2}{8}$, & paulò ampliùs.

Progress. 5. Secabimus deinde angulum IAC in M bifariam, iungemusq; quadratum basis IC semper idem 23409. & quadratum cruris AC 2334 $\frac{1}{4}$ quod est 5448723 $\frac{1}{1}\frac{1}{6}$, & paulò ampliùs, fietque quadratum 5472090 $\frac{1}{1}\frac{1}{6}$, cuius radix 2339 $\frac{1}{4}$ est crus IA, & etiam paulò auctior; Vnde crus IA erit ad CI, vt 2339 $\frac{1}{4}$ proximè ad 153. & crura simul posita CI 2339 $\frac{1}{4}$, & AC 2334 $\frac{1}{4}$ erunt vt 4673 $\frac{1}{2}$, & paulò ampliùs, quam ipse numerus ad 153. Quaderè, si ponatur CM segmentum 153. ex Lemmate, & 2. propos. huius erit crus AC paulò maius, quam 4673 $\frac{1}{2}$ sed non maius adeo, vt ęquet 4674.

Progress. 6. Sicque iam habemus multilaterum circulo circumscriptum, cuius semilatus CM est 153. ad semidiametrū AC, quod est paulo maius, quā 4673 $\frac{1}{2}$, quia ergo DC est tertia pars quadrantis dimidium GC, erit sexta; & huius dimidium CH duodecima, & huius dimidium CI vigesima quarta, & huius dimidium CM quadragesima octaua pars erit quadrantis. Vnde CM erit semilatus multilateri, quod subtendet 48. partem quadrantis. Sed duplicatum, vt sit latus integrum subtēdet 24. partem quadrantis; & ideo ob quatuor quadrantes multiplicatum per 4. nonagesima sexta pars totius circuli; nempe Polygonum laterum 96. & quia semilatus eius, vt probauimus progress. 5. est ad semidiametrum, vt 153. ad 4673 $\frac{1}{2}$ ferè; ideo totum

tum latus erit ad totum radium, vt 153. ad 4673 $\frac{1}{2}$. cum ita sit dimidium ad dimidium, vt totum ad totum ex propos. 18. lib. 5. Quapropter si multiplicemus latus CM 153. per 96. latera, quibus polygonum constat, habebimus latera totius polygoni 14688.

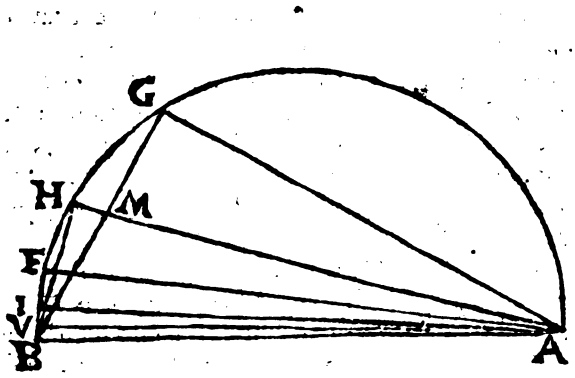
Si ergo dicas, regulam auream adhibendo si 22. dant 7. idest si 3. & $\frac{1}{7}$ dant 1. quid 14688.? & exhibebunt 4673 $\frac{1}{2}\frac{2}{2}$. Quare Polygoni ambitus ad 4673 $\frac{1}{2}$. habet minorem proportionem, vtpote ad numerum maiorem, quam ad 4673 $\frac{1}{2}\frac{0}{2}$. Quare, & ad ipsum diametrum maius, quam 4673. $\frac{1}{2}$ habebit adhuc polygoni ambitus minorem proportionem, vtpote adquid maius. At circumferentia, vtpote interior ipsi polygono est minor, quam ambitus polygoni: Ergo dicet tanto amplius minorem proportionem ad diametrum ex propos. 8. lib. 5. idest, quam 14688. ad 4673 $\frac{1}{2}\frac{0}{2}$, vel quam 22. ad 7.

THEOR. LEMMAT. II. PROPOS. IV.

Triangulum in semicirculo, cuius vnus angulus sit medietas alterius trianguli in eodem semicirculo, habet crus maius ad minus in eadem proportione, quam habent duo crura maioris trianguli ad totam basim.

SIt triangulum ABH in semicirculo AGB, cuius angulus ad A, sit medietate minor, quàm angulus A in triangulo maiori BAG. Dico, quòd AH crus refertur ad HB latus, vt duo cruta AG, & AB trianguli maioris referuntur ad basim BG.

Probatur. Triangula AHB, & paruum MBH sunt æquiangula, quod sint rectangula, & in æquali peripheria BH, & HG ex 21. lib. 3. Ergo latera in eadem proportione versabuntur ex propos. 4. lib. 6. Ergo erit ita proportionatum crus AH maius in triangulo magno ad crus BH maius crus in paruo, vt ipsum BH crus quoq; minus in magno ad HM in paruo triangulo crus minus, idest vt AH ad BH, sic BH ad HM. Et ita erit basis BA in magno ad basim BM in paruo, vt crus minus BH trianguli magni BAH ad crus minus MH parui trianguli BMH.



Sed iam dictum est, quòd HA ad HB prorsus eiusdem proportionis reperiatur, vt HB ad HM parui. Ergo etiam hæc duo crura respicient bases eadem proportione, quà respiciebant BH, & HM ex 16. lib. 5. Ideoq; ita erit AB basis ad basim BM, vt crus AH ad crus BH. Sed ex 2. huius proposit. vt BA, & AG, vt vnum sumpta respiciebant basim GB, sic crus BA respiciebat BM crus sibi vnitum, & segmentum basis maioris trianguli BAG. Ergo etiam AH crus maius ad BH crus minus eandem proportionem dicet, quam duo crura BA, & AG ad basim BG trianguli maioris BAG dicebant.

THEOR. II. PROP. V.

Circumferentia cuiuslibet circuli diametrum continet ter, & insuper magis, quàm eius octauam partem.

PRobatur ferè eodem modo, quò secunda propositio. Fiat itaque circulus; ducaturque diameter AB, & latus hexagoni BG. Quod BG statuatur partium 780. erit diameter AB, vtpote eius duplum partium 1560. cuius quadratũ erit 2433600. Quadratum verò lateris hexagoni BG. 608400. quod dẽptũ à quadrato diametri remanet 1825200. quadratum lateris AG, cuius radix quadrata est paulò minor, quam 1351. Vnde latus AG erit paulò minus, quam 1351. & simul vtrumque crus AB, & AG erit paulò minus, quam 2911. & basis BG latus hexagoni part. 780.

Progr. 1. Diuidatur angulus ad A bifariam linea AH, & iungatur BH, fietque rectangulum ABH; Quia ergo, vt 4. propos. huius ostensum, ita est vtrumque crus AG, & AB ab basim GB, vt crus AH ad crus BH; ideo, si ponatur; quòd crus BH sit partium 780. crus HA erit partium 2911. nempe, vt est basis GB ad duo crura AB, & AG. Ideoque ex quadratis laterum rectanguli BAH inquiremus basim AB: cum ergo quadratum cruris BH, sit 608400. quòd crus supponitur 780. partium, & quadratũ AH cruris, quod ponitur hoc progr. 2911. partium sit 8473921. si vniantur simul, vt fiat numerus 9082321. hoc erit quadratum basis AB rectanguli AHB, cuius radix quadrata est 3013 $\frac{1}{2}\frac{3}{0}$ paulò auctior, & ideo AB erit paulo minor partibus 3013 $\frac{1}{2}\frac{3}{0}$, & simul vtrumque crus AB, & AH part. 2911. erunt partiũ 5924 $\frac{1}{2}\frac{3}{0}$, & crus HB 780.

Progr. 2. Secto rursus angulo ad A in triangulo BAH bifariam per lineam AF, ex prop. 4. huius, ita erit vtrumque crus BA, & AH ad basim HB, vt crus AF ad crus BF. Vnde, si statuatur basim BF esse 780. partium crus AF, erit parùm minus, quàm 5924 $\frac{3}{4}$; nimirum, vt basis HB ad duo crura AB, & AH: Quare si horum quadrata vniantur simul in rectangulo BFA dabunt basis quadratum BA: cùm ergo quadratum BF sit 608400. & quadratum FA 35102662. Iuncta itaque simul dabunt quadratum 35711062. cruris BA, cuius radix quadrata est 5975 $\frac{1}{2}\frac{6}{0}$, & paulò magis. Itaque crus BA erit paulò minus, quàm 5975 $\frac{1}{2}\frac{6}{0}$, quod iunctum cruri AF 5924 $\frac{3}{4}$ facient numerum amborum crurum AF, & BA paulo auctiorem, quàm 11900. $\frac{1}{2}\frac{1}{0}$ basis verò BF erit 780.

Progressus 3. diuidatur rursus angulus BAF in duas partes æquales per lineam AI, & per 4. prop. huius, ita erit vtrumque crus trianguli maioris BA & AF ad basim BE; vt crus AI ad crus BI. Ideoq; si statuatur basis BI part. 780. erit crus IA par. 11900. $\frac{1}{2}\frac{1}{0}$, nẽpe vt basis BF ad duo crura AB, & AF, & quia BIA est triangulum rectangulum: Ideo quadratum duorum crurum BI, & AI erit æquale quadrato basis BA. Quadratum verò cruris AI est 141628090. & quadratum BI est 608400. iuncta simul erunt 142236490. cuius radix quadrata est 11926. $\frac{1}{2}\frac{1}{0}$ paulò auctior; vnde AB basis erit paulò minor quàm quam 11926 $\frac{4}{20}$, quod iunctum cruri IA 11900. $\frac{1}{2}\frac{1}{0}$ dat 23826 $\frac{1}{2}\frac{1}{0}$: basis verò, seu crus IB erit 780.

Progr. 4. Diuidatur tandem angulus IAB bifariam linea AV, & quia ex propos. 4. huius ita est summa crurũ AB, & AI ad basim IB, vt crus AV ad crus VB, ideo diuiso angulo BAI bifariã rectâ AV, si statuatur crus VB 780. partium erit VA 238526; cuius quadratum est 567706867. & iunctum quadrato cruris VB 608400. partium efficiet, quadratum AB 568315267. cuius radix quadrata est 23839 $\frac{4}{10}$, & paulò magis: vnde basis AB erit paulo minor, quam prædictus numerus 23839 $\frac{4}{20}$.

Progressus 5. Cum itaque iam habeamus diametrum AB paulo minorem, quam 23839 $\frac{4}{10}$, & crus VB 780; habemus quoque latus polygoni 96. laterum. Nam BG est hexagonum, quadere eius dimidium BH erit duodecagonum, & huius dimidij dimidium BF figura 24. laterum, & huius BF dimidium BI 48. laterum, & tandem huius dimidium BV 96. Cùm itaque iam habeamus VB latus polygoni 96. laterum partium 780. si multiplicemus per 96. habebimus ambitum totius polygoni 74880.

Progress. 6. Si ergo dicas auream regulam adhibendo; si 25. dant 8. idest 3. & $\frac{1}{8}$ dant 1., quid 74880.? & factus computus exhibebit 23961 $\frac{3}{5}$: Quare polygoni ambitus ad numerum 23839 $\frac{4}{10}$ habet, vtpote ad numerum minorem maiorem proportionem, quàm ad 23961 $\frac{3}{5}$, & tanto maiorem ad diametrum ipsum, qui eo numero 23839. $\frac{4}{20}$ paulò minor est: Sed circumferentia vtpote exterior ipsi polygono, maior est ipsius ambitu: Ergo obtinebit tanto maiorem proportionem ad diametrum ex prop. 8. l. 5. quàm 74880. ad 23961. $\frac{3}{5}$, vel quam 25. ad 7. idest, quam 3 $\frac{1}{8}$ ad 1.

Et hæc ad ostendendam propositionem sufficiunt, verùm ad hoc, vt videas præcisionem huius operationis, & quàm proximè ad verùm accedit fiat, vt 223. ad 71. idest quam 3. & $\frac{10}{71}$ ad 1, sic 74880. ad aliud, & regula proportionum inuenies esse 23840 $\frac{140}{223}$: Quare polygoni ambitus ad numerum 23839 $\frac{4}{10}$ dicet maiorem proportionem, quam ad numerum 23840 $\frac{140}{223}$, qui se habet, vt 223. ad 71. & tanto maiorem ad diametrum, qui eo numero 23839 $\frac{4}{10}$ minor est, & tantò maiorem proportionem dicet, circumferentia ipsa, quæ vtpote exterior polygono illo ipso maior est.

Quare circumferentia ex hac quidem propositione maior euadit diametro sumpto ter cum octaua sui parte, vel sumpto ter cum decem ex 71. partibus, at ex propos. 3. huius, circumferentia est minor, quam diameter sumptus ter cum sui septima parte. Ergo inter has duas proportiones consistit, altera quidem tripla sesquiseptima, altera verò tripla sesquioctaua.

COROLLARIVM.

COllige ex istis duabus propositionibus 3. & 5. quòd circumferentia est inter duos istos terminos maiorem 3 $\frac{10}{70}$, & minorem 3. & $\frac{10}{71}$ diametri. Vnde si diuidatur circumferentia per 3 $\frac{1}{7}$ producetur numerus minor, quam diameter, at è contra si multiplicetur diameter per 3 $\frac{1}{7}$ producetur maior numerus, quam circumferentia: Si verò multiplicetur diameter per 3 $\frac{10}{71}$ procreabitur minor numerus, quam circumferentia, & si diuidatur circumferentia per 3 $\frac{10}{71}$ procreabitur maior numerus, quam diameter.

EXPENSIO I.

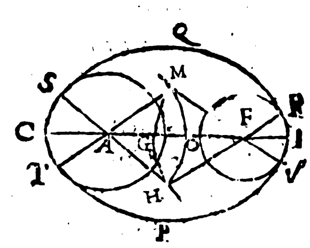
De circuli segmentis in figuram circularem coaptandis.

NOn mediocre Architecturæ, quandoque affert emolumentum, cæterisque similibus artibus diuersorũ circulorũ segmenta varia in vnã flexam componere, vt molli quodam flexu nullos efficiant angulos: primo autem docebimus de segmentis in se se redeuntem lineam efficientibus, deinde de segmentis in spiralem se flectentibus.

PROBL. I. PROP. VI.

Segmentum circuli duos circulos tangens ducere.

SInt duo circuli, siue contigui, seu se intersecantes, seu quocumque spatio dissiti, seu æquales, seu inæquales (hic exhibemus exemplum circulorum inæqualium, & ab inuicem remotorũ) Ducatur recta per eorũ centra transiens CI: Hinc sumantur rectæ æquales IG, & CO, quæ dimidium per centra transeuntis CI superet, & à centris illorum circulorum A, & F interuallo AO, & FG, duæ portiones circulorum educantur MGH, & MOH, punctaque intersectionum M, & H rectis coniungantur MAT, & MFV sicut, & HFR, & HAS, & cet. quæ traseant per centra A, & F: Factoque centro in H, circuli describatur arcus SQR interuallo HS, vel HR sic facto centro in M alius arcus describatur TPV, quem arcum *dico tangere circulos propositos*.



Probatur. Quia AM, & AO sunt æquales additis portionibus ęqualibus si radijs CA, & AS remanebunt æquales totæ HS, & CO. Sed CO ex constructione æquatur ipsi GI, & GI ipsi HR. Ergo HS, & HR erunt æquales. Vnde circuli arcus centro H transibit per puncta S, & R. Quòd verò GI sit æqualis ipsi HR patet; quia GF, & FH sunt æquales, additis itaque portionibus æqualiqus FR, & FI totæ GI, & HR remanebunt æquales.

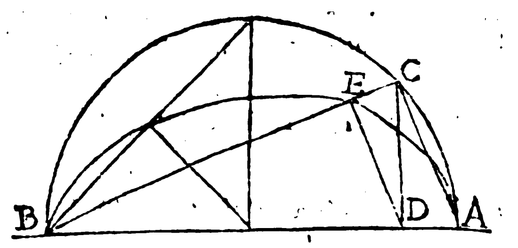
COROLLARIVM.

CVm verò circuli arcus tangit alium arcum, adeo bene inuicem se accommodant, vt nullum angulum efficiant, vt satis experimento constat: Vnde etiam addisces lineam spiralem ducere segmentis circulorum productam: si omnia centra arcuum super eandem rectam collocaueris, vt est centrum H arcus SQR. Alios verò modos, qui id exquisitè efficiant, aliò reseruamus, cùm eorum hic proprius locus non sit.

PROBL. II. PROPOS. VII.

Lineam oualem propriè dictam efformare.

PRæcedens figura propriè oualis non est, cùm non omninò ouum imitetur, quod altera parte acutius est; Proptereà figuram exhibemus, quę illum præcisè imitetur, & ad inueniendas duas medias proportionales inter duas datas perutilis sit.



Super AB, semicirculo facto ACB, à puncto B plurimis chordis ductis, vt BC, & cæt. à punctis extremis demitantur perpendiculares, vt CD, & à puncto D, quo secant diametrum in quálibet chordam, vt CB (ex cuius extremo in diametrum perpẽdicularis CD deducta est) in quamlibet inquam talem chordam alia perpendicularis deducatur DE: hæc enim signabit punctum E in quálibet chorda, per quæ æquabili manu ducta linea oualem figuram describet, hanc autem apellamus oualem ex similitudine, quam cum ambitu oui consequitur.

PROBL. III. PROPOS. VIII.

Ope oualis figuræ inter duas extremas lineas duas proportionales proijcere.

SIt iam descripta linea oualis AEB. Super lineam maiorem ex datis AB, & in ouato altera minor data accommodetur BE, vt ex prop. 1. lib. 4 Eucl. quæ producatur vsque ad C, à quo demitatur perpendicularis CD: quia verò BEA est facta ex perpendicularibus à D in E ductis, etiam talis erit ducta DE. Et ideo erit AB ad BC, vt BC ad BD, & BD ad BE: & ideo CB, & BD erunt duæ mediæ proportionales.

Probatur ob triangulorum æquiangulorum similitudinem ACB, & DEB ob parallelas AC, & DE, linea AB erit ad CB, vt DB ad BE. Sed vt AB ad CB, ita quoque ex Coroll. prop. 8. elem. est CB ad DB, & DB ad BE: ergo sunt quatuor AB, & CB, atque DB, & tandem BE continuè proportionales.

COROLLARIVM.

OVatum quoque describetur, si describantur, vt infra duæ ellypses, quarum maioris minor axis deseruiat pro maiori axi minoris Ellypsis; Ellypsium autem descriptionem infra dabimus.

EXPENSIO III.

De linea Spirali.

SPiralis linea digna fuit, quæ Archimedis animum alliceret in sui speculationem, tantumque geometram suarum proprietatum propallatorem haberet, vsus verò eius insignis est in voluntis capitellorum in Architectura prouoluendis, alijsque similibus ornamentis. Verùm non ea omnia, quæ Archimedes demonstrauit in medium adferemus de lineis eam tangentibus, earumque ad peripheriam, vel proportione, vel æqualitate, cùm ea inutilia sint; neque alijs de quibus agendum, deseruiant: ea verò speculatus est Archimedes; vt inueniret lineam peripherię circuli ęqualem, ob quam eam mensurare posset, quod tamen assecutus non est.

DEFINITIO I.

Linea spiralis est linea formata à motu puncti per semidiametrum, dum semidiameter suo extremo puncto efformat circulum illis proportionaliter eodem tempore se mouentibus.

Sit IB semiradius in seq. fig. ponaturque moueri per peripheriam RDB eam efformando suo motu, & interim punctum ab I discedat, & per semidiametrum BI ascendat ad B, ita vt quot partes peripheriæ perfecerit extremum B, tot partes diametri perficiat punctum in eo se mouens, ex 16. V. g. partibus, in quibus diuisus est tam semidiameter, quam peripheria: hic motus puncti describit spiram BEFGPI punctatam.

DEFINITIO II.

V*ocetur autem I principium spiræ manens, & B principium circularis.*

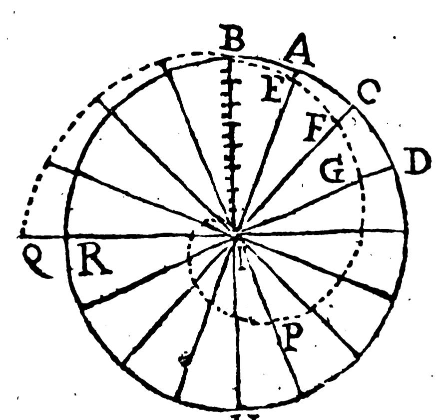
DEFINITIO III.

R*ecta linea IB spacium spirale concludens: spacium verò spirale BGPI primum, quòd si sequatur in Q secundum, & si post completam reuolutionem adhuc sequatur tertium, & sic deinceps.*

PROBL. IV. PROPOS. IX.

Lineam spiralem in plano per puncta describere.

DIuidatur circumferentia BACD in tot partes æquales, quot placuerit, & in totidem semidia-



midiameter (quò plures erunt eò exactior erit operatio) V.g. in 8. transferanturque singulæ partes semidiametri semper accipiendo vnam minus in singulos radios AI, & IC, & ID, & cæt. ductos à circumferentiâ ad centrum, quę impriment puncta EFG, & cæt. *Per ea itaque puncta manu æquabili ducatur flexa, quæ erit quæsita spiralis.*

Probatur. Quia punctum B est 15. partibus distans ab I in diametro IA sicut peripheria BRA est 15. partibus distans à puncto B. Sic in radio IC punctum F 14. partibus distat ab I, sicut BRHC 14. partibus peripheriæ distat à B. Sic punctum G 3. partibus distat ab I, sicut peripheria BRD 13. partibus distat à B. Ergo, cum eodem partium decremento, tum circumferentię, tum diametri puncta, tum punctum B in extremo diametri translatum in ACD, quàm punctum aliud per ipsum diametrum ascendendo à DI in G, F, & E hęc puncta erunt in spirali iuxta definit 1. quòd, si secundum ambitum spiralis exoptemus, prolungentur diametri, vt IQ, & partes se eodem excessu superantes ex HI transferantur successiuè in diametros prolungatos, & per ea puncta flexa ducatur, quæ erit voluta in alias circumuolutiones promota.

THEOR. LEMMAT. I. PROPOS. X.

* *Si omnium circulorum æquali diminutione decrescentium arcus singuli componantur integrabunt dimidium ambitum totius maximæ peripheriæ, & dimidium maximi arcus: si verò à progressione terminus primus excludatur, tunc minus erunt dimidio ambitu eadem maximi arcus medietate.*

*PRæassumpt. supponendum est singulas peripherias, & earum partes, quarum diametri se æquali augmento superant, se etiam inuicem æquali augmento superare, & etiam subtensas illis partibus se superare æquali augmento: Ratio est, ex 43. 44. 45. tertij Elem. Siquidem ita inuicem sunt peripheriæ, & radij, & cordæ arcuum similium, & arcus similes, vt diametri: Cum ergo diametri æquali se superant augmento, etiam, & arcus, & cordæ, & peripheriæ æquali augmento se superabunt; Ideo in figurâ AH cùm arcus similes sint, AE, BC, & CD similes sint, cordæ, & arcus se æquali augmento superabunt. Quod diametri OX, OB, OC, OD se æquali augmento superent.

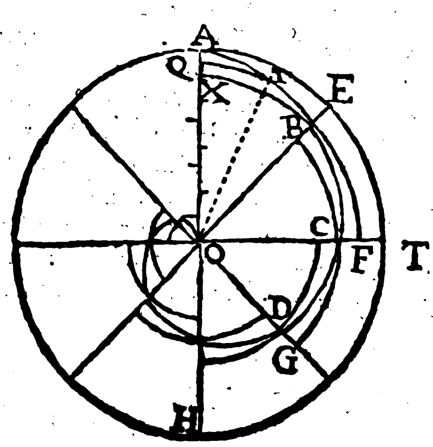
Sit itaque diuisa peripheria 8. circulorum similiter decrescentium in partes 8. & ex singulis accipiatur vnicus arcus V. g. AE, BC, & CD, & cæt. Dico, *quòd octo partes decrescentes istæ facient semicirculum* AEH, *& insuper dimidium arcus maximi* IE.

Sic si sit diuisa peripheria 16. circulorum æquali diminutione decrescētiū in partes 16. Et ex singulis peripherijs accipiatur vnicus arcus, & omnes isti arcus 16. decrescentes ponantur simul. Assero, *quod facient lineam æqualē semigyro maximo, & insuper dimidio maximi arcus.* Nam arcus singuli sint partes 24. Ergo, vt deficiant æqualibus 16. decrementis singuli deficient 1 $\frac{1}{2}$, & stabit progressus Arithmeticus decres. 24. 22 $\frac{1}{2}$, 21. 19. $\frac{1}{2}$, 18. 16 $\frac{1}{2}$, 15. 13 $\frac{1}{2}$, 12. 10 $\frac{1}{2}$, 9. 7 $\frac{1}{2}$, 6. 4 $\frac{1}{2}$, 3. 1 $\frac{1}{2}$, 0, qui omnes efficient numerum 204. at verò maximus circulus, cuius vnica pars decima sexta constat 24. particulis, est 384. cuius medietas est 192. Quare dimidius gyrus est 192. particularum; & arcus decrescentes sunt 204. nempe 12. particulis ampliùs, quæ sunt dimidiata pars decimasexta gyri maximi; quæ constat 24. particulis.

Si verò pars decima sexta maximi gyri excludatur: tunc erunt reliqui arcus decrescentes minus, quàm semiperipheria maxima 12. particulis, erunt enim tantum 180. particulæ, & deficient 12. ad 192. dimidium gyrum maximum, cuius decimasexta pars est 24. particularum.

Ratio est petenda à propos. 9. de propor. numericis Arithmet. Tract. 14. vbi ostendimus maximum terminum vnitum primo facere totam summam progressionis Arithmeticæ, si multiplicetur per dimidium numerum terminorum, siue autem terminus primus 1 $\frac{1}{2}$, & vltimus 24. per eundem numerum dimidium terminorum 8. multiplicētur seorsim, & faciant 12. 192. & deinde in vnam summam redigantur, siue simul vniantur, & postea multiplicētur per 8. idē num. fit 204. vt pr. 2. l. 9. el.

Numerus verò 24. per 16. numerum terminorum ductus facit totum circulum maximum. Vnde per dimidium 8. ductus efficiet dimidium circuli ex propos. 17. lib. 7. cum sint ita multiplicati 8. ad 16. vt geniti 192. ad 384. Ergo Progressionis Arithmeticæ summa erit maior circuli maximi dimidio 192. nempe genito ex multiplicatione maximi termini 24. per numerum dimidium terminorū in termino primo 1 $\frac{1}{2}$, sed multiplicato per eundem dimidium terminorum numerum 8. qui gignit 12. Quia si 16. multiplicando 1 $\frac{1}{2}$ facit 24. ergo 8. eundem 1 $\frac{1}{2}$ multiplicando faciet 12. cum ita ex propos. 17. lib. 7. sit 8. ad 16. multiplicati, vt 12. ad 24. geniti. Itaque Progressio Arithmetica erit maior dimidio circulo maximo ipso primo termino 1 $\frac{1}{2}$ in 8. multiplicato, & facto 12. qui est dimidium maximi termini 24. quod verificatur in progressionibus, quæ incipiunt à nihilo, vt proposita.

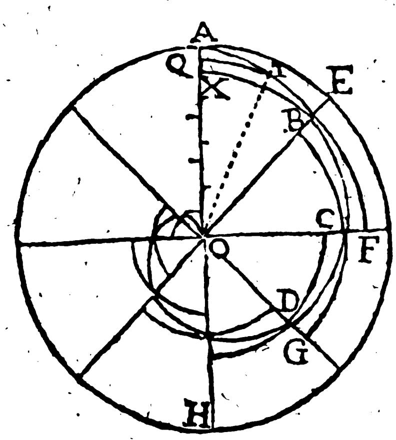


Quadere secunda pars quoque patet; nam excluso à collectione omnium maximo termino, excluditur ne dum dimidium maximi termini ipsius, quo superabat ambitum semicirculi; sed etiam aliud dimidium, nempe totum maximum arcum, vnde à semicirculo eadem medietate illius deficit.

THEOR. LEMMAT. II. PROPOS. XI.

Summa omnium arcuum, cuiuſcumque circuli Arithmeticè decreſcentium, ſi ſucceſſio decrementi ſit infinita, æquat ſemicirculum.

SInt arcus AE, & BC, & CD, & ſubdiuidantur, vel intelligantur ſubdiuiſi in infinitum. Dico, quod hæc progreſſio arcuum decreſcentium æquat ſemicirculum.



Prob. Quo ſucceſſio arcuũ numero eſt maior, eò maximus terminus eſt minor V. g. ſi ſemidiameter DA ſit diuiſus in 8. partes, erunt octo circuli decreſcentes, & ex eis ſingulis octo arcus, & terminus maximus AE. Verùm ſi ſint 16. partes in radio OA arcus erunt 16. & ideo maximus arcus AI dimidio minor. Quamobrem quo maior erit ſubdiuiſio radij, & ideo circulorum decreſcentium ſucceſſio maior, eò minor erit differentia, qua collectio omnium arcuum excedit dimidium circulum includendo maximum, & incipiendo ab A, ita, vt ſint termini AE, & BF, & CG. Et tantò minor erit quoque differentia; quà excluſo maximo termino, & incipiendo ab X, vt ſint XB, BC, & & CD, collectio arcuum decreſcentium deficit à ſemicirculo. Ergo ſi iſtæ ſeries infinitè creſcāt numero, infinita erit diminutio differentię qua deficit à ſemicirculo: ſed facta infinita diminutione ſubdiuidendo tandem vltimus terminus quantitatis acquiritur, & abſumitur ipſa quantitas ex propoſ.15. Tract.16. part.1. Ergo differentia eius poſt infinitam ſubduplam diuiſionem fit nulla, & ſic ęquabitur, ſiue progreſſio maximum terminum includat, ſiue excludat toti ſemicirculo.

THEOR. I. PROPOS. XII.

Spiralis ſenſibilis eſt linea infinitis circulorum ſegmentis ſenſibilibus ſucceſſiuè minoribus coagmentata.

PRob. Ita eſt AT arcus ad TC diametri portionem, vt EA ad BE, & ſi ſubdiuidatur, ita erit ſubdiuiſi circuli portio ad ſubdiuiſi diametri portionem, vt AT ad CT, & rurſus portio hæc ſubdiuiſa circuli ad aliam ſubdiuiſam portionem, vt diametri arcus AT ad portionem CT; & ſic ſemper in infinitum: ſed AT eſt maior, quàm CT, cum peripheria ſit maior, quam radius, & conſequenter omnes eius partes proportionales erunt maiores, quam proportionales ipſius radij: Ergo ex Coroll.1. propoſ.12. lib.5. etiam omnes arcus quòquò decremento diminuti erunt maiores, quam partes diametri ſimiliter diminutæ.

Probatur nunc principaliter propoſitio. Nam quò arcus ſunt minores, è magis BX arcus intimus accedit extimo. Ergo ſi ſint minores vltra omnem ſenſibilitatem, tantò magis BX minor longitudine vltra omnem ſenſibilem factus accedet ad arcum extimum EA V. g. arcus diminuatur ſub dupla longitudine, & fiat IQ, accedet quoque ſubduplò ſpacio ad EA, & ſic de alijs in infinitum minoribus, cumque ſemper ſit maior quacunque diuiſione proportionali præſtita, arcus, quàm portio diametri, decreſcet ſemper magis portio diametri minor, quàm arcus maior. Vnde, ſi diminuitur vltra omnem ſenſibilitatem ſpatium inter A, & E, tanto minus erit ſenſibile ſpatium XA, & EB. Quòd, ſi eſt vna linea, vt ſpatium ſenſibiliter non mediet inter B, & A: Ergo ſpira BA inter illos EA, & BX incedens erit idem cum ipſis ſaltem quoad ſenſum.

COROLLARIVM.

HInc eſt, quòd ſi aſſumatur magna aliqua progreſſio Arithmetica per interuallum 1 procedens, & eius vltimus terminus reperiatur ex Tr.14.p.2. Propoſ.13. de proportionalit. & ex inde omniũ ſumma ex propoſ.9. eiuſdem; hæc ſumma proximè exprimet Spiralem, ſi verò maximus terminus multiplicetur in ſe exprimet circulum. Sic ſi pu.etur diuiſus circulus in 256. partes, quarum ſingulæ 256. particulis conſtent, vt ſinguli arcus vna particula diminuātur. Arcuum decreſcentium ſumma erit 23896. at verò peripheria, cuius 256. partes ſingulę 256. particulis conſtant, & medietas partis vnius 128. erit particularum 65536. quarum medietas eſt 32768. quæ ſubducta à ſumma arcuum dat pro reſiduo 128. nempe vnam dimidiam ex particulis 256. nimirum $\frac{1}{512}$ totius peripheriæ.

THEOR. II. PROPOS. XIII.

Spiralis æqualis eſt generanti ſemicirculo in ſua circumuolutione integra.

PRobatur. Arcus ſe diminuentes Arithmeticâ proportione, & interiores ſimul ſumpti, & exteriores ſimul item ſumpti ſemper accedunt magis ad ſemicirculum, quantò magis multiplicantur, ſed quantò magis multiplicantur, tantò magis accedunt ad ſpiralem. Ergo ſi in infinitum multiplicentur accedent ſimul ad ſemicirculũ, & ad ſpiralem. Ergo ſpiralis cum ſemicirculo eiuſdẽ longitudinis erit. Patet conſeq. quia arcubus ad hoc vt æquẽt ſpiralẽ, & fiant ſpiralis multiplicatio infinita ſubmultiplex deeſt, vt præced. pr. & eorum ſummæ, vt euandant ſimul æquales ſemicirculo ex propoſ.11. multiplicatio infinita deeſt. Ergo ex eadem, ſi hęc pręſtita pręſupponatur euadent ſpiralis, & ſumma arcuum decreſcentium æquales ſemicirculo.

Hæc propoſ. eſt audacior, quam antecedens, ſed ſi nõ placeat alicui, ãplexetur priorẽ, quę ſufficit.

EXPEN-

EXPENSIO IV.

De Linea Quadratrice.

Linea Quadratrix, quam ad circuli quadraturam excogitauere Dinostratus, & Nicomedes, ex Pappo lib. 4. Mirabilis est, plurimosque vsus in Geometrica obtinet; ideoque non est pretermittenda.

DEFINITIO

Quadratrix est linea, quam proportionali motu radius ductus per circumferentiam, & perpendicularis per diametrum se intersecando producunt.

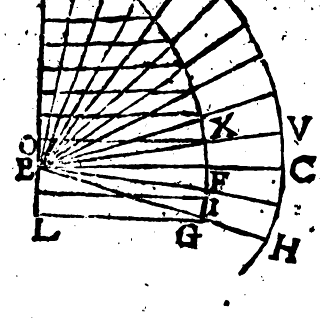
Hoc autem ex ipsa descriptione patebit.

PROBL. I. PROPOS. XIV.

Quadratricem lineam describere.

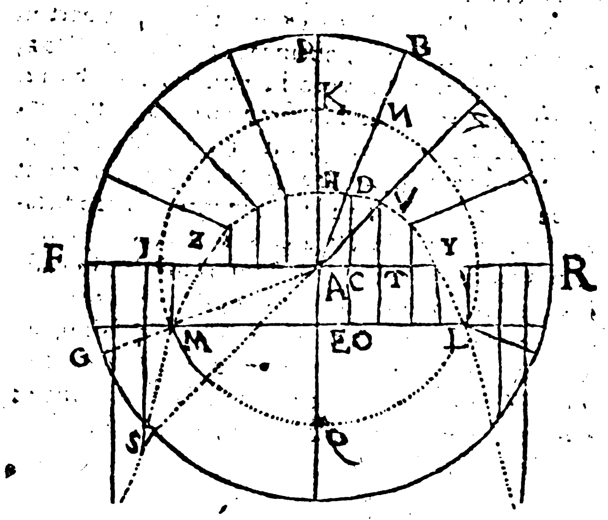
Facilior modus Geometricè Quadrandi circulum est linea Quadratrix, quam describit Clauius lib. 6. Elementorum ad finem iuxta antiquos, & lib. 7. Geometr. pract. Modus autem describendi talis est.

Centro B fiat portio circuli maior quadrante ACH. Et sit quadrans BAC; cuius circumferentia diuidatur in tot numero partes, in quot radius (quò plures erunt, eò exactior erit descriptio) nos diuisimus in 10. partes, quarum aliquæ diametri, in diametrum BA prolungatam in L, & aliæ circumferentiæ quadrantis AC, in ipsam pariter prolungatam, vt CH, insuper signatæ fuere. Ducantur deinde radij à centro B, ad circumferentiæ singulas partes, vt V, & H, & à diametri singulis partibus perpedicculares ipsi radio BA, vt sunt DE, & OX, & cæt. educantur donec terminent in singulos radios; prima in primum, vt DE secunda in secundum, & cæt. Deinde æquabili manu per puncta terminationum ducatur flexa AEFG, hæc enim erit linea quadratrix. Ideò verò prolungauimus ab F in G, quia cum F nequeat reperiri, cum radius sit idem, ac perpendicularis; reperitur tamen inueniendo puncta infra ipsam, qualia sunt F, I, G, quæ puncta, quo erunt plura, eo quadratricis curuitatem exactiùs prodent.



Probatur. Quia quadratrix est linea, quam diametri per circulum, & perpendicularis ipsi per ipsum diametrum motus proportionalis efficit, ita vt tot partes perpendicularis per diametrum suo motu conficiat, quot radius per circumferentiam: sed intersectiones assignatæ, per quas quadratrix ducitur tales sunt ea effectione: Ergo ea puncta in quadratrice sunt.

Aliã descriptionem lineæ Quadratricis inuenit in sua Cylomathia Vincentius Leotaudus Delphinas, de qua etiam acutissimè insignes proprietates demonstrat, est autem eadem, ac antiqua, sed auctior, ne dum circuli quadrante descripta: se toto circulo suis radijs intersectiones præbenbente, quam sic deducit prædictus auctor. Centro A describatur circulus cuiuscumque magnitudinis, & in plurimas æquales partes diuidatur incipiendo à P (nam quo plures erunt eo exactior erit descriptio) per quarum singulas à centro A radij emittantur, vt AP, AB, & cæt. Tum diameter FA in partes æquales inuicem tot, quot in circulo dessignatæ fuerunt diuidatur, & per singulas diuisiones perpendiculares erigantur, vt CD, & cæt. Etenim istæ initio facto ab AP radio, & prima parallela CD successiuè se intersecabunt, cum radijs V. g. in punctis D, & V per totum dimidium circulum; & idem dicas de parallelis, & radijs ad alteram partem circuli successiuè se ellongantibus à prædicto radio AP. Per istas ergo intersectiones successiuas ducenda est manu æquabili linea flexa punctata SHL, quæ erit quadratrix integra.



Ex descriptione Quadratricis, linearum, & circulorum, quę eam secant nomina, & definitiones licet haurire.

DEFINITO.

Circulus, & radius generans est ille, qui adhibetur in secunda descriptione ad totam Quadratricem describendam.

Talis est Radius AR, & circulus PRSF.

DEFINITIO II.

Centrum quadratricis idem est, ac circuli generantis.

Tale est centrum A.

DEFINITIO III.

Axis quadratricis est recta, quæ in verticem quadratricis terminat, & deinde ad alteram partem *partim in infinitum producitur, & Quadratricem in duas partes curuas dirimit. Cuius pars inter centrum circuli generantis, & verticem intercepta vocatur Basis seu Sagitta.*

Talis est HQ, quæ hinc terminat in verticem H inde ad Q in infinitum procedit, cuius pars AH Sagitta, seu Basis dicitur.

DEFINITIO IV.

Applicatæ sunt lineæ perpendiculares ipsi axi vtrinque in Quadratricem desinentes, & Primaria inter eas est portio diametri, quæ intra quadratricem concluditur.

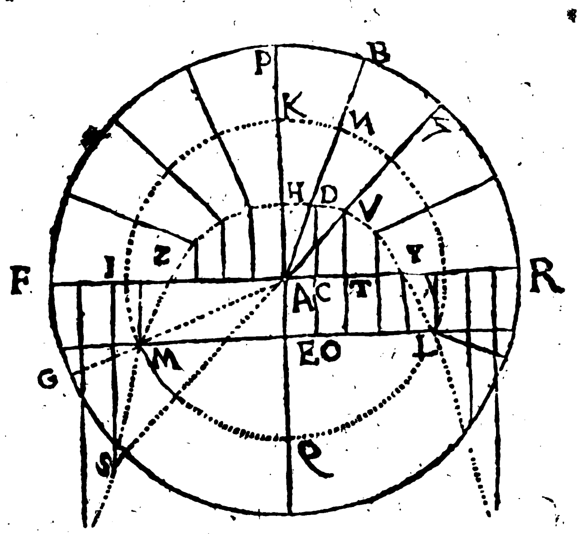
Itaque applica erit ML, & primaria erit ZY, quę transit per centrum A; estque portio diametri axi perpendicularis, quæ ab ipsa Quadratrice intercluditur.

PROBL. II. PROPOS. XV.

Dato centro quadratricis, eiusque ordinatim quacumque applicatâ ipsam quadratricem totam describere.

Datum sit futuræ Quadratricis centrum A, & applicata quęcumque EL, & oporteat totam quadratricem describere.

Centro A per verticem L applicatæ EL transeat circulus punctatus LKM. Tum hic arcus LKM interceptus in partes inuicem æquales secetur, sicut, & applicata EL parem multitudinem partiū, ac arcus interceptus, obtineat; hæc in punctis E, & O, & cæt. circulus verò in punctis K, N, & cæt. Destinetur itaque ad has circuli partes, radij, quos parallelæ à partibus applicatæ EDOV, & cæt. prodeuntes secent in D, V, & alijs, & hæc puncta erunt ad quadratricem. Et ad hoc, vt vlteriùs producatur ipsa Quadratrix vltra L, & M partes æquales, ac prædictæ, vsque quo possunt replicari in residuo arcus LQ signentur sicut, & par multitudo partium æqualium, vt EO in applicata prolungata extra Quadratricem numerentur. Nam successiuæ intersectiones parallelarum, & radiorum erunt ad Quadratricem, vt in figura ipsa videre est.



Probatus. Quia ducta RA per centrum diuidetur in partes æquales à parallelis, sicut, & circulus generans RBP in partes æquales à radijs productis diuiditur, & tot numero, tum semicirculi, tum diametri partes erunt: Ergo eodem pacto, ac si circulus primarius, & generans RPF, & diameter AR in partes æquales, & pari numero diuisus fuisset, puncta in quadratrice dabuntur.

Dices. Poterit occurrere, vt arcus LQ vltima pars non sit æqualis cæteris arcus KL.

Respondetur vltimam partem in Q terminantem in Quadratrice non esse necessariam, sicut nec vltima pars diametri, quæ terminet in R: quia parallela ipsi AQ radio ducta ABR non potest occurrere radio AQ, vt patet, cum sit ipsa eadem.

PROBL. III. PROPOS. XVI.

Radio ad quemcumque angulum ad axem constituto per dessignatum in eo quodcumque punctum deducere Quadratricem.

In eodem Schemate ductus sit radius AM ad axem PA faciens angulum GAP, & assignatum in eo sit punctum M.

Per punctum M ducatur circulus MKL, & ab eodem axi perpendicularis EM, quæ erit applicata. Vnde cum obtineas applicatam EM, & centrum A deduces per M datum punctum, & in dato radio AM Quadratricem ex præc. propos.

PROBL. IV. PROPOS. XVII.

Dato quouis Quadratricis puncto, & centro, punctum è diametro oppositum assignare.

Datum sit quadratricis punctum V, cui oporteat aliud è diametro oppositum definire. Per centrum A agatur ab V linea, & per centrum A, radius generans RAF, ad quam ab V puncto dato perpendicularis ducatur VT. A puncto T igitur sumatur TI æqualis generanti semidiametro RA, & ab I perpendicularis demittatur occurrens lineæ VA producte in S, & intersectio S erit in Quadratrice.

Probatur. Nam tot partes æquales enumerare debet arcus RZBPGS, quot dinumerat diameter RTI, vt parallela IS secet radiū VS: sed semicirculus additus ZPS constituit radium TS. Ergo semidiameter TI punctum I dessignabit. Siquidem iuxta documenta propos. 14. huius, tot partes debent fieri in semicirculo, quot in semidiametro generante.

COROLLARIVM

Hinc patet etiam modus continuandi in maximam distantiam Quadratricem. Quoniam punctis datis D, V, & cæt. puncta opposita M, S reperiri poterunt, per quæ producatur.

THEOR.

THEOR. I. PROPOS. XVIII.

Perpendiculares à Quadratrice ad axem deductæ ita sunt ad totum diametrum, vt arcus à radio interceptus, & axi, ad totum semicirculum.

SIt quadratrix MHL, & à centro eodem A eiusdem fig. ac præced. tum circuli, tum quadratricis educatur radius AG, & à puncto M, quo secat quadratricem, demittatur applicata EM. Dico *ita esse hanc applicatã* EM *ad totum radium; vt arcus* PG *ad semicirculum*.

Probatur ex effectione, vel defin. 1. Qualis pars est arcus PG semicirculi talis pars est AZ semidiametri. Ergo ita erit arcus BG ad semicirculũ vt AZ ad radium; sed applicata EM est æqualis, cum sit inter parallelas ipsi AZ. Ergo etiam applicata EM ita erit ad semidiametrum, vt arcus PG, ad semicirculum, vel etiam *conuertendo* diameter ad applicatam, vt semicirculus ad arcum.

COROLLARIVM.

HInc enascitur esse quoque applicatam ad applicatam, vt circuli arcus ad arcum ab applicatarum radijs, vsque ad axem AP deductum. Namque omnes applicatę habent eandem proportionem ad diametrum, quam arcus intercepti à radijs per verticem applicatarum transeuntibus obtinent ad semicirculum V. g. in fig. sequenti AM est ad radium, vt arcus ACK ad semicirculum, & EL est ad radiũ, vt arcus CK ad semicirculum, ergo *conuertendo* radius est ad FL, vt semicirculus ad arcum CK quare ex *æquo*, vt MA ad LF, ita arcus ACK ad arcum CK.

THEOR. II. PROPOS. XIX.

Arcus ab extremo applicatæ ductus est ad applicatam, vt radius ipsius ad sagittam.

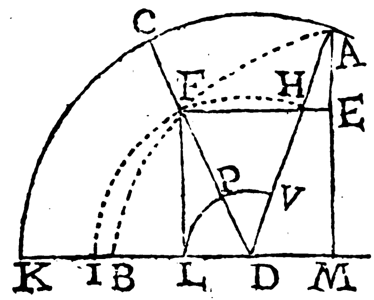
SIt sagitta DB applicata MA, circuli arcus ACK, & diameter eius AD, qui prodeant ab extremo A. *Dico ita esse*. Arcum ACK ad applicatam MA, vt radius AD ad sagittam DB.

Probatur. Per reductionem ad impossibile. Nam si non est ACK arcus ad MA applicatam, vt radius AD ad sagittam DB; erit forte ad maiorem, quàm ipsa sagitta. Sit ergo, si ita placet ACK ad MA, vt AD ad DI maiorem, quam BD.

Casus, & Progressus 1. Quoniam ergo est ex aduersarijs, vt ACK ad AM, ita AD ad DI, & vt propos. 45. lib. 6. element. sit quoque arcus ACK ad HFI arcum, vt AD ad radium DI. Consequenter proportio arcus ACK ad AM applicatam, & ACK arcus ad arcum HFI erit eadem proportio, ex prop. 16. lib. 5. cùm sit eadem proportioni tertiæ AD ad DI.

Quamobrem, cùm eadem quantitas arcus ACK ad duas AM radij, & HFI arcus eandem dicat proportionem, ex 9. lib. 5. erunt inuicem arcus HFI, & applicata AM æquales.

Progress. 2. Deinde, cùm ex anteced. Coroll, sit arcus ACK ad arcum CK, vt applicata AM ad applicatam FL, & idem arcus ACK ad minorem arcum CK, vt arcus HFI ad arcum minorem IF, esset consequenter eadem proportio ex 16. lib. 5. applicatę AM ad FL perpendicularem, & applicatam, vt arcus HFI ad arcum minorem FI, cùm sit eadem proportio, quæ ACK ad arcum minorem CK. Cùm



ergo sit AM applicata ad applicatam LF, vt arcus HFI ad arcum minorem FI, erit etiam *permutando* applicata AM ad arcum HFI maiorem, vt applicata FL ad arcum minorem FI. Sed ex primo progress. cognouimus esse AM æqualem ipsi arcui HFI: Ergo, & applicata LF esset æqualis arcui FI, quem subtendit, quod est absurdum. Non erit itaque ACK ad AD, vt AM ad DI. Cùm ergo non sit AM ad maiorem DI, erit forte ad minorem.

Casus 2. Progress. 3. Arcus itaque ACK sit ad AM applicatam, vt radius AD ad aliquam DL minorem; quàm sagitta DB; & eodẽ modo sequetur absurdum.

Siquidem ab aduersarijs ponitur arcus ACK ad applicatam MA, vt AD radius ad radium DL, & propos. 45. lib. 6. element. vt ACK arcus est ad arcum VPL, ita est AD radius ad radium DL.

Quadere ex 16. lib. 5. erit eadem proportio arcus ACK ad diametrum AD, & arcus ACK ad arcum LPV, cum sit eadem, ac tertia proportio AD ad DL; cùmque idem arcus KCA ad duo applicatam MA, & arcum LPV eandem dicat proportionem, essent DA & arcus VPL æquales.

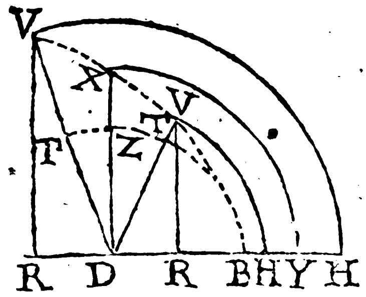
Progress. 4. Deinde cum ex anteced. sit arcus ACK ad arcum minorem KC, vt applicata AM ad applicatam PL, & idem arcus ACK eam proportionem dicat ad arcum minorem CK, vt arcus VPL ad arcum se minorem PL, esset consequenter eadem proportio ex 16. lib. 5. applicatæ AM ad PL, quę VPL arcus ad arcum minorem PL. Quapropter *permutando*; ita esset AM ad VPL arcum, vt FL ad LP; sed applicata AM, & arcus VPL ostensi sunt æquales in 3. progr. Ergo etiam FL, & arcus LP essent æquales, quod non potest esse; nempe, quòd tangens sit æqualis arcui, cuius est tangens.

Cùm itaq; arcus ACK nõ possit esse ad AM applicatam, vt diameter AD ad maiorem DI, quam sit sagitta DB, ex primo casu, neque ad minorem ex 2. casu DL; Radius AD erit ad æqualem ipsi sagittæ DB, taliter qualis est arcus ACK ad applicatam AM, quod erat probandum.

COROLLARIVM I.

HInc est, si quando contingat applicatam esse idem, ac diametrum alicuius circuli, vt est DX in fig. seq. quadrantis XY, quod radius ille, & applicata sit media proportionalis inter sagittam, & quadrantem: itaque esse DB sagittã ad applicatam DX, vt eadem DX radius quoque ad arcum XY, qui est quadrans, & è contra *conuertendo* quadrantem XY esse ad diametrum XD, vt idem XD applicata quoque ad sagittam DB.

COR-



COROLLARIVM II.

HInc quoque enaſcitur, quòd ſi ſagitta Quadratricis ſtatuatur ſemidiameter alicuius circuli, diameter DX, erit æqualis quadranti illius ZB. Nam probatur iuxta tenorem præced. pr. & Coroll. quòd cum ſit arcus XY ad DX applicatam, vt DX ad radium DB, & ſit quoque ex propoſ. 43 lib. 6. elem. arcus XI ad arcum ZB, vt radij DX ad radium DZ, ſeu DB ſagittam quod conſequenter ſit eadem proportio arcus XY, qui eſt quadrans ad quadrantem ZB, quæ eſt eiuſdem arcus XY ad radium XD, cum tertiæ proportioni ſit eadem radij XD ad radium DZ, quare cum idem arcus XY ad duas quantitates ſemidiametrum XD, & ZB arcum eandem dicat rationem erunt arcus ZB, & ſemidiameter DX æquales; cumque ZB ſit quadrans DX quater aſſumpta circulum æquabit, cui ſit ſagitta BD radius.

COROLLARIVM III.

INſuper colligitur quoque ex eodem argumento, & fig. præced quamcumque applicatam RV eſſe æqualem arcui TB per verticem B ducti; cui ſagitta quadratricis pro radio deſeruiat.

Quoniam enim ex præced. eſt radius DV, ad ſagittam BD, vt arcus HV ad applicatam RV, & arcus HV, ita eſt ad arcum TB, vt diameter VD ad diametrum TD, ſeu ſagittam BD æqualem erit quoque ex 16. lib. 5. arcus HV ad applicatam RV, (cum eidem proportioni DV ad BD dicant conſimilem proportionem) vt arcus HV ad arcum TB: Cum ergo idem arcus HV, tum applicatæ RV, tum arcui BT eandem dicat proportionem arcus BT, & applicata RV erunt æquales.

PROBL. V. PROPOS. XX.

Sagittæ, atq; applicatæ arcum tertium proportionalem aſſignare.

SIt Quadratrix ABCin fig. ſeq. & ſagitta DA, necnon, & applicata EC, & oporteat arcum circuli reperire tertium proportionalem, ita vt ſagitta AD ſit ad applicatã EC, vt ipſa ECad arcũ reperiendũ.

Longitudo applicatæ CB traasferatur ſuper radium DC, & ſit DH; perque punctum H ducatur IB parallela axi, & ſecet in B Quadratricem, perque B ducatur radius BD, & centro D quadratricis fiat circulus interuallo EC, ſeu DH æqualibus. *Dico innentum eſſe, quod quærebatur, & ſagittam* DA *eſſe ad applicatam* EC, *ſeu* DH, *vt* DH *ad arcum* HL.

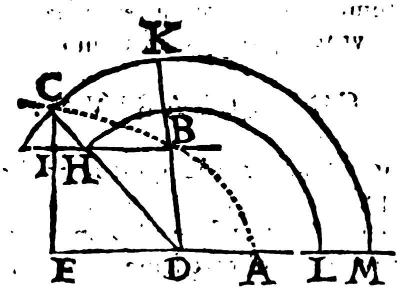
Probatur. Ita eſt ſagitta AD ad radium DC, vt applicata EC ad arcum CKM *conuertendo* propoſ. 16. & *permutando*. Ita eſt ſagitta AD ad applicatam EC, ſeu DH, vt radius DC ad arcum CKM. Sed vt radius DC ad arcum CKM, ita eſt radius DH ad arcum HL ex propoſ. 46. lib. 6. elem. ergo *ex æquo*, vt eſt DA ſagitta ad DH, ſeu æqualem EC applicatam; ita eſt DH, vel EC ipſa ad arcum HL; Ergo arcus HL erit tertia quantitas proportionalis, quam animo inſedetat reperire.

Si verò quis cupiat reperire tertium proportionem in ipſo arcu MKC id efficiet ex propoſ. ſequenti.

PROB. VI. PROPOS. XXI.

Sagittæ, & applicatæ tertium proportionalem arcum reperire in ipſo arcu ab applicatæ extremo prodeunte.

FIant omnia, quæ in præced. praxi, & ſemidiameter DB protendatur vſque in K ducto arcu CKM per extremum applicatæ EC; & dico *arcum* KM *eſſe tertium proportionalem*; & ita eſſe ſagittã AD ad radium DC, vt radius DC ad KM arcum.



Probatur Progreſſ. 1. Vt ſemidiameter DC ad radium DH, ita eſt arcus CM ad arcum HL, ex prop. 45. lib. 6. Sed vt CD ad HD; ſic ob parallelismum linearum in triangulo DCE eſt CE ad IE: ergo, vt eſt CE ad IE, ita eſt arcus CKM ad arcum HL.

Progreſſ. 2. Sed etiam in eadem proportione eſt arcus ipſe CKM ad ſui arcum minorem MK, quã CE ad IE ex ipſa cõſtructione quadratricis ex Coroll. propoſ. h. 18. Ergo idem arcus CKM duobus arcubus KM, & HL ex primo progr. eandem dicit proportionem, quam CE ad EI. Quare KM, & HL licet inæqualium circulorum erunt æquales ex propoſ. 9. lib. 5. Cum ergo, & ſagitta AD applicata EC, & HL ſint continuè proportionales ex præc. etiam AD, & EC, & arcus KM erunt continuè proportionales.

THEOR. III. PROPOS. XXII.

Quadratrix ad axem Aſymptota eſt, & numquam axem conſequi; ſed ſemper ad illum accedere poteſt.

PRobatur. Nam in fig. prob. 1. quanto magis diuiditur CV in minores, minoreſque partes in ratione ſubdupla, ſemper tamen remanet pars reſidua ex Tract. 16. de progr. lin. propoſ. 12. Quare numquam poterimus conſequi punctum, quod ſit in ipſo BC; verùm ſemper aliquatenus accedendo minus perpetuò remouebitur, & materialiter quidem accedet, non ſpeculatiuè, vt dixi Tr. 1. prop. 6.

EXPEN-

EXPENSIO V.

De Quadratricis, & Elicis comparatione.

QVoniam non inutilem hanc comparationem agnoui: hinc est, quod illam præterire non potuerim, pro quo sit.

DEFINITIO

COnnata Helici Quadratrix ea dicitur, quæ habet semidiametrum circuli se generantis æqualem diametro circuli generantis Quadratricem.

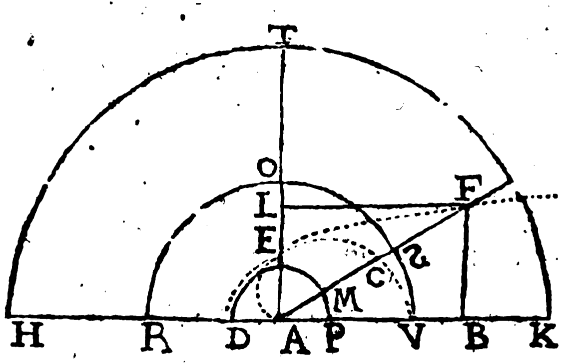
Est igitur connata Helix DE CV Quadratrici DEF; quòd semidiameter eam generans, & primam reuolutionem complens AH, vel AK circuli HTK sit æqualis diametro VAR circuli ROV generantis Quadratricem, & ideo AR radius est medietas radij AH.

THEOR. I. PROP. XXIII.

Applicata Quadratricis, & radius Helicis, qui productus ei connectatur ad verticem in ipsa quadratrice, sunt æquales.

SIt AC radius Helicis, qui productus in quadratrice DEF inueniat extremum F, applicatæ BF. Dico *huic applicata* BF *radium Helicis* AC *æqualem esse.*

Ducaturque gratia ostendendæ propos. à puncto F axi parallela FL.



Probatur ex constructione Helicis eadem ratio reperitur radij totius AS ad radium AC, quæ est arcus ROV ad arcum ROS. sed, quæ proportio est arcus ROV ad ROS arcum, eadem ex constructione Quadratricis est radij OA ad radium AL. Ergo radius OA, seu AV habet ad duas AL, quę æquatur BF applicatæ, & ad radium Helicis AC eandem proportionem, quam arcus ROV ad arcum ROS. Ergo AC, & AL, vel BF erunt æquales ex propos.9. lib.5.

THEOR. II. PROPOS. XXIV.

Omnes radij Helicis abscindunt à circulo, cui radius est sagitta quadratricis, arcus sibi æquales.

SVpra ostensum est propos.20. Coroll. 2. omnes applicatas, vt BF esse æquales arcubus DM circuli DMP, cui radius est sagitta à radio, vt AF, terminante in ipsum applicatæ extremum F recisis: sed applicata BF ex præced. propos. ostensa est æqualis radio Helicis, ergo radium Helicis æqualis est arcui MD, cui radius est sagitta AD.

EXPENSIO VI.

De linea Ellipsi.

ELlipsis est inter omnes figuras Mathematicas flexas, & in se se redeuntes post circulum celebrior. Estque veluti circulus figura plana, & etiam solidis corporibus conueniens.

DEFINITIO.

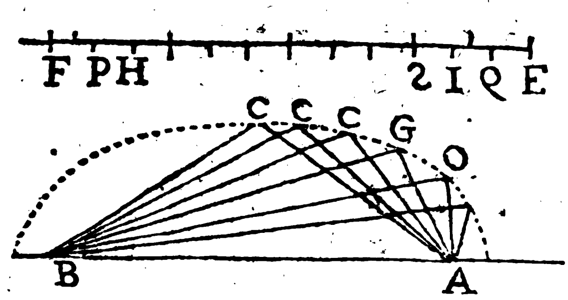
ELlipsis est motus puncti circa duo puncta talis, vt quantùm accedit ad alterum, tantùm remoueatur ab altero.

Sint A, & B duo puncta, punctumque aliud C ita moueatur per locum CCCCO, vt quantùm remouetur à puncto B, tantùm accedat ad punctum A, linea hoc motu descripta Ellipsis est: an verò sit illa ipsa, quæ est sectio coni, id erit videre in Conicis, cum ostendemus hanc ipsam proprietatem, & illam obtinere, & sic quoque, vt hęc illam describi.

PROBL. I. PROPOS. XXV.

Lineam Ellipticam describere.

LInea BF in partes, quascumque placeat, diuidatur, & deinde super alteram duobus punctis, vtcumque electis BA interuallo V.g. QP, assumatur FI, & in B facto centro describatur arcus, & reliqua assumatur IE, & facto centro in altero puncto A, rursùs arcus versus easdem partes describatur, vbi se decussant in O Ellipsis circumferentia transiet. Simili modo itaq; inueniantur alia puncta GCCC, & cæt. tum infra, tum supra lineam AB, & per illa ducatur flexa. Nam illa erit Ellipsis, quam definiuimus.



Patet. Singula puncta ex constructione, tantùm sunt remota ab vno puncto, quantùm alteri approximant, nam quantum est FI, & IE, quâ signatum est tantùm est OS, & SE, qua punctum C inuentum est, & sic de cæteris.

Hoc autem fit mechanicè in duobus punctis A, & B clauos infigendo, & chorda AOB liberè circum excurrat; Nam si stylo O; dum AO, & OB Chorda tensa tenetur linea imprimatur in subiecta planitie, ea erit ellipsis; infra tamen eam vberiùs describemus, cùm de Conicis.

EXPENSIO VI.

De linea Conchili.

Conchilis est inuentio Nicomedis non inutilis. Nam per illam inter duas extremas interponit duas medias proportionales, & angulum quemcumque in tres partes diuidit; deseruitque in Architectura ad tumores columnarum ritè delineandos, vt apud Vignolam.

PROBL. I. PROPOS. XXVI.

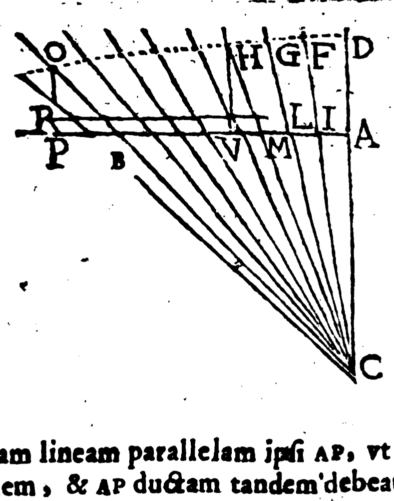
Conchilem describere.

Linea ducta AB, ducatur ei perpendicularis CD & electo in ea quolibet puncto C plurimæ rectæ ducantur quolibet interuallo ab inuicem dissitę, (quò propinquiores erunt eò meliùs) & sint CD, & CF, & CG, & CH, & cæt. Deinde arbitrarium interuallum AD super quamlibet lineam transferatur, à linea AP versùs alteram partem, qua lineæ non conueniunt, & sint IF LG, & MH, æquales ipsi arbitrariæ AD. Tandem per puncta extrema D, F, G, H, linea flexa æquâ manu ducatur, *& erit Conchilis.*

THEOR. I. PROPOS. XXVII.

Conchilis est linea Asymptotos: idest nunquam conueniet cum AP, licet semper ei appropinquet, conueniet tamen cum qualibet alia illi parallela, etiam si propinquissima.

Probatur prima pars; quòd semper propinquior fiat. Nam data basi æquali MH V. g. & BO, cum angulus PBO sit minor angulo VMH, etiam perpendicularis minori angulo opposita PO, erit minor, quam VH. Quòd verò nunquam conueniat, patet, quia ex constructione punctum quodlibet conchilis, vt O distat à quolibet puncto lineę AB, quanta est BO, æqualis AD, quòd verò quam-

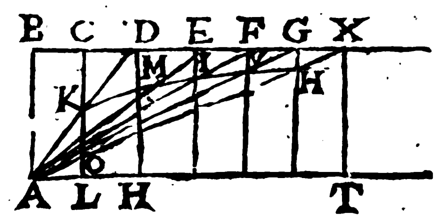


libet aliam lineam parallelam ipsi AP, vt RL inter Conchilem, & AP ductam tandem debeat secare, patet, quia producta in infinitum semper distantiam diminuet. Ergo etiam minimâ datâ qualibet minor euadet. Quare etiam distantiâ PR minor euadet.

PROBL. II. PROPOS. XXVIII.

Aliam lineam Conchilem describere, quæ nec minimam, nec maximam distantiam assequi queat.

Super lineam BX plurimæ perpendiculares æquidistantes erigantur, vt AB, & CL, & cæt. atq; electo pūcto A ducantur plurimę rectę ad puncta D, E, F, G, X, & cæt. nam quælibet perpendicularem antecedentem secabit. V. g. quæ terminat ad D, antecedentem perpendicularem CL in puncto K, quæ finit in I secabit DM in M, & cæt. Si ergo p istas omnes intersectiones describatur linea KH. Dico *esse conchilem talem*, quæ nec ad maximam concham, seu distantiam à linea AT, in quâ maior concha est, nec ad minimam distantiam à linea AT possit peruenire.



Probatur prima pars. Nam puncta K, M, I, V, & H, quò magis procedunt, eò viciniora sunt lineæ BX. Nam ob parallelismum linearum BA, & CK, vt est CD ad DB, ita est CK ad AB: sed CD est dimidia AB, ergo CK erit dimidia AB; rursus, vt DB ad EB, sic DM ad BA: sed DB est tertia pars EB. Ergo etiam DM erit tertia pars AB, & sic de reliquis, cum ergo eiusdem AB linea DM sit $\frac{1}{3}$, & CK $\frac{1}{2}$, patet esse minorē; ergo semper XH propinquior fiet: Nunquam tamen perueniet. Nam AX semper distabit à lineâ BX in puncto ab X remoto. V.g. in H. Sed talia sunt omnia pūcta p quę ducitur KH, ergo nunquam ad lineam BX perueniet, & tamen semper accedet. Sed accedendo ad BX semper concha fit maior, & distans ab AT. Ergo nunquam ad maximam suam concauitatem perueniet, & tamen semper accedet.

Probatur secunda pars. Quod nec ad minimam peruentura sit. Nam minima esset in linea AB, cum si vltra AB producatur rursus ad BX prolungatam accedat: sed ad AB nunquā perueniet, & ideo, nec ad minimam distantiam ab AT.

Probatur minor. Nam non potest produci versùs AB; nisi subdiuidendo lineam BC, primo per medium; deinde alteram partem mediam, vt sit $\frac{1}{4}$, & hanc mediam, vt sit $\frac{1}{8}$: sed hoc modo, vt ex propos. 12. Expens. 4. de linear. Geomet. progress. patet, nunquam sectio finitur: Ergo nec vnquam ad AB conchilis KH peruenire potest.

EXPEN-

EXPENSIO VII.

De lineæ Ciclicæ descriptione.

Linea Ciclica est illa, quam in Cęlo peragunt planetæ dum Epiclis prouoluuntur, & quam rotæ Clauus suo extremo describit, dum Currus trahitur, quamuis Ciclica planetarum suos anfractus in gyrum torqueat, at rotę amfractus suos in directum continuet.

DEFINITIO.

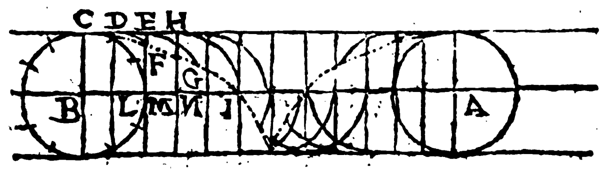
Linea Ciclica describitur à motu puncti circa circulum, dùm ipse circulus suo centro motu recto, seu circulari mouetur.

Itaque si moueatur V. g. circa rotam aliquod punctum ipsius rotæ, & ipsa rota vertendo se circa axem transferatur de loco ad locum efficitur quædam linea flexa, quæ Ciclica vocari potest.

PROBL. I. PROPOS. XXIX.

Lineam Ciclicam per puncta describere.

Linea Ciclica triplex est, vel enim est motus centri velocior, quam puncti in circumferentia circuli, vel æquè velox, vel minus velox; sed quocumque modo se habeat, linea quidem diuersa est, sed eodem modo describitur. Sit linea AB ęqualis circuli, cuius centrum B, circumferentiæ; cùm silicet motus centri æquè velox est, ac motus puncti in eius circumferentia, vel maior, cùm velocior est motus centri, quàm puncti in circumferentia, vel minor, cùm tardior est motus centri, quam motus puncti in circumferentia. Diuidaturque in quaslibet partes V. g. 12. eriganturque perpendiculares lineæ AB æquales diametro à singulis partibus lineæ AB, & in tot



numero partes diuidatur circulus, & facto centro in quibuslibet punctis LMN, & cæt. diuisionum lineæ AB describantur portiones circulorum: Sitque DF vni parti circuli æqualis EG, duabus, HI tribus, & cæt. Si ergo per puncta CFGI, & cæt. extrema arcuum transeat linea æquabili manu ducta, hęc erit linea Ciclica, quam silicet quodlibet punctum in rota signatum describit, dum currus mouetur, vel planetæ in epiciclis describunt, quę differt ab ea in eo, quod rectę perpendiculares, vt CB & LD, & cæt. sunt radij excentricorum circulorum & ad centrum alterius magni circuli tendunt, cui est circumferentia linea BA.

TRACTATVS XIX.

De Angulis.

MVlta de Triangulis egit Euclides lib. 1.: ſed ea erant elemetaria, quæ non ab alijs pendebant, ſed potiùs alijs ſequentibus fundamenta vniuerſaliſsima ſternebant. Modò de ipſis triangulis, quæ elementaria non ſunt tradenda, quæ tamen neceſſaria ad multa in ſequentibus percipienda.

EXPENSIO I.

De baſi triangulorum, atque lateribus in vnum verticem conuenientium.

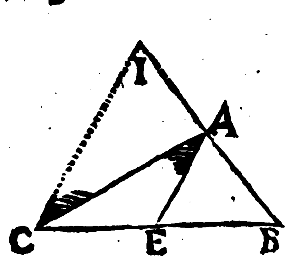
HAc Expenſio neceſſaria eſt, tum figuris Iſoperimetris percipiendis tum tractatui de Sphęricis, tum Stereometriæ, & multis alijs.

THEOR. I. PROPOS. I.

Si duo trianguli crura inæqualia fuerint, ducta à vertice recta, quæ bifariam baſim ſecet, hæc diuidet angulum, eritque maior anguli pars minori cruri adiacens, minor verò maiori.

SIt triangulum ABC, & AE diuidat baſim in duas partes æquales BE, & EC. Dico *angulum non eſſe ex æquo diuiſum*, ſed *angulum album apud* A *adiacentem cruri minori* BA *eſſe maiorem angulo nigro apud* A, *adiacente cruri maiori*.

Progreſſ. 1. Ducatur CI parallela AB; eritque producta AI æqualis cruri minori BA; Quod patet: Nam in triangulo IBC ob paralleliſmum linearum AE, & IC, vt eſt BA ad BI ex 4. lib. 6. elem. ita eſt BE ad BC: Quare ex 16. lib. 5. elem. ablatis proportionalibus BA, & BE, reliqua erunt in eadem proportione; ſed EC eſt dimidium BC ex hypotheſi: Ergo etiam AI erit dimidium IB, & ideo æqualis ipſi BA.

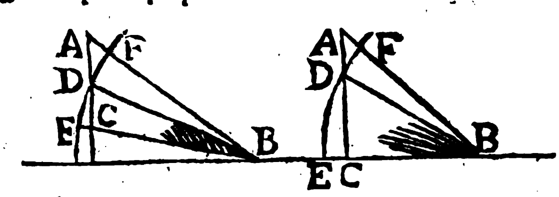


Progreſſ. 2. Cum ergo AI æquet lineam BA, & ex hypotheſi AC ſit maius, quã crus AB, erit maius, quàm producta AI. Vnde erit maior angulus I, quàm niger apud C, vt ſubtendens AC maiorem baſim, quam AI. Sed niger apud C eſt æqualis nigro apud A trianguli BAB ex prop. 30. lib. 1. elem. ob lineas parallelas: Ergo angulus albus apud A in triangulo BAC; eſt maior nigro apud A in triãgo BAC eodem, quod erat probandum.

THEOR. I. PROPOS. III.

In omni triangulo rectangulo ſegmentum cruris ad reliquum adiacens angulo recto habet maiorem proportionem, quàm angulus ipſi inſiſtens, angulo inſiſtenti reliquo ſegmento.

SIt triangulum ABC, & ſecetur in D. Dico *ſegmentum* AD *habere maiorem proportionem ad ſegmentum* DC, *quàm angulus albus ad angulum nigrum apud* B *perpendiculari adiacentem*.



Probatur. Ex 1. lib. 6. Elem. ita eſt triangulum BAD ad triangulum BDC, vt eſt baſis AD ad baſim DC, & ex 39. lib. 6. vt eſt ſector FDB ad ſectorem BDE, ita eſt angulus albus ad nigrum apud B. Triangulum verò ADB. eſt maius, quàm ſector FDB, & ideo eſt proportio maioris inæqualitatis, at triangulum DBC minus, quàm ſector DEB; ideo eſt proportio minoris inæqualitatis. Proportio verò maioris inæqualitatis maior eſt, quàm minoris inæqualitatis; ſiquidem maior continet minorem, & inſuper aliquid, at minor ne dum non continet, ſed aliquid ei deficit. Quare maior erit proportio trianguli BAD ad ſectorem BFD, quàm trianguli BDC ad ſectorem, DEB, quo poſito propoſ.

Probatur maior eſt proportio trianguli BAD ad ſectorem BFD, quàm trianguli BDC ad ſectorem BED: Ergo *permutando* maior erit proportio trianguli

anguli BAD ad triangulum DBC, quàm sectoris FDB ad sectorem DEB: Sed hæc triangulorum est eadem, vt supra notauimus, quę basium. Proportio verò sectorum eadem est, ac angulorum ex 39. lib. 6. ergo erit maior proportio basis AD ad basim DC quàm anguli albi ad nigrum apud B.

COROLLARIVM I.

Hinc & ex 39. lib. 6. elem. deducitur quoque, quod habet maiorem proportionem segmẽtum AD ad segmentum DC; quam arcus FD ad arcum DE: quia proportio arcuum est eadem, ac angulorum suorum: Vnde cum AD ad DC segmenta dicant maiorem proportionem, quam anguli albus ad nigrum; dicent etiam maiorem proportionem; quam arcus FD ad arcum DE illis subtensos.

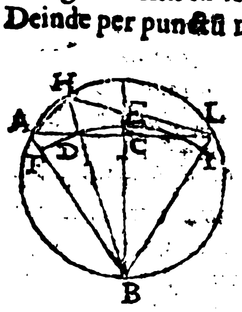
COROLLARIVM II.

Hinc etiam videre licet, quòd etiam si segmẽtum non immediatè adiaceat, angulo recto, attamen remotius dicet semper maiorem proportionem ad propinquius, quàm angulus remotiori insistens, angulo propinquiori insistente. Sic DA dicet maiorem proportionem ad AB angulus albus ad nigrum apud A, quòd triangulum DAB sit maius sectore BDF. Triãgulum verò BDC sit minus sectore BDE, vnde in figura sinistra intexes idem argumentum, quòd in propositione deductum est.

THEOR. III. PROPOS. III.

Maior arcus habet maiorem proportionem ad minorem; quam chorda maioris ad chordam minoris in semicirculo.

Dico LH *arcum habere maiorem proportionem ad* HA; *quam chorda* LH *ad chordam* HA. Ducatur LA, & diuiso arcu ABL bifariã in B ducatur HB, & angulus LHA in segmento erit sectus bifariam. Deinde per punctũ D centro B, arcus ducatur IEF.



Basis autem LA secta quoque sit bifariam ab EB in triangulo æquicruro LBA.

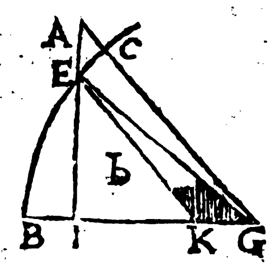
Prob. ex præc. maior est proportio DA segmenti ad DC segmentum, quàm arcus DF ad DE arcum ex 3. h. Ergo inuertẽdo DC ad DA erit minor proportio, quam DE ad DF. Ideoque *componendo* CD, & DA segmentorum erit minor proportio ad DA segmentum; quam ED, & DF arcuum ad DF arcum, & ideò dupli segmentorum LA erit minor proportio ad segmentum DA, quàm dupli arcuum IEF ad arcum DF. Quadere *diuidendo* erit minor pportio LD partis ad DA compartem basis LA, quam arcus ID ad DF, sed vt pars LD ad compartẽ DA basis, ita est crus ad LH crus HA ex 3. lib. 6. elem. ob angulum H bifariam sectum, & vt arcus ID ad DF ad centum, ita est arcus LH ad HA ad circumferentiam ex 39. lib. 6. Elem. Ergo erit minor proportio LH ad HA chordæ, quam arcuũ LH ad HA. Vnde LH arcus habebit maiorem rationem ad HA; quam chordæ LH ad chordam HA.

THEOR. IV. PROP. IV.

In omni triangulo rectangulo erit maior proportio totius cruris ad suum segmentum angulo recto adiacens, quàm anguli acuti adiacentis segmento ad angulum acutum adiacentem ipsi cruri.

Sit triangulum rectangulum EIG, & ab angulo acuto quolibet V. g. E ducatur recta EK ad latus oppositum IG. Dico *maiorem esse rationem cruris* GI *ad* IK, *quàm anguli* EKI *ad angulum nigrum* G.

Ab angulo itaque G ducatur parallela GA ad EK, centro G transeat per verticem E circulus BEC; & quia longior est AG basis, crure GB ob angulum obtusum, quem subtendit, apud B; ideo circulus BEC secabit intra triangulum AEG, & sector CGE minor erit triangulo GEA.



Rursus; quia GE maius est, quam crus GI ob angulum rectum, quem subtendit, circulus EB extra triãgulum cadet; maiorque erit sector BEG triangulo IEG.

Aduertendũ autẽ est triangula GEI, & AGE, quod sint eiusdem altitudinis se habere ad inuicem, vt bases ex 1. lib. 6. & sectores item, vt supra monuimus, vt anguli inuicem se habent ex 39. lib. 6. Elem.

Probatur. Triangulum GAE est maius sectore GCE, quare si comparentur eidem triangulo GEI maior erit proportio trianguli maioris, quam sectoris ad dictum triangulum GEI: Sector verò iste GCE habet maiorem rationem ad dictum triangulum GEI, quàm ad alterum sectorem GEB triangulo ipso GEI maiorem, quare multò maiorem rationem habebit triangulum AGE ad triangulum GEI, quàm sector GCE ad sectorem GEB; cùm multò maius sit triangulum AGE comparatum triangulo GEI, & sic eius comprehendet magis, quam sector GCE respectu sectoris EGB: quare etiam cõponendo triangulum AIG compositum; ad triangulum simplex GEI, maiorem rationem habebit, quam sector totus compositus GCB ad simplicem sectorem GEB; Et ideo etiam angulus totus seminiger ad G ad angulum nigrum apud G, vt præmonuimus, & ideo insuper ita erit basis tota AI ad basim IE segmentum; sed vt est ex 4. lib. 6. AI ad segmentum IE; ita quoque GI tota ad segmentum KI; Ergo GI habebit maiorem proportionẽ ad KI, quam angulus semialbus G parti nigræ; sed angulus totus semialbus G est æqualis angulo K ob parallelismum linearum GA, & KE: Ergo tota basis GI dicet maiorem proportionem ad segmentum KI; quam angulus K ad angulum nigrum G.

COROLLARIVM.

Collige quoque, quod erit quoque ex segmentum in maiori proportione ad KI, ac angulus GEK, quod opponitur nigro G, ad ipsum G nigrum; quia probatum est esse in maiori proportione AE ad EI; quam angulus albus G ad nigrum G; sed angulus GEK est æqualis albo; ergo AE ad

EI,

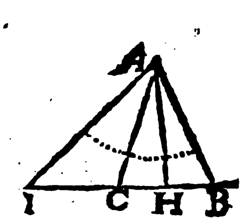
BI, & ideo GK ad KI ob eandem proportionem, erit in maiori ꝓportione, quã GEK angulus ad nigrũ G.

THEOR. V. PROPOS. V.

Si sit maior proportio lateris ad latus, quam basis ad basim in triangulis duobus alterum crus commune habentibus, & basim eiusdem lineæ; erit etiam angulus subtensus segmento basis maiori maior angulo minori segmento insistente.

SIt ABI triangulum; & in eo ducatur AH, sitq; maior proportio AI ad BA, quàm segmenti IH ad segmentum HB. Dico, *& angulum* HAI *esse maiorem angulo* BAH.

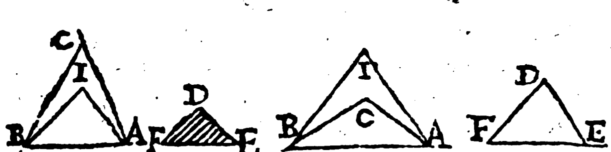
Prob. Nam, cum sit maior ratio HI, detruncetur talis portio, vt sit AC ad AB, vt CH ad HB ex propos. 3. lib. 6. erit angulus HAC ęqualis angulo BAH. Ergo HAI erit maior, vtpote, quòd HAC sit eius pars.



THEOR. VI. PROP. VI.

Si dentur duo triangula, quorum lateris ad latus ratio sit maior, quam basis ad basim angulus verticalis erit minor. At si sit minor laterum proportio, quam basis, erit angulus maior.

QVoniam latera ponuntur maioris proportionis, quam bases, & AC est ad ED in maiori proportione, quam AB ad EF. Pone AI esse ad ED vt AB ad EF, ideo quoq; AC habebit maiorem proportionem ad ED, quam IA ad ED. Vnde ex 10. l. 5. AC maior erit, quã AI. Sic dicas de crure BI si fiat ad DF, vt AB ad EF bases, quare erit maior proportio CB ad DF quam IB ad DF; erit itaque maior, vnde crura, cum sint maiora ex 21. lib. 1. conuenient extra triangulum, & minorem angulum concludent, quam IA, & IB & minorem, quam EDF, quia ex 5. lib. 6. sunt triangula ABI, & EDF æquiangula.



Sic dicas de minori proportione laterum, quam basium. Si enim dicat minorem proportionem AC ad ED, quam AB ad EF; fiat AI ad ED, vt AB ad EF, quare AC dicet minorem proportionem ad ED, quam AI ad ED: Vnde erit minor AC, quam AI. Sic dicas de latere BC, quod dicit minorem proportionem ad FD, quam AB ad EF, quare si fiat IB ad DF, vt AB ad FE, crus CB dicet minorẽ proportionẽ ad FD, quã BI ad FD, quare erit crus CB minus ex propos. 10. lib. 5. quam BI; ideoq; triangulum AIB erit maius, quam triangulum ACB quod erit minus angulusq; ACB maior, quam AIB, sed AIB est æquiangulum triangulo EDF, ex 5. lib. 6. Ergo ACB erit angulus maior, quam angulus EDF.

THEOR. VII. PROP. VII.

Bases trium triangulorum in vnum verticem conuenientium erunt continuè proportionales, si anguli duo excessuum sint æquales, & medium sit isosceleum.

SInt triangula ABC, & BAD, & BAH; quorum anguli, quo vnus alium superat niger, & nigerrimus sint æquales. Dico, & bases futuras esse continuè proportionales BC, & BD, & BH, dummodò latus BD sit ęquale lateri BA.

Probatur. Angulus ADC niger est æqualis duobus internis, & oppositis angulo nempe H, & angulo ad A nigro in triangulo DAH; angulus verò niger ad D est æqualis angulo semialbo ad A, nempe BAD ob æqualia crura subtensa, quare angulus semialbus ad A erit æqualis nigro ad A, & ad H. Angulus verò nigerrimus pars semialbi est æqualis nigro; quare residuum album erit æquale angulo ad H. Itaque triangulum HAB erit æquiangulum triangulo BAC; siquidem angulus B communis est; angulus albus A æqualis angulo H; quare, & reliquus BAH erit æqualis angulo C nigro ex Coroll. propos. 17. lib. 1. quare hæc triangula habebunt latera proportionalia, ex 4. l. 6. & BC erit ad BA, seu BD, cui ipsa BA æquatur, vt BA, seu BD ad BH.

EXPENSIO II.

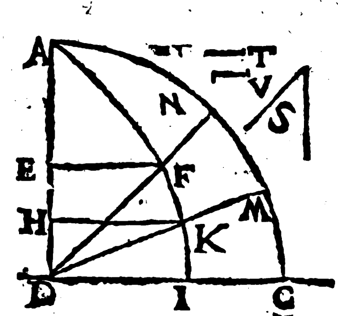
De triangulis, quo ad angulos secundum rationem datam constituendis.

ANtiquitas tota; totusque ingeniorum neotericorum nixus in id elaborauit, vt posset angulos in triangulis iuxta datam proportionem diuidere, maximè si de trifariatione agitur; & prętер ea, quæ antiquitùs inuenta sunt, nihil inuenit noua ætas, quod antiqua inuenta promoueret; Dinostratus itaque, & Nicomedes quadratricem lineam ad id inuenere, & Nicomedes Conchoideam lineam; quos modos breuiter tradere intendimus:

PROBL. I. PROPOS. VIII.

Angulum datum mediante quadratrice iuxta proportionem datam diuidere.

SIt exhibita Quadratrix AFI, proportioque V ad T, & angulus S. Fiatque ei ęqualis ãgulus CDN, & parallela ad basim ducatur FE. Fiatq; vt V, & T ad T ex pr. 16.



15. lib. 6. elem. Sic ED ad aliam, & inuenietur DH à puncto itaque H ducatur parallela HK ad basim ID, & per K agatur radius DM, eritque arcus CM ad arcum MN, vt V ad T.

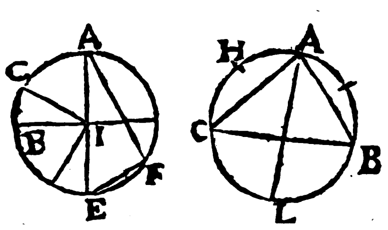
Probatur. Nam ex propos. 18. tract. 18. de lineis curuis, vt est portio lateris DE ad latus DA, sic est arcus NC ad quadrantem totum CA, vt autem DA latus ad HD partem, sic Quadrans CA ad arcum MC ex eadem cit. propos. Ergo *ex æquo*, vt pars DE ad partem HD lateris, hoc est, vt V, & T ad T ex constructione. Sic CN arcus ad CM arcum. Quare *diuidendo* EH erit ad HD hoc est *diuidendo* quoq; V ad T veluti NM ad MC.

PROBL. II. PROPOS. IX.

Triangulum constituere, cuius duo anguli inter se habeant proportionem datam.

SIt quadrans circuli AB ope Quadratricis diuisus in C secundum proportionem datam; mensureturque arcus AC gemina vice in circumferentia AF; ducaturque AF, & FE, habebitque triangulum AFE duos angulos, qui habebunt proportionem datam arcus AC ad arcum CB; nempe angulus ad E erit æqualis AIC ad centrum, vtpote quod subtendat duplo maiorem circumferentiam ex effectione, & sic angulus ad A duplus anguli CBI.

Quod si velimus, & tertium angulum datam habere proportionem, totus semicirculus ACL secundùm proportionem datã diuidatur, replicando in AH, HC, & CL quadrantis arcus datos, & quilibet arcus in circulo gemina vice mensuretur, vt omnes rursùs replicati æquent totam circumferentiam, & puncta ABC coniungantur, & erit factum, quod postulatur; habebuntque anguli eam proportionem, quam habent partes arcuum AH, & HC, & CL secundum proportionem datam eo modo, quo diximus ope Quadratricis inuentam.

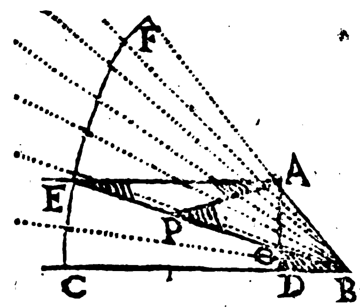


PROBL. III. PROPOS. X.

Angulum datum ope Conchoidis trifariam secare.

SIt angulus datus acutus ABC, & à quolibet puncto lateris, quod placuerit, demitatur perpendicularis in aliud latus AD, prolungeturque latus BD in C, & sit DC addita pars dupla alterius lateris BA, & ab A ducatur parallela AE ipsi DC, describaturque centro B Conchois CEF, & ad punctum E, quo secat, à puncto B ducatur BE; angulusque niger B erit tertia pars totius anguli ABD dati, & altera pars alba eius duplum erit.

Probatur OE ex descriptione Conchoidis æquatur ipsi DC: Quare diuisa in P bifariam OP æquabitur dimidiatæ DC, & ideo ipsi BA, cui tota DC dupla est ex constructione; & quia OAE angulus ex effectione rectus est, circulus centro P descriptus transibit per tria puncta OAE ex propos. 18. lib. 3. elem. Quare AP erit radius, & æqualis OP, & PE, & BA; quare anguli nigri ad A, & E erũt æquales ex 14 lib. 1. elem. & angulus niger ad P, vtpote externus illis duobus erit æqualis, & duplus vni eorum E: at ob æqualitatem laterum BA, & AP angulus P niger æquatur albo B: quare angulus B albus erit duplus anguli B nigri: sed hic, vtpote ab incidente in parallelas AE, & BC ex propos. 30. lib. 1. elem. factus æquatur angulo B nigro: Ergo angulus albus B est duplus anguli nigri B; & sic ABD sectus est, & diuisus in tres partes, quarum duæ sunt pars alba, reliqua pars nigra.



EXPENSIO III.

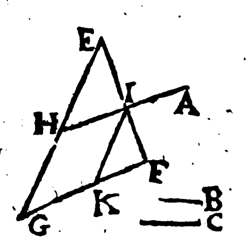
De Angulis, quoad latera secundùm datam rationem constituenda.

VIdimus modum constituendi angulos proportionales; modo restat videndum quomodo, & latera proportionalia secundùm datam rationem efficiamus.

PROBL. I. PROPOS. XI.

Dato angulo à puncto extra illum ducere lineam, quæ crura iuxta datam proportionem detruncet.

SIt datum punctum A, & ab eo ducenda sit linea, quæ iuxta datam proportionem B ad C detruncet latera anguli E; ita vt sit vnum ad alterum, vt C ad B. Eligatur quodlibet punctũ F, & fiat, vt C ad B ex propos. 15. lib. 6. elem. sic EF ad EG, & GF ducatur deinde ab A parallela ipsi FG, quæ sit AIH, & *erit* IE *ad* EH, *vt* C *ad* B.



Patet ex prop. 4. lib. 6. elem. Nam FE est ad EG, idest, vt C ad B ex effectione; vt EI ad EH: Ergo erit EI ad EH, vt C ad B. Quod intelligitur etiam si intra triangulum hęc praxis operi demandetur.

THEOR. II. PROPOS. XII.

Ad datum punctum intra angulum lineam ducere, quæ ab eo puncto remaneat diuisa secundùm datam rationem.

SIt in præcedenti fig. datum punctum K per quod ducenda sit linea, vt K diuidat eam in proportiones datas B ad C.

Ducatur parallela KI lateri GE, à puncto K; & fiat, vt B ad C, sic EI ad IF, & ducatur à puncto F per punctum K linea recta FG. Dico KG *esse ad* KF, *vt* B *ad* C.

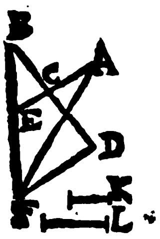
Patet,

Patet, quia est GK ad KF, vt BI ad IF, nempe, vt B ad C ex constructione, ergo etiam GK erit ad FK, vt B ad C.

PROBL. III. PROPOS. XIII.

A dato puncto extra angulum ducere lineam, quæ diuidatur à lateribus anguli secundùm datam rationem.

SIt datum punctum B, & angulus A, & ducatur quæcumque à B puncto, quæ secet anguli A latera, & deinde fiat, vt data proportio K ad L, sic CB ad CD, & à puncto D ducatur parallela ipsi CE, & occurrat lateri AF prolungato, ac tandem ducatur BF iungens B, & F puncta. Dico BE *esse ad* EF, *vt* K *ad* L.



Patet, quia ex 4. lib. 6. est, vt BC ad CD, quæ ex effectione est, vt K ad L; sic BE ad EF. Ergo BE ad EL est, vt K ad L.

EXPENSIO IV.

De potentijs laterum triangulorum quorumcumque.

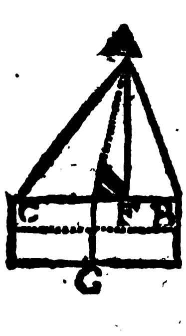
LIcet supra viderimus l. 2. elem. potentias laterum triangulorum comparatas ad inuicem remanent tamen aliqua, quæ vtpote vtilia superficiebus conorum non rectorum proximè inueniendis, hic non debent posthaberi.

PROBL. I. PROPOS. XIV.

In omni triangulo quadrata laterum simul sumpta sunt æqualia quadratis duobus sumptis, tum dimidiæ basis; tum quadratis duobus lineæ à vertice in eam medietatem deductæ.

TRes casus habet propositio, secundùm quòd perpendicularis cadit, vel enim extra triangulum ducitur. vel intra latera ipsius trianguli, seu est latus ipsius trianguli, vt in rectangulis, quos omnes casus seorsim ostendemus, est autem prop. Pappi, sed aliter eam dabimus.

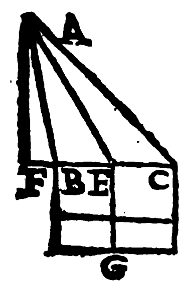
Cadat primùm perpendicularis intra triangulũ, vt est AF in triangulo BAC; sitq; BC basis bifariam diuisa in E, & ducta AE. Dico, *quod quadrata ex cruribus* BA, *&* AC *simul sumpta æquātur duobus quadratis lineæ* AF, *simulq; duobus quadratis medietatis* BE.



Probatur. Quadratum AB ex 14. lib. 2. est minus quadratis ex BE, & AE rectangulo BE, & EF bis sumpto; quod est BG ex eò quia angulus BEA sit acutus, & triangulum Oxigonium. Rursus quadratum AC maius est quadratis AE, & EC ex 13. lib. 2. rectangulo ex EC, & FE bis sumpto: quod est CG, eo quia angulus CEA sit obtusus, & triangulum Amblygonium, quare tantò maius est quadratum ex AC quadratis ex AE, & EC; quantò minus est BA ijsdē quadratis AE, & CE, vel æquali BE, cum enim BE, & EC sint æquales, & BE eadem etiam rectangula BG, & CG bis hinc inde sumpta erunt æqualia: Quare si ex AE, & EB quadrata gemina vice sumantur, æquabunt quadrata BA, & AC, cum tantum reponat quadratum AC quantum tollit quadratum BA.

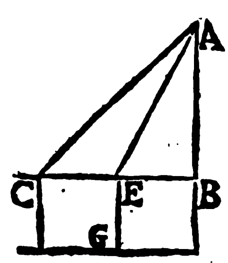
Sit secundus casus, in quo perpendicularis extra cadat in triangulo secundo, & adhuc affirmo *quadrata* BA, *&* AC *simul sumpta æquari quadrato duplici ex* AE, *& quadrato item duplici ex* BE *medietate basis.*

Probatur. Quadratum ex AC, vtpote in Amblygonio oppositum angulo obtuso B in triangulo ACB maius est quadratis crurum AE, & EC duobus quadratis ex BE, & EC æqualibus, & duobus rectangulis ex BE, & FB, s. rect. CB, & BF, vt lib. 2. elem. p. 13.



Quadratum verò BA minus quadratis AE, & BE duobus quadratis ex BE, & duobus rectangulis ex BE, & BF, vt ostendam. Ergo, cum tantùm defficiat quadratum ex BA quantùm augescit quadratum ex AC, super quadrata AE, & EC, si hæc duplentur, illa simul sumantur, supplente altero deffectum alterius quadrata laterum BA, & AC æquabunt duo quadrata ex AE, & duo ex EC, vel EB.

Quòd autem BA quadratum deficiat à quadrato AB duobus quadratis ex BE, & duobus rectangulis ex BE, & BF, patet ex 13. lib. 2. elem. Nam ex AE quadratum maius est lateris AB, & BF quadratis duobus rectangulis ex BE, & BF, ita quòd AE quadratum contineat in se quadratum ex BE, & duo rectangula ex BE, & BF, & quadratum ex AB, cui quadrato AE si addamus insuper ex BE quadratum illud AE cum addito BE superabit quadratum, ex AB duobus quadratis ex BE & duobus rectangulis ex BE, FB: quare AB quadratum minus erit quadrato ex AE, & BE duobus quadratis ex BE, & duobus rectangulis ex BE, & BF.



Casus 3. Cadat perpendicularis, & sit ipsum crus AB in triangulo BAC tertio Tunc ex AC quadratum erit maius quadratis ex AE, & EC duplici rectangulo EC, & EB, ex 13. lib. 2. quod est quadratum CG bis sumptum: BA verò deficiet, à quadratis BE, & AE quadrato BE bis sumpto, quia AB cùm BE quadratum illud AE ex prop. 11. lib. 2. exæquat. Quare defectus cruris BA æquatur excessui cruris AC, super quadrata ex AE, & BE. Quare simul posita ex BA, & AC quadrata æquabunt quadrata ex AE, & BE bis sumpta.

EXPENSIO V.

De angulis in figuris rectilineis,

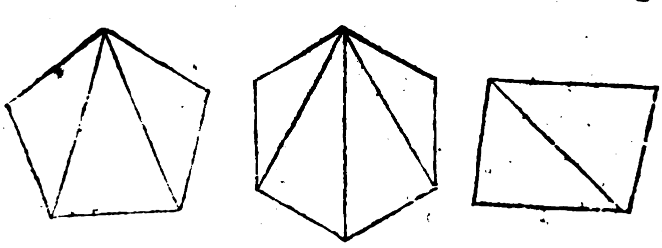
VIsa angulorum secundùm se constitutione, cognitisque proprietatibus modo eos, vt figuris rectilineis applicatos consideramus, siue illę regulares sint, seu irregulares.

THEOR. I. PROPOS. XV.

Qualibet figura rectilinea continet bis tot angulos rectos, quota ipsa est inter figuras rectilineas.

QVęlibet figura recti'inea continet angulos bis tot æquales rectis quota ipsa est inter figuras rectilineas. V.g. prima figura est triangulum; illius anguli duobus rectis æquabuntur. Secunda, seu oblonga, seu Trapezia; illius itaq; anguli, eo quòd sit secunda bis tot rectis, nempe quatuor erunt æquales. Tertia est Pentagonum, seu æqualium laterum, seu non. Sex itaque rectis eius anguli æquales erunt.

Ratio est, quia quælibet figura in tot triangula diuidi potest, quota ipsa est inter figuras rectilineas trahendo à quouis angulo rectas ad vnum aliquem illorum: Sic triangulum non nisi in triangulum diuidi; quadrata verò figura in duos angulos: at pentagona in tres, sexagona in 4. vt vides hic factum.



At ex 17. lib 1. propos. demonstratum est internos cuiuscumque trianguli angulos æquales esse duobus rectis: Quare quæ figura non potest diuidi, nisi in vnum angulum trahendo de angulo ad angulum rectas, vt triangulum, ęquabitur duobus rectis, quæ in duos, vt quadratum quatuor rectos exæquabit, quæ in tres, vt pentagona sex rectis æquos angulos obtinebit sexagona octo angulos rectos complebit, & cæt. Sed quæres, quà ratione cognoscatur figura inter figuras talem sedem occupare V.g. esse decimam, vel vndecimam figuram.

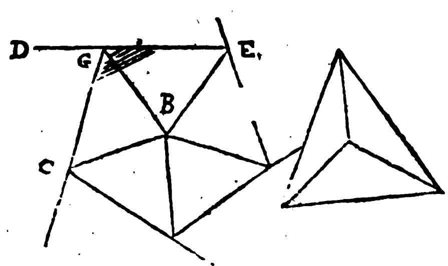
Respondetur numeranda esse latera, vel angulos, & detractis duobus (duo enim latera figuram constituere nequeunt, sicut nec duo anguli solum, vt patet) ille numerus residuus, quam sedem occupet in serie figurarum demonstrabit V. g. data figura 20. vel angulos, vel latera numeret detrahe 2. remanebit 18. illa itaque figura inter figuras erit decimaoctaua.

THEOR. II. PROPOS. XVI.

Anguli cuiuscunque figuræ rectilineæ æquantur bis tot rectis, quot angulos obtinet, seu latera detractis rectis quatuor.

VVlt propos. quòd numerentur latera, seu anguli cuiuscunque figuræ, & eo numero duplicato detrahantur quatuor, & residuus numerus angulos rectos demonstrabit, quibus anguli æquales sunt. V.g. Pētagoni sunt anguli, vel latera; quinq; duplica hunc numerum 5. erunt 10. à quo si detrahas 4. remanebunt 6. indicans quinque angulos pentagoni sex rectis esse æquales.

Probatur. Quia figura quælibet in tot triangula diuidi potest à singulis eius angulis trahendo lineas ad aliquod punctum in medio assumptum, quot ipsa habet latera, seu angulos, vt vides hic factum in triangulo, & pentagono.



Quare cum ex propos. 17. lib. 1. elem. quilibet trianguli angulus sit æqualis duobus rectis, sequitur, vt triangula ea in qualibet figura iuxtà numerum augulorum, vel laterum facta sint æqualia bis tot rectis, quot sunt anguli illi: sed omnes illi habent angulos circa punctum medium figurę consistentes omnes simul sumptos æquales quatuor rectis, vt colleg mus propos. 12. lib. 1. qui ad angulos figuræ non pertinent: quare si detrahatur, remanebunt reliqui ad figuram pertinentes; Sic, si ex 10. auferantur 4. erunt reliqui 6. anguli recti, quibus 5. anguli pentagoni æquales sunt.

THEOR. III. PROPOS. XVII.

Anguli cuiuscumque figuræ externi à latere producto, & sibi coniuncto effecti æquant solùm quatuor rectos.

ANgulos exteriores cuiuscumque figuræ, qui fiunt à lateribus versus eandem partem seriatim deductis, vt vides factum in pentagono B omnes sunt æquales tantum 4. rectis.

Deducitur ex propos. 10. lib. 1. elem. vbi asseritur, quòd linea super aliam consistens angulos duos, hinc, & inde facit duobus rectis æquales, quare cum quodlibet latus figurę cuiusl.bet insistat super alium productum, vt est CG super DE; sequitur, vt angulus niger figuræ internus, & angulus albus externus sint æquales duobus rectis, & cum omnes ita se habeant, sequitur esse ęquales omnes interni, & externi bis tot rectis; quot ipsi sunt V. g. in fig. 5. angulorum decem angulis rectis; quia 5. interni, & interni 5. sunt; Sed iam diximus internos esse æquales sex rectis: sequitur, quòd externi sint solum æquales 4. rectis.

Qq CO-

COROLLARIVM.

HInc poteſt colligi modus cognoſcendi in figuris rectilineis, & æquilateris regularibus quot gradus quilibet eius angulus, tum internus, tum externus, tum ad centrum contineat, cum enim quilibet rectus angulus 90. partes, graduſque contineat fit, vt ex cognitione rectorum deueniamus in cognitionem continentiæ, quam anguli figuræ poſſidet ſic cum anguli ad centrum ſint 4. rectis æquales; qui 360. gradus continent, & illi V. g. in Pentagono ſint 5. ſi per 5. diuidatur 360. dabit 72. numerus ſilicet graduum, quem continet angulus B, & quia anguli externi, vt G quatuor quoque rectis ſunt æquales, angulus quoque G 72. gradus continebit, ſed quia anguli interni 6. rectis ſunt æquales, qui dant 540. gradus diuiſo hoc numero per 5. dabit 108. grad. pro continentia cuiuſcumque anguli interni.

TRACTATVS XX.

De Lineis circulo circumpositis.

VIsis Linearum proprietaribus secundùm se, modo incipimus eas considerare, vt margines superficiei, atq; figuræ; & quia vt 3 lib Elem vidimus, omnes figuræ perfectę adiumento circuli describuntur; ideo eas, vt applicatas circulo consideramus.

EXPENSIO I.

De principijs huius Tractatus.

PRæcipuus scopus huius Tractatus est considerare lineas, quæ circuli peripheriæ, vel eius datis portionibus subtenduntur, quatenùs mensurabiles sunt, vel mensura adæquata, si lineę sint semidiametro commensurabiles, quę tanquam rationalis respectu omnium assumitur, & tanquam ea, iuxta cuius partes omnes alię lineæ diuidendę sunt; vel, si sint incommensurabiles, saltem mensurâ proximâ.

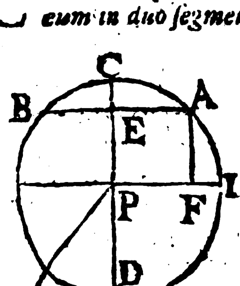
Circulus omnis ex libito hominum in 360. partes diuiditur, quæ Gradus appellantur, & omnis gradus in 60. partes, rursùs intelligitur diuisus, quæ minuta dicuntur; rursúsque omne minutum in 60. partes ponitur diuisum, quæ secunda, & quodlibet horum in 60. partes incisum iterum, quæ Tertia vocitantur, & sic Quarta, Quinta, Sexta: semper subdiuidendo vsque ad 10.

Istis itaque partibus circuli linea aliqua subtensa vel circumscripta si non omnibus saltem Gradibus, & minutis notæ longitudinis respectu radij reperire fuit necessarium; si non adequatè, saltem proximè, & cum insensibili differentia à vero.

Linearum verò rectarum, quæ circa peripheriam circuli considerantur aliæ sunt intra, aliæ sunt extra, aliæ eam secant. Quæ intra circuli peripheriam existunt illæ sunt subtensę, quæ, & cordę dicuntur, & sinus.

DEFINITIO I.

C*Horda itaque est recta linea in circulo dirimens eum in duo segmenta, & vtrumque pariter subtendens.*



Talis est AB in circulo ABCD, quæ subtendit segmentum BCA, & BDA, quòd licet verum sit, tamen, cû sinû EA in se continens accipitur, vt minorem portionem BCA subtendens consideratur.

DEFINITIO II.

S*Inus Rectus est dimidiata chorda à diametro ei perpendiculari secta.*

Talis est EA. Sinus verò est nomen Arabicum vsurpatum in hanc significationem à Mathematicis. Licet Vitalis in suo Lexico Mathematico ex eo velit sinum appellatum, quòd claudat curuitatem arcus.

DEFINITIO III.

S*Inus Versus est diametri portio chordæ, seu sinui recto perpendicularis inter chordam ipsam, & peripheriam inclusa.*

Talis est CE inter BCA ambitum, & EA sinum, seu BA chordam existens, qui etiam dicitur sagitta.

DEFINITIO IV.

S*Inus complementi est sinus rectus illius arcus, qui alium complet.*

Talis est AF, qui est sinus arcus AI complentis arcum CA vsque ad quadrantem, qui dicitur etiam sinus secundus.

DEFINITIO V.

S*Inus totus est radius ipsius circuli.*

Assumitur verò radius: vt rationalis respectu omnium aliarum, seu chordarum, seu sinuum, ideoque à recentioribus supponitur diuisus in partes 10000000. licet Ptholomeus eum posuerit partium 60. Arzael par 150. sed experimentum docuit minutiorem diuisionem esse maioris commodi.

Lineæ, quæ extra peripheriam sunt communi nomine dicuntur secundæ, & sunt tangentes, quarum definitionem lib.3.def.2.explicauimus. Talis est DG quarum terminus est secans aliqua, quæ proueniat à centro, & in ipsam tangentem terminet, vt PG. Itaq; cum semper diameter PD in punctum contactus ductus faciat angulos rectos, cum tangente ex lib.3. Elem. prop.20. Radius cum tangente, & secante semper faciet triangulum rectangulum, cui secans PG basis sit.

EXPENSIO II.

De lineis portionibus peripheriarum inscriptis, quæ latera alicuius figuræ regularis intexunt.

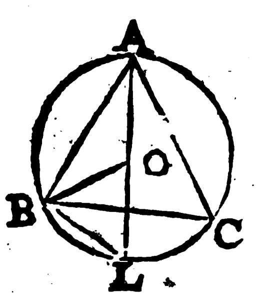
QVę lineæ circulo inscriptæ aliquam figuram regularem constituunt notiores sunt, & fundamentum, quo cæteræ inueniantur. Vnde ab istis doctrina exordienda. Vidimus autem propos. 15. lib. 4. elem. Latus Hexagoni æquari radio; vnde de reliquarum figurarum lateribus sermo erit.

THEOR. I. PROPOS. I.

Latus Trianguli circulo inscripti potentiâ triplum est semidiametri.

SIt triangulum ABC ęquilaterum in circulo ABC. Dico *eius latus posse inseruire pro latere quadrati, quod erit triplo maius, quàm quadratum semidiametri;* BO, qui æqualis est BL lateri hexagoni ex propos. 15. lib. 4. Euclid.

Probatur. Quadratum basis AL in rectangulo BAL est æquale quadratis rectarum BA, & BL, ex 11. lib. 2. quòd angulus B in semicirculo rectus sit ex 28. lib. 3. Sed quadratum à diametro factum est quadruplum quadrato sui dimidij, & semidiametri BL, vel BO, ex Coroll. propos. 6. lib. 2. Ergo reliquum quadratum ex BA æquat reliquas tres partes, quæ vna cum quadrato ex BL, vel BO quartæ parti æqualis, omnes quatuor partes quadrati AL exæquat: vnde solum quadratum ex AB erit triplum quadrati OA radij, & consequenter ipsum latus AB triplo ampliùs poterit.



COROLLARIVM.

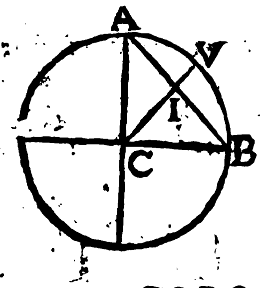
HInc est, quod si diametrum in se multiplices, & quadres, sic, & semidiametrum: deinde quadratum semidiametri à totius diametri quadrato subducas, & à residuo radicem quadratam extrahas, quòd inquam ea radix erit latus trianguli AB, & chorda, quæ subtendit 120. grad. cuius medietas est sinus 60.

Aduerte autem, & hoc sit vniuersale monitum, quod vt exactissimus sit calculus sinus totus duabus zifris augendus, & à radice quadrata, deinde vna figura abijcienda est; in qua aliquis error in maiori, vel minori excessu inesse potest.

THEOR. II. PROPOS. II.

Latus quadrati circulo inscripti potest duo quadrata ex semidiametro constituta.

PAtet. Nam latus quadrati in circulo subtendit quadrantem: Ideo angulus C rectus: Vnde ex 11. lib. 2. quadratum ex basi BA rectanguli ACB æquatur duobus quadratis alteri ex semidiametro AC alteri ex semidiametro CB.



COROLLARIVM.

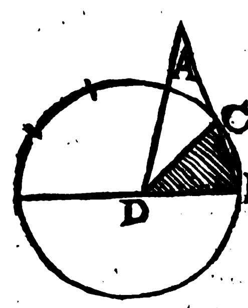
COlligitur. Quòd si quadretur semidiameter auctus duabus zifris, & duplicetur, & à toto radix quadrata eruatur, illa abiecta vltima figura datura sit latus quadrati, & chordam AB, cuius medietas est sinus 45. grad.

THEOR. III. PROPOS. III.

Si hexagoni, & decagoni latus in eodem circulo descriptorum componantur tota recta linea extrema, & media ratione secatur.

SIt latus decagoni BC, & ei addatur AC æqualis semidiametro DB, quę, & erit latus hexagoni. Dico *totam* AB *sectam esse in* C *extrema, & media ratione*. Nempe quadratum contentum sub AC esse æquale rectangulo sub AB, & CB contento.

Prob. Progress. 1. Triangula ADB totum, & nigra pars sunt ęquiangula, vt ostendam; Ergo ex 4. lib. 6. ita est proportionatum AB latus ad DB basim in triangulo maiori ADB, vt latus DB in triangulo nigro minori vel ęquale AC ex constructione basi CB. Cùm ergo sit tota AB ad segmentum maius AC, vt idem ad minus CB ex prop. 19. lib. 6. erit rectangulum sub extremis contentum æquale quadrato mediæ.



Remanet solum probandum triangula ABD, & minus nigrum esse æquiangula.

Progress. 2. Angulus niger apud D est quinta pars semicircumferentiæ nimirum duorum rectorum, vtpote angulus decagoni, quòd BC ex Thesi sit latus decagoni. Ergo reliqui duo C, & B nigri æquales inuicem ob æqualitatem laterum subtensorum erunt quatuor partes duorum rectorum, vt omnes simul sint æquales duobus rectis ex 17. propos. lib. 1. & siguli duæ partes, nempe dupli anguli nigri apud D. Sed angulus C niger est æqualis ex prop. 17. l. 1. duobus internis, & oppositis A, & albo apud D, qui ęquales inuicē sunt ob crura DC, & CA suptensa ęqualia. Ergo duplus vni eorum V. g. angulo A, sed, & erat duplus angulo nigro apud D, ergo isti angulus A, & niger apud D erunt æquales.

Progress. 3. Hincque probabitur angulum D totum nigrum, albumque trianguli maioris esse æquale angulo C nigro minoris. Nam est totus duplus anguli A; cùm quilibet, nempe niger D, vt ostensum est, & albus D ob æqualitatem laterum sint æquales ipsi A: Ergo totus albus, nigerque D ipsi A duplus, ergo totus æqualis nigro angulo B du-

B duplo quoque, vt secund. progreff. anguli nigri D.

Tandem angulus B est communis, ergo triangulum magnum, & paruum nigrum sunt æquiangula; cum de singulis angulis probata sit æqualitas in ambobus, & hinc erit AB ad AC, vt AC ad CB: quare recta AB, quę constat ex latere decagoni, & hexagoni extremâ, & mediâ ratione secta est.

COROLLARIVM

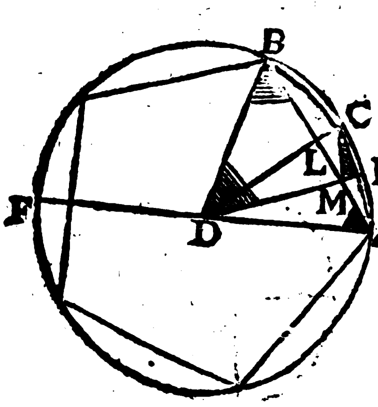
HInc, si diametrum auctum duabus zifris, & hoc quadratum diuidas per semidiametrum similiter auctum excipies latus decagoni.

THEOR. IV. PROPOS. IV.

Si in circulo pentagonum æquilaterum describatur, pentagoni latus potest, quod potest, & latus decagoni, & latus sexagoni.

DVo intendo demonstrare alterum, quòd pentagoni latus possit latus sexagoni, quod possit quoque latus decagoni; Ideoque, vt ambo.

Probentur. Sit BA latus pẽtagoni, quod subtẽdat arcum BCA; isque arcus diuidatur per medium in C; ducaturque à centro D semidiameter DC; connectanturque subtensę, quę erunt latera decagoni CB, & CA; semidiametrique ducantur BD, & DA, & rursùs diuiso arcu CA per medium in E, ducatur semidiameter DE; & secet chordam BA in M, & CA in I; connectaturque MC.



Probatur duo triangula BAD, & BMD sunt, vt deinde ostendam, æquiangula, & angulus apud D niger est æqualis angulo A nigerrimo, & angulus niger B cõmunis, ergo ita erit BA ad BD, vt BD ad BM. Ideoque rectangulum sub extremis contentum BA latere Pentagoni, & BM, eius portione erit æquale quadrato ex media BD, radioque ex 19. lib. 6.

Progreff. 2. Æquiangula quoque sunt, vt ostendam, triangula nigrum totum CMA & maius ipso ABC, cuius angulus B est æqualis angulo nigro C, & niger apud A communis, Ergo eadem ratione erit AB ad AC, vt AC ad MA: Ideoque rectangulũ sub AB, & MA extremis æquale erit quadrato mediæ CA ex 19 lib. 6. Sed hæc rectangula, nempe primi progr sub BA, & BM, & secundi sub BA, & AM æqualia, sunt quadrato ex tota BA, ex 4. prop. lib. 2. Ergo talia quoq; erunt quadrata illis æqualia, nempe quadratum ex BD æquale rectangulo, & tota AB, & maiori segmento, & quadratum CA æquale rectangulo ex tota, ex minori segmento, ista inquam duo quadrata erunt æqualia quadrato ex BA: Ergo BA latus pentagoni potest quadratum BD lateris sexagoni, & CA lateris decagoni.

Remanet primo ostendendum triangula BAD, & minus BMD esse æquiangula. Quod ita conuincitur. Angulus A nigerrimus est in peripheria: Ergo vt sit æqualis BDE ad centrum debet esse supra duplò maiorem circumferentiam, cum super æqualem sit subduplus ex 23. lib. 3. Talis verò est circumferentia FB, nempe duplo maior super quã insistit A nigerrimus angulus ad circumferentiam respectu BCE circumferentiæ, quam comprehendit angulus niger D ad centrum, vt consideranti patet, cum FB sit 6. ex circuli 20. partibus BE verò 3. Angulus verò niger apud B est communis, Ergo reliquus reliquo æqualis, cum tres anguli cuiuscumque trianguli duobus rectis æquentur ex propos. 17. lib. 1. Coroll.

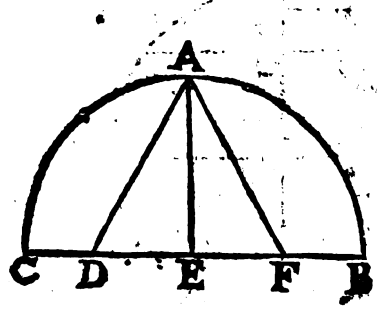
Prob. Deinde triangula BAC maius, & seminigrum CMA esse æquiangula. Nam anguli in minori nigro apud A, & apud C niger sunt inuicem æquales ob æqualitatem laterum, vt consideranti patet; item angulus A albus est æqualis angulo apud B trianguli CBA maioris, cum sint super æquales circumferentias CA, & CB. Ergo idem angulus apud B albus trianguli ABC erit æqualis alteri nigro minoris trianguli apud A, & consequenter angulo C nigro ei æquali: Cùm ergo B maioris, & C nigri minoris trianguli sint æquales, & reliquus albus apud A communis, erunt quoque duo reliqui æquales: Vnde triangulum maius BAC triangulo minori AMC erit æquiangulum.

PROBL. I. PROPOS. V.

Latera decagoni, & hexagoni in eodem circulo inuestigare.

SIt circulus, vel quod sufficit semicirculus CAB, cuius diametro AB sit perpendicularis EA, & diuiso bifariam semidiametro in F ducatur FA, cui æqualis sumatur FD, & à puncto D ducatur ad A recta AD. Dico rectam ED esse latus Decagoni, & secundo AD esse latus Pentagoni.

Probatur. Nam DB est secta media, & extrema ratione in E: quare ED minus segmentũ erit latus decagoni, & EB maius segmentum erit latus sexagoni ex propos. 3. huius.



Probatur antecedens, quod DB secta sit media, & extrema ratione. Nam ex propos. 8. lib. 2. Radius EB sectus est bifariam in F, & ei addita est recta ED. Vnde rectangulum ex tota DB, & addita DE vna cum quadrato ex EF medietate est æquale quadrato medietatis, & additæ, vt vno latere FD facto, sed FD est æqualis lineæ AF ex constructione. Ergo ipsius AF quadratum dicto rectangulo, & quadrato ex medietate radij æquale erit. Sed quadratum ex AF est quoque æquale quadratis AE radio, & EF eiusdem medietatis ex 47. lib. 1. Quamobrem, si quadratum illud EF dematur, remanebunt quadratum ex AE, vel quod idem ex maiori segmento EB

nempe

nempe radio, & rectangulum ex tota DB, & additâ DE comprehenso æqualia: Quare DB erit secta extrema, & media ratione.

Probatur secunda pars. Nam ex 11. secundi AD potest, & quadratum ex EA, & quadratum ex DE: sed DE est latus decagoni, vt modo ostensum est EA hexagoni, cùm sit radius. Ergo ex propos. anteced. est latus pentagoni.

COROLLARIVM.

HInc patet modus, quo eruatur latus Decagoni. Nam numero radij in se multiplicato, & numero medietatis radij quoq; in se ducto, ābo simul colligantur, & ex toto radix quadrata eruatur, & obtinebitur linea AF, à qua dempto numero medietatis radij, nempe EF remanebit DE latus decagoni. Radius verò duabus zifris augendus, vt præcisior sit calculus, & deinde ex radice extructa expungenda figura vltima est.

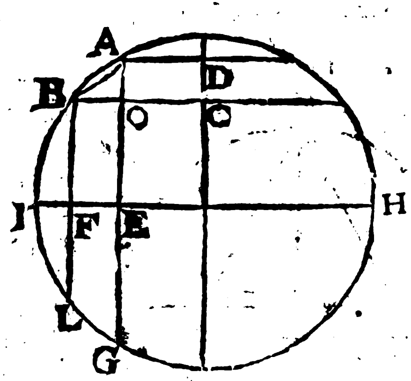
COROLLARIVM II.

ET hinc quoque fit, quòd ex antec. pentagoni latus habeatur. Nam numero radij aucto duabus zifris ad maiorem præcisionem in se ducto; & Decagoni quoque in se ducto, si à toto simul aggregato radix quadrata extrahatur dabit DA latus pentagoni.

THEOR. V. PROPOS. VI.

Quindecagoni latus potest quadrata linea, quà differt semilatus trianguli à semilatere Pentagoni, & eorum sinuum versorum differentiæ.

PRobatur per 16. lib. 4. Euclid. recta inscripta inter basim trianguli, & pentagoni latus tertium est latus quindecagoni, vt AB, quæ est inter punctū A, in quo cadit basis trianguli, cuius vertex in H, & B, quo item incipit à pūcto B tertium latus



pentagoni ab H: Erit ergo AE semilatus trianguli & FB pentagoni, & differentia OA. Sinus verò versus semilateris pentagoni est CB, & trianguli est DA, & eorum differentia OB; cum ergo OBA triangulum sit rectangulum: ex 11. lib. 2. basis AB quadratum æquabitur quadratis ex OB, & OA.

COROLLARIVM.

QVare Colligitur, quod si semilatus FB subducatur AE relinquetur AO, qui in se ducetur. Repartitis verò complementis DA, & CB, vt infra docebo, & minori à maiori subducto relinquetur OB, qui in se multiplicabitur: numeri verò in se ducti, tum AO, tum OB aggregentur. Nam extracta radix quadrata dabit chordam AB, & latus quindecagoni Gr. 24. quæ dimidiata erit sinus Gr. 12.

EXPENSIO III.

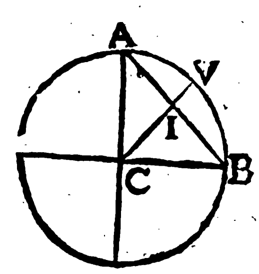
De proportione laterum figurarum circulo inscriptarum, cum diametro.

NE frustra quandoque laboremus in lateribus prædictarum figurarum inueniendis, oportet priùs videre, an sint lineæ rationales, & ideo numeris exprimibiles: si namq; numeris partium, in quas diameter diuisus est exprimi nequeat earū longitudo, frustra quis nescius calculum reiteraret, vt tandem partes numero exprimeret, quæ exprimi nequeant.

THEOR. I. PROPOS. VII.

In quadrato diametrum incommensurabile est lateri, seu semidiametro cui est inscriptum.

PRobatur ex demonstratis lib. 2. & propos. 6. in Coroll. Quadratum factum ex diagonali AB est duplum quadrati facti ex latere, & radio CB; Ergo hęc quadrata non possident rationem talem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum debet habere: sed quam numerus ad numerum ex Coroll. 1. enim propos. 16. lib. 8. inter numeros, quorum vnus sit duplus alterius non cadit medius



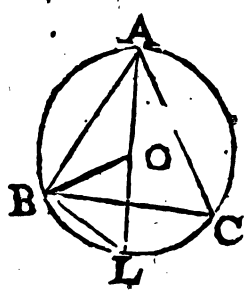
proportionalis; & sic inter eos non potest intercedere proportio, quæ inter quadratos numeros mediat ex eadem 16. propos. Cum ergo quadratum diametri diagonalis AE ad quadratum lateris sit solum, vt numerus ad numerum ex propos. 6. lib. 10. erunt longitudine duo incommensurabiles latus, & radius BC, & diagonalis AC, quæ est chorda subtensa quadranti, & ideo etiam diametro toti incommensurabilis erit.

THEOR. II. PROPOS. VIII.

In triangulo latus ipsius semidiametro, in quo inscribitur incommensurabile est.

PRobatur. Nam ex propos. 1. latus trianguli AB potest inseruire pro quadrato, quod erit triplo maius, quam semidiametri AO: Sed 1. ad 3. non habent proportionem, quàm quadratus numerus ad quadratum numerum ex Coroll. 12. lib. 8.

Ergo



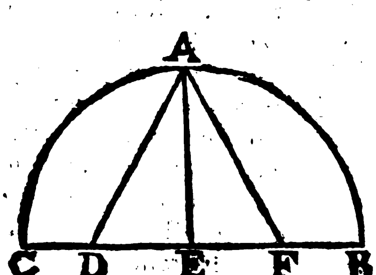
Ergo nec quadratũ semidiametri ad quadratũ lateris inscripti trianguli. Quare ex prop.6.lib.9. latera horũ quadratorum erunt incommensurabilia.

THEOR. III. PROPOS. IX.

In Pentagono, & Decagono latus diametro est incommensurabilis linea, tum longitudine, tum potentia.

PRobatur primo de Decagono. Nam assumpta fig. prop.5. præcedentis quadratum dimidij radij EF est quarta pars quadrati totius BA. Sed linea AF potest efficere quadratum æquale duobus quadratis, & lineæ AE, & lineæ EF. Ergo potest quintuplo magis, quam dimidius radius EF. Quare lineæ EF & DF longitudine incommensurabiles erunt ex propos.10. lib.10. quia possunt quadrata, quæ proportionem habent, vt numerus ad numerum; non autem, vt quadratus numerus ad numerum quadratum.

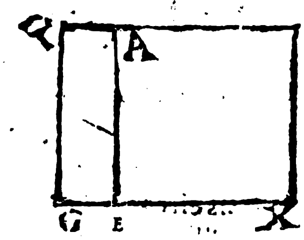
Si itaque à DF recta æqualis ipsi FA auferatur semiradius EF rationalis respectu totius diametri, eique commensurabilis. Cum à linea integra maiori DF, potestque magis, quàm minor EF quadrato rectæ AF, quæ linea toti maiori est incommensurabilis, quia quadratum AF est quater, & DF quinquies maior, quàm EF, & ideo cum quadrata se gerant, vt numerus ad numerum; ipsa latera erunt incommensurabilia.



Cum ergo maior DF plus possit, quam minor EF quadrato DE lateris sibi maiori incommensurabilis, ipsaque minor EF sit exposite. Rationali nempe diametro commensurabilis longitudine, & potentia, recta DE ablata EF minori erit Apotome; Et quia EF quadratum est ad quadratum ex FD, vt numerus ad numerum; ideo DE erit Apotome quinta ex 24. vel 21. propos. lib. 10.

Probatur secundo de latere pentagoni AD. Nam potest efficere quadratum æquale quadrato lateris DE, & EA. Linea verò DE est irrationalis cùm ostensa sit Apotome.

Cùm ergo DE sit irrationalis, quadratum eius, vtpote ex irrationali factum, erit omninò irrationale ex 25. lib. 10. Vnde si applicetur ad rationalem AE rectangulum illius quadrato equale ex 35. lib.1. Hoc efficiet latitudinem, seu alterum latus EG rationali ipsi EA incommensurabile lõgitudine, cum rectangulũ ZE sit ad rectangulum AX, velut basis GE ad basim XE ex pr. 1. lib.6. & ideo ex prop.5.lib.10. GB, erit incõmẽsurabile ipsi EX. Vnde additũ ipsi rationali EX efficiet totam lineam GX longitudinem incommensurabilem ipsi Rationali AB, atque irrationalem ex prop. 10. lib.10.

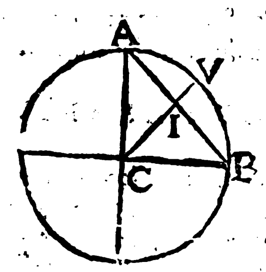


Erunt itaque incommensurabiles GX, & AE idest CZ: Vnde ex propos.26. lib.10. rectangulum, quod continent XZ erit irrationale. Sed huic rectangulo est æquale quadratum EX DA: Quia rectangulum GA ex const: factum est æquale quadrato, ex DE constituto. Ergo linea AD potens hoc rectangulum est irrationalis ex prop.25. lib.10.

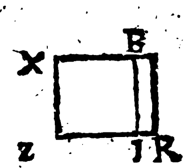
THEOR. IV. PROPOS. X.

Latus Octogoni est diametro incommensurabile.

PRobatur. Nam considerato schemate prop. 2. sit radius CI perpendicularis ipsi lateri quadrati AB; eritque semiquadratum CIB. Vnde diagonalis huius quadrati CB erit duplò maior in potentiã, quàm CI, & ideo vt ex prima propos. huius Expens. constat erunt longitudine incommensurabiles CI, & CB, ablata itaque CI, à radio CV, vel CB reliqua erit Apotome, nempe irrationalis etiam potentiã, & ideo eius quadratum irrationale.



Applicetur itaque rationali potentiã IB, vt in antecedenti fecimus rectangulum æquale quadrato rectæ IV, & sit BR, & erit longitudo IR ex 2. lib.10. irrationalis ipsi IB, vel ęquali IZ; ideoq; cùm duæ ZI, vel æqualis IB, & IR sint irrationales tota erit irrationalis, & ex Cor. 2. propos.26. lib. 10. rectangulum XR erit quoque irrationale.



Vnde latus octogoni VB potens efficere quadratum huic rectangulo XR æquale erit irrationale. Potest autem efficere quadratum rectangulo XR æquale. Quia potest efficere quadratum æquale quadratis duobus VI, & IB: quæ æqualia sunt huic rectangulo XR ex effectione.

EXPENSIO IV.

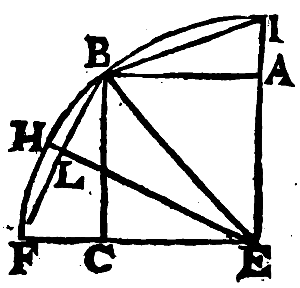
De circulo inscriptis, quæ figuram non constituunt.

EGimus de lineis inscriptis circulo, quæ figuram faciebant, modo de illis, abque respectu ad figuram vllam, sed determinatæ quantitati graduum subtensis: Eas vero in duas classes diuidemus, & hìc agemus de illis subtensis, quę vt inueniatur radicis quadratę extractionem deposcunt: deinde alias trademus, quibus tractandis radix quadrata adhibenda non est.

THEOR. I. PROPOS. XI.

Sinus complementi, & sinus recti quadrata æquantur quadrato radij. Sicut, & quadrato chordæ æqualia sunt sinus versi, & sinus recti quadrata.

PRobatur BAE rectus est angulus. Vnde ex 11. lib. 2. Quadrata ex BA sinu, & AE, vel æquali BC sinus complementi erunt ęqualia quadrato radij BE.



Probatur secunda pars. Nam angulus C rectus est. Ergo sinus versi CF quadratum, & recti sinus CB erũt æqualia quadrato chordæ BF, & est eadem ratio de sinu recto BA, & verso AI, qui æquantur chordæ BI.

COROLLARIVM I.

HInc dato sinu recto BA si ducatur in se, & subducatur à sinu toto in se ducto, & à residuo dematur radix quadrata; Illa dabit sinum complementi BC, quo ablato à sinu toto remanebit sinus versus IA.

COROLLARIVM II.

SI verò hic sinus versus in se multiplicetur, & coniungatur cum quadrato sinus recti V. g. quadratum fiat ex FC, & coniungatur cum quadrato ex CB, vel quadratum B A cum AI Radix quadrata subducta à toto dabit chordam BF, vel BI, cuius medietas est sinus dimidiati arcus BI, vel BF, vt est sinus BL arcus BH.

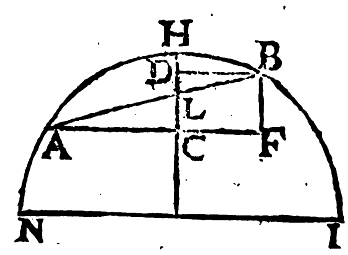
COROLLARIVM III.

QVod si duplices sinus complementi, & sinum rectum habebis chordas, quæ totum arcum subtendunt, nam si duplices BC sinum complementi habebis Chordam duplicis arcus FB, sicut si duplices sinum rectum BA habebis Chordam duplicis arcus BI.

THEOR. II. PROPOS. XII.

Chordæ cuiuslibet quadratum est æquale quadrato duorum sinuum simul positorum, quorum arcus simul illa subtendit, & quadrato differentiæ sinuum versorum.

SIt Chorda AB subtendens arcum AHB, qui sit diuisus in quascumque duas portiones AH, cuius sinus rectus AC versus CH, & HB arcum, cuius sinus DB rectus, & versus DH. Dico, *quod si sinus recti cõponantur ita vt efficiant* ACF, & deinde sinus minor versus DH à sinu maiori CH subducatur, vt remaneat DC, vel ęqualis FB, dico inquam, quòd quadratũ Chordæ AB est æquale duobus quadratis, quorum vnum est factum ex latere AF aggregato sinuum rectorum, & alterum DC, vel BF differentia sinuum versorum.



Probatur facilè. Quia triangulum ABF est rectangulum. Ergo quadratum ex AB ex 11. lib. 2. est æquale quadratis ex AF, & FB.

Quòd autem triangulum ABF sit rectangulum, patet, cùm anguli ad C, & D sint recti, & latera CF, & DB sint æqualia, sicut, & DC, & FB ex effectione. Vnde etiam angulus F rectus erit.

COROLLARIVM.

MOdus vniuersalissimus hinc enascitur, quo plurimi sinus reperiantur. Nam si duo quæcumque latera, seu chordas superius Expens. 1. inuentas dimidiaueris erunt sinus recti, quibus ex præcedenti reperies sinus complementi; qui subducti à sinu toto relinquent sinus versos. Si ergo duos ex sinibus ita repertos iunxeris, & quadratè multiplicaueris, & eorum sinus versos minorem à maiori subduxeris, differentiamque quadratè quoque multiplicaueris, multiplicatosque numeros simul iunxeris, & ab aggregato radicem quadratam subduxeris; illa erit Chorda, quæ illos duos arcus inequales subtendit, quę diuisa per medium dabit sinum medietatis summæ arcus, quam simul vniti efficiunt. V. g. sit chorda decagoni Gr. 36. 6180340. posito sinu toto 10000000. Medietas erit sinus Gr. 18. nimirum 3090170. Sic Sexagoni Grad. 60. est 10000000. medietas est 5000000. Gr. 30. Hinc sinus complementi Gr. 18. nimirum Gr. 72. est Par 9510565. qui subductus à sinu toto relinquit sinum versum 489435. Sic sinus complementi Gr. 30. sunt Gr. 60. quorum sinus est 8660254. subductus à sinu toto relinquit sinum versum 1339746. à quo subductus sinus versus alter primo inuentus dabit latus BF 850311. qui in se multiplicãdus. Sic iuncti sinus 5000000. & 3060170. dant 8060170. qui pariter multiplicãdus in se, & deinde iungendi numeri ita multiplicati; à quorum summa extracta radix quadrata dabit chordam Gr. 18. & 30 simul nempe 48. quæ dimidiata erit sinus Gr. 24. Par. 4067361.

Sic si iunctis sinibus Gr. 24. & 30. & in se multiplicatis, multiplicata quoque differentia sinuum

verso-

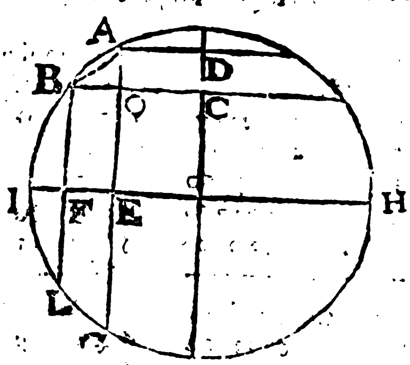
versorum in se, deinde aggregentur numeri ita multiplicati, & ab aggregato radix excipiatur, illa dabit chordam Gr. 54. & dimidiata sinum Gr. 27.

Sic idem agas iunctis sinibus 24.& 27. habebis sinum Gr. 26 $\frac{1}{2}$. Et si iungas 27.& 30. Gr. sinus habebis sinum 28 $\frac{1}{2}$, & cæt. At si iungas sinum Gr. 30. cum sinu Gr. 36. nimirum cum dimidiata chorda pentagoni habebis sinum arc. 33. Si verò medietates, vt supra reperiantur continuè dabunt multò plures sinus.

THEOR. III. PROPOS. XIII.

Quadratum chordæ differentiæ duorum arcuum est æquale quadratis differentiæ sinuum versorum, atque rectorum eorumdem sinuum.

Resumatur fig. propos. 6. in qua AE, & BC sint sinus cuiuscumque arcus ABIG, & BIL differentia eorundem sinuum erit AO. Sic eorum sinus versi sint FI minoris arcus, & IE maioris differentia erit FE, vel OB. Dico, quòd *quadrata harum differentiarum sunt æqualia quadrato chordæ* AB.



Probatur. Quia triangulum AOB, est rectangulum, ergo ex 11. lib. 2 Euclid. vera erit propositio, & quadrata ex lateribus differentijsque OB, & OA æqualia erunt quadrato chordæ, & basis AB.

COROLLARIVM

HÆc propositio deseruit ad inueniendas eas chordas quarum arcus vniti superant quadrantem. Nam tunc poterimus vti subtractione subducendo à sinu tum verso, tum recto arcus, sinum arcus minoris, vt habeatur gemina differentia sinuum OA, & OB, ex quibus differentijs tanquam ex lateribus in numerum quadratum redactis, & vnitis, subducendo radicem quadratam reperiemus chordam differentiæ dictorum arcuum, nempe illius arcus AB, quo differt IB ab IA.

THEOR. IV. PROPOS. XIV.

Quadratum cuiuslibet chordæ vna cum rectangulo gemino, quòd fit à sinu complementi, & toto sinu, tanquam ex lateribus, æquatur geminis quadratis factis à sinu toto.

SIt Chorda FF. Dico, quod eius quadratum minus est quadratis radiorum BE, & FE rectangulo duplici comprehenso sub FE radio, & CE sinu complementi.

Probatur ex propos. 13. lib. 2. Euclid. Quia chorda BF, vt in fig propos. 11. & duo sinus toti EB, & FE faciunt triangulum oxigonium, ergo ea propositio hic verificabitur, quę eodem sensu vniuersaliter ibi probatur.

COROLLARIVM.

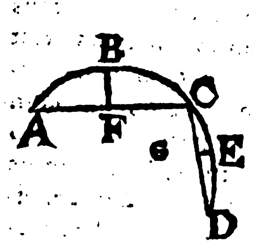
HInc deducitur; quomodo reperta chorda, siue per additionem, siue per subductionẽ, vt ex 12. & 13. proposit. huius reperiatur sinus versus, & complementum sinus, nec non, & sinus rectus illius arcus, cuius chorda componendo, vel subducendo duos sinus inuenta sit.

Pone itaque chordam inuentam esse FB, & cupis scire sinum versum BC. Quoniam quadratum FB, si vniatur cum rectangulo ex FE sinu toto, & EC sinu complementi bis accepto ęquatur quadratis laterum FE, & EB, qui sunt sinus toti. Multiplicetur chorda FB in se, sicut & sinus toti in se ducantur gemina vice, & ab hoc numero aggregato sinus totius geminâ vice in se ducti dematur numerus chordę in se ductus: nam reliquus erunt duo rectangula ex EF sinu toto, & CE sinu complementi. Diuidatur bifariam, & medietas erit vnum ex rectangulis, cuius latus FE notum est; quod est sinus totus. Vnde diuisa medietas remanens per sinum totum dabit latus CE sinus complementi quo habito, & subducto à sinu toto, remanebit FBC sinus versus, cuius quadratum, vt ex 11. huius subductum à quadrato Chordę FB relinquet numerum, à quo subducta radix quadrata, dabit sinum rectum CB.

THEOR. V. PROPOS. XV.

Est maior proportio arcus maioris ad minorem, quam chordæ subtensæ maiori ad chordam subtensam minori.

ID non probabimus eâ euidentiâ, qua Regiomontanus, & nos supra ostendimus prop. 3. Tract. 19. cum res per se clara sit. Dicit itaq; quod arcus maior ABC comparatus ad minorem CED comprehẽdit plures partes minoris, quam comprehendat chorda maioris AC partes minoris CD. Ostenditur verò sic.



Nam certum est; quòd magis curuatur ABC arcus super CA Chordam, quam CED arcus super suam Chordam CD; patet ex sagitta FB, & GE: sed quo magis curuatur aliqua linea, eo plures partes continere necesse est; cùm longiùs spatium mensuret. Ergo arcus ABC, qui magis curuus est super rectam AC, quam minor arcus, plures partes continebit illius arcus, quam quòd contineat AC Chorda maior respectu minoris Chordę CD.

COROLLARIVM.

HInc eruitur, quod chorda vnius gradus sensibiliter non differat ab arcu suo sicut, nec sinus 30. minutorum; cùm sensibiliter super illam non dum arcus curuetur. Sic quod maior proportio arcus vnius Gradus ad arcum 45. minutorum, quam chordæ ad Chordam. Idest, quod si arcus vnius Grad. comprehendit m. 45. & insuper 15. minuta tertiam eorum partem; quod chorda vnius gradus non comprehendet totam Chordam 45. minutorum, & insuper eius tertiam partem; sed paulò minus. Sic quod sit arcus Gradus 1 m. 30. comprehendit arcum vnius gradus vnica vice, & insuper eius medietatem; quòd Chorda ipsius arcus Gr. vnius, & m 30. non cōprehendet chordam arcus Gr. vnius semel, & insuper chordæ eius medietatem, sed paulò minus, & idem dicas de sinubus.

COROLLARIVM II.

Hinc eruas quoque, quomodo propè verum Sinum vnius gradus requiras, licet non certò, nec infallibiliter, sed tamen adeo propè veritatè, vt nullus error sensibilis subrepi queat. Diuidatur sinus 261769. repertus propos. 11. huius Coroll. Arcus Gr. vnius m. 30. in sex partes, & sexta pars erit 43628 $\frac{1}{6}$. Sic sinus 130897. minutorum 45. in tres partes, eritque tertia pars 43632. Si ergo daremus sinui vnius gradus quatuor vicibus sextam partem hanc 43628 $\frac{1}{6}$ sinui vnius Gr. m. 30. esset ipse sinus Gr. vnius part. 174512 $\frac{4}{6}$. Et sinus ipse Gr. 1. m. 30. eum comprehenderet semel, & insuper dimidiam ipsius partem, aut vicibus quatuor ex sex, quibus constat ipse maior, vt arcus Gr. vnius m. 30. comprehendit gradum vnum, nempe 4. vicibus ex sex partibus, quibus ipse grad. maior Gr. 1. m. 30. constat.

At si daremus quatuor partes, ex quibus tribus constat sinus minutorum 45. & comprehenderet sinum 45. vt Gr 1. arcum m. 45. esset 174528. Differentia autem est par. 16 $\frac{4}{6}$, vel 17. Quamobrem electis $\frac{1}{6}$, & quid minus, nimirum partibus 12. proximè addemus eas partibus 174512. vel residuum 4. subtrahemus partibus 174528. & efficiemus sinum partium 174524., quæ sinum minutorum 45. non continebit semel cum tertiâ parte: quia sic deberet esse 174528. at est paulò minus, & continebitur à sinu Gr. vnius m. 30. non semel cum medietate eius, sic enim esset 174512. sed paulò minus. Vnde proportio arcus maioris Gr. vnius ad arcum minorem m. 45. erit maior, quia illum continet, semel cum tertia parte, quàm sinus maioris ad minorem, qui eum non continet semel cum tertia parte; sed paulò minùs, & maior arcus Gr. 1. m. 30 ad arcum vnius grad habebit maiorem proportionem, quàm sinus maior ipsius ad sinum minoris, quòd contineret arcum minorem semel, & medietatem eius; sinus verò maior minorem sinum continent semel, & minùs medietate.

COROLLARIVM III.

Hinc verò sinum arcus habebis minorem 15. minutis; medietas enim Chordæ vnius gradus dabit Sinum m. 30. par. 87264. cuius reperies chordam ex Coroll. 2. propos. 11. cuius medietas erit minutorum 15.

PROBL. I. PROPOS. XVI.

Tabulam sinuum ordinare, & omnino complere.

Doctrina, quam tradidimus sufficiet ad tabulam sinuum condendam, licet, vel facilitatis gratia, & maioris abundantiæ, etiam cæteras regulas trademus infrà.

Itaque ex lateribus inuentis figurarum regularium Quadrati, Pentagoni, Exagoni, & Quindecagoni, ita cæteri sinus educentur. Nam illi erunt chordæ arcuum, quos subtendunt, & medietates sinus, quorum dimidiabis arcus ex Coroll. 2. propos. 11. & harum semissium inueniantur sinus. Deinde harum semissium reperiantur complementa ex Coroll. 1. eiusdem. Inuentorum autem cōplemētorum accipiantur semisses, & earum sinus reperiantur ex Coroll. 2. prop. eiusdem, & sic successiuè, vt in appositis tabellis videre potes.

Tabella arcuum ex latere Gr. 24. Quindecagoni nascentium.

Arcus				Complementa.			
N.	Gr.	M.		N.	Gr.	M.	
1	12	0	2079117	1	78	0	9781476
2	6		2045285	2	84		9945219
3	3		523360	3	87		9986295
4	1	30	261769	4	88	30	9996573
5	0	45	130896	5	89	15	9999143
Comp. 1.	Semisses.			Comp. Semissium.			
6	39	0	6293204	6	51	9	7771460
7	19	30	3338069	7	60	30	9426415
8	9	45	1693495	8	70	15	9856013
Comp. 2.	Sem.						
9	42		6691306	9	48		7431448
10	21		3583679	10	69		9335804
11	10	30	1822355	11	79	30	9832549
12	5	15	871557	12	84	45	9961947
Comp. 3.	Sem.						
13	43	30	6883549	13	46	30	7253744
14	21	45	3705574	14	69	15	9288097
Comp. 4.	Sem.						
15	44	15	6977905	15	45	45	7163019
Comp. 6.	Sem.						
16	30	30	5075384	16	59	30	6661292
17	15	15	2630312	17	74	45	9647873
Comp. 7.	Sem.						
18	30	15	5037740	18	79	45	8638355
Comp. 9.	Sem.						
19	24.		4067366	19	66	9	9135455
Comp 10.	Sem.						
20	34	30	5664062	20	55	30	8241262
21	17	15	2965416	21	72	15	95,0199

Comp.

Comp.11. Sem.				Compl. Semissium.			
N.	G.	M.		N.	G.	M.	
22	39	45	6364390	22	50	15	7688418
Comp.13. Sem.							
23	23	15	3947439	23	65	30	9187912
Comp.16. Sem.							
24	29	45	4972165	24	30	15	8681988
Comp.19. Sem.							
25	33		5446390	25	57	0	8386706
29	16	30	2840153	26	73	30	9588197
27	8	15	1434926	27	81	45	9896514
Comp.20. Sem.							
28	27	45	4656145	28	62	15	8849876
Comp.23. Sem.							
29	32	45	5409745	29	57	15	8410390
Comp.25. Sem.				Comp.			
30	28	30	4771588	30	61	30	8788121
31	14	15	2461533	31	75	45	9692309
Comp.26. Sem.							
32	36	45	5983246	32	53	15	8012538

Tabella Sinuum, qui nascuntur à latere Sexagoni Gr. 60.

Arcus, & Semis.				Complem.			
N.	Gr.	M.		N.	Gr.	M.	
1	30		5000000	1	60		8660254
2	15		2588190	2	75		9659268
3	7	30	1305262	3	82	30	9914449
4	3	45	654031	4	86	15	9978589
Compleméti 1. Sem.				Compl. Semissium.			
5	37	30	6087614	5	52	30	7933533
6	18	45	3214395	6	71	15	9469301
Comp.3. Sem.							
7	41	15	6593458	7	48	45	7518398
Comp.5. Sem.							
8	26	15	4422887	8	63	45	8968727

Tabella Sinuum, qui nascuntur ex latere Pentagoni Gr. 72.

Arcus, & Semis.				Complem.			
N.	Gr.	M.		N.	Gr.	M.	
1	36		5877852	1	54		8090170
2	18		3090170	2	72		9510565
3	9		1564345	3	81		9876833
4	4	30	784591	4	85	30	9969173
5	2	15	392598	5	87	45	9992290
Semis. 1. Comp.				Compl. Semissium.			
6	27	0	4539905	6	63	0	8910065
7	13	30	2334454	7	76	30	9723699
8	6	45	1175374	8	83	15	9930685
Semis. 3. Comp.							
9	40	30	6494480	9	49	30	7604060
10	[illegible]	15	3461171	10	69	45	9381913

Semis. 4. Comp.				Compl. Semissium.			
N.	G.	M.		N.	G.	M.	
11	42	45	6788007	11	47	15	7343225
Semis. 6. Comp.							
12	31	30	5224986	12	58	30	8526402
13	15	45	2714405	13	74	15	9624552
Semis 7. Comp.							
14	38	15	6190940	14	51	45	7853169
Semis. 9. Comp.							
15	24	45	4186597	15	65	15	9081432
Semis. 12. Comp.							
16	29	15	4886212	16	60	45	8724960

Tabella Sinuum, qui nascuntur à latere quadrati Gr. 90.

Arcus, & Semis.				Complementa.			
N.	Gr.	M.		N.	Gr.	M.	
1	45		7071068	1	45		7071068
2	22	30	3826834	2	67	30	9238795
3	11	15	1950903	3	78	45	9807853
4	33	45	5555702	4	56	15	8314696

COROLLARIVM I.

EX his itaque tabellis habebis iam inuentos sinus arcuum 120. qui se superant m. 45. & licet ordo sit confusus; poteris tamen in seriem collocare, & sic 45. minutorum augmentum ordinatum dignoscere.

Si autem, & arcuum, qui se superant min. 15 tantummodo, sinus percupias, id deinde efficies ex propos. 12. huius addendo sinum arcus 39. grad. sinui arcus Gr. vnius, & exquirendo chordam grad. 40. ex notâ sinuum versorum ipsorum differentiâ, vt ibi docemus, hic itaque arcus grad. 40. & eius Semisses, & complementa eodem modo, ac præcedentes tabellę compositę sunt, dabunt multos, multosque arcus, qui prædictos 15. minutis superant.

Tabella Sinuum ex additione sinus grad. 39. & Gr. 1. resultans, nempe ex latere Nonagoni.

Arcus, & Semis.				Complem.			
N.	Gr.	M.		N.	Gr.	M.	
1	20		3420201	1	70		9396926
2	10		1736482	2	80		9848078
3	5		871557	3	85		9961947
4	2	30	436194	4	87	30	9990482
5	1	15	218147	5	88	45	9967620
Semis. 1. Comp.				Semissium, Compl.			
6	35	0	5735764	6	55	0	8161520
7	17	30	3008058	7	72	30	9537169
8	8	45	1521234	8	81	15	9883513
Semis. 2. Comp.							
9	40, & cęt.		6427876	9	50		7660445
Semis. 3. Comp.							
10	42	30	6755902	10	57	30	7372773
11	21	15	& cæt.	11	68	45	& cæt.

Et sic produces ipsam tabellam vsque dum poteris ; illa enim ferè omnes gradus è 15. in 15. minuta progredientes adimplebit, si iungantur, & in ordinem redigantur cum arcubus præced. tabellarum ipsius arcus cum sinibus adiunctis.

Deinde ex arcu Gr. 52. m. 30. subducemus arcum m. 30. & acquiremus arcum Gr. 52. cuius chordam perquiremus ex 13. propos. huius, & habebimus sinum grad. 26. cuius perquiremus complementa, & semisses, & complebit omninò numerum Grad. 360. qui excrescunt 15. minutis se augendo : sicque illius tabulæ stabit initium.

Tabella Sinuum enascentium ex subductione arcus m. 30, ab arcu Gr. 52. m. 30.

Arcus N.	Semiss. Gr.	M.		Complem. N.	Gr.	M.	
1	26	0	4383712	1	64	0	8987940
2	13	0	2249511	2	77	0	9743700
3	6	30	1132032	3	83	30	9935058
4	3	15	566928	4	86	45	9983917
Semiss.	Comp.			Compl.	Semissium.		
5	32		5299198	5	58		8480481
6	16		2756573	6	74		9612617
7	8		1391731	7	82		9902681
8	4		697565	8	86		9975640
9	2		348995	9	88		9993908
10	1		& cæt.	10	89		& cęt.

COROLLARIVM II.

Verùm, si pigeat tanti laboris, scias aliquos vti differentijs ipsis inter sinus Arcuum se superantium m. 45. & earum partibus proportionalibus.

Itaque dispositis sinubus arcuum se 45. minutis superantium hoc modo.

G.	M.	Sinus	Differentiæ Pię.
11	15	1950903	
12	0	2079117	128214
12	45	22 6974	127857
13	30	2354454	127480
14	15	2461533	127179

Subduces sinus minores à maioribus, vt habeas differentias ipsas primas, quas singulas in tres partes æquales diuides. Inde sinui datorum graduum V. g. 12. addes, & habebis sinum maiorem minutorum 15. nempe Gr. 12. m. 15. saltem proximè, & si adhibueris in supputationibus sinum maiorem saltem duabus zifris etiam admodum exquisita hæc regula erit, vsque ad grad. 45. Nam postea cæteri Sinus per inuentorum sinuum arcuum se superantium m. 15. complementa inueniendi sunt.

Sit ergo Sinus Gr. 12. silicet 2079117. differentia est à sinu maiori Gr. 12. m. 45. Par. 2206974. differentia inquam est Partium 127857. quæ trifariam diuisa tertiâ partem exhibebit 42619. Addesq; deinde sinui G. 12. m. 15 qui est 2079117. & erit 2121736. qui erit quidem paulo minor, quam is, qui in sinubus ponitur ; Sed abiectis duabus figuris, quæ abundant ad dextram erit exquisitus sinus 21217. Gr. 12. m. 15. posito sinu toto 100000. at si maior supponatur sinus, vt in tabulis : tunc sinus inuenti ex sinu aucto insuper duabus zifris erunt maiores, quàm hic ponuntur : vnde error etiam, qui in hac regula contingere potest abiectis 2. figuris corrigetur. Cum non possit vltra duas primas figuras ad dextram extendi.

Si verò cupias sinum Gr. 12. m. 30. addes prædicto 2121736. eandem differentiam, & fiet sinus 2164355 abiectisque duabus figuris dextris erit sinus exquisitus Gr. 12. m. 30. posito sinu toto 100000. & sic de cæteris vsque ad 45. Gradus : ex inde enim mediantibus regulis traditis, vel tradendis complementa exquiri debebunt sinuum arcuum inuentorum, & sic omnes sinus arcuum excrescentium m. 15. acquisiti erunt.

COROLLARIVM III.

Hinc quoque cognosces ; quomodo sinus minutorum reperiantur. Namque si iam, vt præsupponitur reperti sint præced. tabularum sinus adhibendo sinum totum auctum duabus zifris, cum vix differat grad. 0. m. 1. vsque ad 45. Gr. sinus adeo paruâ additione aucti à curuitate ipsius circuli ipsi arcui additâ ; hinc fit, quod per regulam proportionum possint exquiri.

Primò itaque accipe differentiam inter sinum V. g. m. 30. & min. 45. quæ erit 43632. Dicesque si minuta 15. quibus discrepat arcus maior à minore dant differentiam 43631. quid m. 5. ? & habebis partes 14544. quæ additæ ad sinum m. 30. Partium 87265. efficient sinum 101809. minutorum 35.

Iam verò reperto sinu arcus m. 35. Part. 101809. si differentiam, qua discrepat ab arcu minori in quinque partes diuiseris, & singulas addideris sinui m. 30. efficies successiuè sinus m. 31. & 32. & 33. & cæt. & hoc exactiùs succedet ; si, vt monui, assuptus fuerit sinus totus auctus duabus zifris. Quinta igitur pars differentiæ 14544. est partium $2908\frac{4}{5}$, quam addes sicut tabella ostendit.

Ita verò sequeris differentias inter sinum arcus maioris Gradibus 15. ab arcu minori in quinque secando, & sinui minori singulas quintas partes successiuè addendo vsque ad arcum Gr. 45. Nam repertis ita omnibus istis sinubus, quęrenda sunt deindè modo supra tradito Coroll. 1. prop. 11. huius, eorum complementa, & sic tota Tabula omnibus Sinibus appositis erit completa.

Sinus m. 30	87265
	$2908\frac{4}{5}$
Sinus m. 31	$90173\frac{4}{5}$
	$2908\frac{4}{5}$
Sinus m. 32	$93082\frac{3}{5}$
	$2908\frac{4}{5}$
Sinus m. 33	$85991\frac{2}{5}$
	$2908\frac{4}{5}$
Sinus m. 34	$98900\frac{1}{5}$
	$2908\frac{4}{5}$
Sinus m. 35	1018090

EX-

EXPENSIO V.

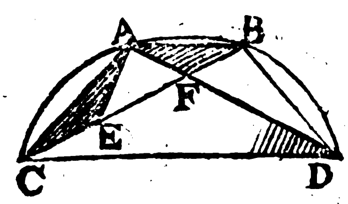
De Sinibus, Chordisque inueniendis sine extractione Radicis Quadratæ.

QVæ diximus supra satis sunt ad tabulam sinuum efficiendam. Verùm ad ampliorem eruditionem, & vt laboriosam, & minus notam inuentionem radicis quadratæ effugiamus suppositis cognitis lateribus figurarum regularium; ex inde sequenti doctrina eam quoque tabulam condere poterimus.

THEOR. I. PROPOS. XVI.

Si in circulo quadrilaterum sit descriptum, rectangulum ex diametris factum est æquale duobus rectangulis simul sumptis qui sub oppositis lateribus comprehenduntur.

SIt ABCD rectangulum descriptum in circulo, seu segmento. Dico *rectangulum descriptũ ex duabus diagonalibus* AD, *&* BC *esse æquale rectangulo* descripto à duobus lateribus oppositis AB, CD, & rectangulo à CA, & DB lateribus oppositis contento.



Quod vt probetur.

Progr. 1. Eligatur aliquis angulus à latere diagonali comprehensus, vt EAF niger apud A, qui vel sit æqualis, vel minor, quam alter ad eandem partem eodem diametro: & latere contiguo comprehensus qualis angulus CAD ad A. Si est equalis nihil fiat; si est minor, vt in exemplo est A in maiori abscindatur æqualis angulus, & fit ad A angulus niger trianguli CAE; quibus nigris, & æqualibus; si addatur albus communis EAF remanebunt æquales niger, albusque EAB, & niger, albusque CAF, diagonalis verò CB erit secta in duas partes in E; Quapropter ex 3. lib. 2. Euclid. rectangula duo sub partibus, & altera diagonali AD comprehensa erunt æqualia rectangulo sub duabus CB, & AD concluso.

Progr. 2. Triangula BAE, & CAD sunt æquiangula, angulusque niger apud A, & albus in maiori triangulo CAD est æqualis nigro, & albo BAE ex constructione.

Anguli verò B, & D nigri, eo quòd inexistant eidem circumferentiæ AC sunt equales ex 24. lib. 3. Euclid. Quare, & reliqui ad E, &c. Ergo ex 4. lib. 6. Euclid erit eadem proportio CD basis ad crus AD maioris, ac basis BE ad crus AB minoris trianguli. Ergo ex 18. lib. 6. rectangulum sub extremis CD, & AB erit æquale rectangulo sub medijs BE, & AD.

Progr. 3. Idem dicendum est de triangulo nigro CAE, quod est æquiangulum triangulo ABD: Nam nigri CAE, & FAB apud A sunt anguli æquales ex constr. albus verò apud D, & niger apud C; eò quod inexistant eidem circumferentiæ AB sunt quoque æquales, quare, & reliqui. Ergo eodem argumento. Ita erit in proportione AD ad BD, vt AC ad CE: Ideoque rectangulum sub extremis lineis clausum, nempe AD, & CE erit æquale illi, quod à medijs BD, & AC clauditur.

Progr. 4. Notandum est itaque, quòd rectangulum ex 2. progr. est factum ex tota diametro AD & maiori portione alterius diametri EB, & æquatur rectangulo laterum AB, & CD oppositorum, & rectangulum ex 3. progr. est ex eodem diametro AD, & minori portione alterius diametri CE æquaturque rectangulo ex reliquis lateribus oppositis BD, & AC. Rectangula autem duo ex diametro tota, & portionibus alterius facta æquantur illi facto ex integris diametris AD, CB, vt prænotauimus ex 3. l. 2. Eu. progr. 1. Quare hoc rectangulum ex diametris erit æquale duobus rectangulis quorum quodlibet ex duobus lateribus oppositis quadrilateri circulo inscripti componitur.

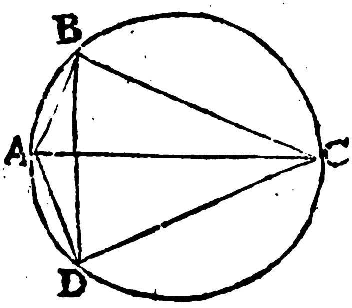
COROLLARIVM I.

HInc eruitur quomodo datis duabus chordis, & chordis repertis complementorum vsque ad semicirculum ex Coroll. propos. II. possimus venire in cognitionem chordæ, quæ inter duos arcus datarum chordarum intercipitur, vel quo simul superant semicirculum, vel quo arcus datus superat alium; sine extractione Radicis quadratæ. Nam datis Chordis CA, & BD multiplicabuntur simul, vt fiat rectangulum sub ipsis comprehensum: Deinde repertis chordis complementorum vsque ad semicirculum AD, & CB arcuum ABD, & CAB inuicem pariter multiplicabuntur, & erit rectangulum æquale rectangulo ex CA, & BD, & rectangulo ex AB, & CD. Subducito itaque rectangulum notum ex lateribus CA, & BD, remanebitque rectangulum ex DC, & AB, quo diuiso per totum diametrum dabitur chorda arcus AB, quæ diuisa per medium dabit sinum dimidij arcus AB, quò dati arcus BD, & AC deficiunt à semicirculo. Hunc autem sinum obtinebis quoque si opereris dimidio diametro, & dimidijs omnibus chordis acceptis. Nam ita est totum ad totum, vt dimidium ad dimidium. Quod si ponas vnum arcum esse CAB, alterum ABD, chorda AB reperta erit arcus illius, quo dati arcus simul sumpti superant semicirculum: At si arcus dati sint CA, & CAB reperta chorda esset illius arcus quo vnus superat alium, vt patet.

COROLLARIVM II.

HInc quoque chorda summæ duorum arcuum reperitur. Pone itaque te habere notas Chordas AB, & AD; earum complementa ad semicirculum reperiantur BC, & DC: Deinde lineç diagonales ducantur, quarum vna sit diameter AC, altera BD in quadrilatero ABDC: Multiplicetur itaque AB latus per oppositum DC; item AD per oppositum BC habebimusque duo rectangula æqualia rectangulo facto ex diagonalibus AC, & BD, si ergo aggregatum duorum rectangulorum ex lateribus AB, & CD necnon, &

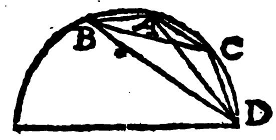
& AD, & BC diuidatur per totum diametrum prodibit Chorda BD, quæ diuisa bifariam dabit sinum



dimidij arcus BAD. Poteris quoque vti dimidiatis lateribus, & dimidio diametro, & prodibit idem sinus dimidij arcus BAD.

COROLLARIVM III.

Poteris quoque datâ chordâ simplicis arcus, & chordâ dupli arcus reperire chordam tripli. Sit ergo chorda arcus AC simplicis, & arcus ACD duplicis. Inuenietur chorda tripli BACD, si chorda simplicis arcus multiplicetur in se nimirum chorda CD, & æqualis AB laterum oppositorum quadrilateri BACD, deinde multiplicetur in se



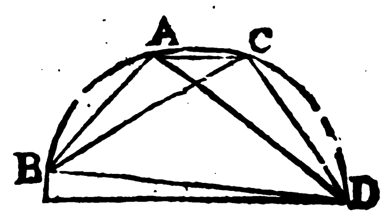
chorda dupli arcus, nempe diagonalium AD, & BC, & ab hoc rectangulo per multiplicationem facto deducatur rectangulum primo factum per multiplicationem laterum BA, & CD, & residuum æquabitur rectangulo ex lateribus oppositis AC, & BD; Vnde si hoc rectangulum diuidatur per latus notum AC; relinquetur latus BD tripli arcus chorda, & si vtaris dimidiatis chordis eueniet sinus dimidij arcus BACD.

COROLLARIVM IV.

Si autem noueris chordam tripli arcus BACD, simplicis BA, & cupias chordam duplicis. Oportet multiplicare AB simplicis arcus chordam in se, & habebis rectangulum sub lateribus æqualibus oppositis comprehensum, deinde simplicis arcus chordam cognitam per arcus tripli chordam multiplicabis, & habebis rectangulum ex BD, & AC, quæ vnita æquabunt quadratum ex diagonalibus AD, & BC. Vnde educta radix quadrata dabit chordam AD, quod licet ad hunc locum minus spectet, cum nostrum institutum sit docere, quomodo sine extractione radicis quadratæ datis lateribus figurarum circulo inscriptarum possint omnes sinus reperiri; noluimus tamen omittere.

COROLLARIVM V.

Poteris quoque reperire ex chordis notis dupli arcus tripli, & simplicis chordam quintupli arcus. Chorda simplicis arcus sit AC, dupli arcus CD. Si multiplices CD, & BA æquales inuicem habebis rectangulum, quadrilateri BACD sub oppositis lateribus contentum; multiplicabis quoque diagonales BC, & AD in se, & obtinebis rectangulum, à quo demes rectangulum ex oppositis late-

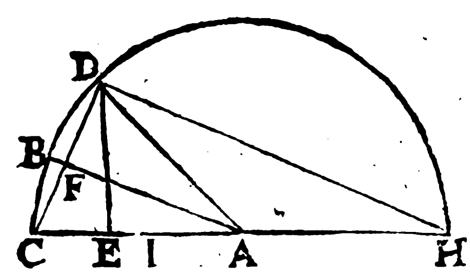


ribus constitutum BA, & CD, residuumque diuides per latus AC, iam cognitum, & prodibit chorda BD arcus quintuplicis BACD.

THEOR. II. PROPOS. XVII.

Quadratum sinus recti est æquale rectangulo ex sinu verso duplicis arcus, & medietate radij confecto.

*Probatur. Nam triangulum CDH ad circumferentiam, est rectangulum, vt etiam tale est CDE, angulusque C communis, ergo ita erit CH diameter, & basis ad chordam, & latus minus CD trianguli maioris, vt idem latus, chordaque, & insuper basis in triangulo minori ad CE latus minus: Et ideo ex propos. 19. lib. 6. quadratum ex chorda CD, tanquam ex medio æquale



erit rectangulo ex extremis confecto CE, & CH: Ergo, & quarta pars quadrati ex CD, cuius latus est medietas, FD, est æqualis quartæ parti rectanguli, quæ comprehenditur à CI semiradio, & CE sinu verso duplicis arcus, quod est intentum: hæc verò quarta pars posset constitiui, si placeret ex semisinu verso, & toto radio CA, vt consideranti patet.

COROLLARIVM.

Hinc est, quod si multiplices sinum rectum CF in se, & deinde diuidas per semiradium CI quod habeas sinum versum duplicis arcus CE, qui subductus à sinu toto dat sinum complementi EA. Sic quoque, quod si multiplices sinum versum CE per semiradium CI, & ex numero multiplicato radicem quadratam eruas, quod sinum rectum CF obtineas.

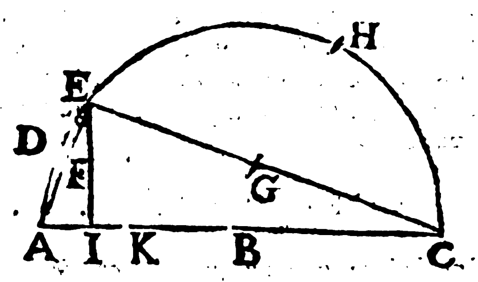
EXPEN-

THEOR. III. PROPOS. XVIII.

Vt dimidium sinus totius se habet ad sinum dimidij alicuius arcus, ita sinus complementi eiusdem dimidij ad sinum totius arcus.

SIt dimidium AK, Sinus totus AB; dupletur ipse sinus totus, & sit ABC diameter, & hac diametro fiat semicirculus. Sitque in eo sinus EF dimidij arcus AD totius arcus ADE: Sinus verò totius arcus eiusdem ADE sit IE complementum arcus dimidij ED sit EH, & ducta EC sinus illius cóplementi EH sit EC. Dico, *quod ità est dimidium AK sinus totius ad sinum EF dimidij arcus, vt refertur sinus EG complementi eiusdem dimidij in proportione ad sinum totius EI.*

Quod vt probetur considera AEC angulum; quod si in circumferentiâ, & EIC ex Hypothesi esse rectangula, angulumque communem esse apud C. Vnde, & erunt æquiangula, vt constat ex propos.8. lib.6. & ideo ex 4. Eucl. lib.6. latera circa æquales angulos erũt proportionalia. Ideoque erit, vt basis AC trianguli maioris ad crus minus AE, ità basis EC ad crus minus IE minoris trianguli EIC. Quamobrem dimidium quoq; AB totius diametri, & basis se habebit ad idem suum crus minus AE, vt dimidium EG basis EC minoris IEC trianguli se habet ad EI crus minus in ipso. Radius AB, & GE, itaque iam sumantur



tur non vt dimidia, sed cum sint in eadem proportione, ac sua tota veluti tota accipiantur, & erit AB ad AE, vt EG ad EI. Vnde eodem argumento; denuò concludemus intentum. Nam dimidium sinus dimidij & quarta pars AK basis AC erit ad dimidium sui cruris AE, nempe ad sinum EF dimidij arcus ADE, vt sinus EG complementi ad sinum IE duplicis arcus.

COROLLARIVM I.

QVòd si obtineas cognitionem sinus recti AF dimidij arcus AE. & sinus complementi eiusdem EG potes acquirere cognitionem sinus duplicis arcus EI per regulam auream. Nam si multiplices sinum complementi EG per sinum rectum EF, & diuidas per medietatem sinus totius AK habebis sinum EI rectum duplicis arcus ADE.

COROLLARIVM II.

SIc si obtines cognitionem Sinus duplicis arcus, & sinus complementi simplicis eiusdem posses deuenire per regulam auream in cognitionem sinus simplicis arcus. Nam si multiplices dimidium sinus totius AK, cum sinu duplicis arcus IE, & aggregatum diuidas per sinum complementi dimidij arcus EG habebis sinum simplicis arcus FE. Nam EG, qui est sinus complementi dimidij arcus EH est ad EI sinum duplicis arcus, vt dimidium sinus totius AK est ad sinum simplicis arcus AF, quare rectangulum factum ex medijs AF sinu simplicis arcus & GE complementi eiusdem æquale est rectangulo facto ex extremis AK dimidio sinus totius, & IE sinu duplicis arcus.

Si verò è contra diuidas rectangulum ex IE, & AK per sinum simplicis arcus FE habebis sinum complementi simplicis arcus EG, sicque dato sinu duplicis arcus, & dimidio sinus totius, & sinu simplicis arcus deuenies in cognitionem sinus complementi eiusdem arcus simplicis.

PROBL. I. PROPOS. XX.

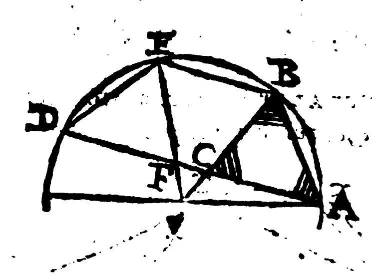
Arcus tertiæ partis Chordâ datâ chordam totius arcus inuestigare.

SIt data chorda AB, & opporteat inuenire chordam AD, quæ arcum totum subtendat.

Fiat, vt VA sinus totus ad AB chordam datam; ità AB ad BC. Deinde rursus adhibitâ regula proportionum, fiat, vt radius BV ad residuum VC inuentę BC, sic Chorda datâ AB, vel æqualis BE ad aliud, & inuenietur CF; Quia ergo AC, & FD sunt æquales ipsis AB, & BE: si addatur ipsis nuper inuentâ CF efficietur AD, quæ quærebatur.

Quòd, vt ostendatur, ductâ BV ponatur AC æqualis ipsi AB, & prolungetur in D. Dico *in primis* BED *arcum esse duplum arcus* AB, & ideo AED arcum, quem subtendit AD esse triplum arcus AB.

Prob. Nam angulus niger B est æqualis nigro C ob æqualia crura AB, & AC ex effectione: Quare & angulus A semialbus erit æqualis nigro B ob æqualia crura AV, VB, nempe radios, & ideo quoque nigro C, & sic B, & C anguli nigri trianguli ABC erunt æquales angulis B, & A trianguli BAV: Quare, & reliquus angulus niger A in triangulo ABC erit æqualis albo V in triangulo BAV ex propos.17. lib.1. elem. Sed A niger est ad circumferentiam. ergo vt æqualis duplo maiorem circumferentiam subtendet BED, cum si subtenderet æqualem sub duplus esset; ideo addito EB totus arcus AEBD erit triplus arcus solius AB.



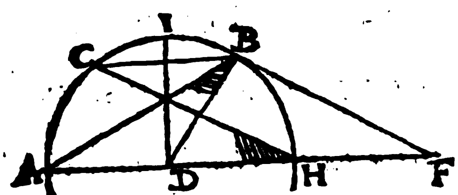
Prob. 2. Quòd radius sit ad datam AB, vt AB ad BC: cum enim triangula sint æquiangula habebunt latera circa æquales angulos proportionalia. Ergo erit, vt AV ad BA basim, ita eadem crusque AB ad BC. Et hinc ex 4.lib.6. erit BV ad residuum VC inuentę BC, subducte à sinu toto, vt BE ad CF, quæ cum AC, & DF complet subtensam AD.

THEOR.

THEOR. VI. PROP. XXI.

Radius est ad chordam, quadrantem superantem, vt ipsa chorda ad diametrum addita Chorda dupli excessus.

SIt data AB, quæ superet quadrantem, & duplus excessus sit CB. Dico, *quòd radius* AD *est ad* AB, *vt* AB *chorda ad* AF *diametrum cum* HF *æquali* CB dupli excessus IB, quo arcus ACB superat quadrantem AI.



Probatur. Nam triangula ABD, & ABF sunt æquiangula, & angulus A est æqualis angulo F ob parallelismum linearum æqualium ipsi AB, quæ sunt CH, & BF; siquidem ob id; tam angulus A, quam F æquantur tertio angulo H nigro, angulus verò A communis vtrisque æquatur angulo B nigro ob equales radios: Ergo,& reliqui ex Cor. 2. propos. 17. lib. 1.: Quare habebunt hæc triangula latera circa æquales angulos proportionalia,eritqꝫ AD crus ad AB basim, vt ipsa AB crus in triangulo ABF ad AF basim.

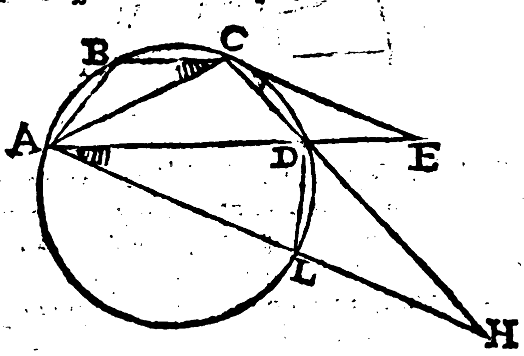
COROLLARIVM.

HInc si datâ chordâ AB excedente quadrãtem facias regula aurea, vt semidiameter AD ad AB, ita AB ad aliud inuenies AF, à quo inuento subduces diametrum, & restabit HF idest æqualis CB dupli excessus, quo superat data chorda quadrantem.

THEOR. V. PROPOS. XXII.

Tres subtensæ prima arcui simplici secunda duplici, tertia triplici æqualibus sunt tres continuè proportionales: si prima tertiæ addatur, vt sit vltima proportionalis.

ADdatur AB prima tertiæ AD. Dico AB, AC,& AB *esse tres continuè proportionales*.



Extensâ AD fiat æqualis linea CB ipsi AC. Et ostẽdẽdum *primò* esse BA ad CA, vt CA ad AB. Angulus DAB albus est bifariam sectus linea AC,& partes DAC, & CAB equales sunt: sed angulus E ipsi CAD ob æqualia crura ex effectione, sicut C niger albo CAB æquantur. Ergo triangula, ECA, CBA æquiangula sunt; quare erit, vt crus BA ad basim AC, ita AC ad AB ex 4. lib. 6. elem.

Deinde ostendendum est ED equari ipsi AB Triãgulum EDC est æquiangulum triangulo CBA. Angulus enim E ostensus est æqualis angulo nigro C: Angulus ABC subtendit totam periferiam exceptis duabus partibus BC, & BA; quibus inest; sed angulus CDA subtendit duas ipsas partes CB, & BA. Ergo residuus angulus exterior EDC totam reliquam peripheriam occuparet, cũ duo anguli apud D duobus rectis æquentur, & ideo ad centrum positi insisterent semicirculo. Vnde ad peripheriam totam peripheriam vsurparent. Quare EDC angulus æquabitur angulo B: cum ergo sint æquiangula triangula ob duos angulos equales ex Cor. 2. pr. 17. lib. 1. ita erit BA ad CB, vt DC ad DE: sed BA, & CB sunt æquales. Ergo etiam DC, & ED lineæ; linea verò DC æquatur ipsi CB ex hypothesi.

Sit deinde HD æqualis ipsi DA. Dico rursùs CA esse ad EA, vt AD ad AH in proportione. Sunt enim ECA, & HDA triangula equiangula ob angulos ipsorum apud A æquales ex Thesi, & consequenter E, & eiusdem trianguli, sint æquicrura: vnde, & reliqui æquales ex Coroll. 2. propos. 17. lib. 1. Quare erit vt EA crus ad EA basim, ita DA crus ad AH basim.

Deinde assero HL æquari ipsi CA. Nam HLD triangulum est æquiangulum triangulo DCA. Nam angulus H æquatur nigro A, & angulus DCA obtusus subtendit totam circumferentiam exceptis tribus partibus, idest artum DCBA: Sed angulus DLA subtendit easdem tres partes; & est internus, ergo reliquus HLD externus equatur ipsi DCA: & totam reliquam circumferentiam in circumferentia positus subtenderet. Quamobrem DC erit ad CA, vt DL ad LH: quare permutando DC erit ad DL; vt CA ad LH; sed CD,& LD sunt æquales. Ergo LH,& CA erunt æquales.

COROLLARIVM.

HInc deduces modum, quo triplices,& quadruplices, aut quintuplices, & cæt. arcum propositum Cuiuscumque arcus subtensam inuenias. Nam datâ subtensâ arcus simplicis BA, & arcus duplicis CA si adhibitâ regulâ aureâ multiplices, subtẽsã arcus duplicis in se,& diuidas per subtensam arcus simplicis habebis AE, cui subducta ipsa BA, idest DE tertiam subtensam DA arcus triplicis, exhibebit. Quoniam ostendimus BA esse ad CA, vt CA ad AE. Deinde si rursus assumas DA,& ei addas DE, vel BA, vt fiat EA, & regula proportionum dicas si CA dat EA, quid dabit AE? inuenies HA, quæ subductâ ipsâ CA, dabit subtensam AL arcus quadruplicis LCA, & sic de aliis.

COROLLARIVM II.

ELicies. Quomodo ex cognitione chordarum, quæ latera figurarum, de quibus diximus Expensione prima, & chordarum arcuum, qui earum arcus complent vsque ad semicirculum, quæ acquiri possunt ex propos. 18 possimus deuenire in cognitionem ceterorum omnium sinuum. Nam dimidientur chorde, & erunt sinus dimidij arcus. Sic earum complementa vsque ad semicirculũ,& erunt sinus complementorum vsque ad quadrantem tum. Deinde per propositiones positas omnes alios arcuum sinus se inuicem superantium 45. minutis possumus reperire, & deinde ex dictis Coroll.2.prop.15. reperto sinu, arcus vnius. Similiter omnes alios arcus, qui 15. minut. alter super alterum augentur inuenire, ex Coroll.1.& 2.prop. 16. & tandem ex regula aurea omnes alios, qui vnico minuto continuò excrescent augmento.

V. g. data chorda decagoni 24. dimidiata erit sinus Gr. 12. Sicut, & complementi chorda 156. Gr. dimidiata erit Gr.78. complementi arcus 12. Primo itaque ex Corollar. proposit. 18. habebis sinum versum duplicis arcus Gr.24.quo subducto à Radio erit residuum eius complementum Gr.66.& consequenter chorda duplicis arcus Gr.132. Quibus obtentis potes etiam obtinere cognitionem sinus recti ex prop.17. Coroll.1. arcus eius duplicis 48. & eius complementi gr. 42. ex Cor.pr.18. Deinde cum iam habeas sinum Gr.42. potes reperire eius duplum, sinum gr. 84. & eius complementi gr. 6. Et hinc gr.3. deinde gr.1.m. 30. & tandem gr. 0. m.45. Quo habito poteris reperire per ordinem omnes sinus, qui differunt m.45. ex Coroll. proposf.22. vsquequo compleas 120. arcus inter quos reperies sinus couenientes, vt supra docuimus. Vel vtendo alijs propositionibus positis datâ chordâ arcus 12. & arcus 36. ex proposf. 17. Coroll. 2. inuenies chordam summe datorum arcuumG.42.cuius sinum cōplementi ex prop. 18.vel 19. reperies sinum arcus G 46. & dimidij huius arcus ex proposf.19. duplicabisq; & erit chorda totius arcus 46. istis itaque duabus chordis gr. 12. & G. 46. ex proposf.16. Coroll.2. inuenies chordam summæ arcuum illarum chordarum, nempe arcus 58. cuius medietas sinus erit arcus 29. & ita prosequeris diuersimodè sinus, complementaque,& chordas combinando: Nam eodem modo omnes sinus reperies, qui se superant m. 45.

EXPENSIO VI.

De reperiendis sinubus aliquibus per solam subductionem, & additionem.

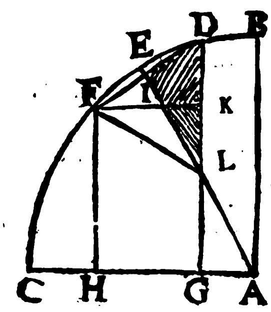
QVia facilitas in omnibus, & temporis compendium placet in multis sinubus inueniendis singulari breuitate,& facilitate hàc regula possumus vti; quam præmissa vnica propositione tradémus.

THEOR. I. PROPOS. XXIII.

Differentia sinuum rectorum peripheriarum duarum à circuli sexta parte æquali interuallo remotarum æquantur sinui recto peripheriæ alterius interualli à circuli sexta parte.

SInt in quadrante ABC peripheriæ duæ EF, & ED æquali interuallo ab E circuli sextantæ remotæ, quarum sinus DI, vel FI; sinus verò arcuum, qui ab E circuli sextante æquali interuallo seiungūtur sint FH sinus arcus FC,& GD sinus arcus DC, quorum differentia sit KD. Dico KD differentiam esse æqualem sinui recto FI, vel ID interualli, seu DE, seu EF. Ducatur itaque AE, & ab L, vbi secat AB ducatur LF.

Probatur. Triangulum DFL est æquiangulum. Habemus enim duo triangula rectangula prorsus æqualia nigrum, & album. Nam latera quidem IF, & ID æqualia sunt, latus verò IL commune.



Propterea ex pr. 22. primi, & bases erunt æquales. Vnde,& anguli ad L albus, & niger æquales: Sed angulus niger ad L est partium 30. æquatur enim angulo LAB apud A ex pr.30.l.1.ob parallelismum linearum AB, & GD. Ergo alter niger ad D erit G.60.ad hoc,vt cum angulo recto ad I æquetur duobus rectis ex prop.17.l.1. Sic philosofare de albo ad F ob angulum album ad L æqualē angulo ad L nigro, qui est Gr.30. qui, & compositi facient totum DLF Gr. 60. Ergo æquilaterum erit triangulum, & æquiangulum, & perpendiculares KF, & LE diuident, vt angulos bifariam, sic, & latera bifariam. Ergo erit KD differentia sinuum rectorum, & IF sinus rectus interualli, quo distat arcus FC ab arcu gr. 60. CE erunt æquales.

COROLLARIVM I.

SI itaque notum habeas sinum rectum arcus V g. 36. & sinum rectum interualli vsque ad 60. arcus Gr. 24. & addas simul istos duos sinus efficies sinum arcus 84. Sinus enim ille V.g. EF gr. 24 æquatur differentiæ KD arcus 84. nimirum arcus, qui compositus est ex arcus 60. & interuallo 24. qui erat inter 60.& 36.vnde additus FI sinus G. 24. sinui arcus FH Gr. 36. facient sinum GD arcus 84.

COROLLARIVM II.

SIc si notos habeas duos sinus arcuum, qui æqualiter distent ab arcu gr. 60. vt sunt duo sinus HF arcus 36. gr. & GD arcus gr. 84. & subducas vnum ab alio, habebis sinum arcus interualli; quo alteruter eorum distat à gr. 60. nempe DI sinum arcus ED, vel FE.

COROLLARIVM III.

SIc si demas notum sinum ID interualli ED, à maioris arcus sinu GD pariter cognito habebis sinum HF minoris arcus,

Et hoc de sinibus dictum sit quatenus ipsi inueniri possunt, cùm de cęterò de eis iterum reassumendus sit tractatus, quatenus mediantibus ipsis arcus inueniri queunt.

EXPENSIO VII.

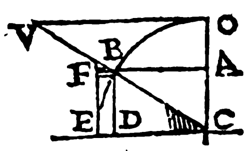
De tangentibus, & secantibus.

SEcantium atque tangentium ex præcedentibus inuentis quantitates deducuntur; ex proportionibus enim, quas ad finus habent, earum mutuas proportiones breuiter explicabimus.

THEOR. I. PROP. XXIV.

Quam proportionem habet Sinus complementi ad sinum rectum, eam habet Sinus totus ad tangentem arcus.

PAtet. Nam finus complementi AB arcus BO complentis vſque ad quadrantem arcum EB eſt æqualis CD ob parallelogrammum rectangulū ABCD: Sed CBD, & CFE ſunt triangula æquiangula, vt patet, & BD, & EF parallelæ. Ergo ex prop. 4. lib. 6. Eucl. ita erit CD finui AB complementi æqualis ad BD ſinum rectum, vt CB radius ad EF tangentem; quod eſt propoſitum.



Quod ſi conſtituas OB pro arcu, & AB pro ſinu recto BD erit ſinus complementi. Quare eadem ratione ſinus rectus AB, vel æqualis CD erit ad ſinum complementi BD, vt CE ad EF; quare in hoc caſu, quam proportionem habet ſinus rectus ad ſinum complementi eam habet ſinus totus ad tangentem ipſius complementi.

COROLLARIVM.

HInc potes dato ſinu recto, & ſinu complementi, & radio inuenire tangentem, ſeu ſinus recti, ſeu complementi. Nam ſi multiplices ſinum totum per ſinum complementi, & diuidas per ſinum rectum, habebis tangentem complementi. Quod ſi multiplices ſinum totum per ſinum rectum, & diuidas per ſinum complementi, tangentem habebis arcus, cui rectus ſinus ſubtenditur.

THEOR. II. PROPOS. XXV.

Radius medio loco proportionalis eſt inter tangentem arcus, & tangentem complementi.

PRobatur. Nam triangula CEF, & COV ſunt æquiangula. Ergo ex propoſ. 4. lib. 6. ita erit OV crus maius, & tangens ad OC radium, vt radius CE, & crus maius in minori triangulo ad EF crus, & tangentem.

Quod autem triangula VOC, & CFE ſint æquiangula non eſt dubitandum. Nam ſunt rectangula ad O, & E ob tangentes perpendiculares; vnde reliqui anguli nigri ſimul ſumpti C, & F erunt æquales vni recto, quare angulus niger F erit complementum anguli C. Ergo æqualis angulo ad C albo, & eiuſdem complementum, & ob eandem rationem angulus albus V erit æqualis nigro C.

COROLLARIVM.

HInc emergit Rectangulum tangentium eſſe æquale quadrato ſinus ex propoſ. 17. lib. 6. Eucl. & ideo in ſe ducto ſinu toto; ſi diuidas per notam tangentem arcus habebis tangentem complementi, & ſi diuidas per tangentem complementi, reſultabit tangens arcus.

Vnde faciliter tabulæ tangentiū extrui poſſunt: Nam ex 24. propoſ. inuentis tantùm tangentibus dimidij quadrantis, cæteras inuenire poteris ex hac propoſitione, & quidem per ſolam diuiſionem quadrati ſinus totius.

THEOR. III. PROPOS. XXVI.

Sinus totus medio loco proportionalis eſt inter ſinum complementi eiuſdem arcus, & ſecantem eiuſdem arcus.

PRobatur ex præmiſſis. Nam CBD, & CEF ſunt triangula æquiangula: Ergo ita erit ad baſim, & ſinum totum CB ſinus complementi CD, vel AB, vt idem ſinus totus, cruſque CE eſt ad ſecantem CF.

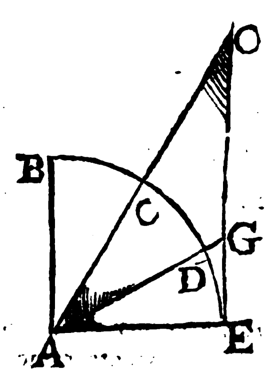
COROLLARIVM.

HInc verò deduces multiplicatum ſinum totum in ſe, & diuiſum per ſinum complementi exhibiturum ſecantes arcuum, quos complent. Ita CE ſinus totus multiplicatus in ſe, & diuiſus per AB ſinum complementi BO exhibebit ſecantem CF arcus EB.

THEOR. IV. PROPOS. XXVII.

Secans arcus minoris ſemiquadrante addita tangenti facit tangentem arcus, qui prædictum continet, & ſemiſſem ſui complementi.

SIt arcus ED, cuius ſecans AG, tangens GE, complementum ſit arcus DB, & medietas eius DC. Quare arcus continens arcum primo propoſitum ED, & ſemiſſē illus complementi DC erit arcus EC. Dico *eius tangentem fieri* EO, *ſi* AG *ſecans arcus* DE *addatur tangenti* GE.



Probatur. Sunt enim æquales AG, & GO. Ratio eſt; quia anguli nigri ad A, & O ſunt æquales; Vnde, & latera eis ſubtenſa erunt æqualia. Sunt autem æquales; quoniam æquantur vni tertio angulo BAC, quòd eſt anguli CAE, ſeminigerrimi complementum, ſicut angulus niger O eſt complementum eiuſdē CAE in rectangulo AEO triangulo.

triangulo. Cùmque BAC,& O niger,eiusdem CAB sint complementa erunt æqualia; sed BAC æquatur ipsi DAC nigro ex constructione; ergo niger O, & niger A erunt æquales: quare, & latera AG, & OG subtensa æqualia erunt.

COROLLARIVM.

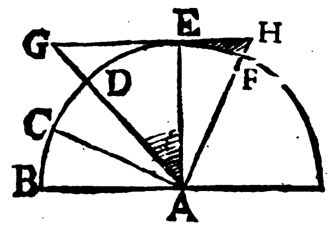
HInc habes. Quod cognitis secantibus, & tangentibus omnium Gr. vsque ad 45. possis per solam additionem omnes alias tangentes maiores, quam 45. graduum reperire, addendo silicet secãtes tãgentibus V.g.si habeas tãgentẽ,& secantem arcus Gr. 24. & eas addas simul efficies tangentem arcus 57. Gr. qui continebit semel 24. & insuper medietatem complementi eius, quod amplectitur gr. 66.

THEOR. . PROPOS. XXVIII.

Secans arcus æqualis est tangenti arcus eiusdem, & tangenti eius complementi.

SIt arcus ED, cuius tangens BC; medietas verò eius complementi DB, sit DC, vel arcus æqualis FE, cuius tangens EH. Dico, *quòd tota* GH *ex tangentibus arcus, & semissis complementi æqualis est secanti* AC.

Probatur. Nam anguli ad H niger, & A niger, & albus in triangulo HGA inuicem sunt æquales. Ergo, & latera subtensa ex 15. propos. lib. 1. Elem. erunt æqualia. Quod verò anguli sint æquales H niger, & totus A semialbus ostenditur. Nam pars alba ad A ex Hypothesi est æqualis angulo BAC.



Ergo reliquus ad H niger in rectangulo AEH erit æqualis angulo CAE, vt ex propos. 17. lib. 1. Eucl. Cor. 2. Talis verò est totus angulus HAG, nimirum æqualis angulo CAE, cùm habeat partem nigram communem, & albam ex Thesi angulo BAC, & æquali CAD æqualem; vnde H, & A anguli, & ideo crura in triangulo HGA erunt æqualia.

COROLLARIVM.

HInc euenit; Quod si simul componantur tangens arcus V. g. 24. & tangens semissis complementi eiusdem, nempe arcus 33. efficiatur secans arcus 57. Vnde multæ ex secantibus, atque tangentibus sola additione enasci possunt; Et hęc de secantibus, & tangentibus; quatenùs ipsę inueniri possunt, quatenùs verò per eas arcus inueniuntur, & quatenus inuicem referuntur infra tractabimus.

TRACTATVS XXI.

De Logarithmis.

MIro, & perutili inuento iungere Geometricis proportionalibus Arithmeticos cogitauit primus Ioannes Neperus Schotus, vt facilior calculus astronomicus per solam subtractionem, & additionem prodiret, quod inuentum licet ab Henrico Briggio aliter, deinde ordinatum sit; quia tamen eadem proportionum basi nititur, ideo hìc cùm (vt moris nostri est) fundamenta rerum tradere cupiamus, Neperi inuentionem ne dum, sed & ordinem, qui nobis magis arridet, explanabimus.

EXPENSIO I.

Cur Arithmetici proportionales Geometricis vniantur.

ARithmetici quatenus Geometricis proportionalibus vniti vocantur Logarithmi.

Vt sunt Geometrici	1	3	9	27	81	243	729
Arithmetici	0	2	4	6	8	10	12
Arithmetici	19	17	15	13	11	9	7

Seu simul cum Geometricis decrescant, vel crescant, seu hi deficiant, dum illi augentur.

Annalogia verò, & similitudo, quam habent inuicem proportionales Arithmetici, & Geometrici in causa fuit, cur simul vnirentur, quàm hic diuersis propositionibus explicabimus.

THEOR. I. PROPOS. I.

Si duo numeri Geometrici inuicem multiplicati componunt tertium, eorum Logarithmorum aggregatum erit tertij Logarithmus.

SInt tres Geometrici proportionales

10	100	1000
3	6	9

Dico, quòd, *si* 10. *multiplicatus per* 100. *facit* 1000. *quod item primus Arithmeticus vnitus secundo facit tertium.* sic 3. vnitus cum 6. facit 9.

Probatur. Nam extenduntur in maius, ex propos. 17. tract. 14. de proport. part. 1. proportionales Geometrici per multiplicationem denominatoris proportionis: at verò ex propos. 10. par. 2. Tract. 14. Arithmetici per additionem differentiæ. Si ergo in Geometricis primus terminus sit denominator, vt hìc 10. & in Arithmeticis primus terminus sit differentia, necessariò sicut 10. multiplicando secundùm 100. facit 1000. ita 3. additus 6. faciet 10. tertium terminum.

THEOR. II. PROPOS. II.

Proportio Geometrica applicata proportioni Arithmeticæ incipit à Zifra 0. vel à millione, vel simili numero 10. qui vnitate additus zifris constet.

SI sit proportio Geometrica continua proportionalitate, vt 10. 100. 1000. 10000. & Arithmetica, quę à 0. incipiat, vt 0. 4. 8. 12. 16.

Arithmetica	10.	12.	14.	16.	18.	20.
Geomerrica	1.	10.	100.	1000.	10000.	10000.
Arithmetica	0.	4.	8.	12.	16.	20.

Dico, quod hæc Series Arithmeticorum infra positorum benè demonstrat Geometricos, ex eo quòd reperto arithmetico bene reperiatur correspondens Geometricus. *Atque ideo eis series Arithmetica bene addita sit.*

Probatur. In eo enim similitudine correspondent, quòd si duo Geometrici inuicem multiplicati producant tertium. Arithmetici quoq; additi, & simul positi producunt tertium. Sic quia 10. & 1000. se multiplicando producunt 10000. ita 4. Aritmeticus sub positus vnitus arithmetico 12. producit 16: At si progressio inciperet à 4. tunc primus additus secundo non faceret tertium, vt hęc.

4. 7. 10. 13. 16. 19.

Nam nec 4. radicalis additus numero 10. producit 13. nec 10. & 13. producunt 16. Ergo numerus radicalis zifra esse debet, vel vnitas iuncta zifris, vt expeditè proportio Arithmetica deseruiat geometricę. Sic si numero 14. addatur 16

facit

faciet 30. à quo ablatus 10. vel vnitas secundi loci ad finistram dat 20. ficut 1000 per 100. multiplicatus dat 100000.

Non intereft autem; an retrograda fit, & crescentibus Geometricis, Arithmetici decrescant, vt hic

1	2	4	8	16	32	64	128
31	28	25	22	19	16	13	10
100	94	88	82	76	70	64	58

Nam pari modo in oftendendo tertio proportionali se gerunt; sed crescentes per additionem oftendunt tertium proportionalem maiorem; decrescentes verò minorem. Si tamen numerus radicalis fit ad maximum appofitus, vt in prima ferie; fecùs fi fit ad minimum Geometricum, nam; & decrefcentes maiorem quoque oftendunt.

THEOR. III. PROPOS. III.

Si numerus Geometricus per numerum diuifus producit tertium proportionalem, fit & Arithmeticus à primo fubductus relinquit tertium.

Vt	1	3	9	27	81	243	729
	0	4	8	12	16	20	24

QVia ergo 27. diuifus per 3. producit 9. ita 4. fubductus à 12. relinquit 8. & quia 9 diuidendo 243. producet 27. fic, & 8. fubductus à 20. relinquit 12. Logarithmum numeri 27.

Ratio eadem quę propofitionis primæ adhibita cautela antecedentis propofitionis, quoad Arithmeticos nempe à zifra, vel vnitate additis zifris progreffionem debere incipere.

THEOR. IV. PROPOS. IV.

Sicut trium Sinuum proportione Geometrica continuatorum quadratum medij eft æquale quadrato ex extremis inuicem multiplicatis effecto. Ita Arithmeticorum appofitorum duplum medij æquatur aggregato extremorum.

3	9	27	81
4	8	12	16

SIc multiplicatus 9. in fe facit 81. vt 3. per 27. at Arithmeticus 8. duplicatus facit 16. quem numerum faciunt 4 & 12 iuncti. De Geometricis patet ex propof., tract. 14 part. 1. De Arithmeticis conftat ex propof. 2. part. 2. tract. 14.

THEOR. V. PROPOS. V.

Quatuor Geometricè proportionalium, ficut factum ex ductu mediorum æquatur facto ex ductu extremorum: Ita fuorum Logarithmorum aggregatum mediorum, æquatur aggregato extremorum.

3	9	27	81	243	Geometrici
5	10	15	20	25	Arithmetici.

ITa duo extremi Geometrici 3. & 81. faciunt 243. quem faciunt 9. & 27. medij inuicem multiplicati; ficut Arithmetici iuncti 5. & 20. extremi faciunt 25. quem faciunt 10. & 15. medij fimul aggregati.

Patet de Geometricis ex propof. 6. part. 1. tract. 14. de Arith. quoque ex propof. 1. part. 2. tract. 14.

THEOR. VI. PROP. VI.

Sicut ex numero in fe femel ducto producitur quadratus, & iterum in productum ducto efficitur cubus, & rurfus in cubum ducto efficitur fuperfolidus; fic Arithmeticus duplatus quadrati efficit Logarithmum, triplatus cubi quintuplatus fuperfolidi.

Geomet.	1	2	4	8	16	32	64	128	256
Arithmet.	0	3	6	9	12	15	18	21	24

NAm ex propof. 24. lib. 8. Elem. qui ab vnitate continuè proportionales Geometrici tertium quemque habent quadratum. Quartum verò cubum, & duobus intermiffis quemlibet fequentem. Septimum autem cubi quadratum, & quinque intermiffis quemlibet fequentem, & cæt.

Sed fi ab vnitate continuè proportionalibus Geometricis fui quique applicentur proportionales Arithmetici incipientes à zifra, fecundus erit duplex primi, & quartus triplex fecundi. Cùm enim primus radicalis numerus fit o. & idem numerus femper addatur, fequitur neceffariò, quòd fecundus fit duplus primi, & quartus duplex fecundi. Sed ex propof. 9. Element. lib. 8. quot inter vnum numerum V. g. 8. ab vnitate continuè proportionalium Geometricorum, & vnitatem cadunt proportionales Geometrici, tot, & inter illum, & alium in eadem ratione exiftentem vt 64. neceffe eft cadere. Ergo quot inter eorum proportionales Arithmeticos, & zifram cadunt partes eædem, tot etiam inter ipfum V. g. 8 & alium vtpote 64 neceffe eft replicare. Tot enim replicantur partes ternæ, quot proportionales Geometrici funt. Quia itaque inter 1. & 8. duo proportionales Geometrici reperiuntur, & tres computato ipfo 8. etiam trina vice replicabitur 3. & fient 9. At quia idem numerus proportionalium mediat inter 8. & 64. tricies infuper idem 3. replicabitur; Vnde fient cum primo 18. Quia ergo inter quodlibet quadratum, & radicem medius proportionalis cadit numerus, hinc eft, quòd duplicatus proportionalis arithmeticus fit numerus quadrati; at quia inter radicem, & cubum duo proportionales cadunt, hinc eft quod debeat triplicari, & quia inter radicem, & quadrati quadratum, vel fuperfolidũ quinque proportionales mediant hinc eft, quòd quinquies replicatus exprimat fuperfolidum, & cęt.

THEOR.

THEOR. VII. PROPOS. VII.

Numeri dati Geometrici, si radix Quadrata, Cuba, Supersolida extrahatur. Eius Logarithmus bipartitus, tripartitus, vel in quinque secatus erit Logarithmus radicis.

PRobatur, quia Logarithmus radicis efficitur Logarithmus quadrati, si dupletur; cubi, si tripletur, supersolidi, si quinquies sumatur; Ergo Logharithmus quadrati bipartitus efficietur quadratæ radicis numerus, cubicæ tripartitus, supersolidæ per quinque secatus.

COROLLARIVM.

HInc ergo euidenter patet. Quod multiplicationi Geometricę correspondet additio in Arithmeticis ex 1. h. propos. & diuisioni subductio ex 2. huius propos. Extractioni radicis quadratæ bipartitio, sicut quadrationi duplatio ex propos. 7. & 4.

Regulæ aureæ additio, & deinde subductio ex propos. 5. Extractioni Radicis cubæ tripartitio. Supersolidæ per quinque partitio, sicut quintuplicatio respondet supersolidæ multiplicationi, & triplicatio Cubicationi.

Si ergo Arithmetici Geometricis applicentur, patet, quòd inuentis Arithmeticis, inuenientur quoque Geometrici. Cumque Arithmetici per additionem, bipartionem, triplationem, subductionem inueniantur, sequitur, quòd etiam Geometrici correspondentes eodem quoque modo inuenientur. Sint itaque Geometrici cum applicatis Arithmeticis.

Arith.	40	35	30	25	20	15	10	5	0
Geom.	1	3	9	27	81	243	729	2187	6561
Arith.	0	5	10	15	20	25	30	35	40

Sitque datis 3. & 27. reperiendus tertius proportionalis. Tabellam inspicio, & Arithmeticos 5. Geometrici 3. & 15. Geometrici 27. colligo; duplicoque 15. & fiunt 30. subduco deinde 5. & fiunt 25. Concludo itaque quod 25. est tertius proportionalis Arithmeticus. Video itaque quinam Geometricus illi respondeat, & ille est 243. concludo itaque, quod 243. est tertius proportionalis Geometricus, & quòd ita sit 3. à 27. vt 27. ad 243

Sic datis tribus proportionalibus, queritur quartus V. 3. & 27. 81. Assumo Arith. correspond. 5. 15. 20. Addo 15. ad 20. fiunt 35. subduco 5. relinquitur 30. Logarith. numeri 729. qui se habet ad 81. vt 27. ad 3. Sic, si quæras quadratum Geometrici 9. duplabis Arithmeticum ipsius 10. & erit 20. Logarithmus quadrati 81. vel, si cupias numeri 6165. scire radicem; 40. Logarithmum bipartire, & habebis 20. Logarithmum radicis 81. Vel si quæras radicem cubam numeri 729. tripartire 30 & habebis 10. indicans Geometricum 9. radicem cubam ipsius: Et idem asserendum licet numeri sint contrario modo, & dum Geometrici augentur Arithmetici decrescant, vt monui.

COROLLARIVM II.

ELlicies quoque id, quod ferè fundamentum est operis. Similiter proportionatorum Geometricorum æquidifferentes esse Arithmeticos, seu illi parui sint, seu magni. Nempe eam differentiam Arithmeticam mediare inter duos Arithmeticos duorum Geometricorum, ac inter alios duos Arithmeticos, qui sint aliorũ Geometricorũ, seu maiorum, seu minorum, sed eandem proportionem habentium: Ita vides, quòd eadem differentia mediat inter 5. & 20. Logarithmos proportionalium Geometricorum 3. & 81. quæ mediat inter Logarithmos 25. & 40. Geometricorum 243. & 6561. nimirum 10. Ratio euidens ex dictis, Nam quot sunt proportionales intermedij Geometrici tot additiones sunt in Arithmeticis; cum itaque similiter proportionati Geometrici habeant, vel eandem proportionem; vel duplicatam, vel triplicatam, vel quadruplicatam, vel certe vno intermedio, vel duobus, vel tribus sic, & Arithmetici habebunt, vel eandem differentiam, vel duplam, vel triplam, vel quintuplam, & cæt. Vnde similiter proportionalium Geometricorum erunt æquales semper differentiæ in Arithmeticis.

EXPENSIO II.

De serie facili Geometricorum reperienda, cui Arithmetica series deseruiat.

PRogressio Geometrica admodum difficilis maximè si de prolixa serie agatur: vnde ad difficultatem leniendam ijs in numeris ea progressio eligenda est, quæ fiat per subtractionem, vel additionem. Iam enim supra 1. par. Tr. 14. pr. 19. innuimus, multas esse progressiones Geometricas, quæ additione, & subtractione obtinentur.

Sed neque hoc quidem ad facilitatem nanciscendam sufficit; sed & fractiones vitandæ, & summũ numerorũ augmentum. Sic modus, quem Tract. 19 part. 1. propos. 17. innuimus fractiones non vitat, & proportio dupla fit per additionem. Sed in infinitum prope numerum augetur.

Præassumpt. 1. Ad hoc, vt progressioni Geometricę possit applicari ꝓgressio Arithmetica debet esse continua, saltem secundum aliquam maiorem partem; alioquin si Geometrica non per eandem proportionem progrederetur, Arithmetica continua, quæ sẽper per æqualia spatia progreditur, ei applicari nequaquam posset, & frustra applicaretur, quia silicet similiter proportionatorum non esset æquidifferens, vt debet esse ex Coroll. 2. expens. præced. Logarithmus.

Præass. 2. Duplex progressio est autem alia continua, & absoluta; quæ silicet nullis tabulis alligatur, alia est interrupta, & relatiua, quæ sinubus apponitur, vt innotescant eorũ proportiones: Hæc verò non potuit fieri sine illâ, cùm enim proportionales sinus non sint in eadem proportione continua, ideo ex præassumpto 1. huius expens. non potuit ei progressio Arithmetica continua applicari: Quare priùs debuit construi tabula quædam continua, ex quâ deinde proportionales numeri Arithmetici applicandi proportionalibus sinuum decerperentur secundùm, quòd illi continui Geometri istis discontinuis occurrebant, &

ijsdem numeris, vel saltem valde proximis respondebant. Sint V. g. continui

32	64	128	256	512	Geometrici
5	10	15	20	25	Arithmetici

Sitque alia proportio non continua 32. & 64. & 255. 511. quia hic 32. est eiusdem quantitatis, ac 32 in continua Geometricorum serie repertus; dico eius logarith. esse 5. sic quia 64. in non continua est eiusdem quantitatis ac 64. in continua, dico eius logarith. esse 10. Sic Geometrici 255. quia accedit ad 256. esse 20. & 511. esse 25. quia accedit ad 512. & licet vnitas in istis paruis numeris generet differentiam sensibilem, in magnis tamen numeris vnitas est spernenda, vt insensibilis, quid enim est 1. respectu 1000000. centum millium?

Præassumptum 3. Et hinc est, quòd magnus numerus elligendus sit, tum quia differentia, si qua est, reddatur insensibilis in multitudine partium, tum quia, vt propos. 7. Tr. 14. par. 1. in magno numero plurimæ latent proportiones, & ideo in lōgam seriem in magno numero proportiones distendi possunt.

Præassumprum 4. Tabula quoque, vel series numerorum absoluta secundum duplicem finem, ob quem fit duplex est; alia enim fit ob computos vulgares, vt proportionalibus quibuscunque reperiendis deseruiat, & de hac infra breuiter loquemur; alia, vt ex ea deinde excerpantur numeri Arithmetici, qui finibus deseruire debent, & de hac modo loquimur.

PROBL. I. PROPOS. VIII.

In prolixam seriem Geometricos faciliter, & sine fractionibus, quæ negotium faciant, in ordine ad tabulas sinuum Logarithmis exornandas extendere.

PRæceptum primum. Ex 10000000. sinu toto triginta sex proportionales subtractione partis centesimæ educantur, quæ est 100000. idest respectu decem millionum centum millia, ita enim est 1. ad 100. vt est 100000. ad 10000000. Hoc autem fit subtrahendo primo partem centesimam à decem millionibus, & à residuo eiusdem residui partem centesimam, & à residuo hoc posteriori centesimam quoque eiusdem residui partem, & sic successiuè, vt in exemplo.

Quia enim centesima pars residui 9000000. est 99000. ideo subducitur rursus eadem figura 99. cū omnibus zifris posthabitis duabus à primo residuo, & remanet 9801000. cuius etiam centesima pars est idem numerus duabus zifris reiectis, ideo rursus subducitur 98010. à 9801000. Vides itaq; facilitatem operis iam, atque etiam securitatem; facilis enim computus, non adeo faciliter errorem admittit.

Habemus itaque 36. proportionales, qui se inuicem excedunt proportione, quæ est inter 1. & 100. inter quos omnes aut centum millia, aut ferè millia centum intercedunt.

Cur autem non reperiantur plures est in causa quod reliqui minores non sunt necessarij eò, quòd series proportionalium Geometricorum satis fit, quæ perueniat vsque ad Sinum 45. Graduum, qui est 7071068. Nam istis habitis proportionalibus, à quibus decerpi possint proportionales Arithmetici; qui applicentur sinubus, qui successiuè subtendunt Gradus à 90. vsque ad 45. & reliqui deinde omnes ex istis, vt patebit innotescent.

Prob. autem propos. licet res per se clara sit. Nam cum à quolibet numero semper decima pars illius auferatur, fit, vt quilibet remanens se habeat ad integrum, vt 9. ad 10. quare omnes numeri à quibus decima pars ablata sit, erunt ad numerum se immediatè maiorem tanquam 9. ad 10. propterea que semper in eadem proportione reperientur.

Præceptum 2. Sed quia incipiunt in prosequendo aliquæ fractiones suboriri; cum nequaquam spernendæ sint, ideo additis zifris totus numerus in fractiones redigendus; Sic si ex 1000. partem 100. auferre volo illa erit 10. & residuum erit 990. Cuius pars centesima erit 9. & $\frac{90}{100}$.

Quare si reducas totum integrum 90. in fractiones multiplicando per denominatorem 100. habebis 99000. & 9 $\frac{9}{10}$ huius 99000 numeri comprehendet partes 990. Et hinc est, quod additis duabus zifris ad dextram sit numerus augendus, vt capiat fractiones, & consequenter hæc ab altera, vt integri ipsi, successiuè possit extrahi, vt vides in hoc exemplo.

Tabula 1. primi Ordinis.

Geometri.		Arithmetici.	
10000000 100000	00 00		
9900000 99000	00 00	100543	7632988
9801000 98010	00 00	201087	5265976
9702990 97029	00 90	301631	2898958
9605960 96059	10 60	402175	0531946
9509900 95099	50 00	502718	8164934
9414801 94148	50 01	603262	5797922
9320653 93206	49 53	703806	3430900
9227446 92274	96 46	804350	1063888
9135172 91351	50 72	904893	8696876
9043820 90438	78 20	1005437	6329864
8953382 89533	58 82	1105981	3962852
8863848 88638	76 48	1206525	1595840

8775210 28 87752 10	1307068 9228828
8687458 18 86874 58	1407611 6861816
8600583 60 86005 83	1508155 4694804
8514577 77 85145 77	1608699 2327792
8429432 00 84294 32	1709242 9960780
8345137 68 83451 37	1809786 7593768
8261686 31 82616 86	1910330 5226756
8179069 45 81790 69	2010874 2859744
8097278 76 80972 78	2111418 0492732
8016305 98 80163 05	2211961 8125720
7936142 93 79361 42	2312505 5758708
7856781 51 78567 81	2413049 3391696
7778213 70 77782 13	2513593 1024684
7700431 57 77004 31	1614136 8657672
7623427 26 76234 27	2714680 6290680
7547192 99 75481 92	2815226 3923668
7471721 07 74717 21	2915770 1556656
7397003 86 73970 03	3016313 9189644
7323033 83 73230 33	3116857 6822632
7249803 50 72498 03	3217401 4455620
7177305 47 71773 05	3317945 1088608
7105532 42 71055 32	3418488 8721596
7034477 10	3519032 6354584

Præceptum 3. Quia verò isti proportionales multò minores numero sũt sinubus, qui subtẽdunt omnes arcus à Gradu Nonagesimo vsque ad 45. Ideo inter quoscumque istorum proportionalium alij reperiendi sunt, qui inuicem dicant proportionem, vt vnum ad mille, ita vt sinus totus excedat primum proportionale solùm 10. millibus, & quia fractiones adhuc minutiores suboriuntur; ideo per adiectionem zifrarum effugienda earum difficultas: tot autem addendæ sunt ad dextram, quot reliquuntur ad sinistram ratione iam præcepto 2. tacta, vt vides in hoc exemplo.

Tabula 1. Ordinis 2. interposita inter 10000000. & 990000. præc. tabulæ.

Geometrici.	Arithmetici.
10000000 000 10000 000	
9990000 000 9990 000	10009 0438435
9980010 000 9980 010	20018 0876870
9970029 990 9970 029	30027 1315305
9960059 961 9960 059	40036 1753740
9950099 902 9950 099	50045 2192175
9940149 803 9940 149	60054 2630610
9930209 654 9930 209	70063 3069045
9620279 445 9920 279	80072 3507480
9910359 166 9910 359	90081 3915925
9900448 807	100090 4354360

Tabula 2. Ordinis secundi interposita inter 7177305. & 7105532. præcedentis Tabulæ.

Geometrici.	Arithmetici.
7177305 470 7177 305	3317945 1088608
7170128 165 7270 128	3327954 1527043
7162958 037 7162 958	3337963 1965478
7155795 079 7155 795	3347972 2403913
7148639 284 7148 639	3357981 2842348

Geometrici.		Arithmetici.	
7141490	645	3367990	3280783
7141	490		
7134349	155	3377999	3719218
7134	349		
7127214	806	3398008	4157653
7127	214		
7120087	592	3398017	4596088
7120	087		
7112967	505	3408026	5034523
7112	967		
7105854	538	3418035	5472958
7105	854		

Quia ergo 7177 cum fractis $\frac{503}{1000}$ millesima pars proportionalis 7177503. ideo hæc ipsa subducitur, & ad hoc, vt etiam fracti capiant in ea, & subtrahi consequenter possint tres zifræ addendæ, sic enim septem milliones centum septuaginta septem millia, & trecentum quinque vnitates multiplicantur per mille, & septem fiunt milliones millionum, respectu cuius numerus $\frac{503}{1000}$ qui erat fractio iam euadit integer.

Si verò quis vellet hunc secundum tabullarum ordinem minutiorem reddere posset auferre à singulis quingentesimam partem nempe primo auferendo 5000. quæ est quingentesima pars numeri 10000000. & diuidendo residuum per 200. continuè, & quotum, qui prouenit, auferendo ab antecedenti.

10000000	00000
5000	00000
9995000	00000
4997	50000
9990002	50000
4995	00125
9985007	49875

Præceptum 4. Confectis omnibus istis tabulis, quia neque proportionales sufficiunt: ideo inter quoscumque proportionales eodem modo alij interserendi, & co[m]ponendæ minutiores tabulæ, quę secundùm decem millesimam partem altera alteri accrescat, vt vides in hoc exemplo.

Tabula prima tertij ordinis inter 10000000. *&* 9999000. *interposita.*

Geometrici.		Arithmetici.	
10000000	0000		
1000	0000		
9999000	0000	1000	4550242
999	9000		
9998000	1000	3001	9100484
999	8000		
9997000	3030	3001	3650726
999	7000		
9996000	6000	4001	8200958
999	6000		
9995001	0000	5002	2751210
999	5001		
9994001	4999	6002	7201452
999	4001		
9993002	0998	7003	1751694
999	3002		
9992002	7996	8003	6301936
999	2002		
9991003	5994	9004	0852178
999	1003		
9990004	4991	10004	5402420

Tabula vltima tertij ordinis interposita inter 7112967. *& inter* 7105854.

Geometrici.		Arithmetici.	
7112967	5050	3408026	5034523
711	2967		
7112256	2083	3409026	9584765
711	2256		
7111544	9827	3410027	4135007
711	1544		
7110833	8283	3411027	8685249
711	0833		
8110122	7450	3412028	3335491
711	0122		
7109411	7328	3413028	7785733
710	9411		
7108700	7917	3414029	2335975
710	8700		
7107989	9217	3415029	6886217
710	7989		
7107279	1228	3416030	1436459
710	7279		
7106568	3949	3417030	5986701
710	6568		
7105857	7381	3418031	0536943

Præceptum 5. Cum autem iam proportionales inuicem accrescant; vt sinuum, quorum differentię sunt maiores, vel eumdem numerum exequent, vel proximè accedant: ideo (nisi maior sedullitas, quam par sit adhibere quis vellit) iam non inter omnes proportionales Tabularum ordinis quarti nouos proportionales Geometricos proijciemus; sed tantum inter aliquos, qui nimirum sinui toto viciniores in numeris sunt. Cum enim tabulam non absolutam; sed quæ sinibus deseruiat cōdamus: inde est, quòd illi solùm proportionales sint inueniendi, qui proximè accedunt ad propor-

tiones sinuum, & quia sinus; quò magis appropinquant sinui toto, eò minoribus discrepāt differentijs; inde etiam proportionales inueniendi, quorum proportiones sint minores inter illos proportionales Geometricos, qui magis accedant ad sinum totum: Si autem tabulæ absolutæ conderentur, meliùs esset etiam inter omnes intersere, quò enim minutiores differentiæ, eo exactiores tabulæ absolutæ. Itaque inter hos postremos quarti ordinis proportionales, alios iterum interseremus, qui iuxta centum millesimam partem, & secundùm vnam ex istis partibus singuli proportionales maiores existāt, vt vides in hoc exemplo.

Tabula prima ordinis quarti interposita inter 10000000. & 9999000. præced. Tabula.

Geometrici.	Arithmetici.
10000000 00000 100	
9999900 00000 99 99900	100 0005024
9999800 00100 99 99800	200 0010048
9999700 00300 99 99700	300 0015072
9999600 00600 99 99600	400 0020096
9999500 01000 99 99500	500 0025120
9999400 01500 99 99500	600 0030144
9999300 02100 99 99300	700 0035168
9999200 02800 99 99200	800 0040192
9999100 03600 99 99100	900 0045216
9999000 04500	1000 0050240

Tabula vltima Ordinis quarti interposita inter 7106567. & 7105857. præcedentis Tabulæ ordinis tertij.

Geometrici.	Arithmetici.
7106568 39490 71 06568	3417030 5986701
7106497 32922 71 06497	3417130 6036725
7106426 25425 71 06426	3417230 6041749
7106355 18999 71 06355	3417330 6046773
7106284 12644 71 06284	3417430 6051797
7106213 06360 71 06213	3417530 6056821
7106142 00147 71 06142	3417630 6061469
7106070 94005 71 06070	3417730 6066869
7105999 88035 71 05999	3417830 6071893
7105928 72036 71 05928	3417930 6076917
7105857 66108	348030 6081944

Præceptum 6. Inter autem singulos proportionales huius, proportionales alij interponendi, qui dicant proportionem, vt vnum ad millionem, vt in hoc exemplo.

Tabulà prima ordinis quinti interposita inter 1000000. & 9999900.

Geometrici.	Arithmetici.
10000000 000000 10 000000	
9999990 000000 9 999990	10 0000010
9999980 000010 9 999980	20 0000020
9999970 000030 9 999970	30 0000030
9999960 000060 9 999960	40 0000040
9999950 000100 9 999950	50 0000050
9999940 000150 9 999940	60 0000060
9999930 000210 9 999930	70 0000070
9999920 000280 9 999920	80 0000080
9999910 000360 9 999910	90 0000090
9999900 000450	10 0000100

Tandem pro vltimo præcepto inter huius posterioris ordinis proportionales adhuc interserēdi sunt alij numeri, qui se habeant, vt vnum ad decem milliones, & quia minutiæ sunt minimæ potes sequi, ita vt sint 100. proportionales interpo-

siti

siti inter primum, & secundum tabulæ quarti ordinis; quibus omnibus creatis deinde Arithmetici apponendi sunt, vt sequenti expensione docebimus.

Et licet inter primum, & secundum quartæ tabulæ 10. proportionales interseri sit necesse; quia in fine, cum appropinquant sinui toti, sinus vix crescunt, inter tamen alias sufficiet vsque ad quartum ordinem inclusiuè, vel vsque, si cupias exactissimè operari, ad proportionem, quam habent 1. ad millionem, vt præcepto sexto.

Tabula extensa sexti ordinis.

Geometrici.		Arithmetici.	
10000000			00000000
9999999	0000000		10000010
9999998	0000001	2	0000002
9999997	0000003	3	0000003
9999996	0000005	4	0000004
9999995	0000009	5	0000005
9999994	0000014	6	0000006
9999993	0000020	7	0000007
9999992	0000027	8	0000008
9999991	0000035	9	0000009
9999960	0000044	10	0000010
9999989	0000054	11	0000011
9999988	0000065	12	0000012
9999987	0000077	13	0000013
9999986	0000090	14	0000014
9999985	0000104	15	0000015
9999984	0000119	16	0000016
9999983	0000135	17	0000017
9999982	0000152	18	0000018
9999981	0000170	19	0000019
9999980	0000189	20	0000020
9999979	0000209	21	0000021
9999978	0000230	22	0000022
9999977	0000252	23	0000023
9999976	0000275	24	0000024
9999975	0000299	25	0000025
9999974	0000314	26	0000026
9999973	0000340	27	0000027
9999972	0000367	28	0000028
9999971	0000395	29	0000029
9999970	0000424	30	0000030
9999969	0000454	31	0000031
9999968	0000485	32	0000032
9999967	0000517	33	0000033
9999966	0000550	34	0000034
9999965	0000584	35	0000035
9999964	0000619	36	0000036
9999963	0000645	37	0000037
9999962	0000682	38	0000038
9999961	0000720	39	0000039
9999960	0000759	40	0000040
9999959	0000799	41	0000041
9999958	0000840	42	0000042
9999957	0000882	43	0000043
9999956	0000925	44	0000044
9999955	0000969	45	0000045
9999954	0001014	46	0000046
9999953	0001060	47	0000047
9999952	0001107	48	0000048
9999951	0001155	49	0000049
9999950	0001204	50	0000050
Geometri.		Arithmetici,	
9999949	0001254	51	0000051
9999948	0001305	52	0000052
9999947	0001357	53	0000053
9999946	0001410	54	0000054
9999945	0001464	55	0000055
9999944	0001519	56	0000056
9999943	0001575	57	0000057
9999942	0001632	58	0000058
0999941	0001690	59	0000059
9999940	0001749	60	0000060
9999939	0001809	61	0000061
9999938	0001870	62	0000062
9999937	0001932	63	0000063
9999936	0001995	64	0000064
9999935	0002059	65	0000065
9999934	0002124	66	0000066
9990933	0002190	67	0000067
9999932	0002257	68	0000068
9999931	0002325	69	0000069
9999930	0002394	70	0000070
9999929	0002464	71	0000071
9999928	0003535	72	0000072
9999927	0002607	73	0000073
9999926	0002680	74	0000074
9999925	0002754	75	0000075
9999924	0002829	76	0000076
9999923	0002905	77	0000077
9999922	0002982	78	0000078
9999921	0003060	79	0000079
9999920	0003139	80	0000080
9999919	0003219	81	0000081
9999918	0003300	82	0000082
9999917	0003382	83	0000083
9999916	0003465	84	0000084
9999915	0003549	85	0000085
9999914	0003634	89	0000086
9999913	0003720	87	0000087
9999912	0003807	88	0000088
9999911	0003895	89	0000089
9999910	0003984	90	0000090
9999909	0004074	91	0000091
9999908	0004165	92	0000092
9999907	0004257	93	0000093
9999906	0004350	94	0000094
9999905	0004444	95	0000095
9999904	0004539	96	0000096
9999903	0004634	97	0000097
9999902	0004732	98	0000098
9999901	0004830	99	0000099
9999900	0004929	100	0000100

EXPENSIO III.

De Arithmeticis proportionalibus repertæ Geometricorum seriei copulandis.

PRæassumptum 1. Numeris Geometricis post confectas omnes series Arithmetici copulandi sunt, in quo considerandum est nullius laboris esse; si numerorum series altera alteri continua proportione copularetur; sed quia ita non est: at qualibet, & proportionem mutat, & ob fractos in eundem numerum non incidit, hinc est, quod industria indendum sit, & ingenio.

Præassumptum 2. Obseruandum quoque, quòd alicuius quantitatis incommensurabilis tunc explicatur sufficienter mensura, cùm inter terminos parùm distantes maiorem, & minorem clauditur, ita quòd nec maiore maior sit, nec minore minor. Termini verò tunc parum distant, cùm illi sunt magni numeri, & parua differentia dissentiunt, vt 1000:010. & 10000040. Si ergo demonstretur aliquam quantitatis mensuram inter illos limites contineri, sufficienter expressa dicitur, vt si dicatur aliquam quantitatem esse inter 10000025. & 10000030. Ratio est; quia differentia 5. vnitatum respectum magni numeri 10. millionum nullius pretij est, nullius sensus, & ideo quidquid inter illos numeros adeo parum differentes clauditur, vt æquale putatur, cùm nec ea quidem differentia 5. vnitatum illos à sensibili æqualitate eliminet, licet quoad intellectum verè sint inæquales.

THEOR. I. PROPOS. IX.

In progressione Arithmeticâ deseruiente Geometricæ à quocumque numero, prout libet, possumus incipere.

PRobatur. Quia nulla naturali connexione connectuntur Arithmetici, & Geometrici. Dum enim quidpiam V. g. se mouens deorsum fecit 10. passus, & secundo æquali tempore faciat centum passus augendo Geometricè velocitatem, multi alij mouentes se progressiuè possunt facere qui quatuor, qui quinque, qui septem passus, vt secūdo eodem tempore, eosdem quatuor, vel quinque, vel septem efficiant. Sic alterans, qui producit 3. gradus caloris in primo instanti, & in secundo 9. comitem, potest habere alium debilem calefacientem, qui non nisi vnum gradum caloris ijs singulis instantibus efficiat.

Præassumptum Elligatur itaque numerus aliquis V. g. vnitas, qui post zifram addendam sinui toti, addatur, secundo proportionali. Incipimus autem à zifra iuxta documenta propositionis 2. huius partis. Vnitati quoque multas zifras addimus, vt fiat 1 $\frac{1}{10000000}$, vt in illa intercapedine, quæ est inter 1. & $\frac{1}{10000000}$ nempe vnitatem, & decem millionum particulam, in quam vnitas præsuponitur diuisa, multę fractiones capiant, quæ fortè incidunt, vt experientiâ docebit.

PROBL. I. PROPOS. X.

Tabulæ totius sexti ordinis numeros Arithmeticos inscribere.

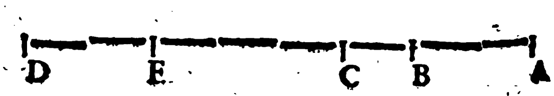
HOc faciliter fit. Nam electo primo numero, qui addatur primo proportionali post sinū totum, cui zifra additur; idem semper deinde addendum; sic si primo post sinum totum 9999999 10000000. addatur 1 $\frac{1}{10000000}$, secundo 9999998.0000001. addendū erit 2 $\frac{2}{10000000}$, & tertio Geometrico 9999997 000003. Arithmeticus subiungendus 3 $\frac{3}{10000000}$. Verum expeditiùs loco denominatoris 10000000. adduntur numero 3. tot zifræ, quot intermediant inter eam minutiam 3. & vnitatem sinus totius. Vnde semper denominator decem millionum subintelligendus est.

Probatur autem ex 2. propos. expens. 1. Nam in progressione Arithmetica; quæ incipit à zifra aggregatum duorum generat tertium; sicut duo Geometrici inuicem multiplicati tertium generāt: itaque si primo idem primus addatur, generabitur secundus, & si secundus addatur primo generabitur tertius, & sic consequenter.

Probatur secundo omnes Geometrici proportionales sextæ tabulæ expansæ eandem proportionem habent; ergo ex Coroll. 2. expens. 1. huius. Omnes Arithmetici eandem differentiam habebunt. Vnde additus primus Arithmeticus, qui est differentia, quâ ipse discrepat à 0. habebitur secundus, & sic successiuè, donec perseuerant Geometrici in illa continuâ proportione, quam protraximus vsque ad 100. proportionales, vt vides in superiori exemplo Tabulæ 6. ordinis.

THEOR. II. PROPOS. XI.

Eodem augmento, vel diminutione augetur, vel decrescit Arithmeticus proportionalis duorum datorum proportionalium Geometricorum quorumcumque, quo Arithmeticus sinus totius, & alterius Geometrici proportionalis, ad quem simili proportione referatur, ac datus Geometricus ad datum alium Geometricum.



SInt dati Geometrici expressi linea AB, & AC, & sinus totus linea AD, qui sit ad AF, vt AC proportionalis maior ad AB minorem. Dico, quod proportionalis Arithmetici differentia, seu decrementū, quâ decrescit Arithmeticus proportionalis Geometrici AC, vt possit applicari Geometrico AB eadem est, ac quæ mediat inter sinum totum AD & proportionale Geometricum AF.

Probatur. Quia similiter proportionatorum Geometricorum est eadem differentia, augmentum, seu decrementum ex Coroll. 2. propos. 7. huius. Sed eadem est proportio ex Hypthesi inter

Geo-

Geometricos AC, & AB, quæ est inter sinum totum AD, & proportionale Geometricum FA, ergo etiã eadem differentia Arithmeticorum, seu (quod idem est) augmentum, seu decrementum ex Coroll. 2. Expens. 1.

COROLLARIVM I.

HInc deduces quomodo datis duobus proportionalibus, & sinu toto elicias per regulam Auream quartũ proportionale in eadem proportione V. g. sit datus proportionalis minor secundus quarti ordinis 9999900. & quinti ordinis vltimus 9999900. $\frac{}{1}\frac{}{0}\frac{}{0}\frac{}{0}\frac{4}{0}\frac{5}{0}\frac{0}{0}\frac{0}{0}$, & sinus totus 10000000. Sitque reperiendus proportionalis numerus, ad quem se habeat sinus totus, vt datus maior 9999900. $\frac{}{1}\frac{}{0}\frac{}{0}\frac{}{0}\frac{4}{0}\frac{5}{0}\frac{0}{0}\frac{0}{0}$ ad 9999900. Multiplicetur hic per sinum totum, & diuidatur per 9999900. $\frac{}{1}\frac{}{0}\frac{}{0}\frac{}{0}\frac{4}{0}\frac{5}{0}\frac{0}{0}\frac{0}{0}$, & prodibit quartus proportionalis 99999 99 $\frac{}{1}\frac{9}{0}\frac{9}{0}\frac{9}{0}\frac{5}{0}\frac{4}{0}\frac{9}{0}\frac{9}{0}$. Verùm, quia hic computus ob magnitudinem numerorum, & fractionum euadit prolixior infra alium modum in hac ipsa expensione trademus: Siquidem in hoc computo oportet sinum totum multiplicare in 9999900. & deinde ob diuisionem faciliorem proijcere in fractiones illud multiplicatum, ita vt sint post quinque 9. viginti tres zifræ, & deinde diuidere totum illum numerum per 9999900. 0004929.

THEOR. III. PROPOS. XII.

Cuiuslibet proportionalis Geometrici in tabulis non reperti Arithmeticus est inter Arithmeticum maioris proportionalis, & minoris.

QVia dantur aliqui proportionales Geometrici, qui in continuam seriem non sequuntur, & de ipsis iam visum est, quòd eandem habent differentiam Arithmeticorum, quæ est inter sinum totum, & aliud quoddam proportionale minus, quod in eadem proportione, sit. Ideo inuento illo proportionali ex Coroll. eiusdem propositionis potest euenire, vt euenit sæpius, vt in aliquem numerum Tabulæ sexti ordinis, vel etiam aliarum, cum omnes confectæ fuerunt, & de tabulâ sinuum Arithmeticis, Logarithmisque exornanda agatur; non incidat, ideo oportet ex secunda huius expens. praxi videre quinam sint termini proximi, inter quos includatur. V. g. inuentũ est proportionale 9999 99 $\frac{}{1}\frac{9}{0}\frac{9}{0}\frac{9}{0}\frac{5}{0}\frac{6}{0}\frac{1}{0}\frac{1}{0}$ ad quem se habet sinus totus, vt ad 9999900. proportipnalis 9999900 $\frac{}{1}\frac{}{0}\frac{}{0}\frac{}{0}\frac{5}{0}\frac{6}{0}\frac{1}{0}\frac{1}{0}$. Sed nullus est proportionalis in tabula sexta iam logarithmis exornata, quæ talis quantitas sit; sed 9999999 $\frac{}{1}\frac{0}{0}\frac{0}{0}\frac{0}{0}\frac{0}{0}\frac{0}{0}\frac{0}{0}\frac{0}{0}$ est minor; at sinus ipse totus immediatus est maior. Dico ergo quod Arithmeticus proportionalis inuenti includitur inter Aritmeticum sinus totius, & Arithmeticum proportionalis 9999999 $\frac{}{1}\frac{}{0}\frac{}{0}\frac{}{0}\frac{}{0}\frac{}{0}\frac{}{0}\frac{1}{0}$, & ideo quòd est inter o. & 1. 0000001 qui termini propinquissimi sunt, cum non differant, nisi solâ vnitate; quæ quidem est pars minima respectu omnium proportionalium Arithmeticorum, qui tabulam totalem intexturi sunt.

Probatur autem. Quia non potest esse æqualis Arithmetico 10000001. esset enim Arithmeticus proportionalis Geometrici minoris 9999999 $\frac{}{1}\frac{}{0}\frac{}{0}\frac{}{0}\frac{}{0}\frac{}{0}\frac{}{0}\frac{}{0}$; non potest esse o. esset enim terminus radicalis ipsius sinus totius: Ergo erit aliquis medius inter o. & 1. 0000001. sicut, & ipse radicalis Geometricus est aliquid medium inter sinum totum, & 999999 $\frac{}{1}\frac{}{0}\frac{}{0}\frac{}{0}\frac{}{0}\frac{}{0}\frac{}{0}\frac{}{0}$.

COROLLARIVM.

HInc igitur emergit, quod si accipias aliquid medium inter o. & 1 $\frac{}{1}\frac{0}{0}\frac{0}{0}\frac{0}{0}\frac{0}{0}\frac{0}{0}\frac{0}{0}\frac{1}{0}$ hoc quodcumque illud sit erit proportionalis Arithmeticus Geometrici inuenti; quia cum sint termini propinquissimi ex præassumpt. 2. non differunt sensibiliter à vero; ideoque pro termino Arithmetico proportionalis Geometrici superiùs inuenti 9999999 $\frac{}{1}\frac{9}{0}\frac{9}{0}\frac{9}{0}\frac{5}{0}\frac{4}{0}\frac{9}{0}\frac{9}{0}$. potes accipere ipsam differentiam, quà differt sinus totus à proportionali inuento, quę est $\frac{}{1}\frac{}{0}\frac{4}{0}\frac{5}{0}\frac{0}{0}\frac{1}{0}$ Igitur Arithmeticus inuenti proportionalis erit o. $\frac{}{1}\frac{}{0}\frac{}{0}\frac{}{0}\frac{4}{0}\frac{9}{0}\frac{2}{0}\frac{4}{0}$, vel aliquid tale, quæ differentia addita Arithmetico 100. 0000100. fiet 100. $\frac{0}{1}\frac{0}{0}\frac{0}{0}\frac{4}{0}\frac{6}{0}\frac{2}{0}\frac{1}{0}$, vel 100 $\frac{0}{1}\frac{0}{0}\frac{0}{0}\frac{5}{0}\frac{0}{0}\frac{2}{0}\frac{4}{0}$.

THEOR. II. PROPOS. XIII.

Differentia, qua augescit quodlibet proportionale Arithmeticum à sinu toto est ipse Arithmeticus, si series incipiat à zifra.

PAtet ex dictis. Nam cum aufertur terminus radicalis à quocumque termino Arithmetico remanet differentia, quà differt ipse à termino radicali; sed hic terminus radicalis, nempe à quo incipit progressio ponitur o. ex Hypothesi; ergo ablato eo remanet ipse numerus, vt erat: Quare ipse erit terminus, & differentia, quà differt à termino radicali o. qui est proportionalis Arithmeticus sinus totius.

COROLLARIVM I.

HInc autem resultat, quod cum idem sit Arithmeticus cuiuscumque Geometrici inter sinum totum, & illum ipsum Geometricum, cui ita est sinus totus, vt alius Geometricus ad alium. Si habeamus illam differentiam Arithmeticam ex præced. Coroll. habeamus quoque differentiam Arithmeticorum quibuscumque Geometricis in simili proportione existentibus applicatorum. Nam ex Coroll. 2. expen. 1. huius, vbi est eadem proportio geometricorum, ibi etiam est eadem differentia Arithmeticorum. Quare cum ex Coroll. prop. 11. huius ita sit 9999900. ad 9999900. 0004500. vt 9999999. 9995499. ad 10000000. eademque quoque erit differentia Arithmeticorum.

At quia eadem est hæc differentia cum Arithmetico ipso ex hac propos. & iam nouimus ex Coroll. propos. 11. Arithmeticum ipsum esse .0004924.; hinc est, quod hic ipse quoque sit differentia, quæ deseruiet etiam pro differentia inter 9999900. 9999900. 0004500. Geometricos eiusdem proportionis cùmque huius habeamus Aritmeticum 100. 0000100. si hanc differentiam ei addamus fiet 100. 0005024. Arithmeticus sinus 9999900. qui cum minor sit suo comproportionali, eius Arithmeticus eus debet augeri, cum elegerimus seriem Arithmeticam, quæ augetur dum decrescit Geometrica.

COROLLARIVM II.

Hinc obtinebis modum, quo alij omnes proportionales Arithmetici quarti ordini addantur; siquidem, cùm secundus Geometricus sit in proportione ad sinum totum, vt tertius ad secundum, & ita consequenter, & iam habeamus logarithmum secundi ex præc. Coroll. respectu sinus totius nempe 100. 0005024. habebimus quoque logarithmum tertij per additionem eiusdem quantitatis, vt fiat 200. 0010048. & sic successiuè addendo semper eandem quantitatem. Ratio euidens est ex dictis, quia ita 9999900. secundus est sinui toti, vt tertius 9999800. 00100. est ipsi secundo 9999900. Appositis verò omnibus logarithmis, vltimus illius tabulæ primę 4 ordinis, qui est 99990000. 045000. habebit pro logarithmo 1000. 0050240. Dato verò hoc proportionali, & proportionali primo tertij ordinis 9999000 ——, & sinu toto queremus proportionale quartum ex Coroll. propos. 11. h., quod erit 999999. 9559955., quod se habeat ad sinum totum, vt proportionale Geometricum 9999000 se habet ad 9999000. 004500. Quo reperto ex Coroll. I. propos. 12. ipsa differentia, quà differt à sinu toto, erit quoque differentia Arithmetica addenda logarithmo noto 1000. 0050240. Geometrici 9999000. 0450., vt fiat Arithmeticus Geometrici 9999000. hæc autem est 4400042. quare Arithmeticus erit ferè 1000. 0005024. & quia proportionales quarti ordinis, qui interponuntur inter 9999000. & inter 9998000. 0001400 quilibet se habet ad suum sequentem, vt 9999900. ad 10000000. hinc per adiectionem eiusdem quātitatis 100. 0005024. possunt omnes formari habito proportionali Arithmetico primi Geometrici 9999000. & sic de alijs interpositis inter quoscumque Geometricos nedum primæ tabulæ quarti ordinis; sed & omnium tabularum eiusdem ordinis. Ipsos autem proportionales Arithmeticos apponendos Geometricis quinti ordinis habebis, si sibi addas repertum Arithmeticum 100. 4550242. Ratio est toties tacta, quia Geometicus quilibet se habet ad suum antecedentem V. g. 9998000. 1000. ad 9999000. vt ipse 9999000. se habet ad sinum totum. Idem quoque ages in exquirendo primo Arithmetico secūdi ordinis dato vltimo primæ tabulæ ordinis tertij Geometrico 9990004. 4991. primo secundi 9990000. & sinu toto acquirendo quartum proportionale, & ex illo differentiam Arithmeticam addendam Arithmetico iam dato vltimo tabulæ primæ tertij ordinis 10004. 5402420., quo habito cęteri omnes innotescunt. Vnde totus labor consistit in primis solum Arithmeticis cuiuslibet tabulæ primæ inueniendis cęteri enim omnes illis datis habentur. Aduerte autem numeros post punctum esse fractos, & subintelligi lineam subductam, & sub linea tot zifræ, quot sunt figuræ, & insuper vnitas ad sinistram, quod & in sequentibus obseruabimus.

THEOR. V. PROP. XIV.

Ita est maius proportionale ad sinum totum, vt differentia duorum proportionalium est ad differentiam sinus totius, & alterius ad quod eandem proportionem dicat.

D F C B A

Sit vt priùs datus Geometricus CA, qui sit ad AB, vt AD sinus totus ad AF. Dico quoque, quòd ita est CB differentia ad DF differentiam, vt est CA sinus ad totum sinum AD.

Nam si est totum ad totum, vt ablatum ad ablatum. Ergo, & reliquum ad reliquum tale erit, vt est totum ad totum ex propos. 19. lib. 5. Element. Cum ergo sit totus CA ad ablatum AB, vt totus sinus AD ad ablatum AF, ergo, & reliquum nempe differentia BC est ad differentiam reliquam DF, vt est CA ad totum AD.

THEOR. VI. PROPOS. XV.

Ita est maior Geometricus proportionalis ad differentiam inter ipsum, & minorem, vt est sinus totus ad differentiam inter ipsum, & proportionalem alterum simili proportione Geometrica affectum.

Maneat eadem constructio, vt priùs, Dico, *quod ita est proportionalis maior* AC ad differentiam CB, vt est sinus totus AD ad differentiam DF.

Probatur ita est in proportione differentia BC ad differentiam DF, vt proportionale AC est ad totum sinum DA, & *vicissim* ita erit proportionata BC differentia ad AC, vt differentia DF ad sinum totum AD; vnde, & *conuertendo* AD erit ad DF; vt AC ad BC.

COROLLARIVM.

Hinc deduces modum, quo datis duobus proportionalibus, & sinu toto ellicias quartū proportionale, ad quod se habeat sinus totus, vt proportionalis datus maior se habet ad minorem. Quoniam ita se habet maior Geometricus datus ad differentiam, quæ intercedit inter ipsum, ac minorem datum, sicut sinus totus ad differentiam, quæ intercedit inter se, & alium simili proportione sibi respondentem, vt Geometrici dati. Ideo dato Geometrico maiori V. g. vltimo primæ tabulę tertij ordinis 9990004. 4991000. & primo tabulæ primæ secundi ordinis 9990000. habebis differentiam 4. 4991000. Itaque proportionali 990000. & differentia 4. 4991000. & sinu toto exquires quartum proportionale; nempe differentiam inter sinum totum, & sinum eo minorem, sed in consimili proportione, quæ erit 4. 5035015. quam demes à sinu toto, & habebis proportionale 9999995. 4563985. quod ita se habebit ad sinum totum, vt 9990000. ad 9990003. 4991000. Iuxta itaque documenta propositionis 11. huius, quære hoc proportionale in sexta tabula, & non reperies

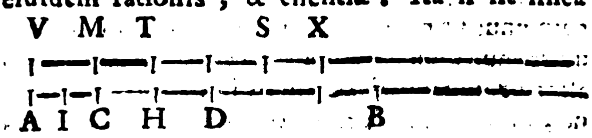
reperies, ſed aliquid maius nimirum 9999996. 0000005. & quid minus 9999995. 0000009. Inter itaque hos terminos conſiſtet Geometricus repertus 9999995. 4963985. & conſequenter etiam Arithmeticus, nempe quid medium inter Arithmeticum 40000004. & 5. 0000005. Geometricis terminis applicatos ſola vnitate diſtantibus, quare poterit eſſe 4. 5036015. ipſa nempe differentia Geometrica. Cum verò Arithmeticus, quo differt Geometricus à ſinu toto ſit etiã differentia iuxta propoſitionem 12. & differentia eadem Arithmetica ſit ſimiliter geometricè proportionatorum ex Coroll. vltimo expenſ. 1. huius ſequitur, vt Arithmeticus repertus ſit quoq; differentia addenda Arithmetico noto 10004. 5402420. vt fiat 10009. 0438435. Arithmeticus Geometrici mininoris 9990000. Quo habito omnes habentur eiuſdem ordinis tertij addendo eandem quantitatem antecedenti termino. Sicut, & intermedij omnes, qui pertinent ad quarti ordinis tabulas addendo ijſdem Arithmeticis tertij ordinis, à quibus incipit interſitio, primum quarti ordinis Arithmeticum, & ſequendo eandem additionem, donec omnes interpoſiti ſint arithmeticis exornati.

Sic, ſi cupias Arithmeticum primæ tabulæ primi ordinis, eodem modo poteris inuenire. Datur enim 9900448. 8070000. Geometricus ſecundi ordinis, & 9900000. Geometricus primus tabulæ primæ primi ordinis, quorum differentia eſt 448. 807000. quæ dat adhibitâ regulâ proportionum differentiam geometricam quarti proportionalis à ſinu toto 453. 3198532. quæ differentia ſubducta à ſinu toto dat quartum proportionale 9999546. 680468. quòd in tabula prima ordinis quarti reperitur cadere inter 9999500. 0100000. & inter 9999600. 0060000. & hoc eſt minus quidem repertũ proportionale, ſed maius illo: itaque Arithmeticus numerus quoque erit maior, quam 400. 0020096. & minor, quam 500. 0025120. Vnde differentia Geometrica addita minori Arithmetico dabit proximè Arithmeticum proportionalẽ inter vtrumque medium pauciſſimis vnitatibus à verò diſtantem. Quia ergo quartus proportionalis differt à maiori 9999600. 0060000. & differentia eſt 53. 325. 8532. Si hanc differentiam, vel quid minus addamus Arithmetico minori 400. 0020096. fiet Arithmeticus 453. 3278628 differentiaque inter Arithmeticos Geometrici 9900448. 8070000. & 9900000. 0000000. Cum autem ſciamus Arithmeticum Geometrici 9900448. & cæt. qui eſt 100090. 4357360 ſi hac differentiam addamus fiet 100543. 7632988. vnde cum ſit vltimus ſecundæ tabulæ ad ſinum totum, vt quilibet primæ ad ſuum antecedentem erit quoque hæc differentia inter quoſcumque Arithmeticos primæ tabulæ.

THEOR. VII. PROPOS. XVI.

Sicut decreſcit, vel augeſcit quodlibet continuò progreſſione Geometrica procedens quoad partes aſſignatas maiores; ita quoad ſingulas partes in infinitum minores augetur, vel decreſcit.

PRobatur. Eo, quia cum ſe continuè eadem progreſſione moueat neceſſariò aſſignata quælibet pars motus, quæ menſuretur æquali portione temporis augeſcet, vel decreſcet reſpectu alterius eodem æquali tempore menſurata, quod ſi quælibet alia pars Geometricè procedens menſuretur alia minori parte temporis, adhuc tamen in eadem proportione erit cum alia parte geometrica, quę eodẽ temporę mẽſuretur, quia cum totum Geometrica proportione ſemper eadem creſcendo, vel decreſcendo continuè ſe moueat ſingulæ eius partes aſſignabiles eadem proportione inuicem correſpondere debebunt cum ſint omnes eiuſdem rationis, & eſſentiæ. Ita ſi ſit linea



AB, quæ creſcat continuè, & Geometricè, & augmentum menſuretur, à linea XV. æqualiter creſcente, & Arithmetica, ita quod dum creſcit Geometrica ab A in C illa Arithmetica creſcat, ab V in T, & dum hæc ſe auget à C in D illa moueatur à T in S. Si ſumatur VM in geometrica, eiq; correſpondeat AI; ſecundę MT æquali correſpondebit IH, quæ in proportione Geometrica erit cum AI, vt CD cum AC.

COROLLARIVM I.

HInc eruitur alius modus Arithmeticos reperiendi qui Geometricis applicari poſſint V. g. detur numerus Geometricus præcedens 9900448. 807. cuius notum habeamus Arithmeticum 10009. 4354360. cupimuſque ſcire Arithmeticum 9900000. Iam ſcimus quot proportionales cadunt inter 9900448. & cæt. & proportionale eo immediatè minus 9890548. 359. nempe tot ex 12. prop. 8. Element. quot inter 10000000. & 999000. nempe 10 tertij ordinis inter quos cadunt 10. quarti, & inter hos quoslibet 10 quinti ordinis, ita quod erunt 1000. proportionales. Quot ergo ſunt proportionales Geometrici minores aſſignati, inter dictos Geometricos maiores, tot erunt partes æquales in differentia applicatorum ipſis Arithmeticorum, & quia illa differentia eſt 10009 0438435. ideo ſi diuidatur per 1000. habebimus 10. & . 0090438. partem æqualem, qua ſemper augetur Arithmeticus, dũ Geometrici 1000. accreſcunt inter vnum 9900448. & cæt. & inter 9890548. & cæt. Geometricos maiores.

Incipiamus itaque diſtribuere in ſuos proportionales progreſſionem. Sic; donec occurrat Geometricus, vel de quo quærimus, vel ei propinquus.

9900448 8070
990 0448

9899058 7522

Quia ergo iſte primo eductus iam eſt minor eo, de quo quæritur, ideo non progrediemur amplius, ſed cum debeat eſſe inter iſtos maiorem, & minorem, ideo ad hoc, vt illum inueniamus minutiorem inſtituemus progreſſionem ſic.

9900448 80700 A
99 00448

9900349 80252
99 00349

9900052 79650
9 90005

1 9900042 89645
9 90004

9900250.

9900240	79903		2	9900032	99641
99	00240			9	90003
9900151	79650		3	9900023	09638
99	00151			9	90002
9900052	79509	B	4	9900013	19636
99	00052			9	90001
9899953	79457	C		9900003	29635

Erit itaque inter hos duos B, & C postremos cum vnus sit maior alius minor 9900000. de quo quærimus, quare opporteret adhuc inter istos alios proportionales vltimos inuenire in eo ordine, in quo sunt proportionales quinti ordinis, sed isti non possunt esse plures, quam 52. iuxta numerum vnitatum, quę super 9900000. accrescunt in Geometrico B 9900052. vt patet ex quinta tabula. Quia, ergo inter A, & illum, de quo quærimus quatuor Geometrici intercluduntur, ideo quater accipiuntur partes Arithmeticæ superius inuentæ 10. 90438. & fient 40. 361752. qui si rursus multiplicetur per 10. ob proportionales interceptos inter quoslibet eorum minores eiusdem speciei, vt in quinto ordine fient 400. 3617520. cui si etiam addantur 52. vnitates, fient 452. cũ fractis suis addendi Arith. 10009. & cęt.

Vel etiam meliùs accipiantur Arithmeticæ differentiæ iuxta singulos Geometricorum ordines, quia ergo inter primum Geometricum A, & de quo quæritur 9900000. nullus intercipitur Geometricus tertij ordinis, ideo nullus accipitur illius ordinis Arithmeticus, quia verò intercipiuntur 4. quarti, ideo quater accipitur Arithmetica differentia quarti 100 0005024. vt fiant 400 0020096. cui addimus Arithmeticum Geometrici 52. quinti ordinis 52. 0000052. & fit Arithmeticus quæsitus 452. 0020148. addendus Arith. 10009. &c. vt fiat Geometrici 9900000. de quo quærebatur.

COROLLARIVM I.

Notabis nostros numeros extremarum tabularum exijsse paulò maiores in Arithmeticis differentia proximè 2500. quàm quas composuit ipse Neperus. Ratio verò huius rei est, quia ipsi est primus tabulę primæ 100483. & cæt. nobis vero 100543. & cæt. quia ipse sumpsit aliquid minùs, quàm quòd differentia Geometrici dabat, nos quid maius ipsa eadem differentia sumpsimus, vtpote ad libitum, vt patet ex Coroll. propos. 15.

COROLLARIVM II.

Aduerte quoque Arithmeticos, non solùm crescere per numeros integros, sed etiam per fractiones, quòd in reperiendis illis, qui primis tabularum Geometricis applicantur necessariò fractiones essent admittendæ, quæ per continuam additionem deinde crescebãt in immensum. Vnde spretæ ab initio, deinde magnum errorem poterant causare, incępit ergo crescere series Arithmetica, ne dum simplici vnitate, sed addita fractione 0000001. vt in illa fractione daretur locus, quo possint successiuè, & aliæ, fractiones recipi, & continuè addi. Verùm hæ fractiones in tabula sinuum, seu absoluta Logarithmica contemnendæ, quòd solùm deseruiant ad continuam earum additionem, ob quam successiuè in integros transeuut, quum singulę singulis in progrediendo adduntur.

EXPENSIO V.

De Logarithmis in tabulas sinuum transferendis.

Confectis omnibus tabulis, & ijs Logarithmorum serie instructis, vltimus labor postulat, vt illos in tabulas sinuum transferamus, vnde fit.

PROBL. I. PROPOS. XVII.

Logarithmos tabulis sinuum applicare vsq; ad sinum gr. 45. à sinu toto.

Datum sinum per tabulas supra positas logarithmis instructas quære, vel enim occurret prorsùs idem, vel non pluribus, quam 10. vnitatibus distans, si perduxisti tabulas vsque ad ordinem quintum, quòd, si vsque ad ordinem quartum differet 100. vnitatibus. Quære ergo in tabula sexta, quid vnitates illæ, quibus differũt isti duo Geometri exhibeãt in Arithmeticis, & hoc adde Arithmetico reperti ꝓportionalis si sit minor subducito, si sit maior eo, qui in tabulis logarithmicis inuenitur, eritq; logarith. dati sinus.

V. g. datur sinus 7107995. requiro illum in tabulis proportionalibus, reperioque in tabula vltima tertij ordinis numerum proximum minorem 7107989. cuius logarithmus est 3415020. differtque Geometricus à dato 6. vnitatibus. Reperio itaque has vnitates in tabula sexti ordinis Geometrica, & dant mihi 4. vnitates correspondentes pro Arithmetico competente, quas addo logarithmo 3415029. fitque logarithmus 3415024. Sinus dati 7107995. fracti verò posthabendi, quia illi ad solam continuationem tabularum requirebantur.

Veritas verò huius operationis ostenditur ex propos. 15. Posset etiam reperiri ex Coroll. prop. 12. & ex Coroll. propos. 15. sed faciliùs per hanc, atque certiùs.

COROLLARIVM I.

Hinc omnes sinus vsque ad centum faciliter dantur per solam inspectionem Tabulę ordinis sexti. Nam cum ibi proportionales sola vnitate decrescant quilibet occurret cum logarithmo addendo spretis fractis, vt modo non ampliùs necessarijs, cum solùm ad condendas tabulas requirantur: sic sinus 9999993. reperies logarith. 7. Sic 9999905. reperies logarithmum 95. cum fracto 0000095. qui spernendus est.

COROLLARIVM II.

Reperies quoque sinuum aliorum logarithmos, qui cadunt in tabulam quinti ordinis, vel quarti sic. Dati sinus 9999105. reperitur proximus proportionalis in tabula prima quarti ordinis 9999100. quia ergo ille sinus est maior 5. vnitatibus, logarithmus 900. diminuendus vnitatibus 5. ex tabula sexti ordinis, sed quia adsunt fracti

fracti satis sensibiles vltra integros, ideo accipiendæ sunt 4, eritque logarithmus 896. vel 895. sinus 9999105. Eidemque logarithmo 35. vnitates ex tabula sexti ordinis addendæ, vt fiat logarithmus sinus sequentis 9999065. Sicque erit 930¼ logarithmus ipsius sequentis, & sic de omnibus alijs, vt vsus ipse ostendet.

Ita quoque fecimus in reperiendo logarithmo applicando sinui Gr.45. qui necessarius est ad reliquorum sinuum logarithmos inueniendos. Namque, cum sit sinus ille 7071068. erit inter proportionales primi ordinis 7105532. &c. & 7034477. & cæt. incepimus itaque proportionales secundi ordinis interponere, vt vides hic.

			Logarith.
7105532	420		3418488
7105	532		
		1	
7098426	888		
		2	
7091328	462		
		3	
7084237	134		
		4	
7077152	897		
7070075	745		

Est ergo sinus quæsitus inter hunc vltimum, & penultimum: quare interiaciemus proportionales tertij ordinis. sic

7077152	8970	
707	7152	
		1
7076445	1818	
		2
7075737	5373	
		3
7075029	95,6	
		4
7074322	4607	
		5
7073615	0285	
		6
7072907	6670	
		7
7072200	3763	
		8
7071493	1563	

Deinde alij proportionales quarti ordinis interponendi quales sunt.

7071493	15630	
70	71493	
		1
7071422	44137	
		2
7071351	72715	
		5
7071281	01364	
		4
7071210	30083	
		5
7071139	58873	
		6
7071068	87734	

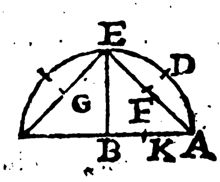
Hic ergo vltimus est valdè propinquus, & differt solum fractis à sinu dato. Accipiemus ergo logarithmos conuenientes ordinis primi proportionali, qui est 3418488. 8721596. deinde ex prima tabula secundi ordinis accipiemus quarti proportionalis logarithmum 40036. 1753740. deinde ex prima tertij accipiemus octaui Geometrici logarithmum 8003. 6301936. tandem ex prima tabula quarti ordinis accipiemus sexti Geometrici logarithmũ iuxta.n.interpositorũ log. 597. 0029847. & omnes in vnam summam redigemus, eritque logarith. sinus Gr. 45. nimirum 3467125 ½. abiectis omnibus fractis.

Præassumptum. Quia vsque ad dimidium tabulę sinuũ tabulas proportionales logarithmicasq; ordinauimus. Modo quomodo reliquis sinubus logarithmi applicandi inueniantur docendum est; & hoc non, quia vsque ad vltimum sinum deduci non possent, sed solum ad laborem leuandum. Ad id verò est necessarius logarithmus dimidij sinus totius. Vnde quomodo reperiatur, tradendum est.

THEOR. II. PROPOS. XVIII.

Sinus 45. Graduum est medium proportionale inter sinum totum, & dimidium sinus totius.

SVpra probauimus propos.18. expens.3. cùm ageremus de sinibus inueniendis; quòd dimidium sinus totius AK se habet ad sinum dimidij alicuius arcus EA, vt sinus complementi illius dimidij EG ad sinum totius arcus BE; sed sinus 45. Grad. est æqualis suo complemento, & sinus arcus dupli ipsius est sinus totus; ergo ita se habet AK



dimidium sinus totius ad EF sinum 45. Grad. vt ejus, & illi æquale complementum EG ad sinum dupli arcus EB, qui est sinus totus; & consequenter EF, & EG æquales sunt medium inter AK dimidium sinus totius, & BE sinum totum, & ideo si ex eis fiat quadratum illud erit æquale rectangulo ex sinu toto, & dimidio eius facto ex propos.19. lib.6. element.

COROLLARIVM.

HInc est, quòd cùm exp.1. huius tract. propos. 6. & 4. duplatio Arith. æquiualeat quadrationi, & propos.3. subductio diuisioni. Si logarithmus sinus 45. gr. dupletur, & ab eo duplato subducatur logarith. sinus totius, qui est 0. relinquetur dimidij sinus totius Arithmeticus; & quia supra reperimus Arithmeticum 45. Grad esse 3467125 ½, si dupletur erit 6934251. & subducatur 0. scilicet nihil ab eo auferatur, erit idem logarithmus sinus dimidij nempe sinus 5000000.

Vu PROBL.

8775210 28 87752 10	1307068 9228828
8687458 18 86874 58	1407611 6861816
8600583 60 86005 83	1508155 4694804
8514577 77 85145 77	1608699 2327792
8429432 00 84294 32	1709242 9960780
8345137 68 83451 37	1809786 7593768
8261686 31 82616 86	1910330 5226756
8179069 45 81790 69	2010874 2859744
8097278 76 80972 78	2111418 0492732
8016305 98 80163 05	2211961 8125720
7936142 93 79361 42	2312505 5758708
7856781 51 78567 81	2413049 3391696
7778213 70 77782 13	2513593 1024684
7700431 57 77004 31	2614136 8657672
7623427 26 76234 27	2714680 6290680
7547192 99 75481 92	2815226 3923668
7471721 07 74717 21	2915770 1556656
7397003 86 73970 03	3016313 9189644
7323033 83 73230 33	3116857 6822632
7249803 50 72498 03	3217401 4455620
7177305 47 71773 05	3317945 1088608
7105532 42 71055 32	3418488 8721596
7034477 10	3519032 6354584

Præceptum 3. Quia verò isti proportionales multò minores numero sũt sinubus, qui subtẽdunt omnes arcus à Gradu Nonagesimo vsque ad 45. Ideo inter quoscumque istorum proportionalium alij reperiendi sunt, qui inuicem dicant proportionem, vt vnum ad mille, ita vt sinus totus excedat primum proportionale solùm 10. millibus, & quia fractiones adhuc minutiores suboriuntur; ideo per adiectionem zifrarum effugienda earum difficultas: tot autem addendæ sunt ad dextram, quot reliquuntur ad sinistram ratione iam præcepto 2. tacta, vt vides in hoc exemplo.

Tabula 1. Ordinis 2. interposita inter 10000000. & 990000. præc. tabulæ.

Geometrici.	Arithmetici.
10000000 000 10000 000	
9990000 000 9990 000	10009 0438435
9980010 000 9980 010	20018 0876870
9970029 990 9970 029	30027 1315305
9960059 961 9960 059	40036 1753740
9950099 902 9950 099	50045 2192175
9940149 803 9940 149	60054 2630610
9930209 654 9930 209	70063 3069045
9920279 445 9920 279	80072 3507480
9910359 166 9910 359	90081 3915925
9900448 807	100090 4354360

Tabula 2. Ordinis secundi interposita inter 7177305. & 7105532. præcedentis Tabulæ.

Geometrici.	Arithmetici.
7177305 470 7177 305	3317945 1088608
7170128 165 7170 128	3327954 1527043
7162958 037 7162 958	3337963 1965478
7155795 079 7155 795	3347972 2403913
7148639 284 7148 639	3357981 2842348

7141490

Geometrici.		Arithmetici.	
7141490	645	3367990	3280783
7141	490		
7134349	155	3377999	3719218
7134	349		
7127214	806	3398008	4157653
7127	214		
7120087	592	3398017	4596088
7120	087		
7112967	505	3408026	5034523
7112	967		
7105854	538	3418035	5472958
7105	854		

Quia ergo 7177 cum fractis $\frac{503}{1000}$ millesima pars proportionalis 7177503. ideo hæc ipsa subducitur, & ad hoc, vt etiam fracti capiant in ea, & subtrahi consequenter possint tres zifræ addendæ. sic enim septem milliones centum septuaginta septem millia, & trecentum quinque vnitates multiplicantur per mille, & septem fiunt milliones millionum, respectu cuius numerus $\frac{503}{1000}$ qui erat fractio iam euadit integer.

Si verò quis vellet hunc secundum tabullarum ordinem minutiorem reddere posset auferre à singulis quingentesimam partem nempe primo auferendo 5000. quæ est quingentesima pars numeri 10000000. & diuidendo residuum per 200. continuè, & quotum, qui prouenit, auferendo ab antecedenti.

10000000	00000
5000	00000
9995000	00000
4997	50000
9990002	50000
4995	00125
9985007	49875

Præceptum 4. Confectis omnibus istis tabulis, quia neque proportionales sufficiunt: ideo inter quoscumque proportionales eodem modo alij interserendi, & componendæ minutiores tabulæ, quę secundùm decem millesimam partem altera alteri accrescat, vt vides in hoc exemplo.

Tabula prima tertij ordinis inter 10000000. & 9999000. interposita.

Geometrici.		Arithmetici.	
10000000	0000		
1000	0000		
9999000	0000	1000	4550142
999	9000		
9998001	1000	3001	9100484
999	8000		
9997000	3020	3001	3650726
999	7000		
9996000	6000	4001	8200968
999	6000		
9995001	0000	5002	2751210
999	5001		
9994001	4999	6002	7201452
999	4001		
9993002	0998	7003	1751694
999	3002		
9992002	7996	8003	6301936
999	2002		
9991003	5994	9004	0852178
999	1003		
9990004	4991	10004	5402420

Tabula vltima tertij ordinis interposita inter 7112967. & inter 7105854.

Geometrici.		Arithmetici.	
7112967	5050	3408026	5034523
711	2967		
7112256	2083	3409026	9584765
711	2256		
7111544	9827	3410027	4135007
711	1544		
7110833	8283	3411027	8685249
711	0833		
8110122	7450	3412028	3235491
711	0122		
7109411	7328	3413028	7785733
710	9411		
7108700	7917	3414029	2335975
710	8700		
7107989	9217	3415029	6886217
710	7989		
7107279	1228	3416030	1436459
710	7279		
7106568	3949	3417030	5986701
710	6568		
7105857	7381	3418031	0536943

Præceptum 5. Cum autem iam proportionales inuicem accrescant; vt sinuum, quorum differentię sunt maiores, vel eumdem numerum exequent, vel proximè accedant: ideo (nisi maior sedullitas, quam par sit adhibere quis vellit) iam non inter omnes proportionales Tabularum ordinis quarti nouos proportionales Geometricos proijciemus; sed tantum inter aliquos, qui nimirum sinui toto viciniores in numeris sunt. Cum enim tabulam non absolutam; sed quæ sinibus deseruiat cõdamus: inde est, quòd illi solùm proportionales sint inueniendi, qui proximè accedunt ad proportiones

tiones sinuum, & quia sinus; quò magis appropinquant sinui toto, eò minoribus discrepãt differentijs; inde etiam proportionales inueniendi, quorum proportiones sint minores inter illos proportionales Geometricos, qui magis accedant ad sinum totum: Si autem tabulæ absolutæ conderentur, meliùs esset etiam inter omnes interserere, quò enim minutiores differentiæ, eo exactiores tabulæ absolutæ, Itaque inter hos postremos quarti ordinis proportionales, alios iterum interseremus, qui iuxta centum millesimam partem, & secundùm vnam ex istis partibus singuli proportionales maiores existãt, vt vides in hoc exemplo.

Tabula prima ordinis quarti interposita inter 10000000. *&* 9999000. *præced. Tabula.*

Geometrici.	Arithmetici.
10000000 00000	
100	
9999900 00000	100 0005024
99 99900	
9999800 00100	200 0010048
99 99800	
9999700 00300	300 0015072
99 99700	
9999600 00600	400 0020096
99 99600	
9999500 01000	500 0025120
99 99500	
9999400 01500	600 0030144
99 99500	
9999300 02100	700 0035168
99 99300	
9999209 02800	800 0040192
99 99200	
9999100 03600	900 0045216
99 99100	
9999000 04500	1000 0050240

Tabula vltima Ordinis quarti interposita inter 710656. *&* 7105857. *præcedentis Tabulæ ordinis tertij.*

Geometrici.	Arithmetici.
7106568 39490	3417030 5986701
71 06568	
7106497 32922	3417130 6036725
71 06497	
7106426 25425	3417230 6041749
71 06426	
7106355 18999	3417330 6046773
71 06355	
7106284 12644	3417430 6051797
71 06284	
7106213 06360	3417530 6056821
71 06213	
7106142 00147	3417630 6061469
71 06142	
7106070 94005	3417730 6066869
71 06070	
7105999 88035	3417830 6071893
71 05999	
7105928 72036	3417930 6076917
71 05928	
7105857 66108	348030 6081944

Præceptum 6. Inter autem singulos proportionales huius, proportionales alij interponendi, qui dicant proportionem, vt vnum ad millionem, vt in hoc exemplo.

Tabulà prima ordinis quinti interposita inter 1000000. *&* 9999900.

Geometrici.	Arithmetici.
10000000 000000	
10 000000	
9999990 000000	10 0000010
9 999990	
9999980 000010	20 0000020
9 999980	
9999970 000030	30 0000030
9 999970	
9999960 000060	40 0000040
9 999960	
9999950 000100	50 0000050
9 999950	
9999940 000150	60 0000060
9 999940	
9999930 000210	70 0000070
9 999930	
9999920 000280	80 0000080
9 999920	
9999910 000360	90 0000090
9 999910	
9999900 000450	10 0000100

Tandem pro vltimo præcepto inter huius posterioris ordinis proportionales adhuc interserẽdi sunt alij numeri, qui se habeant, vt vnum ad decem milliones, & quia minutiæ sunt minimæ potes sequi, ita vt sint 100. proportionales interpositi

siti inter primum, & secundum tabulæ quarti ordinis; quibus omnibus creatis deinde Arithmetici apponendi sunt, vt sequenti expensione docebimus.

Et licet inter primum, & secundum quartæ tabulæ 10. proportionales interseri sit necesse; quia In fine, cum appropinquant sinui toti, sinus vix crescunt, inter tamen alias sufficiet vsque ad quartum ordinem inclusiuè, vel vsque, si cupias exactissimè operari, ad proportionem, quam habent 1. ad millionem, vt præcepto sexto.

Tabula extensa sexti ordinis.

Geometrici.		Arithmetici.		Geometri.		Arithmetici.	
10000000			00000000				
9999999	0000000		10000010				
9999998	0000001	2	0000002	9999949	0001254	51	0000051
9999997	0000003	3	0000003	9999948	0001305	52	0000052
9999996	0000005	4	0000004	9999947	0001357	53	0000053
9999995	0000009	5	0000005	9999946	0001410	54	0000054
9999994	0000014	6	0000006	9999945	0001464	55	0000055
9999993	0000020	7	0000007	9999944	0001519	56	0000056
9999992	0000027	8	0000008	9999943	0001575	57	0000057
9999991	0000035	9	0000009	9999942	0001632	58	0000058
9999960	0000044	10	0000010	9999941	0001690	59	0000059
				9999940	0001749	60	0000060
9999989	0000054	11	0000011	9999939	0001809	61	0000061
9999988	0000065	12	0000012	9999938	0001870	62	0000062
9999987	0000077	13	0000013	9999937	0001932	63	0000063
9999986	0000090	14	0000014	9999936	0001995	64	0000064
9999985	0000104	15	0000015	9999935	0002059	65	0000065
9999984	0000119	16	0000016	9999934	0002124	66	0000066
9999983	0000135	17	0000017	9999933	0002190	67	0000067
9999982	0000152	18	0000018	9999932	0002257	68	0000068
9999981	0000170	19	0000019	9999931	0002325	69	0000069
9999980	0000189	20	0000020	9999930	0002394	70	0000070
9999979	0000209	21	0000021	9999929	0002464	71	0000071
9999978	0000230	22	0000022	9999928	0002535	72	0000072
9999977	0000252	23	0000023	9999927	0002607	73	0000073
9999976	0000275	24	0000024	9999926	0002680	74	0000074
9999975	0000299	25	0000025	9999925	0002754	75	0000075
9999974	0000314	26	0000026	9999924	0002829	76	0000076
9999973	0000340	27	0000027	9999923	0002905	77	0000077
9999972	000n367	28	0000028	9999922	0002982	78	0000078
9999971	0000395	29	0000029	9999921	0003060	79	0000079
9999970	0000424	30	0000030	9999920	0003139	80	0000080
9999969	0000454	31	0000031	9999919	0003219	81	0000081
9999968	00u0485	32	0000032	9999918	0003300	82	0000082
9999967	0000517	33	0000033	9999917	0003382	83	0000083
9999966	0000550	34	0000034	9999916	0003465	84	0000084
9999965	0000584	35	0000035	9999915	0003549	85	0000085
9999964	0000619	36	0000036	9999914	0003624	89	0000086
9999963	0000645	37	0000037	9999913	0003720	87	0000087
9999962	0000682	38	0000038	9999912	0003807	88	0000088
9999961	0000720	39	0000039	9999911	0003895	89	0000089
9999960	0000759	40	0000040	9999910	0003984	90	0000090
9999959	0000799	41	0000041	9999909	0004074	91	0000091
9999958	0000840	42	0000042	9999908	0004165	92	0000092
9999957	0000882	43	0000043	9999907	0004257	93	0000093
9999956	0000925	44	0000044	9999906	0004350	94	0000094
9999955	0000969	45	0000045	9999905	0004444	95	0000095
9999954	0001014	46	0000046	9999904	0004539	96	0000096
9999953	0001060	47	0000047	9999903	0004634	97	0000097
9999952	0001107	48	0000048	9999902	0004732	98	0000098
9999951	0001155	49	0000049	9999901	0004830	99	0000099
9999950	0001204	50	0000050	9999900	0004929	100	0000100

EXPENSIO III.

De Arithmeticis proportionalibus repertæ Geometricorum seriei copulandis.

PRæassumptum 1. Numeris Geometricis post confectas omnes series Arithmetici copulandi sunt, in quo considerandum est nullius laboris esse; si numerorum series altera alteri continua proportione copularetur; sed quia ita non est: at qualibet, & proportionem mutat, & ob fractos in eundem numerum non incidit, hinc est, quod industria inendum sit, & ingenio.

Præassumptum 2. Obseruandum quoque, quòd alicuius quantitatis incommensurabilis tunc explicatur sufficienter mensura, cùm inter terminos parùm distantes maiorem, & minorem clauditur, ita quòd nec maiore maior sit, nec minore minor. Termini verò tunc parum distant, cùm illi sunt magni numeri, & parua differentia dissentiunt, vt 10000010. & 10000040. Si ergo demonstretur aliquam quantitatis mensuram inter illos limites contineri, sufficienter expressa dicitur, vt si dicatur aliquam quantitatem esse inter 10000025. & 10000030. Ratio est; quia differentia 5. vnitatum respectum magni numeri 10. millionum nullius pretij est, nullius sensus, & ideo quidquid inter illos numeros adeo parum differentes clauditur, vt æquale putatur; cùm nec ea quidem differentia 5. vnitatum illos à sensibili æqualitate eliminet, licet quoad intellectum verè sint inæquales.

THEOR. I. PROPOS. IX.

In progressione Arithmeticâ deseruiente Geometricæ à quocumque numero, prout libet, possumus incipere.

PRobatur. Quia nulla naturali connexione connectuntur Arithmetici, & Geometrici. Dum enim quidpiam V. g. se mouens deorsum fecit 10. passus, & secundo æquali tempore faciat centum passus augendo Geometricè velocitatem, multi alij mouentes se progressiuè possunt facere qui quatuor, qui quinque, qui septem passus, vt secũdo eodem tempore, eosdem quatuor, vel quinque, vel septem efficiant. Sic alterans, qui producit 3. gradus caloris in primo instanti, & in secundo 9. comitem, potest habere alium debilem calefacientem, qui non nisi vnum gradum caloris ijs singulis instantibus efficiat.

Præassumptum Elligatur itaque numerus aliquis V. g. vnitas, qui post zifram addendam sinui toti, addatur secundo proportionali. Incipimus autem à zifra iuxta documenta propositionis 2. huius partis. Vnitati quoque multas zifras addimus, vt fiat $1\frac{0000001}{10000000}$, vt in illa intercapedine, quæ est inter 1. & $\frac{0000001}{10000000}$ nempe vnitatem, & decem millionum particulam, in quam vnitas præsuponitur diuisa, multę fractiones capiant, quæ fortè incidunt, vt experientiâ docebit.

PROBL. I. PROPOS. X.

Tabulæ totius sexti ordinis numeros Arithmeticos inscribere.

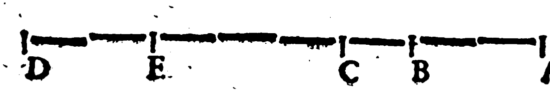
HOc faciliter fit. Nam electo primo numero, qui addatur primo proportionali post sinũ totum, cui zifra additur; idem semper deinde addendum; sic si primo post sinum totum 9999999 10000000. addatur $1\frac{0000001}{10000000}$, secundo 9999998.0000001. addendũ erit $2\frac{0000002}{10000000}$, & tertio Geometrico 9999997 0000003. Arithmeticus subiungendus $3\frac{0000003}{10000000}$. Verum expeditiùs loco denominatoris 10000000. adduntur numero 3. tot zifræ, quot intermediant inter eam minutiam 3. & vnitatem sinus totius. Vnde semper denominator decem millionum subintelligendus est.

Probatur autem ex 2. propos. expens. 1. Nam in progressione Arithmetica; quæ incipit à zifra aggregatum duorum generat tertium; sicut duo Geometrici inuicem multiplicati tertium generãt: itaque si primo idem primus addatur, generabitur secundus, & si secundus addatur primo generabitur tertius, & sic consequenter.

Probatur secundo omnes Geometrici proportionales sextæ tabulæ expansæ eandem proportionem habent, ergo ex Coroll. 2. expens. 1. huius. Omnes Arithmetici eandem differentiam habebunt. Vnde additus primus Arithmeticus, qui est differentia, quâ ipse discrepat à o. habebitur secundus, & sic successiuè, donec perseuerant Geometrici in illa continuâ proportione, quam protraximus vsque ad 100. proportionales, vt vides in superiori exemplo Tabulæ 6. ordinis.

THEOR. II. PROPOS. XI.

Eodem augmento, vel diminutione augetur, vel decrescit Arithmeticus proportionalis duorum datorum proportionalium Geometricorum quorumcumque, quo Arithmeticus sinus totius, & alterius Geometrici proportionalis, ad quem simili proportione referatur, ac datus Geometricus ad datum alium Geometricum.



SInt dati Geometrici expressi linea AB, & AC, & sinus totus linea AD, qui sit ad AF, vt AC proportionalis maior ad AB minorem. Dico, quod proportionalis Arithmetici differentia, seu decrementũ, qua decrescit Arithmeticus proportionalis Geometrici AC, vt possis applicari Geometrico AB eadem est, ac quæ mediat inter sinum totum AD & proportionale Geometricum AF.

Probatur. Quia similiter proportionatorum Geometricorum est eadem differentia, augmentum, seu decrementum ex Coroll. 2. propos. 7. huius. Sed eadem est proportio ex Hypthesi inter Geo-

Geometricos AC, & AB, quæ est inter finum totum AD, & proportionale Geometricum FA, ergo etiã eadem differentia Arithmeticorum, seu (quod idem est) augmentum, seu decrementum ex Coroll. 2. Expens. I.

COROLLARIVM I.

Hinc deduces quomodo datis duobus proportionalibus, & sinu toto ellicias per regulam Auream quartũ proportionale in eadem proportione V. g. sit datus proportionalis minor secundus quarti ordinis 9999900. & quinti ordinis vltimus 9999900. $\frac{0004500}{10000000}$, & sinus totus 10000000. Sitque reperiendus proportionalis numerus, ad quem se habeat sinus totus, vt datus maior 9999900. $\frac{0004500}{10000000}$ ad 9999900. Multiplicetur hic per sinum totum, & diuidatur per 9999900. $\frac{0004500}{10000000}$, & prodibit quartus proportionalis 99999 99 $\frac{9995699}{10000000}$. Verùm, quia hic computus ob magnitudinem numerorum, & fractionum euadit prolixior infra alium modum in hac ipsa expensione trademus: Siquidem in hoc computo oportet sinum totum multiplicare in 9999900. & deinde ob diuisionem faciliorem proijcere in fractiones illud multiplicatum, ita vt sint post quinque 9. viginti tres ziffræ, & deinde diuidere totum illum numerum per 9999900. 0004929.

THEOR. III. PROPOS. XII.

Cuiuslibet proportionalis Geometrici in tabulis non reperti Arithmeticus est inter Arithmeticum maioris proportionalis, & minoris.

Quia dantur aliqui proportionales Geometrici, qui in continuam seriem non sequuntur, & de ipsis iam visum est, quòd eandem habent differentiam Arithmeticorum, quæ est inter sinum totum, & aliud quoddam proportionale minus, quod in eadem proportione, fit. Ideo inuento illo proportionali ex Coroll. eiusdem propositionis potest euenire, vt euenit sæpius, vt in aliquem numerum Tabulæ sexti ordinis, vel etiam aliarum, cum omnes confectæ fuerunt, & de tabulã sinuum Arithmeticis, Logarithmisque exornanda agatur; non incidat, ideo oportet ex secunda huius expens. praxi videre quinam sint termini proximi, inter quos includatur. V. g. inuentũ est proportionale 9999 99 $\frac{9995611}{10000000}$ ad quem se habet sinus totus, vt ad 9999900. proportipnalis 9999900 $\frac{5611}{10000000}$. Sed nullus est proportionalis in tabula sexta iam logarithmis exornata, quæ talis quantitas sit; sed 9999999 $\frac{0000000}{10000000}$ est minor; at sinus ipse totus immediatus est maior. Dico ergo quod Arithmeticus proportionalis inuenti includitur inter Aritmeticum sinus totius, & Arithmeticum proportionalis 9999999 $\frac{1}{10000000}$, & ideo quòd est inter o. & 1. 0000001 qui termini propinquissimi sunt, cum non differant, nisi solà vnitate; quæ quidem est pars minima respectu omnium proportionalium Arithmeticorum, qui tabulam totalem intexturi sunt.

Probatur autem. Quia non potest esse æqualis Arithmetico 1000000I. esset enim Arithmeticus proportionalis Geometrici minoris 9999999 $\frac{\;}{10000000}$; non potest esse o. esset enim terminus radicalis ipsius sinus totius: Ergo erit aliquis medius inter o. & 1. 0000001. sicut, & ipse radicalis Geometricus est aliquid medium inter sinum totum, & 999999 $\frac{\;}{10000000}$.

COROLLARIVM.

Hinc igitur emergit, quod si accipias aliquid medium inter o. & 1 $\frac{0000001}{10000000}$ hoc quodcumque illud sit erit proportionalis Arithmeticus Geometrici inuenti; quia cum sint termini propinquissimi ex præassumpt. 2. non differunt sensibiliter à vero; ideoque pro termino Arithmetico proportionalis Geometrici superiùs inuenti 9999999 $\frac{9995496}{10000000}$. potes accipere ipsam differentiam, quà differt sinus totus à proportionali inuento, quę est $\frac{4511}{10000000}$ Igitur Arithmeticus inuenti proportionalis erit o. $\frac{4924}{10000000}$, vel aliquid tale, quæ differentia addita Arithmetico 100. 0000100. fiet 100. $\frac{0004924}{10000000}$, vel 100 $\frac{0005024}{10000000}$.

THEOR. II. PROPOS. XIII.

Differentia, qua augescit quodlibet proportionale Arithmeticum à sinu toto est ipse Arithmeticus, si series incipiat à zifra.

Patet ex dictis. Nam cum aufertur terminus radicalis à quocumque termino Arithmetico remanet differentia, quà differt ipse à termino radicali; sed hic terminus radicalis, nempe à quo incipit progressio ponitur o. ex Hypothesi; ergo ablato eo remanet ipse numerus, vt erat: Quare ipse erit terminus, & differentia, quâ differt à termino radicali o. qui est proportionalis Arithmeticus sinus totius.

COROLLARIVM I.

Hinc autem resultat, quod cum idem sit Arithmeticus cuiuscumque Geometrici inter sinum totum, & illum ipsum Geometricum, cui ita est sinus totus, vt alius Geometricus ad alium. Sihabeamus illam differentiam Arithmeticam ex præced. Coroll. habeamus quoque differentiam Arithmeticorum quibuscumque Geometricis in simili proportione existentibus applicatorum. Nam ex Coroll. 2. expen. I. huius, vbi est eadem proportio geometricorum, ibi etiam est eadem differentia Arithmeticorum. Quare cum ex Coroll. prop. II. huius ita sit 9999900. ad 9999900. 0004500. vt 9999999. 9995499. ad 10000000. eademque quoque erit differentia Arithmeticorum.

At quia eadem est hæc differentia cum Arithmetico ipso ex hac propos. & iam nouimus ex Coroll. propos. II. Arithmeticum ipsum esse .0004924.; hinc est, quod hic ipse quoque sit differentia, quæ deseruiet etiam pro differentia inter 9999900. 9999900. 0004500. Geometricos eiusdem proportionis cùmque huius habeamus Arithmeticum 100. 0000100. si hanc differentiam ei addamus fiet 100. 0005024. Arithmeticus sinus 9999900. qui cum minor sit suo comproportionali, eius Arithmeticus

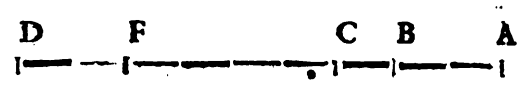
cus debet augeri, cum elegerimus seriem Arithmeticam, quæ augetur dum decrescit Geometrica.

COROLLARIVM II.

HInc obtinebis modum, quo alij omnes proportionales Arithmetici quarti ordini addantur; siquidem, cùm secundus Geometricus sit in proportione ad sinum totum, vt tertius ad secundum, & ita consequenter, & iam habeamus logarithmum secundi ex præc. Coroll. respectu sinus totius nempe 100. 0005024. habebimus quoque logarithmum tertij per additionem eiusdem quantitatis, vt fiat 200. 0010048. & sic successiuè addendo semper eandem quantitatem. Ratio euidens est ex dictis, quia ita 9999900. secundus est sinui toti, vt tertius 9999800. 00100. est ipsi secundo 9999900. Appositis verò omnibus logarithmis, vltimus illius tabulæ primę 4 ordinis, qui est 99990000. 045000. habebit pro logarithmo 1000. 0050240. Dato verò hoc proportionali, & proportionali primo tertij ordinis 9999000 ——, & sinu toto quęremus proportionale quartum ex Coroll. propos. 11. h., quod erit 999999. 9559955., quod se habeat ad sinum totum, vt proportionale Geometricum 9999000 se habet ad 9999000. 04500. Quo reperto ex Coroll. 1. propos. 12. ipsa differentia, quà differt à sinu toto, erit quoque differentia Arithmetica addenda logarithmo noto 1000. 0050240. Geometrici 9999000. 0450., vt fiat Arithmeticus Geometrici 9999000. hæc autem est 4400042. quare Arithmeticus erit ferè 1000. 0005024. & quia proportionales quarti ordinis, qui interponuntur inter 9999000. & inter 9998000. 0001400 quilibet se habet ad suum sequentem, vt 9999900. ad 10000000. hinc per adiectionem eiusdem quãtitatis 100. 0005024. possunt omnes formari habito proportionali Arithmetico primi Geometrici 9999000. & sic de alijs interpositis inter quoscumque Geometricos nedum primæ tabulæ quarti ordinis; sed & omnium tabularum eiusdem ordinis. Ipsos autem proportionales Arithmeticos apponendos Geometricis quinti ordinis habebis, si sibi addas repertum Arithmeticum 100. 4550242. Ratio est toties tacta, quia Geometicus quilibet se habet ad suum antecedentem V. g. 9998000. 1000. ad 9999000. vt ipse 9999000. se habet ad sinum totum. Idem quoque ages in exquirendo primo Arithmetico secũdi ordinis dato vltimo primæ tabulæ ordinis tertij Geometrico 9990004. 4991. primo secundi 9990000. & sinu toto acquirendo quartum proportionale, & ex illo differentiam Arithmeticam addendam Arithmetico iam dato vltimo tabulæ primæ tertij ordinis 10004. 5402420., quo habito cęteri omnes innotescunt. Vnde totus labor consistit in primis solum Arithmeticis cuiuslibet tabulæ primæ inueniendis cęteri enim omnes illis datis habentur. Aduerte autem numeros post punctum esse fractos, & subintelligi lineam subductam, & sub linea tot zifræ, quot sunt figuræ, & insuper vnitas ad sinistram, quod & in sequentibus obseruabimus.

THEOR. V. PROP. XIV.

Ita est maius proportionale ad sinum totum, vt differentia duorum proportionalium est ad differentiam sinus totius, & alterius ad quod eandem proportionem dicat.



SIt vt priùs datus Geometricus CA, qui sit ad AB, vt AD sinus totus ad AF. Dico quoque, quòd ita est CB differentia ad DF differentiam, vt est CA sinus ad totum sinum AD.

Nam si est totum ad totum, vt ablatum ad ablatum. Ergo, & reliquum ad reliquum tale erit, vt est totum ad totum ex propos. 19. lib. 5. Element. Cum ergo sit totus CA ad ablatum AB, vt totus sinus AD ad ablatum AF, ergo, & reliquum nempe differentia BC est ad differentiam reliquam DF, vt est CA ad totum AD.

THEOR. VI. PROPOS. XV.

Ita est maior Geometricus proportionalis ad differentiam inter ipsum, & minorem, vt est sinus totus ad differentiam inter ipsum, & proportionalem alterum simili proportione Geometrica affectum.

MAneat eadem constructio, vt priùs, Dico, *quod ita est proportionalis maior* AC ad differentiam CB, vt est sinus totus AD ad differentiam DF.

Probatur ita est in proportione differentia BC ad differentiam DF, vt proportionale AC est ad totum sinum DA, & *vicissim* ita erit proportionata BC differentia ad AC, vt differentia DF ad sinum totum AD; vnde, & *conuertendo* AD erit ad DF, vt AC ad BC.

COROLLARIVM.

HInc deduces modum, quo datis duobus proportionalibus, & sinu toto ellicias quartũ proportionale, ad quod se habeat sinus totus, vt proportionalis datus maior se habet ad minorem. Quoniam ita se habet maior Geometricus datus ad differentiam, quæ intercedit inter ipsum, ac minorem datum, sicut sinus totus ad differentiam, quæ intercedit inter se, & alium simili proportione sibi respondentem, vt Geometrici dati. Ideo dato Geometrico maiori V. g. vltimo primæ tabulę tertij ordinis 9990004. 4991000. & primo tabulæ primæ secundi ordinis 9990000. habebis diffetentiam 4. 4991000. Itaque proportionali 990000. & differentia 4. 4991000. & sinu toto exquires quartum proportionale; nempe differentiam inter sinum totum, & sinum eo minorem, sed in consimili proportione, quæ erit 4. 5035015. quam demes à sinu toto, & habebis proportionale 9999995. 4563985. quod ita se habebit ad sinum totum, vt 9990000. ad 9990003. 4991000. Iuxta itaque documenta propositionis 11. huius, quære hoc proportionale in sexta tabula, & non

reperies

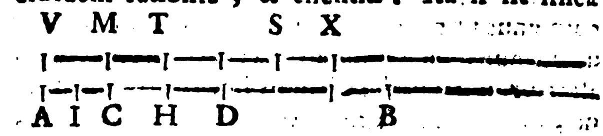
reperies, sed aliquid maius nimirum 9999996. 0000005. & quid minus 9999995. 0000009. Inter itaque hos terminos consistet Geometricus repertus 9999995. 4963985. & consequenter etiam Arithmeticus, nempe quid medium inter Arithmeticum 40000004. & 5. 0000005. Geometricis terminis applicatos sola vnitate distantibus, quare poterit esse 4. 5036015. ipsa nempe differentia Geometrica. Cum verò Arithmeticus, quo differt Geometricus à sinu toto sit etiã differentia iuxta propositionem 12. & differentia eadem Arithmetica sit similiter geometricè proportionatorum ex Coroll. vltimo expens. 1. huius sequitur, vt Arithmeticus repertus sit quoq; differentia addenda Arithmetico noto 10004. 5402420. vt fiat 10009. 0438435. Arithmeticus Geometrici mininoris 9990000. Quo habito omnes habentur eiusdem ordinis tertij addendo eandem quantitatem antecedenti termino. Sicut, & intermedij omnes, qui pertinent ad quarti ordinis tabulas addendo iisdem Arithmeticis tertij ordinis, à quibus incipit interstitio, primum quarti ordinis Arithmeticum, & sequendo eandem additionem, donec omnes interpositi sint arithmeticis exornati.

Sic, si cupias Arithmeticum primæ tabulæ primi ordinis, eodem modo poteris inuenire. Datur enim 9900448. 8070000. Geometricus secundi ordinis, & 9900000. Geometricus primus tabulæ primæ primi ordinis, quorum differentia est 448. 807000. quæ dat adhibitâ regulâ proportionum differentiam geometricam quarti proportionalis à sinu toto 453. 3198532. quæ differentia subducta à sinu toto dat quartum proportionale 9999546. 680:468. quòd in tabula prima ordinis quarti reperitur cadere inter 9999500. 0100000. & inter 9999600. 0060000. & hoc est minus quidem repertũ proportionale, sed maius illo: itaque Arithmeticus numerus quoque erit maior, quam 400. 0020096. & minor, quam 500. 0025120. Vnde differentia Geometrica addita minori Arithmetico dabit proximè Arithmeticum proportionalẽ inter vtrumque medium paucissimis vnitatibus à verò distantem. Quia ergo quartus proportionalis differt à maiori 9999600. 0060000. & differentia est 53. 3255532. Si hanc differentiam, vel quid minus addamus Arithmetico minori 400. 0020096. fiet Arithmeticus 453. 3278328 differentiaque inter Arithmeticos Geometrici 9900448. 8070080. & 9900000. 0000000. Cum autem sciamus Arithmeticum Geometrici 9900448. & cæt. qui est 100090. 4357360 si hac differentiam addamus fiet 100543. 7632988. vnde cum sit vltimus secundæ tabulæ ad sinum totum, vt quilibet primæ ad suum antecedentem erit quoque hæc differentia inter quoscumque Arithmeticos primæ tabulæ.

THEOR. VII. PROPOS. XVI.

Sicut decrescit, vel augescit quodlibet continuá progressione Geometrica procedens quoad partes assignatas maiores; ita quoad singulas partes in infinitum minores augetur, vel decrescit.

PRobatur. Eo, quia cum se continuè eadem progressione moueat necessariò assignata quælibet pars motus, quæ mensuretur æquali portione temporis augescet, vel decrescet respectu alterius eodem æquali tempore mensurata, quod si quælibet alia pars Geometricè procedens mensuretur alia minori parte temporis, adhuc tamen in eadem proportione erit cum alia parte geometrica, quę eodẽ temporę mẽsuretur, quia cum totum Geometrica proportione semper eadem crescendo, vel decrescendo continuè se moueat singulæ eius partes assignabiles eadem proportione inuicem correspondere debebunt cum sint omnes eiusdem rationis, & essentiæ. Ita si sit linea



AB, quæ crescat continuè, & Geometricè, & augmẽtum mensuretur, à linea XV. æqualiter crescente, & Arithmetica, ita quod dum crescit Geometrica ab A in C illa Arithmetica crescat, ab V in T, & dum hæc se auget à C in D illa moueatur à T in S. Si sumatur VM in geometrica. eiq; correspondeat AI; secundę MT æquali correspondebit IH, quæ in proportione Geometrica erit cum AI, vt CD cum AC.

COROLLARIVM I.

HInc eruitur alius modus Arithmeticos reperiendi qui Geometricis applicari possint. V. g. detur numerus Geometricus præcedens 9900448. 807. cuius notum habeamus Arithmeticum 10009. 4354360. cupimusque scire Arithmeticum 9900000. Iam scimus quot proportionales cadunt inter 9900448. & cæt. & proportionale eo immediatè minus 9890548. 359. nempe tot ex 12. prop. 8. Element. quot inter 10000000. & 9990000. nempe 10 tertij ordinis inter quos cadunt 10. quarti, & inter hos quoslibet 10 quinti ordinis, ita quod erunt 1000. proportionales. Quot ergo sunt proportionales Geometrici minores assignati, inter dictos Geometricos maiores, tot erunt partes æquales in differentia applicatorum ipsis Arithmeticorum, & quia illa differentia est 10009 0438435. ideo si diuidatur per 1000. habebimus 10. & . 0090438. partem æqualem, qua semper augetur Arithmeticus, dũ Geometrici 1000. accrescunt inter vnum 9900448. & cæt. & inter 9890548. & cæt. Geometricos maiores.

Incipiamus itaque distribuere in suos proportionales progressionem. Sic; donec occurrat Geometricus, vel de quo quærimus, vel ei propinquus.

9900448 8070
    990 0448

9899058 7522

Quia ergo iste primo eductus iam est minor eo, de quo quæritur, ideo non progrediemur amplius, sed cum debeat esse inter istos maiorem, & minorem, ideo ad hoc, vt illum inueniamus minutiorem instituemus progressionem sic.

9900448 80700 A
    99 00448

9900349 80252
    99 00349

9900052 79650
    9 90005

1 9900042 89645
    9 90004

9900250.

9900240	79903	
99	00240	
9900151	79650	
99	00151	
9900052	79509	B
99	00052	
9899953	79457	C

2	9900032	99641
	9	90003
3	9900023	09638
	9	90002
4	9900013	19636
	9	90001
	9900003	29635

Erit itaque inter hos duos B, & C postremos cum vnus sit maior alius minor 9900000. de quo quærimus, quare opporteret adhuc inter istos alios proportionales vltimos inuenire in eo ordine, in quo sunt proportionales quinti ordinis, sed isti non possunt esse plures, quam 52. iuxta numerum vnitatum, quę super 9900000. accrescunt in Geometrico B 9900052. vt patet ex quinta tabula. Quia, ergo inter A, & illum, de quo quærimus quatuor Geometrici intercluduntur, ideo quater accipiuntur partes Arithmeticæ superius inuentæ 10. 90438. & fient 40. 361752. qui si rursus multiplicetur per 10. ob proportionales interceptos inter quoslibet eorum minores eiusdem speciei, vt in quinto ordine fient 400. 3617520. cui si etiam addantur 52. vnitates, fient 452. cũ fractis suis addendi Arith. 10009. & cęt.

Vel etiam meliùs accipiantur Arithmeticæ differentiæ iuxta singulos Geometricorum ordines, quia ergo inter primum Geometricum A, & de quo quæritur 9900000. nullus intercipitur Geometricus tertij ordinis, ideo nullus accipitur illius ordinis Arithmeticus, quia verò intercipiuntur 4. quarti, ideo quater accipitur Arithmetica differentia quarti 100 0005024. vt fiant 400 0020096. cui addimus Arithmeticum Geometrici 52. quinti ordinis 52. 0000052. & fit Arithmeticus quæsitus 452. 0020148. addendus Arith. 10009. &c. vt fiat Geometrici 9900000. de quo quærebatur.

COROLLARIVM I.

NOtabis nostros numeros extremarum tabularum exijsse paulò maiores in Arithmeticis differentia proximè 2500. quàm quas composuit ipse Neperus. Ratio verò huius rei est, quia ipsi est primus tabulę primæ 100483. & cæt. nobis vero 100543. & cæt. quia ipse sumpsit aliquid minùs, quàm quòd differentia Geometrici dabat, nos quid maius ipsa eadem differentia sumpsimus, vtpote ad libitum, vt patet ex Coroll. propos. 15.

COROLLARIVM II.

ADuerte quoque Arithmeticos, non solùm crescere per numeros integros, sed etiam per fractiones, quòd in reperiendis illis, qui primis tabularum Geometricis applicantur necessariò fractiones essent admittendæ, quæ per continuam additionem deinde crescebàt in immensum. Vnde spretæ ab initio, deinde magnum errorem poterant causare, incępit ergo crescere series Arithmetica, ne dum simplici vnitate, sed addita fractione 0000001. vt in illa fractione daretur locus, quo possint successiuè, & aliæ, fractiones recipi, & continuè addi. Verùm hę fractiones in tabula sinuum, seu absoluta Logarithmica contemnendæ, quòd solùm deseruiant ad continuam earum additionem, ob quam successiuè in integros transeuut, quum singulę singulis in progrediendo adduntur.

EXPENSIO V.

De Logarithmis in tabulas sinuum transferendis.

COnfectis omnibus tabulis, & ijs Logarithmorum serie instructis, vltimus labor postulat, vt illos in tabulas sinuum transferamus, vnde sit.

PROBL. I. PROPOS. XVII.

Logarithmos tabulis sinuum applicare vsq; ad sinum gr. 45. à sinu toto.

DAtum sinum per tabulas supra positas logarithmis instructas quære, vel enim occurret prorsùs idem, vel non pluribus, quam 10. vnitatibus distans, si perduxisti tabulas vsque ad ordinem quintum, quòd, si vsque ad ordinem quartum differet 100. vnitatibus. Quære ergo in tabula sexta, quid vnitates illæ, quibus differũt isti duo Geometri exhibeàt in Arithmeticis, & hoc adde Arithmetico reperti ꝓportionalis si sit minor subducito, si sit maior eo, qui in tabulis logarithmicis inuenitur, eritq; logarith. dati sinus.

V. g. datur sinus 7107995. requiro illum in tabulis proportionalibus, reperioque in tabula vltima tertij ordinis numerum proximum minorem 7107989. cuius logarithmus est 3415020. differtque Geometricus à dato 6. vnitatibus. Reperio itaque has vnitates in tabula sexti ordinis Geometrica, & dant mihi 4. vnitates correspondentes pro Arithmetico competente, quas addo logarithmo 3415029. fitque logarithmus 3415024. Sinus dati 7107995. fracti verò posthabendi, quia illi ad solam continuationem tabularum requirebantur.

Veritas verò huius operationis ostenditur ex propos. 15. Posset etiam reperiri ex Coroll. prop. 12. & ex Coroll. propos. 15. sed faciliùs per hanc, atque certiùs.

COROLLARIVM I.

HInc omnes sinus vsque ad centum faciliter dantur per solam inspectionem Tabulę ordinis sexti. Nam cum ibi proportionales sola vnitate decrescant quilibet occurret cum logarithmo addendo spretis fractis, vt modo non ampliùs necessarijs, cum solùm ad condendas tabulas requirantur: sic sinus 9999995. reperies logarith. 7. Sic 9999905. reperies logarithmum 95. cum fracto 0000095. qui spernendus est.

COROLLARIVM II.

REperies quoque sinuum aliorum logarithmos, qui cadunt in tabulam quinti ordinis, vel quarti sic. Dati sinus 9999105. reperitur proximus proportionalis in tabula prima quarti ordinis 9999100. quia ergo ille sinus est maior 5. vnitatibus, logarithmus 900. diminuendus vnitatibus 5. ex tabula sexti ordinis, sed quia aderant

fracti

fracti satis sensibiles vltra integros, ideo accipiendæ sunt 4. eritque logarithmus 896. vel 895. sinus 9999105. Eidemque logarithmo 35. vnitates ex tabula sexti ordinis addendæ, vt fiat logarithmus sinus sequentis 9999065. Sicque erit 930. logarithmus ipsius sequentis, & sic de omnibus alijs, vt vsus ipse ostendet.

Ita quoque fecimus in reperiendo logarithmo applicando sinui Gr. 45. qui necessarius est ad reliquorum sinuum logarithmos inueniendos. Namque, cum sit sinus ille 7071068. erit inter proportionales primi ordinis 7105532. &c. & 7034477. & cæt. incepimus itaque proportionales secundi ordinis interponere, vt vides hic.

			Logarith.
7105532	420		3418488
7105	532		
7098426	888	1	
7091328	462	2	
7084237	134	3	
7077152	897	4	
7070075	745		

Est ergo sinus quæsitus inter hunc vltimum, & penultimum: quare interiaciemus proportionales tertij ordinis. sic

7077152	8970	
707	7152	
7076445	1818	1
7075737	5373	2
7075029	95,6	3
7074322	4607	4
7073615	0285	5
7072907	6670	6
7072200	3763	7
7071493	1563	8

Deinde alij proportionales quarti ordinis interponendi quales sunt.

7071493	15630	
70	71493	
7071422	44137	1
7071351	72715	2
7071281	01364	5
7071210	30083	4
7071139	58873	5
7071068	87734	6

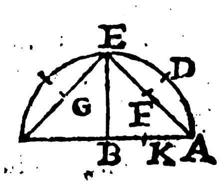
Hic ergo vltimus est valdè propinquus, & differt solum fractis à sinu dato. Accipiemus ergo logarithmos conuenientes ordinis primi proportionali, qui est 3418488. 8721596. deinde ex prima tabula secundi ordinis accipiemus quarti proportionalis logarithmum 40036. 1753740. deinde ex prima tertij accipiemus octaui Geometrici logarithmum 8003. 6301936. tandem ex prima tabula quarti ordinis accipiemus sexti Geometrici logarithmũ iuxta.n. interpositorũ log. 597. 0029847. & omnes in vnam summam redigemus, eritque logarith. sinus Gr. 45. nimirum 3467125 $\frac{1}{2}$. abiectis omnibus fractis.

Præassumptum. Quia vsque ad dimidium tabulę sinuũ tabulas proportionales logarithmicasq; ordinauimus. Modo quomodo reliquis sinubus logarithmi applicandi inueniantur docendum est; & hoc non, quia vsque ad vltimum sinum deduci non possent, sed solum ad laborem leuandum. Ad id verò est necessarius logarithmus dimidij sinus totius. Vnde quomodo reperiatur, tradendum est.

THEOR. II. PROPOS. XVIII.

Sinus 45. Graduum est medium proportionale inter sinum totum, & dimidium sinus totius.

SVpra probauimus propos. 18. expens. 3. cùm ageremus de sinibus inueniendis; quòd dimidium sinus totius AK se habet ad sinum dimidij alicuius arcus EA, vt sinus complementi illius dimidij EG ad sinum totius arcus BE; sed sinus 45. Grad. est æqualis suo complemento, & sinus arcus dupli ipsius est sinus totus; ergo ita se habet AK



dimidium sinus totius ad EF sinum 45. Grad. vt ejus, & illi æquale complementum EG ad sinum dupli arcus EB, qui est sinus totus, & consequenter EF, & EG æquales sunt medium inter AK dimidium sinus totius, & BE sinum totum, & ideo si ex eis fiat quadratum illud erit æquale rectangulo ex sinu toto, & dimidio eius facto ex propos. 19. lib. 6. element.

COROLLARIVM.

HInc est, quòd cùm exp. 1. huius tract. propos. 6. & 4. duplatio Arith. æquiualeat quadrationi, & propos. 3. subductio diuisioni. Si logarithmus sinus 45. gr. dupletur, & ab eo duplato subducatur logarith. sinus totius, qui est 0. relinquetur dimidij sinus totius Arithmeticus; & quia supra reperimus Arithmeticum 45. Grad esse 3467125 $\frac{1}{2}$, si dupletur erit 6934251. & subducatur 0. silicet nihil ab eo auferatur, erit idem logarithmus sinus dimidij nempe sinus 5000000.

Vu PROBL.

PROBL. I. PROPOS. XIX.

Dato logarithmo dimidij sinus totius, & sinus maioris arcus, quam Gr. 45. cum complemento eius dimidij, reperire dimidij arcus, vel sinus logarithmum.

PRæsupponitur, quòd sint appositi omnibus sinibus sui logarithmi à 90. vsque ad grad. 45. & sint alij, quærendi minores dimidio, & consequenter minores, quàm sinus Gr. 45. Vnde, & eorum complementum erit cognitum, cùm arcus, qui quæritur sit minor, quam gr. 45. eius complementum erit sinus arcus maioris, quam Gr. 45. & consequenter eius logarithmus erit notus. Addantur itaque simul arcus dati logarithmus, & dimidij sinus totius, & à summa auferatur logarithmus sinus complementi dimidij ipsius arcus, & residuum erit logarithmus ipsius dimidij.

Probatur autem ex propos. 15. Expens. 8. de sinubus. Nam dimidium sinus totius se habet ad sinum alicuius arcus, vt sinus complementi se habet ad sinum dupli arcus. Vnde rectangulum ex medijs ex propos. 18. Elem. erit æquale rectangulo ex extremis, & sic in geometricis si multiplicentur simul extrema, nempe dimidium sinus, & sinus dupli arcus, & diuidantur per complementi sinum, dabit residuum sinum dimidij arcus, vt ibi diximus; sed vt propos. 1. expens. 1. h. diximus in Arithmeticis aggregatio æquiualet multiplicationi, & ex prop. 3. subductio diuisioni, ergo aggregatus logarithmus dimidij sinus, cum logarithmo totius arcus æquiualebit eorundem Geometricæ multiplicationi, & subductus logarithmus complementi, æquiualebit diuisioni factæ per eiusdem sinum, & consequenter residuum ex subtractione logarithmica erit logarithmus dimidij arcus. Exemplum verò tale est.

Sit Logarithmus Gr. 45. m. 15. ex tabula tertij ordinis 3415983 complementum dimidij huius arcus est Gr. 67. m. 22 $\frac{1}{2}$ cuius logarith. ex tabula prima per regulas proximè traditas repertus est 801930. logarithmus verò dimidij sinus totius est, vt supra 6934251. Addo itaque hunc dimidij sinus totius logarithmum logarithmo sinus arcus dati 3515023. fitque summa 10549274. à quo subduco logarithmum complementi, remanetque logarith. 9747344. sinus dimidij arcus 22. 37 $\frac{1}{2}$

COROLLARIVM.

HInc datis omnibus logarithmis sinuum arcuum maiorum, quam grad. 45. obtinere poteris omnes logarithmos sinuum arcuum, vsque ad 22 $\frac{1}{2}$ Gr decrescentium, & istis datis obtinebis logarith. arcuum vsque ad 11. Gr. & m. 15. & ex istis rursus omnium arcuum logarithmos vsque ad gr. 5. m. 38. & tandem vsq; ad primum prorsùs minutum.

EXPENSIO VI.

De Tabulis ordinandis, & Logarithmis tangentium addendis.

PRæceptum 1. In qualibet paginæ facie 9. columnæ, seu arulæ oblongæ distinguantur lineis tali, tum longitudine, tùm latitudine, vt commodè numeros capere possint inscribendos, ita quod 61. versus, seu lineas numerorum secundum longitudinem singulæ comprehendant, & latæ, vt 8. numeros capere possint, & si de tangentibus agitur vsque ad 11. exceptis prima sinistra, & vltima dextra, quæ duos tantum numeros sua latitudine capere debent, lineamentisque transuersis decem ad maiorem distinctionem decussentur.

Præceptum 2. Primæ columnæ sinistræ G. cum numero graduum, & m. pro indicio minutorum superscribendus; perque totam longitudinē incipiendo à 0. & descendendo vsque ad 60 numeri inclusiuè excrescētes notādi. Nonæ verò columnæ dextræ nihil supra scribendum, sed incipiendum à 60. & decrescentibus numeris perueniendum vsque ad 0. inclusiuè, & tandem numerus 89. & hæc de prima, & secunda facie paginæ primæ; cæteræ verò successiuè habebunt Gr. 1. & 88. sic Gr. 2. & 87. & in reliquis hoc ordine est procedendum.

Præceptum 3. Secunda verò columna sinistra continebit sinus illorum minutorum, qui in prima continentur, sicut, & dextra octaua sinus illorum, qui nona columna extenduntur, & consequenter Graduum, qui supra scripti sunt primæ, & infrascripti nonæ. Hos autē sinus, vel repertos habebis ex tractatu de sinubus, vel deduces ex tabulis sinuum vulgaribus, vt Reinholdi, &c.

Istis autem sinibus dextris applicabis logarithmos repertos vt supra ex Coroll. propos. 16. primo, & secundo, & hi occupabunt 7. dextram columnam. Sinistris verò sinibus applicabis logarithmos repertos ex propos. 19. & isti extendentur per totam columnā sinistram tertiam, sexta verò, & 4. inscribendæ sunt tangentes, & tandem 5. & media remanente differentiales numeri scribendi sunt, qui pro tangentibus apponuntur, Oriuntur autem isti à subductione logarithmorum sextæ columnæ, à logarithmis tertiæ, & id quod remanet à subtractione inter vtrasque tangentes hac media columna scribendum.

THEOR. III. PROPOS. XX.

Primæ Nonæque columnæ Gradus, & minuta sibi sunt inuicem arcus, & complementa.

PRobatur. Nam cum illa prima incipiat à 0. crescendo ista à 60. minutis super 89. fit, vt quantùm crescit illa prima, tantùm decrescat nona, & consequenter, quòd huic tot minuta, seu gradus deficiant, quot primæ addita sunt, & è contra. Quare simul additi alter alterius complebit numerum, vt fiant 90. Gr. & sic erunt sibi inuicem complementa.

THEOR. IV. PROPOS. XXI.

In prima columna continetur angulus acutus rectanguli minor; in nona dextra angulus acutus eiusdem maior.

PRobatur. Nam ex propos. 17. lib. 1. element. omnis rectanguli anguli omnes duobus rectis sunt æquales, qui cũ sit vnus in rectãgulo rectus, alij duo simul erunt vni recto æquales; Vnde alter angulus alterius complementum erit, vt sunt arcus, qui prima, nonaque columna continentur, vt dictum est propos. 20.

THEOR. V. PROPOS. XXII.

Secunda Columna continentur crura minora minores angulos subtendentia: in octaua verò crura maiora maiores angulos subtendentia.

PAtet, quia in secunda minorum angulorum, & arcuum sinus continentur, sicut in sexta sinus arcuum maiorum, & angulorum.

COROLLARIVM.

HInc est, quod ex sinu dextro octauæ columnæ, & sinistro secundæ, & sinu toto rectangulum triangulum componatur.

THEOR. VI. PROP. XXIII.

Logarithmi tertiæ columnæ sunt Logarithmi proportionis cruris minoris rectanguli ad eius basim, seu Hypothenusam, fiũt, & logarithmi septimæ sunt logarithmi proportionis cruris maioris ad eandem Hypothenusam. Suntque sibi inuicem antilogarithmi nempe complementorum logarithmi.

PRobatur prima pars. Nam proportio quam habent crura cum basi tunc innotescit cum basis per crura diuiditur, ita proportio 5000000. sinus Gr. 30 est ad sinum totum 1000000. vt 1. ad 2. quia diuisus sinus totus per crus 500000. dat 2. Sed ex dictis propos. subductio in logarithmis equiualet diuisioni: Ergo logarithmus cruris subductus à logarithmo sinus totius dabit logarithmum proportionis cruris cum sinu toto: Sed logarithmus sinus totius est o. Ergo subductus relinquit numerũ, vt erat, & ita ne dum est logarithmus sinus: sed etiam proportionis eiusdem sinus cum sinu toto.

Probatur secunda pars. Quia sinus, quibus applicati sunt, sibi dextrorsum, & læuorsum correspondentes sunt sibi inuicem complementa. Ergo, & logarithmi ipsorum sibi inuicem sunt antilogarithmi.

THEOR. VII. PROPOS. XXIV.

Tangentium, & secantium, quæ supra sinum totum excrescunt logarithmi infra o. intelligendi; ita quod sint minores nihilo tot vnitatibus, quot sunt in ipso logarithmo.

PRobatur. Nam cum à o. crescant logarithmi nostri, dum à sinu toto ipsi sinus decrescunt necesse est, quòd si dentur aliquæ lineæ, vt sunt Tangentes arcuum maiorum, quam 45. Gr. & omnes secantes, quę crescunt vltra sinum totum, quòd illarum logarithmi vltra o. decrescant.

COROLLARIVM.

VNde logarithmi possunt sumi, & vt defectiui, & vt abũdantes. Abundantes erunt, si intelligantur crescere supra o. vt vsque nunc fecimus: defectiui verò si infra o. decrescere intelligantur, & taliter aliquos intelligere erit necesse, si tangentibus, & secantibus eos applicare voluerimus, quæ vltra sinum totum excrescunt.

THEOR. VIII. PROPOS. XXV.

Si Logarithmos tertiæ columnæ sinistræ, & septimæ dextræ, vt defectiuos considerauerimus erunt logarithmi Hypothenusarum, seu secantium Arcuum, quibus sunt complementa, & Anthilogarithmi.

Sic logarithmi sinuum arcuum dextrorum fient logarithmi secantium sinistrorum arcuum, & è contra.

PRobatur. Nam propos. 18 Tr. 20. de sinubus probauimus sinum totum esse medium proportionale inter complementum arcus, & secantem eiusdem arcus, & ideo, quòd multiplicatus in se, & diuisus per complementum daret arcus illius secantem: sed quia in logarithmis additio equiualet multiplicationi, & subductio diuisioni, ideo si o. logarithmus sinus totius addatur ipsi o. & ab hac summa subducatur logarithmus complementi arcus V. g. logarithmus arcus dexteri, relinquetur idem logarithmus minus, quam o. secans arcus sinistri; cui arcus dexter est complementum. Erunt verò logarithmi considerandi, vt infra o. deficientes, quòd omnis secans super sinum totum excrescat, vt modò diximus.

THEOR. IX. PROPOS. XXVI.

Differentiales mediæ columnæ sunt logarithmi proportionis cruris maioris respectu minoris, & logarithmi secundarum, seu tangentium, tum arcuum dextrorum, tum sinistrorum, sub diuersa tamen consideratione. Nam vt abundantes sunt differentiales, logarithmique tangentium arcuum sinistrorum minorum Gr 45. at vt defectiui sunt logarithmi tangentium arcuum dextrorum maiorum gr. 45.

PRob. secunda pars. Nam ex prop. 16. tract. 20. habemus, quòd eadem proportio est sinus cōplementi ad sinum arcus; quam sinus totius ad tangentem, & ideo, quod multiplicatus sinus totus per sinum arcus, & diuisus per sinum complementi, exhibeat tangentem arcus; vel è contra multiplicatus per sinum complementi, & diuisus per sinum arcus exhibeat tangentem complementi. Sed in Arithmeticis ex propos. 1. & 3. huius, additio æquiualet multiplicationi, & subtractio diuisioni; Ergo si logarithmus sinus alicuius arcus addatur logarithmo sinus totius, qui est 0. & ideo remaneat, vt erat ante, & subducatur ab eo logarithmus sinus complementi dabitur tangens arcus, & si subducatur ab eo sinus arcus dabitur tangens complementi, ideo eædem differentiæ erunt, & logarithmi arcuum, & logarithmi complementorum, arcuum quidem, vt abundantes, & quatenus logarithmi sinuum maiorum, quam Gr. 45. subducuntur à sinuum minorum maioribus logarithmis, vt relinquatur tangentis logarithmus; complementorum verò quatenus defectiuæ, & logarithmi maiores sinuum minorum, quam 45. Gr. subducuntur à minoribus logarithmis maiorum sinuum, vt relinquatur tangētis logarithmus. Maiores verò numeri à minoribus subducuntur per intellectum; quatenus intelligitur minori tot vnitates deficere, quot sufficiunt ad hoc, vt subduci possit; ita 15. subducitur à 4. cum intelligitur illi 4. vnitates 11. deficere, quas si haberet 4. à 15. posset subtrahi, cùm tunc esset iunctus cum 11; & 4. & 11. faciunt 15. numerus verò 15. à 15. subduci potest, & ideo differentię logarithmicæ sumptæ, vt deficiētes, & vt à minoribus logarith licet maiores possunt subduci; sunt illæ ipsæ, quas dant minores logarithmi à maioribus subducti. Sicut 11. est eadem differentia, quam dat numerus 4 subductus à 15. & quam dat 15. subductus per intellectum à numero 4.

Probatur prima pars, quod differentiales sint quoque logarithmi proportionis crurum: Nam tunc proportio vnius cruris ad aliud obtinetur, cùm crus minus diuidit maius. Quotiens enim est denominator proportionis: Sed in logarithmis deductio æquiualet diuisioni, & differentiales numeri sunt orti à subductione logarithmorum minoris cruris à maioris cruris logarithmis. Ergo sunt logarithmi illi numeri differentiales proportionis vnius cruris ad aliud.

COROLLARIVM.

COllige, quod si tangentium logarithmis vtaris in exercenda regula proportionum, & iubeat, tāgentis logarithmū debere demi, vel addi, si addit signū † hoc, quod significat logarithmum tangentis debere sumi, vt abundatem, tunc obediendum est; & cum præcipit regula, quòd subducatur logarithmus tangentis; vel addatur; si signo defectiuo hoc − in tabulis notetur, è contra faciendum.

Logarith.

1 Sinuum G. 45. vsq; ad 90.	2 Tangentium	3 Sinuum G. ab 1. vsq; ad 45.
0	80	90
4	72	76
8	64	68
12	56	68
16	48	64
20	40	60
24	32	59
28	24	52
32	19	48
39	8	44
40	0	40

Quod concipies à serie numerorum logarithmicorum hic apposita, qui imitantur logarithmos sinuum, atque tangentium in suo progressu.

Series itaque prima cogitetur, tanquam si essent logarithmi minores sinuum arcuum maiorum, quàm 45. Graduum; Secunda sint differentiæ, & tanquam tangentium logarithmi habeantur; Tertia putentur tanquam logarithmi sinuum arcuum minorum, quàm 45. gr. quia sunt maiores Arithmeticis primæ seriei.

Quia itaq; tangens est ad sinum totum, vt sinus arcus ad sinum complementi: differentialis tangentis maiorum arcuum, quàm 45. Gr. & consequenter maior sinu toto, diuidet logarithmum sinus totius 0. & logarithmum arcus maioris, quam 45. Grad. aggregatos, & prodet logarithmum arcus minoris, quam 45. Gr. V. g. arcus logarith. 24. diuisus per differentialem 40. daret logarithmum desideratum; sed quia differentialis 40. est defectiua respectu logarith. 24. ideo addenda est, & fiet 64. logarithmus arcus minoris, quàm Gr. 45.

At si tangens sit minor sinu toto; etiā sinus quæsitus erit minor dato; Vnde logarithmus V. g. 94. additus sinui toti, & minutus differentiali 32. dat logarithmum arcus maioris pariter 32. quia s. hic differentialis 32. consideratur, vt abundans. Vides itaque, quod quando desideratur logarith. sinus minoris arcus, quam Gr. 45. differentialis, quæ debebat addi subducitur, at quando desideratur sinus arcus maioris, quàm gr. 45. logarithmus differentialis, quę debebat addi, etiam additur. Quia si 24. cum differentiali 32. minorem nihilo, facit 56. qui æquat ipsum 56. maiorem nihilo. Ergo 28. cum 32. facit 60. ob additam differentiam 4. quam addit 28. numero 24. & sic 32. cum 32. facit 64. & sic 36. cum 32. facit 68. & cæt. quare addita differentialis logarithmo minori constituet maiorem, sicut ablata minorem logarithmum cum tamen iuxta regulam semper deberet subduci, nisi differentiales deficerent, & inciperent contrario

trario modo à o. crescendo dum sinus deficiunt.

Itaque collige regulam Generalem, quod in defectiuis addendis cum abundātibus, seu logarithmis sinuum, qui omnes sunt abundantes, cum differentialibus, seu in logarithmis sinuum, sed vt secantium sumptis, & ideo omnibus defectiuis, addere idem est, ac subducere.

In defectiuis verò ab abundantibus subducendis, vel è contra, subducere idem est, quod addere. Quia silicet subducendo acquiritur id, quod addendo esset consequendum, vel addendo id inuenitur, quod subtrahendo debuisset reperiri.

EXPENSIO VII.

De Logarithmis numerorum absolutorum.

CVm ex applicatione logarithmorum sinubus arcuum facilitas singularis in regula proportionum tractanda emerserit, cùm ad inuentionem ipsorum sinuum adhiberetur. Excogitauere Authores numeris quoque absolutis, & naturali propagatione crescentibus logarithmos addere, vt ipsa regula aurea simili facilitate constaret in numeris absolutis assumpta; quod etiam inuentum ab ipso Nepero innuitur, sed obscurissimè exposuit tamen, vtcumque Henricus Briggius; sed feliciùs operi mandauit in suis Chiliadibus, quæ ab 1. vsq; ad 100000. excrescunt naturali augmento.

THEOR. I. PROPOS. XXVII.

In serie numerorum ab vnitate continuè proportionalium, si numerus quilibet alterum multiplicet. Eius logarithmus erit aggregatum logarithmorum ipsis multiplicantibus se inuicem, applicatorum naturali ordine progredientium.

SInt proportionales ab vnitate numeri in seriē dispositi 1.2.4.8. & cæt. & eorum logarithmi naturali ordine propagati 1.2.3.4. & cæt. Dico, quòd si aliquis V. g. 2. multiplicet aliquē alium nempe 16. & faciat 32. huius facti logarithmum esse aggregatum logarithmi duorum numerorum se multiplicantiū idest logar. 1. & 4. nimirum 5. Sic si 4. multiplicet 32. & faciat 128 logarithmus huius numeri 128 erit aggregatū logarithmi 2. & logarithmi 5. applicatorū numero 4. & 32. quod aggregatum est 7.

Propor.	Log.
1	0
2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
64	6
128	7
256	8
512	9
1024	10

Probatur ex dictis prop. 1. huius.

THEOR. II. PROPOS. XXVII.

Si aliquoties numerus aliquis in se, & in productum multiplicetur, & vltimum productum dimidatur, genitos excedent quoti ipsi solâ vnitate; addito verò primo termino æquabuntur.

PRobatur. Sit 1204. factus ex multiplicatione 2 in se, & in productos successiuè, erunt geniti 9. at si diuidatur successiuè per 2. Quoti erunt ijdem vtique V. g. 512. postea 256. & cæt. vsque ad 2. sed 2. insuper capit in se semel; Ergo Quoti vnica vnitate vices multiplicationum excedent: at si genitis addamus latus, & primam radicem 2. erunt æquales.

Mult.		Quot.
2		1
4	1	2
8	2	3
16	3	4
32	4	5
64	5	6
128	6	7
256	7	8
512	8	9
1024	9	10

THEOR. III. PROPOS. XXIX.

Numeri diuisi per 10. quoties fieri potest, quoti tot erunt numero, quot ipsæ figuræ vna dempta ad dextram.

SIt numerus quilibet 1679087. diuidendus per numerum 10. primus quotus erit 167908. secundus erit 16790. tertius erit 1679. quartus erit 167. quintus erit 16. sextus erit 1. ipsæ verò figuræ vna dempta sex restant.

Probatur. Quia tot erunt decimæ, & decimæ decimarum, & cæt. ex propos. 1. tract. 8. quot sunt loca excepto vltimo loco ad dextram, qui est vnitatum locus: Si ergo quilibet numerus V. g. millio per 10. diuidatur habebimus centesimas millium, vel vnam, vel 2. vel 4. & cæt. vsque ad 9. quæ si diuidentur per 10. vel duas, vel tres vsq; ad 9. dabūt decimas millium, quæ si diuidentur per 10. dabunt vnitates millium, idest decimas centēsimarum, vel 1. vel 2. vel 3. vsque ad nouem; & si rursus diuidantur, exhibebunt decimas decimarum, & tandem vnitatum decimas. Itaque diuisio per 10. reddit eundem numerum ad locum inferiorem proportionē significantē per decimas ab vnitate crescētē: Quare cū vltima figura ad dextram, iam decimas non significet, diuidi nequit: Vnde quotus ex diuisione 10. in vltima figura haberi non poterit: Quadere tot erunt quoti si diuidatur numerus aliquis per 10. quot erunt figuræ vltima dempta.

THEOR. IV. PROPOS. XXX.

Quot sunt notæ in vno quoque factore, tot erunt in facto, & aliquando vna minus.

SInt multiplicatores 234. & 845. qui inuicem se multiplicent, factus erit 197730. nempe totidem figuris, quot sunt in multiplicatoribus vnitates; at 234. multiplicet 145 genitus erit 24930. nempe minutus vnica figura, ex eo numero figurarum, quo vterque multiplicatus, & generans constat. Pro-

* Probatur ex regula multiplicationum tradita prop. 14. & 15. tract. 8. Nam vltima sinistra figura B multiplicás possint numerū productum vnitates significantem tertio loco, vt in A. Vel ergo genitus ex dextro vltimæ figuræ sinistræ B facit 3. aut ad summùm 4. figuras, vt diximus; si tres ACD facit additis duobus locis CD faciūt quinque; si quatuor additis duobus locis CD, sunt sex: Ergo tot figuræ erunt in genito, quot in vtroque generante, vel tantùm minùs vna.

	234
B	145
	1170
	936
ACD	234
	0

THEOR. V. PROPOS. XXXI.

Si series aliqua producatur numerorum duorum ab vnitate continuè proportionalium donec logarithmum vltimus terminus consequatur, qui ab vtriusque logarithmorum multiplicatione gignitur; Is terminus erit, tum vnius, tum alterius datorum ab vnitate continuè proportionalium terminus.

D	A	B	C	K
0	1	0	0	0
	2	1		3
	4	2		6
	D 8	3	1	9
	16	4		12
1	E 32	5		15
	L 64	6	2	18
	128	7		21
	256	8		24
	512	9	3	27
2	1024	10		30
	2048	11		33
	4096	12	4	36
	8192	13		39
	16384	14		42
P 3	32768	15	5	45

Sit series numerorum A in qua dati sint duo numeri 8. & 32. quorum logarithmi 3. & 5. multiplicentur inuicem, & fiant 15. producatur verò series vsq; ad 15. terminos ab vnitate.

Dico, quod vltimus terminus 32768. est terminus communis proportionalium datorum numerorū si ab vnitate excrescant. V. g. si statuatur primus D 8 ab vnitate, & ratio 1. ad 8. in seriem cōtinuetur terminus erit prædictus 32768. & si statuatur qnoque primus terminus ab vnitate E 32. & secundùm eam proportionem, quam possidet 1. ad 32. series continuetur, illius seriei quoque terminus erit prædictus 32768. cuius logarithmus 15.

* Probatur. Inter D, & vnitates tres mediant proportionales: Ergo, si 1. ponatur ad 8. ita 8. ad aliud L 64. inter 8. & 64. tres proportionales interserentur ex prop. 9. lib. 8. & sic de alijs. Ergo si proportio quinquies repetatur, & producatur vltimus terminus erūt hunc inter vltimū, & vnitatem 15. termini virtualiter interpositi, idest poterunt interponi, & numeris exarari eiusdem proportionis, quæ est 1. ad 2. cùm proportio 1. ad 8. quæ quinquies repetitur, sit proportio 1. ad 2. ter repetita; Ergo vltimus terminus erit idem, ac prædictus 32768. siquidē est iste decimus quintus terminus progressionis proportionis 1. ad 2.

Rursus sit alter terminus primus ab vnitate E 32. & fiat, vt 1. ad 32. ita 32. ad aliud P. & proportio producatur, & extendatur in seriem, quia ergò inter 1. & 32. quinque termini mediant, etiam inter 32. & tertium P quinque termini interponentur, si ergo fiant ex istis tres termini virtualiter erunt 15. quia inter 1, & 32. est proportio 1. ad 2. quinquies repetita; vnde inter vnitatem, & tertium terminum inuentum erit proportio 1. ad 2. quindecies repetita: sed etiam 32768. habet proportionem 1. ad 2. quindecies repetitam, ergò iste erit tertius terminus proportionis 1. ad 32. sed etiam erat quintus terminus proportionis 1. ad 8. ergo est terminus communis harum proportionum.

COROLLARIVM.

Hinc enascitur, quòd duorum numerorum in aliqua serie eiusdem proportionis, sed tamen diuersimodè repetitæ existentium; enascitur inquam, quod quotorum numerus reciprocè sit proportionalis numero logarithmorum; ita numerus E 32. quoti, quibus diuidit 32786. sunt 3. logarithmi verò 5. at numeri D logarithmus est 3. numerus verò quotorum; quibus diuidit eundem numerum 32786. est 5. Quare in numero E 32. vt est quotorum numerus ad logarithmorum numerum, idest vt 3. ad 5. sic in numero D 8. est logarithmorum numerus ad quotos; nempe vt 3. ad 5. quod si adhibeas alios logarithmos vt K, idem erit nempe, vt 9. ad 15. idest vt 3. ad 5.

PROBL. I. PROPOS. XXXII.

Datis duobus numeris in eadem continuè proportionalium serie positis vnà cum logarithmo naturali vnius, exquirere logarithmum naturalem alterius.

Vocamus logarithmos naturales, qui naturali augmento per vnitates propagantur, vt o. 1. 2. 3. 4. 5. 6. & cæt.

Sint itaque in præcedenti serie dati duo numeri V. g. 8. & 32. detur que huius logarithmus 5. sitq; exquirendus logarithmus numeri 8. fiat per multiplicationem numeri 8. in se, & in productum toties aliquis numerus, donec genitī in numero æquent logarithmum 5. & sint 5. Sitque vltimus productus 32768. ex prop. præc. hic numerus erit æqualis numero illi, qui fieret ex multiplicatione 32. in se, & in factos, qui tot erunt, quot logarithmi naturales numero 8. ascribendi; quia ita est est Coroll. numerus quotorum termini 32. quibus diuidit vltimum genitum ad logarithmos naturales suos, vt logarithmi numeri 8. ad quotos suos, quibus eūdem vltimum genitum diuidit. Si ergo reperiamus quotos, quibus 32. diuidit vltimum terminū suum 32768. qui erunt tres habebimus quoque logarithmum ipsius 8. nempe 3, qui debet ascribi in serie prima in qua etiam est logarithmus exhibitus numeri 32. quæ est præced. propositionis series.

1	0	1	0
32	1	8	1
		64	2
1024	2	512	3
		4096	4
32768	3	32768	5

PROBL.

PROBL. II. PROPOS. XXXIII.

Datis duobus numeris, quibuſcumque, & alterius logarithmo ad libitum ei applicato alterius logarithmum exquirere.

SInt numeri dati 2. & 10. & huius logarithmus ſtatuatur 100. quæraturq; logarithmus ipſius 2. Primus 2 itaq; ſe ipſum multiplicet, & genitū ſucceſſiuè, vt multiplicationum numerus deficiat ſolùm vnica vnitate à dato ſecundi 10. logarithmo, qui logarithmus eſt 100. ideo ſint 99. ſe cum ipſo ſint 100. Diuidaturq; rurſus quoties fieri poteſt, & ex propoſ. 28. quoti erunt 100. quia numerus in ſe ipſum ductus, ſi rurſus diuidatur faciet numerum quotorum æqualem numero genitorum & vnum quotum ſupra adiunget, vel æqualem genitis addito primo generante. Numerus itaque vltimo genitus, cuius quoti ęquāt logarithmū 100. n 10. eſt ille, qui ſi per 10. diuidatur, quoties fieri poteſt, ex præc. quoti eius dabūt logarithmum n. 2.

Sed, quia ille numerus ob maximam ſuam multitudinem haberi laborioſè poteſt. Siquidem creſcit vltra omnem exiſtimationem, poterimus abſque eius cognitionę habere numerum quotorum, quem quærimus, abque eo, quod eum noſcamus, & ſucceſſiuè diuidamus. Nam cùm numerus quotorum, quando diuiſor eſt 10. fit idem, ac figurarum multitudo vnā ſolùm dempta ad dextram ex propoſ. 32. hinc eſt, quòd ſatis erit noſcere figurarum numerum, quæ terminum vltimum ex 100. multiplicationibus numeri 2. genitū componunt, quod ad hoc, vt conſequamur breuiùs, & faciliùs, quam fieri poſſit ſit.

PROBL. III. PROPOS. XXXIV.

Numerum notarum, & figurarum in vnaquaque multiplicatione obtinere, abq; totali omnium figurarum multiplicatione.

FIet id multiplicando ſolùm tres, aut quatuor, aut quinque figuras ad ſiniſtram, quę nec cum toto numero multiplicentur; ſed ſolùm cum duabus, vel tribus V. g. ſit numerus 2345. multiplicandus in ſe ad cognoſcēdum numerum ipſum, vt docuimus tract. 8. propoſ. 17. ita ſtabit multiplicatio.

2345
2345

11725
9380
7035
4690

5499025

Figuræque ſingulæ cum ſingulis numeri diuidendi erunt multiplicatæ.

Sed ad agnoſcendum tantùm loca ſufficeret multiplicare in hoc numero duas extremas figuras, quia ex propoſ. 27. huius, quot ſunt notæ in vno quoque factore, tot erunt notæ, & figuræ in genito aliquando vna dempta. Vnde, vt ſciamus, quando ea demenda eſt, vel addenda vltimæ figurę vel duarū tantùm multiplicatio erit neceſſaria, aut ad ſummū quinq; Siquidē aliç differentię, quæ ex aliarū figurarū verſus dextrā multiplicatione exoriūtur vltimū numerum non augent, cùm ex propoſ. 14. tract. 8. non niſi decimæ poſſint transferri, vel vna, vel duæ vſque ad nouem. Quare oportebit ad ſummum habere cognitionem quinq; vltimorum numerorum ad hoc vt cognoſcamus, an translatio ad ſummam 9. decimarum in magnis ad ſiniſtram numeris vltimam notam poſſit augere; ideoque in prædicto numero ſufficiet multiplicatio numeri ſiniſtri 2. & 3. & quia ex prop. 15. tract. 8. ſcimus numeros harum notarum ad tertium locum, & quartum pertinere, idest ſic, vt vides in exemplo ſtabit multiplicatio.

2345
2345

5900
4690

5380000

Vbi 3. neque per totum numerum, eiuſque omnes notas multiplicauimus, ſed ſolum duas extremas, & licet non præbeant eundem numerum, ſed minorem, præbent tamen eundem numerum notarum, vt priùs, quæ ſunt 7. Et licet in numerorū teſſera, vbi notæ ſignificāt maiores numeros, neque multiplicatio vlla eſſet adhibenda, oportet tamen multiplicare ſaltem duas, vel tres vltimas, vt deinde ſucceſſiuè numerus aliarum figurarum poſſit haberi, quæ continua duplicatione inueniendæ ſunt.

PROBL. III. PROPOS. XXXV.

Notarum numerum multis intermiſſis proportionalibus inuenire.

SIt numerus 2. cuius notæ inueniendæ ſint, quæ in vltimo per centum multiplicationes propagato termino inueniuntur, ſi id fiat continua multiplicatione laborioſa res eſt, quare ita inſtituemus multiplicationem.

Ducatur binarius in ſe, & fiant 4 deinde 4. in ſe, & fiant 16. deinde 16. in ſe, & fiant 256. erunt autem horū logarithmi, ipſius binarij 1. & quia 4. eſt ipſius quadratum ex propoſ. 6. huius, eius logarithmus erit 2. Sic, quia 16. eſt quadratum ipſius 4. eius logarithmus erit duplum ipſius 2. nempe 4. & quia 256. eſt quadratum numeri 16. ideo eius logarithmus erit 8. ſed, ſi volumus peruenire ad 10. multiplicetur primus numerus 4. cum hoc vltimo 256. & producetur numerus 1024. cuius logarithmus naturalis erit aggregatum logarithmi 2. applicati proportionali 4. & logarithmi 8 applicati proportionali 256. Vnde logarithmus erit 10 oſtendens iam virtualiter per has 4. multicationes eſſe completas multiplicationes decem virtualiter, & licet inter 2. & 1024. nō ſint interpoſitæ actu, intermediant, tamen virtualiter, & potuiſſent deſcribi. Sic autem inſtituendus alius ordo; nam numerus 1024. in ſe multiplicatus dabit numerum primum, cuius logarithmus naturalis erit 20. & hic primus in ſe multiplicatus numerum

merum secundum, cuius logarithmus erit 40. & hic secundus in se multiplicatus dabit alium numerum tertium, cuius logarithmus erit 80. & tandem hic cum primo multiplicatus exhibebit numerum, cuius index erit conflatus ex summa logarithmi primo, & tertio applicati, nempe 20. & 80. Vnde erit 100. significabitque vltimum numerum productum continere multiplicationes 100. numeri 2. Veruntamen iuxta præced. prop. non quærimus hic ipsum numerum; sed solum notarum, vnde non erit necesse singulas figuras multiplicare, cum singulis omnibus; sed solùm aliquas ad sinistram.

			Proport.	Logar.	Fig.num.
			1	0	
			2	1	
			4	2	1
			16	4	2
			225	8	3
			1024	10	4
			1048576	20	7
		10	95 11627776	40	13
	12089	2581961463	00000.00000	80	25
1	2676506002	2823000000	00000.00000	100	31

THEOR. VI. PROPOS. XXXVI.

Licet numeri naturali ordine progredientes proportionales continuè non sint, adhuc tamen in aliqua magna serie; vbi differentiæ sint paruæ poterunt proximè, vt continuè proportionales vsurpari.

CErtum est, quod minimi numeri in serie continua proportionalium non sunt, & ideo, quod logarithmi illis applicari nequeũt, ex præass. 3. Expens. 2. huius: at si statuantur, & considerentur in aliqua magna progressione existentes, vt in serie successiua proportionatorum Tabulæ primæ primi ordinis exp. 2. huius, tunc poterunt reperiri proportionales, qui propinquissimi sint numerorum naturalium proportionibus: quia silicet, cùm illæ numerosissimæ progressiones interualla insensibilia respectu totius termini habeant, incidet aliquis proximè V. g. vt numerus naturalis 9. ad 10. sic in præcitata tabula 1. præcit. proportionalis 9043820. ad 10000000. se habent proximè, vt 9. ad 10. spretis diferentijs 43820. sic 8016305. se habet ad 10000000. vt 8. ad 10. & si minores differentiæ essent electæ in maiori numero adhuc proportio V. g. 8016305. ad 10000000. magis accederet ad proportionem 8. ad 10. quia partes adhærentes 16305. minores essent: Quare patet, quòd numeri naturales in aliqua magna serie continua reperiri poterunt, vel ijdem aliqui, vel saltem proximè.

PROBL. VII. PROPOS. XXXVII.

Numerorum ab 1. vsque ad 10. logarithmos reperire.

STatuatur logarithmus numeri 1. zifra, & numeri 10. maximus aliquis numerus sit logarithmus 1.00000. 00000. si isti extremi 1. & 10. in aliqua magna serie numerorum proportionalium intelligantur, & imaginentur descripti, vtpote oportet concipere ob logarithmum maximum denarij, quem elegimus 100000. 00000. Oportebit fateri in illa serie adeò magna reperiri tales proportionales, & insensibili differentia dissideant ab ea proportione; quam habent numeri naturales ad denarium (erit numerus aliquis proportionalis ex prec. qui se habebit proximè saltem, vt 8. ad 10. item alius, qui se habebit, vt 9. ad 10. item, qui se habebit, vt 5. ad 10. parua differentia, & intensibili interueniente. Horum itaque proportionalium perquirendi sunt logarithmi, licet ipsi proportionales, nobis noti non sint.

Quoniam iam nouimus datis duobus numeris, & alterius logarithmo, alterum inuenire, absque alia cognitione proportionalium; cui respondent ipsi logarithmi ex propos. 33. ideo ex eius documentis primo multiplicabimus ipsum numerum in se, & in productum donec geniti habeant illum logarithmum iam cognitum. Verùm, quia illa multiplicatio, quæ esset 100000. 00000 cum ipso primo termino, nempe tot, quot vnitates in logarithmo dato inueniuntur est moraliter impossibilis. Ideo scias, quòd cum continuata diuisio, quoad fieri possit, deinde sit instituenda per denarium, ad reperiendum numerum proportionalium, & denarius ex 29. prop. h. toties diuidat, quot sunt ipsę notę in ipso numero vnâ demptâ; ideo solus numerus notarum nobis est necessarius, numerus inquam notarum, seu figurarum, quę vltimum numerum proportionalem correspondentem logarithmo denarij integrant, & describunt. Id verò consequemur ex propos. 35. huius, & quia qua-

quatuor proportionalibus peruenimus ad denarium logarithmicum, & alijs quatuor ad centenarium;quatuor quoque ad millenarium, & sic consequenter, ideo 41. proportionalibus perueniemus ad logarithmum 100000. 00000. ipso primo numero 2. comprehenso.

Igitur, cum illius vltimi per 33. propos. huius nesciamus quidem numerũ, sed solùm notarũ,quę ipsum conficiunt, quas (si conficias progressionem modo ibi tradito) inuenires esse 30102. 99956. 63. Ideo, si ille vltimus ignotus diuideretur per 10. quoties fieri posset, essent quoti, & proportionales eiusdem numeri, minùs vna cuius notæ, & figuræ sunt, nempe 30102. 99956. 62.

Sed ex propos. 30. ista diuisio per proportionalem datum 10. quæ sit vltimi termini ex 2. toties geniti, donec obtineat eundem logarithmum denario assignatum, ista inquam diuisio per 10. dat logarithmum ipsius numeri dati 2. cuius quęrimus logarithmum; Ergo logarithmus eius erit inuentus 30102. 99956. 62. & sic faciendum ad inueniendum logaritmum numeri 3. & cęterorum simplicium vsque ad 10. relictis tamen, qui duplam, vel triplam proportionem dicunt ad 2. & 3. vt 4. 8. 6. 9. de quibus infra.

Exemplum septenarij.

1	0	
7	1	21
49	2	4
2401	4	4
4764901	8	7
28 2475249	10	9
79792 266 29761 200	20	17
636980 576 09000. &c.	40	34
4053621 559000. &c. vsq; ad 68. n.	80	68
323447650. & cęt. vsque ad 85. notas	100	85

Et sic prosequere vsque ad logarithmum denarij.

Aduerte verò plurimas notas maximè in primis numeris esse multiplicandas, imo omnes in primis vsque saltem ad logarithmum 20. nam error, qui in principio est vnius notæ fit notarum plurimarum; Sic in istis proportionalibus à numero 2. exortis vnitas prætermissa in numero 1023. causabit in notis logarithmicis 1000. defectum vnius vnitatis, qui defectus excrescet in immensum, vnde in principio multa adhibita diligentia agendũ est, vt præcisus notarum numerus possit obtineri.

Tabula falsa:		A
1023	10	4
1046529	20	7
1095223	40	13
1199543	80	25
1255332	100	31
1575870	200	61
2483363	400	121
6167075	800	241
9718508	1000	301

Hac itaque ratione inuenientur numeri 2. 3. 5. 7. logarithmi, quod satis erit ad alios inueniendos, eruntque, vt in sequenti tabella.

Logarithmi numerorum ordine naturali progredientium intermisso 4. 6. 8. & 9. numero.

1	000000. 00000
2	030102. 99957
3	047712. 12547
5	069897. 00043
7	084509. 80400
10	100000. 00000

PROB. VI. PROPOS. XXXVIII.

Numerorum, qui ex datorum simplicium multiplicatione prodeunt, logarithmos inuenire.

INuentis primorum numerorum positorum ab 1. vsque ad 10. logarithmis facile est compositorum logarithmos inuenire ex propos. 25. Nam quia numeri, qui ex multiplicatione duorum numerorum resultat, logarithmus est ille, qui ex eorum logarithmorum additione prouenit; si ergo desideras logarithmum numeri 4. qui resultat ex multiplicatione 2. & 2. adde logarithmum numeri 2. ipsi logarithmo, idest duplica illum, & erit 6020599913. logarithmus numeri 4. Sic si addas logarithmum numeri 2. logarithmo numeri 3. erit numeri 6. logarithmus 7781512504. Ita si cupias logarithmum numeri 8. addes logarithmum numeri 4. numero 2. & erit 9030899870. & tandem duplicando logarithmum numeri 3. habebis logarithmũ numeri 9. qui est 9542425094. & ne dum istos; sed omnium etiã, qui ex multiplicatione horum proueniunt addendo simul multiplicatorum logarithmos, vt numeri 12. 14. 15. 16. 18. 20. & cęt.

PROBL. VII. PROPOS. XXXIX.

Alios numeros quoscumque primos super denarium inuenire.

NOn alio modo inuenientur, quàm eo, quo duenarij, vel ternarij, vel simplicium in compositorum logarithmos inuenimus.

Sit ergo inueniendus logarithmus, vndenarij dato logarithmo denarij. Multiplicetur in se, & in productum ter; & deinde primum productum multiplicetur cum vltimo producto, & fiet ordo, cuius logarithmus est 10. & numeri notarum 11. erunt. Sicque fiat consequenter donec denarij consequaris logarithmum 100000. 00000. & numerum figurarum illius vltimi termini, quem num. fig. diuides continuè per datum numerum denarij, quod fit auferendo vnam tantum vnitatem, & ille erit logarithmus vndenarij, nimirum 1.0413926851.

Et hic habes exemplum, in quo solummodo quatuor notas multiplicauimus sinistras; quamuis quinque, vel sex ad obtinendum numerum notarum, certum, & exactum essent multiplicandæ ad minus in principio.

Numeri multipl.	Logarith.	Num. fig.
1	0	
11	1	2
121	2	3
14641	4	5
214358881	8	9
25937424601	10	11
672727969. & cęt.	20	21
4525521984	40	42
2048015025	80	84
1377730560	100	105
189805729	200	209
360240400	400	415
1297008196	800	834
246170600	1000	1042

Et sic prosequere vsque ad 41. multiplicationes singulis multiplicationibus figurarum numerum apponendo, & suos logarithmos; donec logarith. 100000. 00000. qui est denarij consequaris.

TRACTATVS XXII.

De Interſectionibus Planorum.

LIneas vſque adhuc in plano exiſtentes conſiderauimus: modo eas in corporibus ipſis, tanquam eorum ſectiones animaduertimus vt in ſphæricis Theodoſij, Coniciſque Apollonij concipiendæ ſunt. Vnde in primis ſectiones planorum: quæ lineæ rectæ ſunt in hoc Tractatu oportet ſpeculari; de quibus agit Euclides ad initium 11. Sed eorum animaduerſio nobis hoc loco eſt neceſſaria.

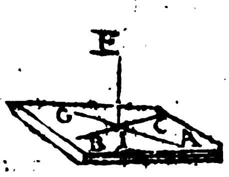
EXPENSIO I.

Principia exhibentur.

QVoſdam ante omnia declarare terminos oportet, vt ritè concipiantur. Vnde ſit.

DEFINITIO I.

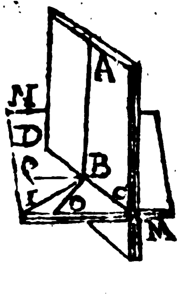
Linea recta plano orthogonalis eſt: cum omnibus lineis eam tangentibus, & in eodem dato plano exiſtentibus perpendicularis eſt.



Sic ſi linea IE cum omnibus AI, & IB, IG, & IC, & cæt. eam tangentibus in I perpendicularis eſt, etiam plano CABG, in quo illæ ductæ ſunt, perpendicularis erit.

DEFINITIO II.

Planum ad planum rectum eſt; cum quælibet linea recta in vno plano exiſtens, & orthogonalis ſectioni, omnibus lineis eam contingentibus, quæ in altero duci poſſunt, perpendicularis eſt.

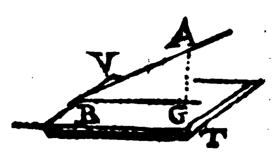


Sic, ſi linea AB perpendicularis ſectioni CD in plano CDA exiſtens ſit perpendicularis lineis CB, IB, & BQ. Planum CDA erit perpendiculare plano MN, in quo illæ ductæ ſunt.

DEFINITIO III.

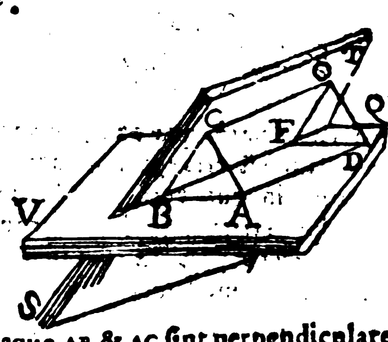
Recta linea ad planum inclinatio eſt angulus acutus, quem illa facit cum rectâ in plano illo exiſtente in perpendicularem illã terminante, quæ ab aliquo ſublimi puncto inclinantis lineæ cadat.

Sic angulus AEG eſt angulus inclinationis lineæ BA ad planum VT, quòd BG angulum claudens nectatur in G, cum perpendiculari GA, quæ ab aliquo ſublimi puncto; nempe ab A lineæ inclinantis BA cadit.



DEFINITIO IV.

Plani ad planum inclinatio eſt angulus acutus rectis contentus, quæ in vtroque plano ad idem ſectionis punctum ductæ, rectos cum ſectione angulos efficiunt.



Si itaque AB, & AC ſint perpendiculares ſectioni BF, & conueniant in punctum B angulus earum ABC dicetur inclinationis angulus planorum VQ & ST.

DEFINITIO V.

Planum ad planum, & linea ad lineam ſimiliter inclinata dicitur, cum prædicti inclinationum anguli ſunt æquales.

EXPENSIO II.

De linearum cum planis habitudine.

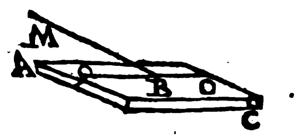
CVm ſectiones planorum ſint rectæ quædam lineæ, operæ pretium videre priùs eſt, quomodo rectæ cum planis ſe gerant, ad hoc, vt deinde meliùs planorum ſectiones cognoſcamus.

 THEOR.

THEOR. I. PROPOS. I.

Recta eiusdem lineæ pars non est in sublimi; altera super planum extensa.

SI plano AC aliquis cogitet ducere lineam, quæ partem extensam habeat in eo, quæ BO; & altera BM eleuetur ab ipso, is fallitur. Nam producta in ipso plano parte BO, versùs Q, duæ rectæ MB, & QB idem haberent segmentum BO, quod absurdum

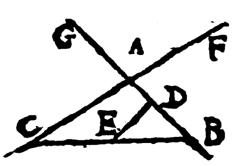


est, & contra pronunciatum 10. lib. 1. elem.

THEOR. II. PROPOS. II.

Si duæ lineæ se mutuò secent, in vno plano sunt, & omne triangulum rectis constitutum in vno plano est.

SIt triangulum ABC quoddam lineis rectis conflatum, & concipiatur, tanquam si nullo plano inhæreret, Dico; *quod si plano superponatur ipsi superextendetur ita*, vt secundùm se totum illi insit, & tangat. Nam si non secundùm se totum tangeret, pars quædam V. g. BDE eleuaretur à plano; Ergo, & lineæ AB rectæ pars AD esset in subiecto plano, pars altera DB ab eo eleuaretur, contra præcedentem propos. & sic dicas de linea BC, quæ parte CE tangeret planum, parte BE in sublime ferretur.



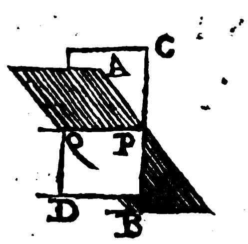
Probatur altera pars, quæ priùs proposita est. Nam in quo plano est triangulum sunt eius latera AB, & AC; in quo verò sunt latera sunt ea quoq; latera ipsa etiam si producantur in F, & G; alioquin lineæ rectæ pars CA esset in plano, pars AF esset in sublimi, quod impossibile est: Quare tota in plano extendentur, quod vult propositio.

THEOR. III. PROPOS. III.

Omnis planorum mutua intersectio linea recta est.

SEcent se mutuò duo plana AB, & CD in PQ. Dico *hanc sectionem* PQ *esse lineam rectam*.

Quòd si recta non credatur erit curua: quia verò sectio à superficie amborum planorum secantium suboritur, hæc curuitas orietur à plano AB, vel à plano CD, & sic alterũ eorum curuum erit, vel ab vtroque, & sic ambo curua erunt. Nam curua erit ea superficies, in quo vndiq; recta extendi nequit. In situ verò sectionis duo

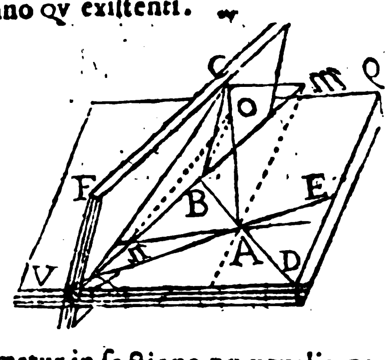


puncta necti possunt recta PQ, quæ non tangeret superficies illas, cum in loco sectionis curuentur cum ipsa sectione in eis existente, vt aduersarij volunt.

THEOR. IV. PROP. IV.

* *Si recta perpendicularis alteri lateri anguli inclinationis alicuius plani substernatur ea erit perpendicularis illi lineæ, & alteri, cuicumque in eodem plano existenti.*

SIt angulus inclinationis CBA, & illi substernatur AC perpendicularis lateri AB; Dico, & hanc esse perpendicularem lineę cuicumque in eodem plano QV existenti.



Assumatur in sectione BX æqualis CA, & ducatur AX ad sectionem, & CX.

Probatur itaq; primò AC etiam esse perpendicularem lineæ AX. Nam angulus CBX, vtpote sectionis rectus est definit. 4. sicut, & BAC angulus ex hypothesi; latus verò AC est æquale ex constructione cruri BX, at crus AB est commune; ergo duo triangula ABC, & ABX erunt æqualia. Vnde, & bases AX, & BC erunt æquales ex 22. primi Elem. Et ideo duo alia triangula ACX, & BCX erunt quoque æqualia; Habent enim ex præced. argumento crura AX, & CB æqualia; crura verò AC, & BX ex Hypothesi sunt æqualia; basis vero CX communis; vnde ex 23. primi Element. anguli CAX, & XBC erunt æquales; sed angulus XBC rectus est, vtpote sectionis BX cum linea inclinationis BC ex definit. Ergo angulus quoque XAC rectus erit.

Probatur autem etiam de lineis quibuscumque. Nam certum est primo esse quoque perpendicularem lineis AD, & AB productis; cum enim XAC angulus sit rectus, ex 10. primi, etiam BAC rectus erit; & eadem ratione cum BAC sit rectus, etiã CAD rectus erit: Idẽ quoq; argumẽtũ poterit fieri de triãgulo AMC; si fiat, vt superiùs BM ęquale crus perpendiculari AC, & deinde eodem modo probando MAC triangulum esse æquale triangulo BMC, & ideo, quòd angulus MAC sit rectus, vt est MBC.

At si manentibus ijsdem omnibus angulus inclinationis plani intelligatur deprimi, vel ipsum planum, & secare eandem perpendicularem in O; si lineæ AO fiat æqualis BN, & ducatur AN, idem argumentum valebit. Nam adhuc rectangula triangula ABN, & ABO erunt æqualia ob idem latus AB, & duo æqualia crura AO, & BN: Propterea triangula quoque OBN, & AON erunt æqualia. Namq; ob basim communem ON, crus AN cruri BO ostensum æquale, & crus AO, & BN ex hypothesi æquale, æqualia quoque erunt triangula OBN, & AON. Vnde cum NBO sit rectus angulus, etiam NAO erit angulus rectus, & sic poterit ostendi de qualibet aliã lineã.

CO-

COROLLARIVM.

HInc elici potest: Quod, si linea aliqua recta sit perpendicularis duabus rectis angulum facientibus in aliquo plano, vt AC lineis BA, & AX hęc eidē plano sit perpendicularis; siquidē ostensum est, talē esse omnibus alijs lineis in eo plano existentibus, & eam in A contingentibus. Vnde ex defin. 1. plano quoque VQ erit perpendicularis.

COROLLARIVM II.

DEducitur quoq; eadem ratione lineā CA lateri BA anguli inclinationis perpendicularem, etiam esse perpendicularem plano, in quo latus, triangulumque ABC, perpendiculariter inexistit, & extenditur. Planumque trianguli CAB inclinationis esse quoque plano FB, & QV vtrique perpendiculare.

COROLLARIVM III.

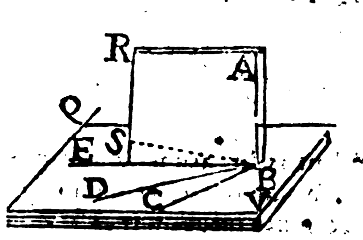
LIneam in plano inclinato, plano, cui incinat parallelam, esse quoque parallelam sectioni eorundē planorū colligo si V. g. linea CF sit plano QV parallela; esse quoque parallelam ipsi sectioni MX. Ratio est, quia illa CF erit rectangula perpendiculari CA, & plano trianguli CAB: Ergo etiam lineæ CB, & ideo æquidistans lineæ BX; quę eidem CB est perpendicularis.

THEOR. X. PROPOS. V.

Si linea recta tribus rectis se mutuò tangentibus perpendicularis sit, illæ tres rectæ in eodem plano erunt.

SIt linea AB perpendicularis tribus BC, & BD, & BE. Dico eas esse in eodem plano VQ.

Probatur. Nam, si aliqua ex ipsis non esset V. g. BE; sed eleuaretur à plano, vt est punctata BS: ducatur per AB, & punctatā BS planum BR (quod potest esse ex prop. 2. cum productæ se secent in B) quod secabit planum VQ infra punctatam, quæ ab aduersarijs asseritur ab illo plano VQ eleuata; & sectio erit BE; cui BA erit perpendicularis; cum duabus BC, & BD perpendicularis ponatur, & ideo ex Coroll. 1. anteced. propos. etiam plano per eas ducto VQ, & consequenter ex defin. 1. etiam lineæ BE. Quare esset angulus quoque ABE rectus, vt est angulus ABS ex hypothesi; & ideo pars anguli ABS esset æqualis toti ABE; quod est absurdum.



THEOR. VI. PROPOS. VI.

Si duæ lineæ ab eodem puncto sectionis incipiant, in perpendicularemque plano terminent; si vna erit orthogonalis sectioni, & altera talis erit.

SIt AB in eadem figura propos. 4. perpendicularis sectioni BX in plano QV, & à puncto B sectionis BX in ipsam terminent duæ rectæ; nimirum AB in A, & BC in C. Dico, quòd, si vna V. g. AB erit perpendicularis sectioni BX, etiam altera CB eidem sectioni BX orthogonalis sit.

Assumatur itaque in sectione portio BX æqualis perpendiculari AC, & ducatur à puncto C recta CX, & à puncto A recta AX, quo facto, sic.

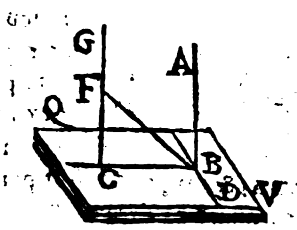
Probatur. Et progressu 1. Triangulum ABC est æquale triangulo ABX: Nam angulus ad A rectus est ob perpendicularem, & angulus ad B ex Hypothesi, crus AB commune; crus verò AC ex constructione æquale cruri BX. Vnde ex 4. primi Element erunt æqualia hæc triangula ABC, & ABX, & basis quoque AX erit æqualis basi CB.

Progress. 2. Hinc autem rursus arguitur triangula CBX, & CAX esse æqualia: Nam basis AX est communis, BC crus in primo progressu cruri AX ostensum est æquale, crus verò AC ex constructione cruri BX. Vnde cum omnia latera; quodlibet suo correspondenti, sint æqualia; triangula ipsa CAX, & CBX erunt æqualia: quare habebunt quoque angulos æquales; sed angulus CAX ob perpendicularem rectus est: ergo, & angulus CBX; quare recta quoque CB incidit in sectionem XB orthogonaliter.

THEOR. VII. PROP. VII.

Si duæ rectæ lineæ eidem plano perpendiculares sint, Parallelæ erunt illæ rectæ lineæ.

SInt duæ rectæ lineæ AB, & CG eidem plano QV perpendiculares. Dico eas esse quoque parallelas. Puncta B, & C connectantur, cui fiat perpendicularis alicuius plani sectio DB; hæc etiam erit perpendicularis lineæ ductæ BF à puncto B ad perpendicularem DC ex præc. hinc autem

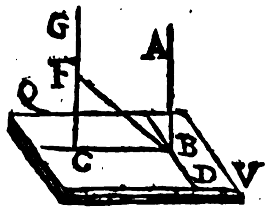


Probatur propos. Linea DB est perpendicularis tribus AB, & BF, & BC; ergo tres istæ ex propos. 5. sunt in eodē plano; sed etiam ex pr. 2. in eodem est GC, in quo reperitur BC, & BF: Ergo omnes quatuor sunt in eodem plano: Sed anguli ABC, & BCG ex def. perpendicularium sunt recti. Ergo ex 28. primi duæ AB, & CG sunt parallelæ, cum faciant ipsi BC angulos rectos, & in eodemq; plano existere sit ostensum.

THEOR. VIII. PROP. VIII.

Si duæ parallelæ rectæ lineæ insistunt eidem plano, quarum vna sit perpendicularis, altera quoque talis erit.

SInt rectæ BA, & GC parallelæ ex def. parallelarum erunt in eodem plano extensæ si sit vna normalis V. g. GC. Dico itaque, quòd etiam BA talis erit. Connectatur B, C linea BC, cui fiat perpendicularis DB; ducaturque BF, & BF ex præc. B erit etiam rectangula lineæ DB.

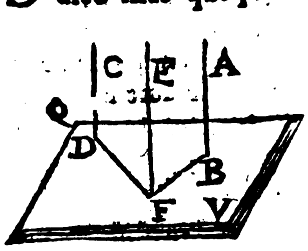


Vnde Probatur linea DB est ad angulos rectos lineis BC, & FB, quæ ex 2. huius sunt in eodem plano; ac linea CG; at hæc est in eodem plano ob parallelismum præsuppositum, ac linea AB: Ergo linea AB est in eodem plano, ac duæ BF, & BC; sed linea DB est perpendicularis duabus FB, & BC angulum in B facientibus. Ergo, & plano, in quo sunt ex Coroll. 1. prop. 4. huius: Ergo ex defin. etiam lineæ BA, cui etiam ad angulos rectos est BC, siquidem GCB est angulus rectus, quòd GC sit perpendicularis, quare ex 32. primi etiam ABC erit angulus rectus: Cum ergo linea BA insistat duabus DB, & BC ad angulos rectos erit quoque ad angulos rectos toti plano QV ex propos. 4. huius, Coroll. 1.

THEOR. IX. PROPOS. IX.

Quæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, licet non in eodem cum illâ plano, etiam inter se sunt parallelæ.

SInt duæ AB, & CD eidem lineæ FE parallelæ, dico illas quoque inuicem esse parallelas.

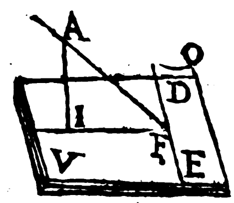


Nam ducantur à puncto F duæ perpendiculares FD, & FB ipsi EF ad lineas CD, & BA hæ perpendiculares erunt in eodem plano VQ ex Coroll. 1. propos. 4. h. Quare ex propos. præced, eidem erunt perpendiculares BA, & CD, quod sint parallelæ perpendiculari FE: quare ex propos. 7. inuicem quoque erunt parallelæ.

PROBL. I. PROP. X.

A dato puncto in sublimi ad subiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

DVcatur AF à puncto dato A in subiectum planum, vtcumque, & per F ducatur ED ipsi AF perpendicularis, & huic à puncto F ducatur perpendicularis FI ex 8. primi, cui ducatur perpendicularis AI ex 9. propos. 1. à puncto A. Dico hanc esse perpendicularem plano QV.



Probatur. Nam AFI est angulus inclinationis planorum, in quibus sint, hinc crus AF, inde FI, & DE erit linea sectionis. Quòd AF, & FI perpendiculares ipsi sint: quare ex Coroll. 2. propos. 4. erit quoque perpendicularis ipsi plano; cùm ducta sit perpendicularis lineæ FI.

PROBL. II. PROPOS. XI.

A dato puncto in plano ad idem planum rectam excitare perpendicularem.

FIat angulus inclinationis in præced fig. plani AFI ducto priùs à puncto I crure FI: deinde el ducta sectione perpendiculari ED, cui excitetur à puncto F perpendicularis FA, ex 8. primi, eruntq; FA, & FI in eodem plano: In hoc igitur plano ducatur ab I perpendicularis IA, & hanc dico esse quoque perpedicularem plano QV.

Probatur. Quia est perpedicularis FI cruri anguli inclinationis AFI: vnde ex Coroll. 2. prop. 4. erit etiam perpendicularis plano QV.

EXPENSIO II.

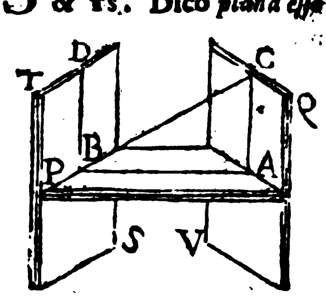
De Planorum interse&tionibus.

VIsis correspondentijs linearum non in eodem plano existentium restat, vt modo ipsa planorum intersectiones intueamur.

THEOR. I. PROPOS. XII.

Quæ plana eandem rectam perpendicularem habent, illa parallela erunt.

SIt linea AB perpendicularis vtrique plano QV. & TS. Dico plana esse parallelas, idest in infinitum producta nusquam se secare.



Nam si dicatur inclinare inuicem, ad eam partem, in qua inclinant, ducatur in plano vtrolibet V. g. ST recta BD à puncto verò B ipsi BD ducatur normalis BP, & huic

BP

BP normalis BC, & tandem connectatur AC. Istæ AC, & BD lineæ etiam rectæ AB erunt normales ex 7. huius. Sed sunt in eodem plano. Ergo etiã erunt parallelæ.

Quod verò sint in eodem plano ostenditur, nam linea AC ex propos. 2. est in eodem plano, ac triangulum ACB: Tres verò AB, & BC, & BD sunt in eodem plano ex propos. 5. quòd sint lineæ BP perpendiculares: Vnde, & AC, & BD in eodem plano erunt, quare

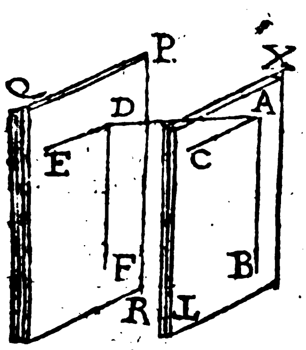
Probatur propos. AC, & BD sunt parallelæ in eodem plano, ergo nunquam conuenient, quare nec plana QV, & TS; in quibus sunt.

THEOR. II. PROPOS. XIII.

Si duæ rectæ se mutuò tangentes ad duas se mutuò tangentes sint parallelæ, & non in eodem plano; plana etiam in quibus sunt, erunt parallela.

SInt duæ AB, & PL parallelæ, quæ tangant duas AC, & PQ parallelas item inuicem: dico *plana, in quibus sunt* QR, *&* XL *esse parallela*. Quod, vt ostendatur; ducatur AD, plano XL perpendicularis, quæ inpingat in planum RQ; vel enim cadet in P, vel extra, vt in D. A puncto D ducatur parallela DF ipsi RP. & ab eodem puncto D alia parallela DE lineæ PQ, quo facto sic.

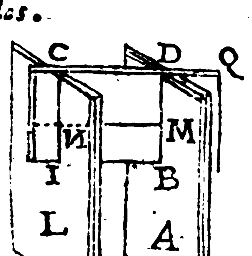
Stat demonstratio, quoniam DF lineæ PL ex constructione, & eidem ex hypothesi est parallela BA, erunt duæ AB, & DF inuicem parallelę; sic quia DE ex constructione est parallela lineæ PQ, cui ex hyp. AC parallela est ex 9. h. inuicem quoq; AC, & DE parallelæ erunt: Quoniam itaq; BAD, & CAD rectus est, erit etiam rectus ex prop. 19. primi angulus ADF, & ADE: Quare AD plano PQ ex Coroll. propos. 4. huius erit perpendicularis: Vnde ex anteced. plana erunt inuicem parallela.



THEOR. III. PROPOS. XIV.

Si duo plana parallela plano quopiam secentur, communes illorum sectiones sunt parallelæ.

SInt duo plana parallela A, & L, quæ plano QI secentur. Dico *sectiones* BD, *&* CI *esse parallelas*.

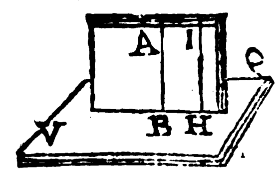


Ducatur enim sectioni BD perpendicularis MN in plano QI, incidet in sectionem plani QI; quæ est CI, si opus sit, producti, vel ergo MNC erit angulus rectus, & sic DB, & CI erunt parallelę, vel minor recto, & sic planum LC ad partes C alteri plano BA vicinius erit; ergo non parallelum contra hypothesim, vel maior recto, & sic MNI erit acutus angulus. Vnde contra rursus hypothesim ad partes L planum LD alteri AB magis appropinquabit: Quare necessariò MNC rectus angulus erit. Vnde cum alterni anguli BMN, & MNC sint æquales ex 28. primi erunt parallelæ BD, & CI.

THEOR. IV. PROPOS. XV.

Si recta linea plano cuipiam ad rectos sit angulos, & omniaque per ipsam plana ad rectos angulos erunt eidem plano.

SIt recta AB plano cuipiam QV orthogonalis. Dico, *quòd omnia plana, quæ per ipsam ducuntur eidem plano ad rectos angulos sint.* Ducatur itaq; per ipsam planum HIBA, & in ipso parallela HI, vel alia quælibet parallela.



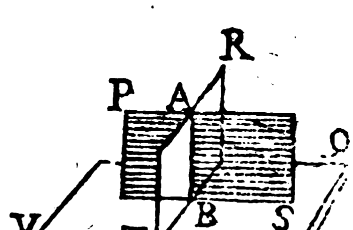
Probatur. Quia HI est in eodem plano, & parallela AB erit quoque plano QV perpendicularis ex 8. huius, & sic de quacunque alia: quare planum AIBH plano QV erit orthogonale. Quod si ducas per AB, aliud quodcumque planum eadem demonstratio erit.

THEOR. V. PROPOS. XVI.

Si duo plana se mutuò secantia plano cuidam ad rectos sint angulos, communis etiam illorum sectio ad rectos angulos erit eidem plano.

SInt in plano QV duo plana SP, & RT ad angulos rectos; quę se secent in AB. Dico *sectionem* AB *plano* QV *perpendicularem esse.*

Probatur. Nam SB, & BT sectionibus perpendicularis est BA. Ergo ex Coroll. propos. 4. perpendicularis est ad planum QV. Quòd sit perpẽdicularis duabus SB, & BT: sic ostenditur. Nam planum RT rectum est ad planum QV. Ergo omnis eius vbique superficies talis erit: Ergo talis erit in sectione BA, quare eius sectio BA, nec inclinabit versus S; neque ad alteram partem, sed rectangula super SB consistet.

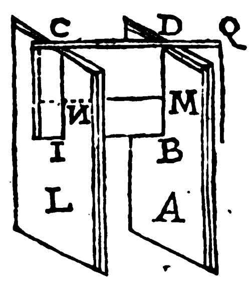


Quod autem talis sit respectu BT etiam ostenditur eodem modo, quia planum SP rectum est: ergo eius sectio non inclinabit versus T, sed recta super BT consistet.

THEOR. VI. PROP. XVII.

Duo plana ad idem planum recta, in quo faciant communes sectiones parallelas parallela sunt.

Sint plana in schemate propos. 14. AB, & LC recta ad planum QI, & sectiones DB, & CI parallelæ. Dico *plana quoque esse parallela*.



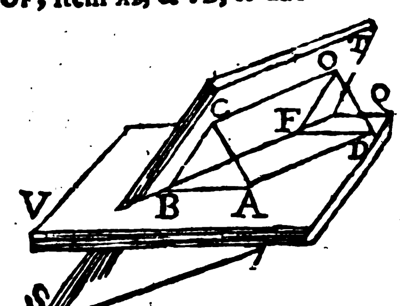
In plano enim QI ducatur MN perpendicularis ad DB, quæ quoque erit recta ad planum AB, ex def. 2. huius, & eadem erit perpendicularis ad IC; & ideo ex eadem defin. ad planum alterum LD recta erit: Cum ergo NM ad vtrumque planum recta sit ex propos. 12. plana ipsa parallela erunt.

THEOR. VII. PROPOS. XVIII.

Planum ad planum inclinans eundem angulum secundum omnem suam superficiem cùm alterius superficie facit.

Sit planum TS, quòd inclinet ad aliud planum QV. Dico, *quòd eius superficies cum alterius superficie vbique eundem angulum facit*.

Sit itaque angulus aliquis inclinationis ficubi ABC, & alter ad quamcumque elegeris partem DFO. ostendendum est hos angulos esse æquales: Summatur igitur partes equales de cruribus angulorũ BC, & OF, item AB, & FD, & ducantur DA, OC.

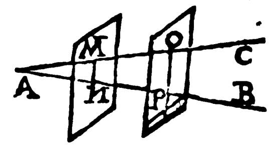


Probatur. Rectæ OF, & CB sunt perpendiculares sectioni ex def. 3. Ergo inuicem parallelæ erunt; sed sunt etiam equales: Ergo ex 33. primi rectæ quoque OC, & FB parallelæ sunt, & æquales. Idem argumentum conficias de lineis DF, & AB; quia enim sunt perpendiculares sectioni ex defin. 4. ideo sunt parallelę, & æquales sunt ex constructione; vnde fit, quòd DA, & FB parallelæ sint, & ęquales. Et ideo ex propos. 9. huius; quòd OC, & AD sint quoque inuicem parallelæ, & hinc ex prop. 33. primi; quòd DO, & AC parallelæ quoque sint, & æquales; cum ergo triangula DOF, & ACB sint æquicrura erunt, & ęquiangula: Vnde angulus ABC erit æqualis angulo DFO: & ita probabitur de quocumque alio angulo: vnde vbiq; superficies TS faciet eundem angulum cum superficie QV.

THEOR. VIII. PROPOS. XIX.

Si duæ rectæ lineæ parallelis planis secentur, in easdem rationes secabuntur.

Sit linea AB, & AC; quę vel conuenient in A, vel producantur donec conueniant, siquidem si non conueniant erunt parallelę, vnde in partes ęquales secarentur.

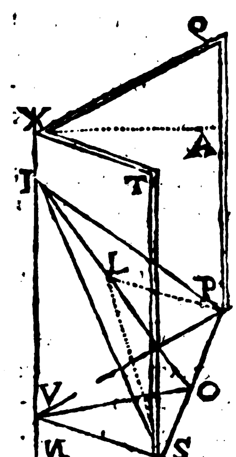


Istę ex prop. 2. erunt in eodem plano; quare si planis parallelis secentur sectiones MN, & OP erunt parallelę, ex prop. 14. quare ex 2. sexti erunt, vt AM ad MO ita AN ad NP.

THEOR. IX. PROPOS. XX.

Omnis angulus super eandem basim est minor in plano obliquiùs secante, quàm in minus obliquo; anguli verò reliqui maiores.

Sint duo plana QV, TV, quę faciant angulum quemcumque SVP in plano PVS sectionis VX. Dico, quòd, si aliud planũ PIS obliquiùs secet, plana inclinantia QV, & TV illud secando facient suis sectionibus PI, & SI angulum PIS acutiorem, & minorem; quam PVS; quòd vt probetur, ducatur OV, & OI perpendiculares basi PS; eritque maior OI basis subtensa angulo obtuso, vel recto, qualis est ex hypothesi OVI cum OVN sit acutus, vel rectus, quam crus OV; ideoque sumatur OL ęqualis OV, in perpendiculari OI coniungaturque PL, & LS; eritque triangulum PLS ęquale triangulo PSV, vt 17. lib. I. Elem. Vnde probatur propos. ex 21. propos. lib. I. elem. Quia ab extremis P, & S duę PL, & LS lineę interiùs constitutę sunt, nempe intra triangulum PIS; Ergo maiorem angulum PLS continebunt, licet ipsę longitudine minores sint: quare erit maior angulus PVS ęqualis angulo PLS, quàm angulus PIS.



Probatur quoque 2. pars; quia cuiusque trianguli anguli sunt ęquales duobus rectis; quare si angulus I sit acutus angulus P obtusus erit, vel maior in triangulo PIO, quam LPO, vel VPO.

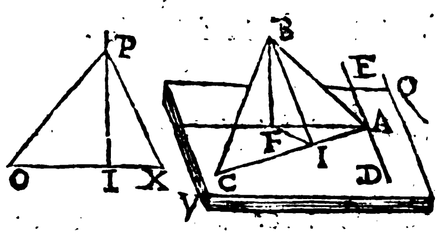
PROBL. III. PROPOS. XXI.

Crus non perpendiculare plano trianguli eidem plano non perpendicularis, & in data sectione positi, ita constituere, vt in eodem plano alicui sectioni, vel lineæ existenti, perpendiculare sit.

Sit crus AB trianguli ABC collocandum in plano QV tali modo; vt non existens, nec ipsum crus,

crus, nec planum, in quo est perpendiculare triangulo; cum sectione tamen, seu recta DE sit ad angulos rectos.

Trahatur AF in plano QV perpendicularis sectioni DE. Deinde basi XO deducatur perpendicularis à vertice P, & cadat in I; sumptâ ergo distantiâ XI, transferatur super planum in AIC linea, super quam triangulum debet collocari, & ex puncto I educatur linea eidem sectioni AC perpendicularis, quæ sit IF, & ab F vbi secat AF educatur



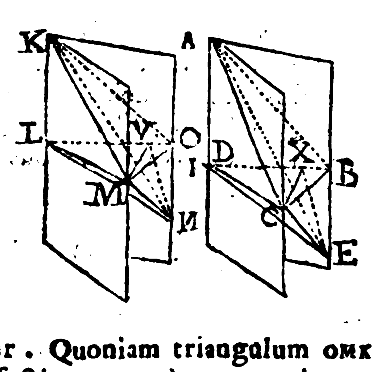
perpendicularis ad planum, quæ sit BF; sumpto tandem interuallo IP posito circini pede in I signetur portione circuli perpendicularis FB; & à puncto B ad I recta ducatur BI, & altera AB: deinde ad interuallum XO signetur AC, & ducatur BC. Dico *triangulum esse collocatum tali modo, vt crus AB sit perpendiculare sectioni DE.*

Probatur. Nam crus IB est æquale cruri PI; sic AI cruri XI; angulus verò AIB, vt ex propos. 6. huius, est rectus, vt est angulus XIP. Ergo ex 22. primi, basis quoque AB æqualis basi XP; sed hæc est ex 9. huius propos. recta sectioni DE. Ergo fecimus propositum.

THEOR. XII. PROPOS. XXII.

Si duo triangula æqualia inter duo plana intercipiantur rectangulè, quò magis ad sectionem planorum alter accedit, eò angulum planorum facit altero maiorem. Et quo minùs obliquè incidit, eò eundem angulum facit maiorem.

Sint duo triangula BCA, & OMK equalia tum angulis tũ lateribus, & duobus planis singula includantur ad angulos æquales A, & K, que tangant sectiones AD, & KL planorum intercipientium. Sintque latera BC, & OM, ad ipsa latera NO, & BE recta. Et triangulum OMK ad sectionem LK magis accedat sua basi OM, quam triangulum BCA dico angulum planorum OLM esse maiorem angulo planorum BDC.



Probatur. Quoniam triangulum OMK magis accedit ad sectionem, quàm triangulum BCA, ductis perpendicularibus ad sectionem LK, quæ sint OL, & ML; nec non, & ad sectionem AD ductis perpendicularibus BD, & DC, erunt triangula BCD, & OLM inclinationis planorum, latusque OL ex hypothesi maioris inclinationis erit minus, quam BD, & ML minus, quàm CD super æqualem OM, & BC, basim, seu eadem, si mente superponantur super eandem basim; quare ex prop. 21. l. 1. El. maior erit angulus OLM, quàm BDC.

Sit triangulum æquicrurum EAC magis obliquum, quam triangulum NMK, ducantur XC, & MV perpendiculares plano OK, & BA, quę omnibus lineis ex def. 1. h. in eo plano existentibus erunt perpendiculares, & consequenter CX, erit normalis lineis XD, & EX, & MV lineæ VL, & VN; Vnde anguli apud V, & X erũt recti, eũmq; bases EC, & NM sint æquales ex Thesi circuli illis basibus EC, & NM pro diametro inseruientibus erunt æquales, & quia sunt rectãgula transibunt per NVM, & per EXC puncta ex 28. l. 3. Et quia maior ponitur inclinatio plani ECA, quã NKM erit ãgulus XEC minor, quam VNM; quare arcus quoque, qui pertingeret ab X vsque ad C minor, quam arcus pertingens ab V vsque ad M ex 36. lib. 6. ideoque subtensa minor XC arcui minori erit minor, quàm VM. Crus verò CD ostensum est maius, quam ML, & consequenter eius quadratum erit maius; si ergo auferatur quadratum CX minus, quam MV quadratum: Ablatum hoc CX quadratum à maiori quadrato CD relinquet residuum maius, quam MV quadratum sublatum à quadrato ML minori: Quaderè XD quadratum; quod ex 11. lib. 2. Elem, est æquale illi residuo erit maius, quàm quadratum residuum VL: Vnde erit maius XD latus, quam VL. Cum itaque XD, & CD latera sint maiora, quam VL, & ML, dicent maiorem proportionem ad VM, quam VL, & ML: quare multò maiorem, quam ML & LV dicent ad XC basim minorem: Ideoque ex propos. 6. Tract. 19. minor erit angulus XDC angulo VML.

COROLLARIVM.

Hinc facilè argumentaberis, quod si angulus VLM sit maior angulo XDC, & planũ NML æqualẽ inclinationẽ, vel obliquitatẽ consequatur, ac planum EDC, quod erit maior angulus quoque NLM, quam ECD. Ratio est, quia cum ponatur VMN æqualis angulo ECX, & anguli apud X, & V sint recti, erunt æquiangula triangula, & quia ponitur VM maius, quàm XC, vtpote sinus perpendicularis anguli maioris existentibus equalibus ML, & CD tanquàm radijs circulorum, qui ducerentur centro L, & D. Ideo erit quoque NM basis maior, quam EC, cum ergo crura NL, & ED ponantur æqualia sicut, & ML, & CD patet ex 26. lib. 1. angulum MLN esse maiorem angulo EDC.

Aduerte autem, quod etiam si imagineris crus ML commune triangulis OLM, & NLM disiunctum, & depressius nihil interest; valet .n. eadem prop. eo quòd semper posset fieri angulus OLM immediatus; si placeret, ita vt in latere ML communicaret.

TRACTATVS XXIII.

SPHAERICORVM PARS PRIMA.

De Sphæra contactibus, & sectionibus in genere.

SPhæricorum Tractatus ferè absolutè est necessarius ad triangula sphærica sine errore soluenda: Vnde antequam ad eorum notitiam trànsferamus animum, quæ magis necessaria sunt breui sphæricorum compendio complecti opus fuit.

EXPENSIO I.

De principiis.

QVædam principia huic tractatui deseruientia primò proponenda sunt, & præcipuè definitiones eorum, quæ in superficie spęræ puncta imprimi, & circuli describi possunt.

DEFINITIO I.

Sphæra est figura solida vna superficie comprehensa circulis æqualibus vbique circumscriptibilis, ad cuius extimam superficiem à puncto medio lineæ terminantes, æquales sunt.

DEFINITIO II.

Centrum verò sphæræ est prædictum punctum.

DEFIITNIO III.

Axis sphæræ est recta quædam, quæ per centrum transit, & in superficiem sphæræ terminat.

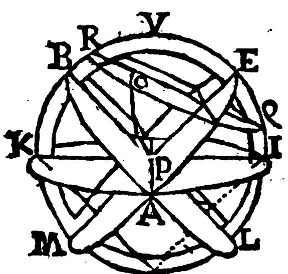
DEFINITIO IV.

Poli sunt extrema puncta ipsius axis.

DEFINITIO V

Polus circuli est punctum in sphæræ superficie, à quo omnes lineæ ab eo descendentes, & in ipsum circulum terminantes, æquales sunt.

Itaque centrum sphęræ erit P Poli I, K terminantes axem silicet lineam KI, seu veram, seu mente conceptam per P centrum sphęræ transseuntem. Poli verò circuli IAK sunt T, & V, quia omnes lineę, vt IT, & IK terminantes in marginem circuli IAK erunt ęquales;



sphęra verò super axem KI volui imaginatur, si quando in orbem volui concipitur.

DEFINITIO VI.

Circulus maximus ad maximum inclinat cum arcus minor quadrante circuli vtrique perpendicularis eorum inclinationem mensurat.

Minorum verò inclinatio est angulus acutus inclinationis ipsorum planorum.

DEFINITIO VII.

Similiter verò, & æquè inclinant circuli, cum arcus angulum inclinationis mensurantes fuerint æquales.

Itaque circulus maximus EAM inclinat ad circulum maximum IAK, quia acutus angulus inclinationis iuxta defin.4. Tract.22. IPB mensuratur circuli maximi IVKT perpendicularis vtrisque arcu IQE: huic verò inclinationi circulorum EAM, & IAK est similis inclinatio circulorum BAL, & IAK; quia arcus KB est ęqualis arcui IQE.

At in circulo minori QR angulus inclinationis mensuratur arcu OP in plano perpendiculari vtrique descriptus VITK, centro communi trium eorum intersectione.

DEFINITIO VIII.

Circulus circulum tangere dicitur, qui tantùm vnico puncto alterum contingit.

Quoniam si secat iam duobus punctis alterum attingit ex propos. 8. lib.3. Elem. Sic QR circulus secat circulum VITK; quoniam duobus punctis Q & R illum attingit.

DEFINITIO IX.

Circuli intelliguntur tanquàm planæ superficies quædam sphæram intersecantes, & in eius superficiem terminantes.

DEFINITIO X.

Æqualiter verò distant à centro; cùm perpendiculares in illos à centro cadentes æquales fuerint,

rint, & ille magis, vel minus distare dicitur, cuius perpendicularis fuerit maior, vel minor.

EXPENSIO II.

De situ Sphæræ.

ANtequam ad contemplationem ipsius sphæræ accedamus quædam de eius situ, seu collocatione sunt consideranda, quæ ad ipsam sphæræ considerationem viam sternunt.

THEOR. I. PROPOS. I.

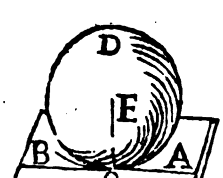
Sphæra planum, vel lineam, in eo, à quâ non secatur, non tangit in pluribus punctis, quam vno.

*PRobatur. Nam sphęra componitur ex circulo circùm acto, aut certè circulus potest duci, quàquà versum per punctum contactus in ipsius sphęræ superficie ex def. 1. Sed circulus non tangit lineam in pluribus punctis, quàm vno, ergo neque circuli in sphęra descripti tangent vllam lineam in plano descriptam, & per contactum transeuntem in pluribus punctis; Ergo neque sphęra ipsum planum, non nisi in vnico puncto continget; alioquin linea in plano duci posset, quæ duos contactus coniungeret, & circulus in sphęra, & sic circulus contingeret lineam in duobus punctis.

THEOR. II. PROPOS. II.

Si Sphæra planum, vel in eo lineam tangat, recta linea à centro sphæræ ducta ad contactum, ipsi plano, vel lineæ in eo perpendicularis erit.

*PRobatur. Quoniam, si intelligantur per contactum, circuli tales ducti, qui per centrum sphęræ transeant, vt OD, isti cum centro E sphęræ commune centrum consequentur; cùm tùm sphęræ, tùm circuli centrum ab ambitu ipsorum æquidistet ex def. 15. lib. 1. Elem. & def. 2. huius: Sed omnis linea à centro circuli ducta ad cõtactũ alicuius lineæ, ipsi pr. 20. l. 3. lineæ perpendicularis est; Ergo omnis circuli per contactum ducibilis, lineę rectę, vt BA in plano existenti, & per eius contactum transeunti EO perpendicularis erit: Quapropter etiã ipsa linea EO ipsi plano BA perpendicularis erit ex def. 1. Tract. pręced. cùm omnibus lineis rectis in ipso ducibilibus rectà incidat.



COROLLARIVM.

HInc si sphęra tangit planum, & à contactu erigatur perpendicularis, hęc in centrum sphęrę producta incidet: Quòd id eueniat ex 21. lib. 3. Elem. lineę EO perpendiculariter à puncto contactus circuli super lineam tangentem AB erectę.

COROLLARIVM.

HInc excipies veram esse quoque propositionem conuersam, nempe lineam rectam EO à centro circuli E in contactum O ductam esse plano normalem.

EXPENSIO III.

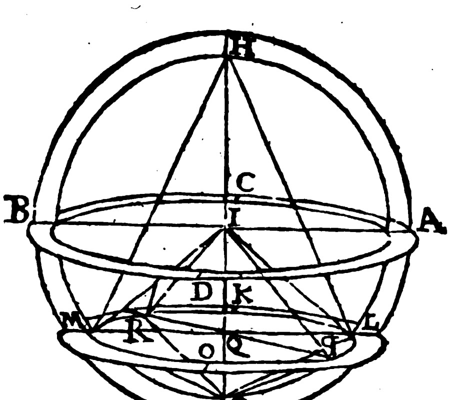
De Polis, Axe, Diametris, Centroque Sphæræ.

ACcedimus ad ea, quæ maiorem cum ipsa sphęra cognationem habent, & ei intrinseca sunt; cum sphęra sine eorum conceptu assertiuè nequeat cognosci.

THEOR. I. PROPOS. III.

Omnis sectio sphæræ circulus est.

*PRobatur. Nam aut secans planum per centrum transit, vel non: Si per centrum transit ducantur AI, & IB, nec non, & IH, & IG ad extimas partes in superficie sphęrę, quas planum secat, quę omnes erunt ęquales; siquidem pertingunt à centro sphęrę ad eius superficiem, verum, & pertingunt ad extimum ambitum plani secantis (siquidem extra sphęram planũ eã non secat) ergo ex defin. circuli planum sphęram per centrum secans circulus est.

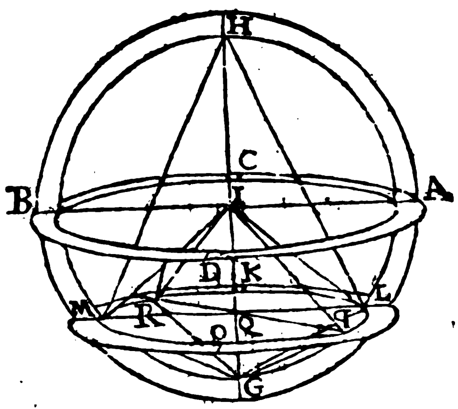


At si non transeat per centrum, vt LKMO ducatur saltem intellectu ad planum secans perpendicularis IQ, & ad extremos margines IR, & IM, & IP, & IL, & omnes erunt ęquales, vtpote pertingentes à centro ad sphęrę superficiem. & triangulorum QIR, QIM, QIP, & QIL, & cęt. erit commune crus IQ angulusque Q vbique rectus. Quare poterunt collocari in ęqualibus semicirculis, quorum diametri ęquales IR, & LM ex prop. 28. lib. 3. quibus eadem subtensa erit IQ; quare ęquales arcus in semicirculis ęqualibus auferet ex prop. 23. lib. 3. elem. quare, & residui arcus essent ęquales, qui subtenderentur à QR, & QM, QP, & QL, Propterea que etiam ex prop. 33. lib. 3. ipsę subtensę RQ & QM, sic QP, & QL erunt ęquales; & cùm de omnibus idem argumentum valeat, itaque omnes ad ambitum plani secantis ductę erunt ęquales, quamobrem KMOL circulus erit ex def. 21. el.

THEOR. II. PROPOS. IV.

Si in sphæra sit circulus, & centrum circuli cum centro sphæræ recta connectatur, hæc erit plano circulari perpendicularis.

Sit circulus LKMO, cuius centrum Q nectat linea QI cum centro sphæræ I. Dico *hanc esse ei perpendicularem.*



Probatur. Nam ex def. I. tract. præced. tunc erit perpendicularis aliqua alicui plano, cùm omnibus lineis, quæ in ipso trahi possunt, erit perpendicularis. Sit igitur linea PQR, connectanturque eius extrema PR centro sphæræ I. Demonstrabitur itaque IQ lineæ RQP esse perpendicularem. Certum est IP, & IR esse æquales. Nam à centro sphæræ in circumferentiam desinunt; sic quoque QP, & QR. Nam à centro circuli in peripheriam ipsius terminantur. Linea verò IQ est latus idem ambobus triangulis. Ergo triangula IQP, & IQR erunt æqualia. Ergo, & anguli æqualibus basibus subtensi, erunt æquales; quarè angulus PQI angulo RQI æqualis erit; & ideo vterque rectus ex 23. primi Elem. Idem argumentum valet de linea LM, & de omni alia. Ergo omnibus lineis ducibilibus in plano LKOM erit perpendicularis, quare, & ipsi plano.

COROLLARIVM.

Hinc educes veram esse quoque propositionem conuersam; nempe lineam rectam perpendicularem à centro circuli eductam in sphæræ centrum cadere: Nam, cùm anguli ad Q sint recti, & QI communis, & QR, & QM, & cęt. vt pote radij æquales, erunt ex propos. 22. lib. I. Elem. æquales bases IM, & IR, & cæt. Vnde I erit sphæræ centrū, cùm omnes, quæ ab eo puncto in sphæræ superficiem cadunt, sint æquales.

PROBL. I. PROPOS. V.

Data Sphæra centrum inuenire.

Secetur sphęra plano quodam, quod circuli erit superficies ex 3. propos. huius, vt LKMO, & ab eius centro perpendicularis erigatur QI, quæ ex præced. Coroll. cadet in centrum: prolungetur vsque ad peripheriam sphæræ, & sit GH; diuidaturque bifariam in I, & punctum I centrum erit sphęræ.

Probatur: Nam iam ostensum est Coroll. pręced. propos. QI in centrum sphæræ impingere; cùm ergo pertingat ad peripheriam sphæræ in G, & H, patet, quòd bifariam diuisa dabit centrum sphęrę, cùm centrum sphęrę ab eius superficie æqualiter distare debeat.

THEOR. III. PROPOS. VI.

Si in Sphæra sit circulus, & à centro sphæræ in circulum ducatur perpendicularis; hæc producta in polos circuli cadet.

Sit perpendicularis IQ producatur vsque ad circumferentiam sphęræ G. Dico G *esse polum circuli.* Connectatur GP, & GR.

Prob. In triãgulis GPQ & GQR ãgulus ad Q tũ huius, tũ alius triãguli rectus est, licet id figura nõ exprimat, & ideo ambo æquales; latus verò QG commune. At latera QP, & QR æqualia, vtpote radij: Ergo ex 4. primi, bases erunt ęquales; nempe GR, & GP. Ergo ex def. 5. huius G est polus circuli; idem dicas de puncto H, in quo desinit perpendicularis GIH, si intelligas connecti cum M, L extremis lineę ML, vel cum quibuslibet alijs.

THEOR. IV. PROPOS. VII.

Si à polo circuli ducatur perpendicularis ad planum circuli; hæc cadet in centrum eius, & producta cadet in alterum polum.

Sit linea GQ, que à puncto G cadat in Q perpendiculariter. Assero *punctum* Q *esse circuli centrum.*

Transeant per Q quęlibet lineę, vt RP, & alię plurimę; sed hęc pro reliquis sufficiat; connectaturque GR, & GP, cum G sit polus circuli ex definitione GR, & GP erunt ęquales, & consequenter perpendicularis ex G super linea QP cadens ex 9. Elementorum diuidet RGP angulum bifariam. Quare, & basim, vnde ęqualis erit lineá RQP lineę QR. Propterea que Q erit circuli centrum; cùm, & eodem modo possit probari de omnibus alijs lineis.

Probatur 2. pars, quòd transeat quoque per alium polum. Quoniam per centrum circuli trãsit, estque perpendicularis plano circuli transibit quoque per centrum sphęrę; quare ex propos. 6. huius & per alium polum transibit.

THEOR. V. PROPOS. VIII.

Si in Sphæra ducatur recta per polos alicuius circuli; hæc per circuli, & sphæræ centrum transibit.

Probatur rectę HL, & HM sunt ęquales, sicut, & GL, & GM; quia ducuntur à polis ad circũferentiam circuli ex def. 5. huius; latus verò HG

HC est commune; ergo triangula HMQ, & HLQ equalia; quamobrem erunt quoque equiangula, vnde bases QM, QL ex prop. 23.l.1. in triangulis HQM, & HQL erunt equales, & ideo Radij circuli erunt.

Anguli etiam ad Q equales, & ideo recti. Quare HC erit perpendicularis quapropter ex Coroll. prop. 4. huius, sphęrę per centrum, linea HC coniungens polos transibit.

COROLLARIVM.

EX omnibus istis propos. euidens fit: polos duos circuli, centrum eius, & sphęrę esse in eâdem rectâque lineâ ad planum circuli perpendiculari; quæ est sphęrę diameter, cum transeat per eius centrum. Vnde si perpendicularis transeat per vnum ex dictis punctis transibit etiam per reliqua omnia; sicut, & quę transit per duo quęque erit perpendicularis, & per alia transibit.

PROBL. I. PROPOS. IX.

Dati circuli in sphæra diametrum inuenire.

IN circulo super superficiem sphęrę descripto tria puncta signentur, & acceptâ circino eorum distantiâ vnius cuiusque à duobus alijs, notetur AB puncti A à B, & AC puncti A à C, & BC puncti B à C; ductisque lineis AB, AC, BC; lineis BC, & AB, vtpote minoribus, duę perpendiculares CD, AD; à punctis A, & C, in quibus AC basis, & maior distantia terminat, exeant, & à pũcto D, in quod concurrunt ad B ducatur linea, quam affirmo esse circuli diametrum in sphęra descripti.

Probatur. Quia angulus apud C, & A rectus est, erunt reliqui tum huius BCD, tum alterius BAD duobus rectis equales. Vnde, & compositi simul omnes duobus rectis sunt equales: Ergo ex prop. 25 tertij quatuor pũcta ABCD erunt in circumferentia circuli. Ducatur itaque circulus, quia angulus est

rectus ad C, & alter ad A. Ergo ex 28. tertij erit in semicirculo; quare BCD erit semicirculus. Ergo BD diameter. Erit autem diameter circuli, illi, qui in sphęrâ est, equalis, quòd triangulum ABC illi triangulo, qui in circulo sphęrico fieret sit equalis ob equales AB, & BC, & AC distantias, equalia verò triangula in equalibus peripherijs equalium circulorum necesse est esse, cum ob equales angulos, similes, nempe equalium numero graduum, arcus sint equales ex prop. 26. tertij.

COROLLARIVM.

HInc centrum circuli nullo negotio inueniemus; diuisus enim diameter bifariam ipsum dabit ex prop. 1. tertij.

PROBL. II. PROP. X.

Diametro sphæræ æqualem lineam inuenire.

CIrculus quicumq; in sphęra describatur polo G ad placitum electo in fig. pr. 4. & ex prop. 9. eius radius reperiatur QM, qui sit AB, & erigatur perpendicularis AD, assumpta verò distantia poli G à circuli peripheria GM centro B interuallo GM describatur portio circuli, quę fecet AD in D, & ducatur BD; deinde ipsi BD erigatur à puncto B perpendicularis BC; producaturque DA in C, & erit DC diametro sphęrę equalis.

Probatur triangulum CBD est equale triangulo GMH; Ergo basis DC erit equalis diametro HG: Quod verò CBD sit equale triãgulo GHM patet. Nam AB est equalis ipsi QM, & BD ipsi GM angulus verò apud A rectus, vt ãgulus ad Q: Ergo vt pr. seq. p. 1. arguam triangulum ex 11. pr. l. 1. el. ABD triangulo GQM est equale; Angulus verò totus CBD rectus est; Ergo equalis recto M toti: Vnde, & pars ABC residua residuo QMH erit equalis cum QMG, & alia pars anguli B ostensę sint equales ex equalitate totius trianguli BAD, triangulo QGM. Anguli verò apud A, & Q recti sunt, & basis QM basi AB equalis ex effectione: Vnde triangulum quoq; ABC ex prop 27. primi triangulo QHM erit equale; ideoque totum triangulum DCB toti GHM erit equale, cũ partes vnius partibus alterius ostensę sint equales. Vnde, & basis CD basi, & diametro sphęrę GH equalis erit.

EXPENSIO III.

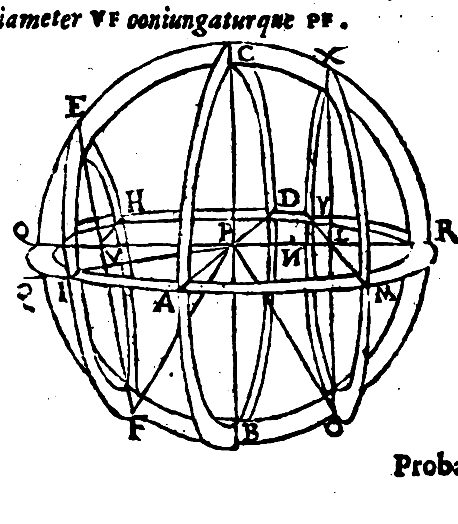
De circulis maximis, & minoribus.

CVm præcipuus scopus huius tractatus sit de circulorum intersectionibus agere; vtpote, quia earũ cognitio ad Trigonometriam sit omninò necessaria; priùs de ipsis circulis agendum est, & eorum natura scrutanda, vt inde ipsorum sectiones inuicem agnoscamus.

THEOR. I. PROP. XI.

Circulorum, qui in sphæra fiunt illi maximi sunt, qui per sphæræ centrum ducuntur; Æquales, qui æqualiter distant à centro, Minores, qui longiùs remouentur.

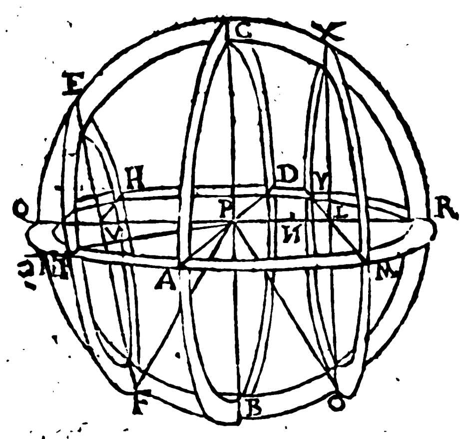
PRobatur prima pars: Nam sit circulus ABCD per centrum ductus, & EFIH non per centrum ductus. Dico *ductum per centrum esse maiorem, coniunctis enim eorum centris* PV, *ducatur semidiameter* VF *coniungaturque* PF.



Probatur

Probatur. Quoniam triangulum PFV est rectangulum, maior erit basis PF, quolibet latere, vt VF, qui semidiameter est, vtpote opposita lateri maiori ex propos.18. primi: Sed basis est æqualis lineæ PB, vtpote semidiametri: Ergo semidiameter BP est maior semidiametro VF. Ergo, & circulus maior; & sic potest fieri demonstratio de quolibet alio.

Si verò distent à centro sphæræ æqualiter dico circulos fore æquales, quæ est secunda pars. Nam cum PVF, & LOP sint rectagula ex II. secundi habebunt quadrata basis æqualia duobus quadratis laterum: Sed bases sunt æquales, vtpote radij. Ergo, & ipsarum quadrata. Quare, & quadrata laterum nimirum laterũ OL, & LP simul quadratis laterum PV, & VF simul: sed perpendiculares LP, & PV præsupponuntur æquales: Ergo, & eorum quadrata: vnde, & residua quadrata OL, & VF remanebunt æqualia: Verum quadrata æqualia habent latera æqualia. Ergo latera, & simul radij OL, & VF erunt æquales. Ergo, & circuli quorum sunt radij erunt æquales.



Prob. tertia pars, quòd ille circulus sit minor, qui magis remouetur à centro sphęrę. Nam cùm semper, vt semidiametri sphęræ, bases sint æquales quadrata basium ipsorum, & ideo laterum simul sumptorum, vt priùs erunt æqualia: sed modo ponitur maius V. g. PV, quam PL. Ergo, & quadratum PV erit maius, quam lateris PL, & consequenter quadratum VF minus, quam OL lateris: Quare, & latus ipsum, radiusque VF, erit minus, quam latus OL, simulque radius: Ergo, vt circulus eius radij VF minoris, minor erit.

COROLLARIVM

HInc potes deducere propositionem esse intelligendam inuerso modo, nempe maximos circulos etiam per sphęræ centrum transire; ęquales ęqualiter distare à centro, & minores magis ab eo remoueri: Nam si istę propositiones inuersæ non essent veræ, nec illę directæ veræ forent; vt patet consideranti.

THEOR. II. PROPOS. XII.

In circulo maximi circuli mutuò se secant bifariam.

SInt duo circuli maximi in sphęra CBAD, & RAQD. Dico eos se secare in duas partes æquales.

Probatur. Nam transeunt ambo, cùm sint maximi ex ante ced. per sphęrę centrum, quare sphęræ centrum erit centrum vtriusque circuli: non autem esset centrum vtriusque, nisi sit in communi eorum concursu, seu sectione DA: quare DA transibit per centrum vtriusque circuli. Ergo erit diameter: ergo ea sectio circulos maximos ambos, vt diametri proprium est ex def.17.l.1.el. tract. 4. bifariam secabit.

THEOR. III. PROPOS. XIII.

Circuli se mutuò ex æquo partientes sunt maximi.

PRobatur. Nam ex præced. eorum sectio AD transibit, cum sit diameter, per vtriusque centra. Ergo centra erunt in vtroque eadem: quare, & eadem, quod centrum sphęræ in P: alioquin, si essent extra P in N; linea, quæ per ambo transiret puncta N, & P, & pertingeret vsque ad circumferentiam, tum sphęræ, tum circuli, quæ est eadem, aut esset æqualiter diuisa in N. Ergo non esset in P, & sic superficies sphęræ non æquidistaret à suo centro, aut esset æqualiter diuisa in P: Ergo non in N centro circuli, vt fingitur, & sic RN, & NQ, qui finguntur semidiametri non essent verè tales, cum non essent æquales: ideoque maximi ex II. h. cum eorum centrum sit idem, ac sphęrę.

THEOR. IV. PROPOS. XIV.

Si in sphæra maximus circulus circulum quemlibet secet ad angulos rectos; etiam bifariam illum secat, & per polos.

SIt circulus maximus in sphęra RDAQ, qui secet quemcumque OX orthogonaliter, dico, *quod per polos eum secat, & bifariam.*

Ducatur in eo plano orthogonali RADQ à cētro P sphęræ perpendicularis LP plano OXMY; hęc transibit ex Coroll. propos.4. per centrum L circuli OX, siue maximi, siue non maximi, & per polos RQ. Ergo etiam planum, in quo perpendicularis est; nempe superficies circuli maximi RDQA per polos, & per centrum transibit, quare planorum maximi, & alterius circulo concursus, & sectio YM fiet in centro L, linea itaque sectionis YM per alterius cuiuscumque centrum transibit. Ergo erit diameter eius; ergo diuidet ipsum quemcumque bifariam ex def.17.lib.1.el.

COROLLARIVM.

HInc est, quod etiam inuersè propositio intelligenda sit. Nempe circulum maximum per polos cuiuslibet alterius transeuntem bifariam, & orthogonaliter illum secare; quòd nunc linea RQ in maximo per polos R, & Q ducta sit perpendicularis, & per centrum alterius transeat ex Coroll. propos.8. quare, & superficies RAQD perpendicularis erit ex 15. propos. tract. 22. & sectionem efficiet radium.

Item per polos, & orthogonaliter, & bifariam non maximum OX secantem, maximum circulum esse; Quia diameter, vel orthogonaliter, vel bifariam secantis RDQA ductus per polos alterius non maximi OX, vel per centrum L; etiam per centrum sphęræ transibit ex Coroll. propos.8. huius, & consequenter erit diameter circuli maximi ex prop.11. huius.

CO-

COROLLARIVM II.

HInc etiam est, quòd poli alicuius circuli maximi ab eo quadrante distent. Nam sit circulus DCBA, qui secetur bifariam à circulo RCQB,& per polos QR; igitur CQB erit semicirculus. At polus æqualiter distat à circulo, cuius est polus defin. poli. Ergo dimidio semicirculo idest quadrãte QB, vel QC distabit,& sic de quocũq; alio circulo dicetur, qui per polum Q transeat. Quamobrem vndequaque peripheria CABD à polo Q quadrante distabit. Vnde vera etiam erit conuersa propos. quòd si peripheria alicuius circuli à polis suis quadrante distet, illa sit peripheria maximi circuli. Nam si CABD circulus secat RCQB circulum secantem per polum suum in distantiam quadrantis CQ, & QB erunt duo quadrantes CQ, & QB, semicirculus. Vnde bifariam quoque circulum maximum RCQB secabit; quare, cum & ipse ABDC secetur bifariam, quòd secetur orthogonaliter ex 8. huius. Ergo erit circulus maximus ex 13. huius circulus ABDC.

THEOR. V. PROPOS. XV.

Maximus circulus, si per polos alterius maximi transeat, & iste per polos illius transibit.

SIt circulus maximus CBDA, qui transeat circuli maximi RAQD per polos B, C. Dico, & hunc RADQ per polos illius R, Q transire.

Probatur. Nam, si DBAC per polos circuli RAQD transit. Ergo rectus est ex Coroll. propos. præced. Ergo, & iste RADQ rectus erit: Vnde per polos eius transibit ex propos. 14.

COROLLARIVM.

COllige. Quod si duo maximi circuli habeant in eodem circulo maximo polos, quòd inuicem se secabunt, & sectio mutua à circulo, in quo polos habent distabit quadrante. Nam etiam circulus V. g. RCQB habebit polum in circulis CABD, & RAQD, qui in ipso in RQ & CB polos habent, ideoque habebit in loco communi vtrisq; quæ est sectio A, & D, cumque poli distent per quadrantẽ à sectione, ideo C,& R, B, Q circuli RCQB puncta à sectione A quadrante distabunt; sicut, & à D.

PROBL. I. PROPOS. XVI.

Puncto dato in sphærica superficie ex dato diametro sphæræ circulum describere maximum.

CIrca diametrum datum describatur circulus seorsim, qui erit æqualis circulo maximo in sphera describendo, quem diuidemus in quatuor quadrantes, & vnius quadrantis assumpto interuallo RC dato puncto R describemus circulum ABCD, quem aio esse maximum.

Ille est circulus maximus, qui à polis suis per quadrantem vndique distat ex Coroll. 2. prop. 43. sed hunc duximus quadrante circuli distantem. Ergo est circulus maximus.

PROBL. II. PROPOS. XVII.

Per duo puncta data circulum maximum describere dato circulo aliquo maximo.

FActo polo in ipsis punctis V. g. R, & C interuallo circuli maximi alicuius dati à suo polo, ducantur duo circuli, vt RAQD, & CBAD illi enim erunt maximi, eo quia omnes maximi sint æquales, quòd habeant pro diametro ipsum sphæræ diametrum: deinde facto polo in communi eorum interfectione V. g. in A eodem interuallo ducatur circulus. Nam hic transibit per R & C puncta data, & erit maximus.

Probatur. Nam quod sit maximus patet. Interuallo enim circuli maximi ductus est, quòd verò transeat per duo puncta data.

Probatur. Quia circulorum primo ductorum RAQD, CBAD cõmune punctum est A in quo se secant. Ergo ibi facto polo ex prop. 15. circulus ductus transibit per polos amborum, sed puncta data R, & C sunt amborum poli. Ergo per ea circulus transibit.

PROBL. III. PROPOS. XVIII.

Cuiuslibet circuli in sphæra dati polum inuenire.

ELectis in circulo EIHF duobus punctis H, I diuidatur bifariam ex 34 tertij vterque arcus HEI, & HFI in E, & F, perq; ex præc. agatur circulus maximus RCQB. Diuidatur autem intercepta circumferentia inter E, & F bifariam in Z; & erit in diuisione circuli polus Z.

Probatur. Quia circulus ductus RCQB secat datum HEIF ex constructione bifariam. Ergo ex propos. 13. transit per eius polos, & poli sunt in ipso; sed polus æquidistat à circumferentia sui circuli. Ergo erit in meditulio Z, sic enim æquè distabit ab E, & F.

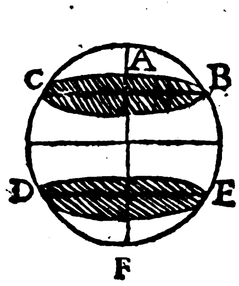
EXPENSIO III.

De circulis minoribus parallelis.

SPecialem merentur expensionem circuli paralleli, vtpote illi, qui diurni motus in Cœlo quædam quoad sensum vestigia sunt, & eorum cognitio, tum sphericæ celesti doctrinæ, tum sciantherice præcipuè inseruiat.

THEOR. I. PROPOS. XIX.

In sphærâ paralleli circuli circà eosdem polos sunt.



SInt in sphera ABCDEF paralleli BC, & DE. Dico eos esse circa eosdem polos.

Sint enim poli circuli BC punctum A, & F, connectantur linea AF, quæ transi-

transibit per centrum sphæræ ex huius propos. 8. cum ergo circuli præsupponantur paralleli erit perpendicularis ad circulum DE. Vnde per eius polos transibit ex Coroll. expens. 2.

THEOR. II. PROPOS. XX.

In sphæra circuli, qui sunt circa eosdem polos, sunt paralleli.

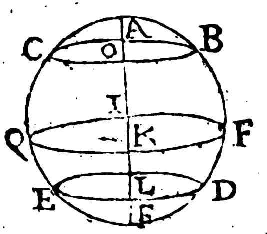
Sit eadem sphæra ABEFCD, circaque eosdem polos A, & F sint duo circuli BC, & DE. Dico *esse parallelos*.

Probatur. Nam ex Coroll. propos. 8. per centrum amborum transibit linea AF eosdem polos communes connectens; quare erit ad vtrosque perpendicularis. Vnde erunt illi circuli paralleli.

THEOR. III. PROPOS. XXI.

In sphæra non sunt plures circuli æquales, & paralleli, quàm duo.

Sint in sphæra, si fieri potest, plures circuli æquales, & paralleli, quam duo CB, QF, ED, connectanturque eorum poli recta AF; quæ transibit per I centrum sphæræ, & per O, K, L, centra circulorũ ex 19 h. & quia æquales ponũtur, æqualiter distabunt à centro ex propos. 11. Vnde ex def. 7. perpendiculares erunt æquales. Æqualis igitur erit perpendicularis KI perpendiculari LI, quod esse nequit, pars enim toti æquaretur.



TRACTATVS XXIII.

PARS SECVNDA.

De intersectionibus maximorum circulorum inuicem.

Trigonometriæ ad euitandas fallacias penitùs necessarium est agnoscere genericas triangulorum sphæricorum proprietates, tùm quoad latera, tùm quoad angulos, de quibus primò egit Menelaus, & post ipsum Gebrus Maurolycus, Copernicus Regiomontanus, & alij, quàm plurimi: sed nos, quæ doctrinæ trigonometricæ sphæricæ deseruiunt, tantummodò adferemus.

EXPENSIO I.

De principijs.

Intersectiones maximorum circulorum in superficie sphæræ omnimoda efformant triangula, & prorsùs eorundem generum, quæ lineæ rectæ, se inuicem secando efficiunt; vnde hic, & Scalena triangula, & Isoscella, & Amblygonia, & Oxigonia, & Rectangula admittuntur, quorum definitiones iam exhibitæ sunt, vnde reliquas adferemus.

DEFINITIO I.

Triangulum sphæricum est quòd tribus arcubus maximorum circulorum se intersecantibus continetur.

DEFINITIO II.

Anguli sphærici mensura est arcus maximi circuli, cuius polus est in ipso angulo duorum arcuum, quos secat.

DEFINITIO III.

Angulus sphæricus est, quem in sphæra superficie duo arcus maximorum circulorum se mutuò secantes continent.

DEFINITIO IV.

Angulus verò rectus, quem duo arcus circulorum maximorum orthogonaliter se secantium continent.

DEFINITIO V.

Acutus verò, qui minor, obtusus, qui maior recto est.

LEMMA I. PROP. I.

Datis duobus arcubus maximorum circulorum, quorum neuter semicirculo maior sit, de maiori æqualem minori portionem abscindere.

Hoc fit assumendo subtensam AB æqualem subtensæ arcus minoris, & applicando illam lem arcui maiori ACD, vt fit AC; arcus enim, quem subtendit, erit æqualis minori arcus AB.

Probatur. Omnes enim circuli maximi sunt æquales; Vnde ex 2. lib. 3. auferent subtensæ inuicem æquales arcus æquales AB, & AC.

EXPENSIO II.

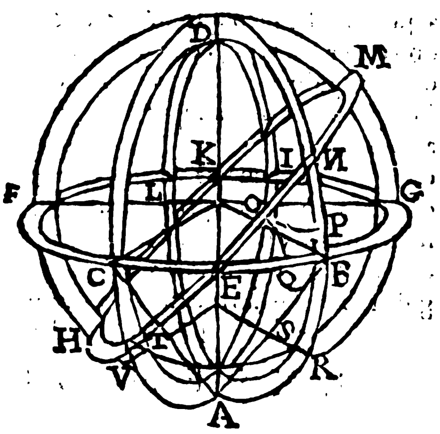
De angulis triangulorum sphæricorum.

Antequam de totis triangulis pertractemus angulos ipsos seorsim breuiter opus est considerare.

THEOR. I. PROPOS. II.

Duo circuli maximi mutuò se secantes continent duos angulos inter se æquales.

Sint circuli maximi ACDI, & ABDL, qui se intersecent in D, & A, ducaturque polo D, vel A, circulus maximus BCFGL. Dico *angulum* BAC *esse æqualem angulo* BDC.



Probatur. Quia eodem arcu BC ex defin. 2. mensurantur, qui est arcus circuli maximi in angulis A, & D polos habentis.

PROBL. II. PROPOS. III.

Si duo arcus maximorum circulorum se mutuò secuerint; angulos ad verticem æquales inter se efficient.

Dico *angulos ad verticem* E *nimirum* GEM, & HEF *æquales esse inuicem*, sicut, & FEM, & GEH pariter ad verticem E esse æquales.

Probatur. De primis GEM, & HEF, arcus enim qui polo E mensurant illos HF, & GM sunt æquales, ergo, & prædicti anguli erunt æquales.

Probatur autem arcus esse æquales; nam MFH est semicirculus, sicut, & GMF, Ergo sunt æquales istæ portiones, vtpote semicirculi: Aufer MF portionem communem; Remanebuntque æquales GM, & FH. Sic de alijs duobus argumentum texitur; sunt enim semicirculi FMG, & HGM: Aufer GM arcum communem, & remanebunt arcus GH, & FM, quibus mensurantur anguli GEH, & MEF, æquales: Quare, & anguli erunt æquales, cum eorum mensura, qui sunt arcus maximi ex eorum intersectione ducti ex def. 2. sint æquales.

THEOR. III. PROPOS. IV.

Arcus super arcum insistens angulos, aut rectos, aut duobus rectis æquales efficit.

Super CGEF arcum insistat arcus BNM. Dico *facere aut duos angulos rectos, aut duobus rectis æquales*.

Probatur. Nam sit perpendicularis; certum duos rectos angulos efficere. Si verò non sit, ve datus arcus; tunc GMF erit semicirculus nimirum æquiualens duobus rectis, estque mensura angulorum, quos insistens in E facit ex def. 2., vtpote ductus à polo E. Ergo, & anguli GEM, & FEM æquiualebunt duobus rectis.

THEOR. IV. PROP. V.

Cuiuscumque trianguli sphærici tres anguli sunt duobus rectis maiores.

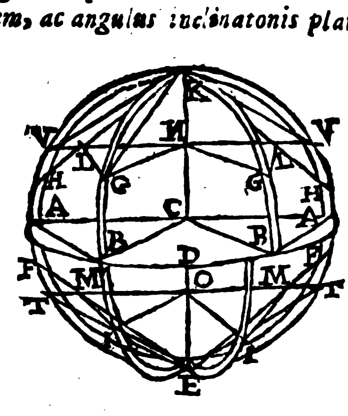
Probatur. Tres anguli cuiuscumque trianguli rectilinei sunt duobus rectis æquales: Quare si tribus arcubus se intersecantibus AB, & BC, & CA subtendamus tres lineas ille efficient tres angulos duobus rectis æquales; sed arcus supertensi magis deiscunt ad inuicem, & maiorem angulum efficiunt. Ergo tres arcus efficient tres angulos duobus rectis maiores.

Quod autem arcus faciat maiorem angulum in sphæra. Quam linea subtensa patet: Quia quodlibet planũ circuli maximi transit per axem sphæræ. Ergo quodlibet in eius superficie signatum punctum quantò magis remouetur ab axe, tantò magis remouetur ab alio in peripheria similiter signato alterius circuli. Ergo punctum S alicuius subtensæ AB minus remouebitur à T puncto alterius subtensæ CA, quam R, & V in peripherijs puncta signata, quæ magis remouentur ab axe DA, quam S, & T.

THEOR. V. PROPOS. VI.

Angulus quicumque sphæricus est angulus inclinationis planorum.

Sit angulus sphæricus AKB. Dico *illum esse eundem, ac angulus inclinatonis planorum*.



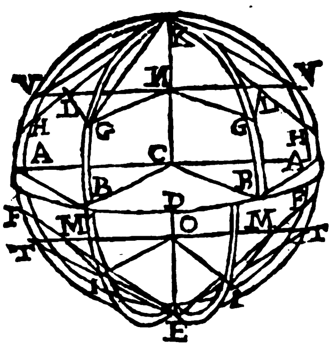
Probatur. Quia angulus AKB sphæricus mensuratur arcu AB circuli ABD, ad vtrosque perpendicularis: sed angulus ACB inclinationis planorũ ex Cor. 2. prop. 4. Tract. 22. mensuratur eodem arcu. Ergo est idem angulus.

THEOR. VI. PROP. VII.

Si anguli sphærici sint æquales, etiam anguli subtensarum erunt æquales: si maiores, & anguli subtensarum erunt maiores: Si minores tales, & anguli subtensarum erunt.

SInt anguli FEI, & HKG sphærici æquales, dico subtensas HK, & KG facere angulos apud K subtensis arcubus prædictis æqualibus FE, & EI apud E æquales in fig. parte sinistra.

Prob. Nam, si anguli sphærici sunt æquales, ex 6. h. & anguli inclinationis planorum erũt æquales. Ducantur ergo perpendiculares ab I ad intersectionem planorum in O, & ab hoc pũcto O, alia normalis MO. Sic ducatur normalis GN ab arcu GK; qui æquatur arcui IE & rursus alia normalis NV, & ducantur GL, & MI facientes triangula LNG, & MOI.



Progress. 1. Anguli itaque inclinationis planorum erunt LNG, & MOI, sic TE, & VK erunt arcus æquales, cum sinus versi EO, & NK, vtpote arcubus æqualibus GK, & EI subtensi æquetur; Cùm ergo etiam KH arcus sit æqualis arcui FE, vt supponitur, remanebunt TF, & HV arcus æquales, & propterea VKH, & TEF anguli ad peripheriam æqualibus arcubus VH, & FT insistentes erunt æquales.

Progress. 2. Cùm autem, & angulus VKN æquetur angulo TEO, quòd sinus recti VN, & TO æqualiũ arcuum TE, & VK sint æquales, & KN, & OE sint quoque æquales; anguli verò ad N, & O ex effectione recti, totum triangulum VKN toti TEO æquabitur. & ideo anguli VKN, & TEO æquabuntur: Aufer itaque ab æqualibus VKN, & TEO angulos iam ostensos æquales VKH, & FET, & reliqui æquales restabunt LKN, & MEO.

Progress. 3. Quamobrem cùm EOT, & KNV sint anguli recti, & anguli prædicti apud K, & E æquales, & KN, & OE bases æquales; etiam ex prop. 27. lib. 1. Elem. triangula erunt æqualia MOE, & LKN erunt æqualia, & ideo crus NL cruri MO. Sed etiã NG æquatur cruri OI, & anguli MOI, & LNG ostensi sunt æquales, vtpote inclinationis planorum, igitur basis quoq; GL æquatur basi MI ex 22. l. 1. el.

Progr. 4. Sed iam EM æquatur cruri LK ex progr. 3. & GK ipsi EI, vt subtensæ æqualibus arcubus, ex hypothesi. Ergo triangula MEI, & LKG erunt æqualia, cùm habeant latera æqualia quodlibet suo correspondenti; quare etiam anguli subtensarum HKG, & FEI æquales erunt.

Probatur secunda pars. Nam, si angulus sphæricus LKG, & ideo inclinationis planorum LNG est maior angulo sperico MEI, vel MOI planorum, & tamen sit æqualis arcus IE arcui GK, & HK arcui EF, erit sinus versus KN æqualis sinui OE, & NG rectæ OI, sic VN rectæ TO æqualis, & arcus VK arcui TE, vnde angulus HKV angulo TEF æqualis.

Eodemq; modo VKN erit æquale triangulo TEO ob angulos rectos ad N, & O, & æqualia crura EO, & NK, & angulos ad K, & E æquales. Quare rursùs LN æquabitur cruri MO; sed crus IO æquatur cruri GN angulus verò TOI est maior angulo VNG ex hypothesi, ergo, & basis MI basi LG ex propos. 25. lib. 1. Elem. ideoq; angulus FEI angulo HKG.

Et idem dicas si sit minor inclinationis planorum angulus.

COROLLARIVM.

PRopos. etiã intelligitur conuersa, nempe angulos subtensarum æquales æqualiũ facere angulos inclinationis planorum, & sphæricos æquales.

Sic suppositis HKG, & FEI æqualibus facta eadem constructione triangula VKN, & TOE erunt æqualia ratione prædicta, sicut, & triangula GKN, & EOI. Et ideo crura KG, & EI, nec non, & crura KH, & FE sicut, & anguli NKV, & OET, à quibus ablati æquales anguli VKH, & FET restarent æquales anguli NKL, & OEM, & æquales quoque recti apud O, & N, & crura NK; OE æqualia: Vnde ex prop. 27. l. 1. Elem. æqualia quoque triangula NKL, & OEM propterea que, & crura ipsorum KL, & EM; & hinc triangula LGK, & EIM ob crura KG, & EI; sicut KL, & EM æqualia, & angulos LKG, & MEI ex thesi æquales. Quare etiam bases GL, & IM æquales. Et ideo quoque triangula NLG, & MIO ob tria crura tribus æqualia, siquidem NL, & OM ob triangulorum NLK, & EOM æqualitatẽ æqualia sunt sicut, & ob eandem OEI, & NKG triangulorũ æqualitatem æquantur OI, & NG, & bases GL, & IM ostensæ sunt æquales. Ideo triangulorum OIM, & GNL æqualitatem æquales erunt anguli LNG, & MOI inclinationis planorum, & ideo sphærici. Et idem dicas si sint, vel maiores, vel minores inuicem anguli subtensarum, nam tales erunt, & sphærici.

EXPENSIO III.

De lateribus triangulorum sphæricorum, & eorum subtensis.

LAtera triangulorum sphericorum singulares quasdam proprietates obtinent, quas latera rectilineorum non habent; aut saltem non eodem modo; quare oportet agnoscere, in quibus conueniant, aut ab eis disconueniant.

THEOR. I. PROPOS. VIII.

In omni triangulo sphærico latus quodcumq; minus est semicirculo.

PRob. In fig. pr. 2. duo latera DC, & DB cuiuscumque trianguli V. g. BDC, producta tandem conuenient in semicirculo apud A, cùm sint arcus maximorum circulorum; qui in sphæra ex prop. 11. præced. partis se bifariam secant: Ergo latera trianguli seorsim sumpta minora erunt semicirculo.

THEOR.

THEOR. II. PROPOS. IX.

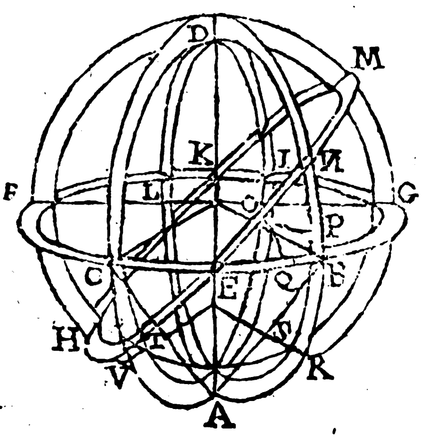
In omni triangulo sphærico duo latera tertio sunt maiora quomodocumque sumpta.

*NAm si maiora nō sunt, mēsurata super latus EN, quòd V.g. ponitur maius in triangulo NBE, ipsum æquabunt; ita vt pars ipsius lateris EN, quę V.g. sit ON ęquet latus NB, altera EO ęquet latus EB, ducantur circuli arcus minoris OP centro ipso angulo N, interuallo verò latere ON, & deinde alter OQ centro E interuallo crure EO, isti circuli se deberent tangere in O; & rursus in B cum sint mensurę laterum BN, & BE: quòd est impossibile ex propos. 5. tertij Euclid.

THEOR. III. PROPOS. X.

In omni triangulo sphærico tria latera simul, minora sunt integro circulo maximo.

*PRobatur. Sint latera KMN, & KGB conuenientia in K, & latere BN terminata, & faciant triangulum KNB, si producantur coibunt in E, & facient semicirculos KME, & KGE; & triangulum reliquum EBN. Sed huius trianguli latera duo EN, & EB sunt maiora crure BN ex prec. Ergo si addamus reliquis cruribus alterius trianguli, nempe



cruri KMN, & cruri KGB erunt simul hęc quatuor tribus KMN, & KGB, & NB trianguli propositi KNB cruribus maiora: Sed hęc crura quatuor faciunt duos semicirculos: Ergo tria crura cuiuslibet trianguli sunt minora duobus semicirculis, idest integro circulo.

EXPENSIO IV.

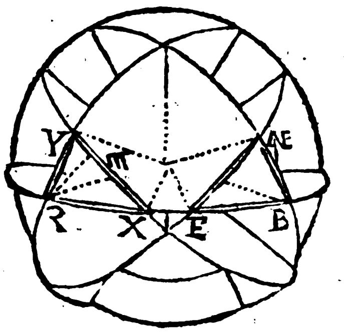
De angulorum, laterumque mutua dependentia, & relatione generica.

VIsis proprietatibus aliquot, tum laterum, tum angulorum secundum se, incipimus angulos lateribus conferre genericè, vt deinde in sequentibus eorum specificam dependentiam agnoscamus.

THEOR. I. PROP. XI.

Si duo triangula sphærica angulum angulo æqualem obtineant, crusq; vnum vni, alterum alteri æquale, etiam basem æquali subtensam angulo æqualem obtinebunt, eruntq; æqualia inuicem.

*SInt duo triangula sphęrica BNE, & ZYX, quę angulum E angulo X ęqualem habeant, crusq; EN cruri YX, & BE cruri ZX æquale. Dico etiam basim BN basi ZY fore æqualem, & ideo triangula inuicem esse æqualia.



Probatur. Nam subtensę eundem angulum rectilineum habebunt ex propos. 7. huius, & subtensa BE, ex propos. 33. tertij erit ęqualis subtensę ZX, NE subtensę YX. Ergo ex propos 12. lib. 1. element. etiam basis recta subtensa BN, erit ęqualis rectę subtensę ZY: Quare ex 32. lib. 3. & arcus BN ęquabitur arcui ZY.

THEOR. II. PROPOS. XII.

Si duo triangula sphærica crus cruri, & aliud crus alteri cruri æquale obtineant, & angulus comprehensus sit maior altero; etiam basis opposita erit maior altera.

*PRobatur. Quia ponitur angulus sphęricus BEN maior; quàm ZXY, erit ex prop. 7. h. & angulus subtensarum BEN maior subtensarum ZXY; quia verò arcus BE ponitur ęqualis arcui ZX etiam subtensa BE ęquabitur subtensę ZX, sic quia arcus NE ponitur ęqualis arcui YX talis erit, & subtensa NE ęqualis subtensę YX. Quia itaque triangulum subtensarum rectilineum habet crus cruri, & aliud crus alteri cruri ęquale, angulum autem comprehensum apud E maiorem, quàm angulus apud X erit, & basis recta subtensa BN maior, quam subtensa ZY; ex 24. lib. 1. el. quare ex prop. 22. lib. 3. & arcus BN maior erit arcu ZY.

THEOR. III. PROP. XIII.

Si duo triangula sphærica habeant basim basi maiorẽ; crus verò vnum vni alterum alteri æquale, & angulum maiorem comprehensum obtinebunt.

ADsit maior basis BN basi ZY, & latera singula singulis æqualia, dico, & angulum E fore maiorem angulo X.

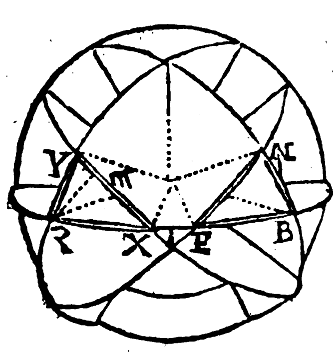
Probatur, Si enim talis non est, erit aut ęqualis, aut minor. Nam potest autem esse æqualis. Nam si angulus E esset æqualis angulo X, basis quoque NB æquaretur basi YZ ex 11.h, contra hyp. Non potest esse minor, quia ex pręced. maior angulus tunc esset angulus X; quare haberet quoque maiorem basem ZY, quàm BN, & tamen è contrà BN ponitur maior, quam ZY ex hypothesi.

THEOR. IV. PROPOS. XIV.

Si tria trianguli sphærici latera alterius trianguli tribus lateribus, singula singulis correspondentibus sint æqualia, habebunt etiam angulos correspondentes, & æqualibus arcubus oppositos æquales.

SInt arcus BN arcui ZY, & BE alteri ZX, & tandem NE tertio YX ęqualis. Dico, *& angulos omnes quilibet suo correspondenti, qui nimirum angulis æqualibus subtenduntur, esse æquales.*

Probatur. Nam cum arcus ponantur æquales etiam subtensę singulę singulis erũt ęquales. Quare ex propos. 23. lib 1. erunt anguli rectilinei subtensarum æquales: Ergo etiã anguli sphęrici ex Coroll. propos. 7. huius, cum si angulus rectilineus subtensarum sit ęqualis, etiã anguli sphęrici arcuum subtendentium sint ęquales



THEOR. V. PROP. XV.

Si duorum triangulorum anguli duo quilibet suo correspondenti, sint æquales, & basis adiacens æqualis alteri, arcus quoque, & latera sunt æqualia.

DEntur E angulus ęqualis angulo X, & B angulo Z, & basis BE basi ZY in triangulis BNE, & YZX. Dico, *esse æqualia crura* NB *ipsi* ZY, & EN *ipsi* YX.

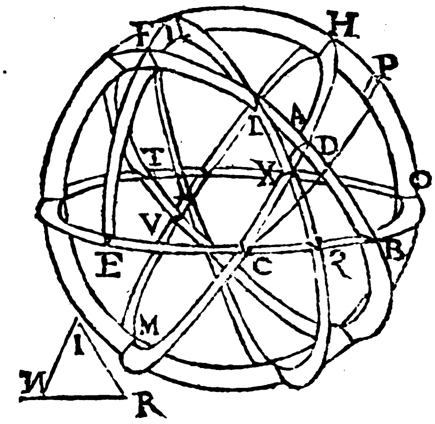
Quòd si non sunt detruncetur XM ęquale crus cruri EN, & ducatur ZM.

Probatur. Quia ergo XM ęquat crus EN ex aduersarijs, & ZX latus EB, angulus autem comprehensus X ęquatur angulo E ex hypothesi erit etiam angulus apud XZM ex huius prop. 11. ęqualis angulo B, cum, & ipsa tota triangula æqualia sint. Ergo, & angulo XZY ipsi NBE ęquali; quòd est absurdum, esset enim pars MZX ęqualis toti angulo apud Z in triangulo XZY, & sic dicas de alio latere, vnde si anguli ad basim singuli singulis in duobus triangulis sphericis sint ęquales, & crura in ijs correspondentia angulis ęqualibus erunt ęqualia.

THEOR. VI. PROPOS. XVI.

Si trianguli sphærici duo anguli æquales inter se fuerint, habebunt quoque latera subtensa æqualia.

EXhibeatur triangulum BAC, angulique inuicem æquales sint C, & B. Dico *latera quoque subtensa* BA, & AC *esse æqualia.*



Nam si AB maius est, detruncetur id, in quo maius est arcu maximi circuli CDP, ergo æquale latus CA est lateri BD. At ex hypoth. angulus B angulo BCA est ęqualis, & arcus BC communis. Ergo triangulum BDC æquabitur triangulo BAC ex 10. huius, pars toti,, quod est impossibile.

THEOR. VII. PROPOS. XVII.

Si trianguli sphęrici duo crura inter se æqualia sint, etiam anguli oppositi inter se æquales erunt.

TRianguli sphęrici BAC subtensa latera sint BA, & CA inter se æqualia. Dico, *& angulos fore æquales.*

Producantur enim latera æqualia BC, & CA vsque ad quadrantem in O, B, & H sicut, & latus BA in F. Circulique maximi polis B, & C vtrosque quadrantes BE, & BF nectant EF sicut CO, & CH arcu HO Aut ergo arcus OH, & EF conceduntur ęquales. Ergo etiam anguli B & C erunt æquales ob ipsorum mensuras æquales, quæ sunt arcus FE, & HO, vel alter est maior altero, & tunc detrũcetur id, in quo maior est, & sit HP; ducaturque arcus maximi circuli CDP, vel ergo transibit per A; sed etiam transibit per C, ergo secat circulum maximum CH circulus maximus PC in duobus punctis, quæ semicirculo non distant contra prop. 12. p. 1. h. vel non transibit per A, sed alibi V. g. in D. Ergo triangulum BDC aliud, quam CAB de quo est quęstio, enasceretur, vnde à proposito exiremus.

THEOR.

THEOR. IX. PROPOS. XVIII.

Omnis trianguli maior angulus maiori lateri subtenditur, & maius latus maiorem angulum subtendit.

ADsit triangulum ABC, in quo angulus BCA sit maior angulo B. Dico *latus* AB *maius esse latere* AC. Fiat angulus BCD æqualis angulo B tunc

Probatur propos. Quia BCD, & DBC anguli ęquales sunt, ex prop. 16. arcus quoque BD, & AC erunt æquales. Quapropter addito arcu DA arcui BD duo arcus DA, & BD sunt maiores arcu DB. Ergo, & arcus BA totus oppositus maiori angulo ACB maior erit arcu CA.

Probatur secunda pars. Nam si sit arcus BA maior arcu AC, angulum quoque oppositum BCA maiorem consequetur angulo CBA.

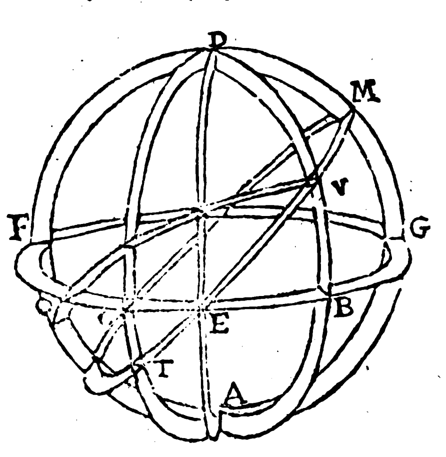
Nam si maior angulus ACB angulo B non est, erit aut æqualis, aut minor: Verùm æqualis esse nequit ACB angulo B. Nam ex 16. h. Latus quoque oppositum BA esset æquale lateri AC contra hypothesim. Sed nec ACB angulo B minor esse potest; Quòd iuxta primam partem huius cum angulus B esset maior subtenderet quoque AC maius latus, quam BA, quod est contra præsuppositum, cùm diximus BA esse maiorem arcum, quam arcus AC.

THEOR. X. PROPOS. XIX.

Cuiuscumque trianguli sphærici duo anguli sunt æquales, si vnicus arcus productus vsque ad semicirculum, & alterius crus oppositum simul sumpta semicirculo sunt æqualia.

At si semicirculo sint maiora, angulus oppositus lateri non producto erit maius, si minora minus alio angulo.

SIt triangulū VDT, & VA cruris VD producti vsq; ad semicirculum in A, & crus oppositum TV angulo D sint æqualia semicirculo DVA. Dico *etiam angulos* VDT *producto lateri* DV, & DTV *non producto* TV *oppositos esse æquales.*



Probatur. Nam quia VA, & VT sunt ęqualia semicirculo DVA, dempto communi VA remanebunt latera VD, & VT æqualia. Quare etiam oppositi anguli apud D, & apud T erunt ęquales ex propos. 16. huius.

Si verò crus productum VA, & non productum VT, Sint maiora semicirculo DVA, dematur communis arcus VA, & remanebit crus productum DV minus, quam crus non productum VT. Quare, & angulus oppositus T minor erit angulo D ex propos. 19. huius. E contra dicendum est, si crura sint minora productum AV, & non productum VT semicirculo DVA: Nam dempto communi VA remanebit maius crus DV, quàm VT: vnde maior quoque erit angulus T angulo D ex 19. huius.

THEOR. X. PROPOS. XX.

Si duo anguli alicuius trianguli sint æquales, crus adiacens extra sumptum vsque ad semicirculum æquabitur cum crure opposito alteri angulo, toti semicirculo; Si verò angulus adiacens cruri producto sit maior altero, latus productum, & non productum erunt maiora semicirculo: Si verò angulus adiacens cruri producto sit minor, latus productum, & non productum erunt minora semicirculo.

SIt præcedens figura, & producatur crus VD trianguli VDT, & ob ęqualitatem angulorum apud D, & apud T in triangulo DTV arcui VT, arcus VD est æqualis: addatur arcus VA cruri VD erit semicirculus. Ergo, & additus arcus VA cruri ęquali VT efficiet semicirculum.

Probatur 2. pars. Si VD sit minus crus, & VT sit maius, eo, quod angulus oppositus T cruri VD sit minor, quàm angulus D cruri VT oppositus, addita pars AV, quę iuncta parti VD faciebat semicirculum iuncta cruri VT maiori faciet magis semicirculo.

Probatur 3. pars. Nam si VD sit maius crure VT ob angulum VTD ei oppositum maiorem angulo D: addita pars VA ipsi VT minori ipsâ VD faciet semicirculo minus, quę iuncta cruri VD maiori faciebat semicirculum:

THEOR. XI. PROPOS. XXI.

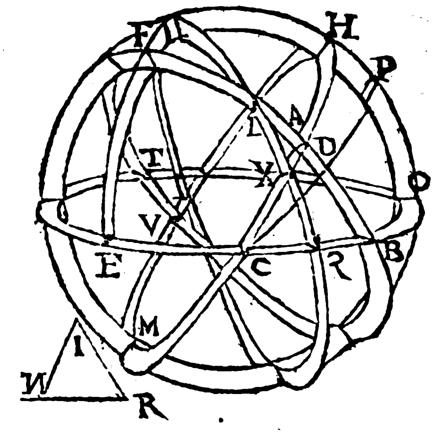
Duo triangula sphærica æquiangula singulis angulis æqualitate respondentibus habebunt etiam latera illis subtensa æqualia.

SIt triangulum RNI in fig. pr. 16. æquiangulum triangulo ZCX, ita vt Z angulo R, & X angulo I, & C angulo N sit æqualis, dico, & esse ęquilaterum singulaque latera singulis lateribus ęqualibus angulis subtensa ęquari.

Et quidem si concedatur saltem vnicū latus ZC ęquale lateri RN, cùm anguli ad basim sint quoque ęquales, iam clarum est ex prop. 15. huius, cętera quoque latera ęquari, & totum triangulum toti esse ęquale.

Quęstio itaque remanet, si omnia latera dicantur esse inęqualia, & tunc si ZC nō ęquat RN ęquet illud maius CB, ita si CX non ęquat RI, ęquet illud maius CA, & ducatur BA, & ita triangulum BAC, ex 11. h. erit ęquiangulum triangulo ZXC, propterea; apud B angulus ęquabitur angulo apud Z, & X ipsi A interni, vnde, & externi LXC, & LAX. Sed ex propos.

propof.2. huius angulus B ęquat etiam angulum T duorum femicirculorũ BAT,& BET: quare trian-



gulum ZLT habet duos angulos ęquales Z, & T ad bafim ZET. Vnde ex pręced. arcus productus BL, & oppofitus ZXL ęquabũtur femicirculo. Rurfus, quia externus X ęquatur angulo A; externus verò A ęquatur angulo V, erunt anguli LXC, & V comprehenfus ab arcu XMV, & LETV ęquales. Quare etiam ex pręc. arcus AL productus,& LX oppofitus non productus erunt ęquales femicirculo; hoc autem eft abfurdum; quia funt partes crurum BL, & ZL, quę vt fupra oftenfum eft, ęquant femicirculum.

EXPENSIO IV.

De laterum, & angulorum fpecifica dependentia.

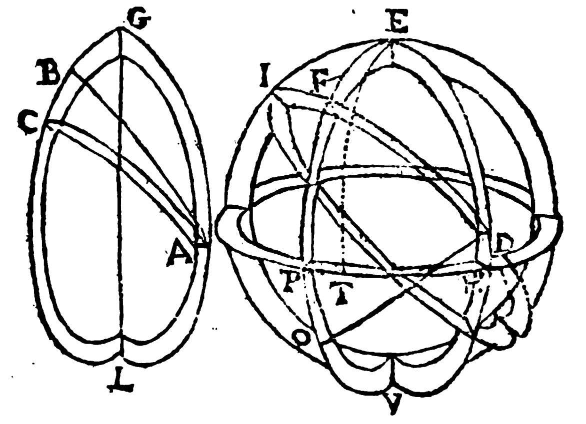
Species angulorum erit; fi fciamus; an fint acuti, vel obtufi, vel recti, & laterum an fint illa ęqualia quadranti, vel inęqualia, aut an polus fit in angulo oppofito, vel non fit, quem fubtendunt.

THEOR. I. PROPOS. XXII.

Si detur aliquod triangulum, cuius duo anguli noti quantitate, & crus fubtenfum vni ex ipfis fit notum in quantitate; reliqua verò latera fint nota, nempe quòd fint, vel maiora, vel minora quadrante feorfim fumpta, non dabitur aliud triangulum, quod habeat angulum, aut crura reliqua in quantitate, aut maiora, aut minora dato.

Sit datum triangulum DFE, cuius duo anguli quantitate noti fint E,& F,& crus DF angulũ aliquem notum fubtendens; fit verò cognitum V.g. DE latus reliquum, effe quadrante minus. Dico *non poffe dari aliud triangulum in eadem quantitate noti lateris*, & duorum angulorum, quòd deinde habeat reliquum angulum, feu crus aliquod dato, vel maius, vel minus.

Quod fi detur; fit illud CAG; cuius crus CG afferatur ab aduerfarijs maius crure FE, & ponatur nihilominus angulum G effe æqualem angulo E, & C ãgulo F,& AC notũ quãtitate effe ęquale cruri DF; reliquaq; latera DE,& AG fint cognita in fpecie; nempe, quod ambo fint quadrante minora.



Affero non poffe hoc effe fine abfurdo, fiquidem crus CG ponitur ab aduerfarijs maius, quàm EF detruncetur crus ęquale CB. Quia igitur angulus C ex hypothefi ęquatur angulo F, & latus AC lateri DF,& crus CB factum eft ęquale cruri FE; triangulum tòtum DFE ęquabitur triangulo ABC, & fic etiam angulus in eo B ęquabitur angulo E, cui ęquabatur ex hypoth. angulus G, erunt ergo ęquales angulus G, & B trianguli ABC; ideoque etiam angulus L ad femicirculos ęqualis ipfi G ęquabitur ipfi B; Quare AB,& AL latera oppofita cũ fint anguli ęquales ad bafim BL erũt ęqualia; Cũ ergo AL, & AB fint ęqualia, fi ipfi cruri AG addatur crus AB, equabitur femicirculo, vt ęquabatur priùs AG iunctum ipfi AL: Ergo crura AG, & AB funt femicirculo ęqualia ex 20. propof. huius; fed BA ęquat ED quadrante minus, ergo AG quadrante eft maius contra thefim. Quare aliud triangulum exhiberi nõ poterit ęqualium oppofitorum angulorum, & lateris, alijs lateribus fpecie notis, & deinde habeat crus aliquod minus altero dato.

Quòd fi detur triangulum, cuius DE crus notũ fpecie fit quadrante maius, & contendant aduerfari dari aliud non ei ęqualium laterum fit datum DEF,& ab aduerfarijs exhibitum ABC, cuius BA fit quadrante maius, & habeat crus CB minus, quam FE, dicaturque C ęqualis angulo F, & B, angulo E,& FD lateri AC: tunc prolungetur latus CB, vfque ad ęquationem lateris FE in G, eritq; triangulũ AGC ęquale triãgulo DEF ex prop. 11. h. ob C ęqualem angulo F, & crura ambientia correfpondentes AC ad DF, & CG ad EF ęqualia: quare angulus G æquabitur angulo E, & ideo angulo B. Sed angulus G æquatur angulo L, ergo LBA,& L ęquabuntur, ideoque & latera AB, & AL angulis oppofita æqualibus; Si ergo addas AG ipfi AB faciet duo crura æqualia femicirculo: ex propof. 20. huius, fed AG ęquat DE maius quadrante. Ergo AB erit contra thefim minus quadrante.

Quare patet cur crura fpecie nota debeant effe; quia; fi non fit nota, tunc poteft dari triangulum quod habeat C angulum æqualem angulo F, & G angulo E, & crus CA cruri FD; quod tamen habeat aliud crus angulo C noto oppofitum, nempe BA minus quadrante, quia tunc etiam angulus B ęquatur in CBA triangulo angulo G, & ideo angulo E, cum fcilicet BA eft minus quadrante; GA verò maius, vt fimul æquent quadrantem: Vnde pro latere GA, de quo nefcimus, an fit, vel maius, vel minus quadrante, poffet inueniri crus BA, cum tamen velemus reperire crus AC.

THEOR.

THEOR. II. PROPOS. XXIII.

Si triangulum sphæricum, cuius noti sint quantitate duo anguli, & nota quoque crura angulum incognitum claudentia, in quorum reliquo nō sit lateris polus nullum aliud triangulum tale dabitur, quod reliquum angulum ignotum, aut crus habeat quantitate diuersum.

COgnascantur trianguli DFE duo anguli F, & E quoad quantitatem, & item quoad quantitatem, sint pariter nota duo latera claudentia angulum ignotum DE, & DF, in quo angulo ignoto polus lateris FE non sit. Dico, *quod omne aliud triangulum in cognitis æquale; erit huic æquale*, etiam in illis, quæ cognita non sunt angulo, & latere. Quod si non est verum; detur aliquod aliud, & sit CAG, cuius angulus G sit æqualis angulo E, & C angulo F trianguli noti, latera quoque singula suo correspondenti CA lateri DF, & AG lateri DE, & in A non sit polus lateris GC; & tamen nec angulus A sit æqualis angulo D, nec crus CG cruri EF. Fiat itaque crus GC æquale FE detruncando, vel addendo, & sit CB, trahaturque arcus maximus qui sit AB. Crura itaque AB, & AG erunt æqualia; quòd sint æqualia ambo cruri DE crus AG quidem ex hypothesi; AB verò ex propos. 8. propter ęqualitatem triangulorum est enim angulus C, ęqualis F angulo, cuius latus CB ambiens, ex dicto aduersariorum æquatur lateri FE, & latus aliud ambiens CA lateri FD ex hypothesi, & ideo AB basi DE erit æqualis: Ergo latera prędicta AB, & AG remanebunt ęqualia, & consequenter anguli ABG, & AGB erunt æquales inuicem, vtpote æqualibus lateribus subiecti in eodem triangulo ex prop. 16. huius.

Ex hypothesi autem angulus etiam G est æqualis angulo E, & angulus quoque ABC ab aduersarijs angulo eidem G debet æqualis fateri, cùm sit æqualis angulo ipsi E ex ea ratione, quòd latus CB lateri FE fecerimus æquale, & latus AB probatū sit ęquale cruri ED, & CA, & FD æqualia. Sunt autē duo anguli hinc, & inde ABC ABG æquales duobus rectis ex prop. 3. rursus sunt æquales inuicem, cum ABG sit æqualis angulo G ex primo progreſſ. & eidem ex secundo sit æqualis angulus alter ABC. Quare erunt æquales inuicem, & duobus rectis; Ergo recti. Vnde, & angulus G æqualis ipsis rectus erit; Quare ex prop. 14. primæ partis h. latus AG, & AB transibit per polos cruris, & lateris CG in A contra hypoth. quòd est absurdum. Si verò polus sit in angulo à duobus lateribus cognitis comprehenso E, & anguli sint ambo recti ad basim patet, quod alij anguli ad verticem E, & basis HP possit esse diuersa. Vnde ex illa cognitione nihil certi colligitur, cum multa alia triangula possint dari ita cognita; quæ tamen in basi, & angulo cognito sint diuersa ab eo, de quo quæritur, cum crura EH, & EP possint claudi, vt ET, & angulū minorem E basimq; HT comprendere manendo in eadem quantitate, nempe quadrantium, & faciendo eundem angulum nimirum rectum cum basi HP, seu HT.

THEOR. III. PROPOS. XXIV.

Si cognitionem habeamus quantitatis vnius, anguli, & duorum laterum ambientium alium angulum tertium, quem cognoscamus, vel acutum, vel obtusum, nullum autem rectum. Nullum aliud dabitur triangulum eandem quantitatem, tum laterum, tum angulorum habens, quod non sit huic æquale.

SIt triangulum FDE habens duo latera DF, & DE notæ quantitatis ambientia angulum D: sit etiam angulus F quantitate notus, alius autem angulus constet solum specie nimirum angulus E, quod sit, vel obtusus, vel acutus, dico, quod nullum aliud triangulum habens latus lateri, & aliud latus alteri æquale, & angulum angulo æqualem dabitur, quod cognito non sit omninò æquale in omnibus alijs, dummodo angulum reliquum eiusdem speciei habeat, qui à lateribus cognitis nō ambiatur. Quod si datur sit illud CAG, & sit AG æquale crus DE, & AC æquale DF ambientia angulum A quantitate ignotum, angulusque C angulo F, & reliquus G eiusdem speciei, nimirum acutus prout est angulus E, & tamen crus CG sit maius, quam FE; detruncetur, itaque crus æquale CB, & ducatur arcus circuli maximi AB.

Nunc Probatur sequi contra hypothesim, angulos specie cognitos ambo acutos esse æquales duobus rectis. Latus AC, cùm sit æquale lateri DF, & latus CB lateri EF, comprehendantque angulum C æqualem angulo F ex propos. 11. huius efficient angulos ad basim B, & A in triangulo CBA æquales angulis D, & E vnusquisque suo correspondenti in triangulo FED, & basim AB ęqualem basi DF. Sed etiam basis AG ex hypothesi ponitur ęqualis basi DE; Ergo sunt ęquales AB basis, & AG basis, quare anguli oppositi erunt ęquales nempe G, & ABG. Hic verò angulus ABG cum suo collaterali ABC est ęqualis duobus rectis; quare; si loco eius ponatur angulus G, iste, & ABC erunt ęquales duobus rectis, sed angulus ABC iam probatus est ęqualis angulo E. Ergo angulus G, & angulus E, quorum ex hipothesi quilibet recto minor dictus est, essent ęquales duobus rectis.

Si verò angulus non sit specie notus, non valet propositio; quia poterit dari aliud triangulum notę eiusdem quantitatis, tum anguli vni ex lateribus oppositi, tum crurum, & tamen in cęteris dissentiens; quia scilicet crus ambiens angulum acutum potest ambire etiam angulum obtusum cęteris manentibus, & angulum rectum. Sic crus DF ambiens obtusum angulum DFE potest transferri in O transacto angulo recto P, & ambire acutum DOE, & sic erunt duo triangula DFE, & DOE, quę habebunt angulum E communem, & latus DE idem, & crus DF cruri DO ęquale, & tamen in cęteris differentia erunt. Item si angulus non sit notus specie poterit esse rectus, & sic basis poterit esse maior, & minor manentibus cęteris angulis; sit E angulus cognitus quantitate rectus, cęteri verò non cognoscantur tunc P poterit esse rectus, & H rectus, & tamen basis HP, à P in T, & angulus E variari.

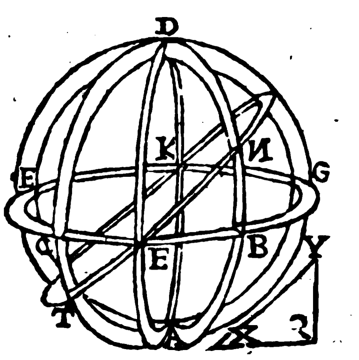
THEOR. IV. PROPOS. XXV.

Si rectanguli sphærici trianguli notam habeam basim specie, & crus, & angulum non rectum quantitate non dabitur aliud triangulum, de quo eadem cognoscam; nisi prædicto cognito æquale.

TRiangulum rectangulum ZYX expositum sit; cuius latus YX oppositum angulo recto sit notum specie, & quantitate crus XZ, & angulus X. Dico, *quòd, si detur aliud rectangulum eadem specie* notum, habens latus adiacens angulo recto æquale dato, & angulum æqualem, in alijs omnibus erit triangulo ZYX æquale.

Sit ergo tale triangulum; cuius crus EB sit cruri XZ, & angulus E angulo X æqualis.

Probo in cæteris quoq; æquari. Abscindatur BC æqualis arcui ZX, vel EB; productoque arcu NB æquali YZ in T ducatur à T normalis TCD, & fiet triangulum ETC; quod ex constructione erit æquale triangulo ZYX. Siquidem angulus TEC est æqualis angulo BEN, qui ex hypothesi æquatur angulo X. Latera verò, facta sunt æqualia. Vnde ex propos. II. huius, & crus TC erit æquale cruri YZ: sed hoc triangulum est æquale triangulo NEB, ergo triangulum NEB erit æquale triangulo YXZ.



Intelligamus DEA maximum esse circulum tractum per duo puncta A, D, quò se secant ADB, & ACD arcus maximi, & per E, tunc sic arguo.

Arcus CE ex hypothesi est æqualis arcui EB, vel XZ, & ideo angulus CAE æqualis angulo EDB, cum arcus CB sit normalis; arcus EA æqualis arcui ED, cum sit quarta circuli angulus NEB æqualis angulo TEC: quare, & residuum angulorum NED residuo TEA quadrãtium GED, & FEA erit æquale, qui angulus residuus à prædictis cruribus clauditur; quamobrem ex propos. 15. totum triangulum residuum NED erit æquale toti TEA, & basis ND basi TA. Ablatis, ergo basibus æqualibus illis, à quartis circuli AC, & BD remanebunt crura æqualia NB, & TC.

Probatur etiam de cruribus TE, & NE: Nam cum triangula NDE, & TAE sint æqualia, vt ostendi Ergo, & bases erunt æquales ET, & EN in triangulis æqualibus TAE, & NDE.

Oportet autem scire crus oppositum angulo recto. Nam illo cognito omnia alia necessario cõspirãt in triangulum idem, at illo non cognito, sed alio crure non erit idem triangulum necessariò, cum cognito angulo, & crure possit esse basis diuersæ quantitatis.

Nam ponamus triangulum NAB esse talis naturæ, quam descripsimus propos. 20. quòd eius complementum ND esset cum crure NE æquale semicirculo; tunc angulus N esset æqualis angulo A, & consequenter huic æquali angulo D ex prop. 2. Ita angulus D, & angulus N erunt ijdem, & crus BE idem, & tamen triangula BEN, & BDE erunt diuersa; Sic BN in triangulo KNB, & BNE est eadem tamen basis KN, & crus KGB non est idem cum NE, & BN. Oportet ergo scire basis saltem speciem cum alio angulo, nempe si sint, seu arcus maiores semicirculo, vel minores, ne generent fallacias in argumentando, quòd teste Clauio, lib. primo reuolutionum, Copernicus, & Regiomontanus agentes de triangulis sphæricis in assignatis casibus non aduertentes mirè hallucinati sunt.

EXPENSIO V.

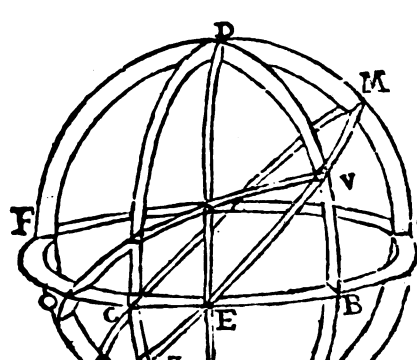
De specie laterum, & angulorum cognoscenda.

LIcet multoties ipsum triangulum propositum, de quo tria in quantitate innotescant, seu latera, seu anguli, vt cæteræ partes, deinde reperiantur, vt plurimùm offerat speciem quoque partium incognitarum quantitate; aliquandò tamen, euenit, quòd propositum triangulum, seu suo situ, seu alia ratione nullam partium incognitarum specificam notionem exhibeat: vnde operæ pretium tunc erit aliquas hic assignare rationes, vnde specifica cognitio desumatur.

THEOR. I. PROPOS. XXVI.

Cuiuscumque trianguli sphærici duo anguli super eandem basim erunt æquales duobus rectis simul sumpti: si reliqua latera simul sumpta erunt æqualia semicirculo, at si sint maiores, maiora, si verò sint minores duobus rectis, crura quoque erunt minora semicirculo.

TRiangulum AZV exhibeatur, cuius duo anguli dati VAZ, & AZV super eandem basim AZ duplici recto æquiualeant. Dico, *& latera subtensa AV, & VZ fore semicirculo æqualia.*



Probatur. Cum enim collaterales anguli AZV, & DZV sint æquales duplici recto ex prop. 3. sicut ex thesi VAZ; & AZV; si auferatur communis AZV erunt æquales VZD, & VAZ ad inuicem; quòd cum ablato communi AZV ex hypothesi, essent æquales duplici recto, & ideo ex 2. propos. huius VZD, & D erunt inuicem æquales. Quare ex propos. 29. erũt æqualia semicirculo trianguli DVZ cruris DV complementum AV, & basis VZ, nempe reliqua crura trianguli propositi AVZ.

Quòd

& quod si A angulus AZV sit maior quilibet recto, cũ AZV, & collateralis DZV angulus sit sẽper æqualis angulo duplici recto, sequitur, quòd ablato AZV, qui cum DZV est ęqualis duobus rectis, remaneant angulus A, & ideo D angulus, angulo DZV maior quoque. Et hinc ex propos. 20. quòd existente minori VZD angulo D, quod complementum VA, & basis VZ sint maiora crura semicirculo.

At si angulus A esset minor, cum angulo AZV quilibet recto; esset collaterali DZV, angulus D æqualis angulo A pariter minor, vnde ex prop. 20. eadem complementum VA, & basis VZ remanerent minora semicirculo crura dati trianguli AVZ.

COROLLARIVM I.

Hinc est. Quod si habes specificam cognitionem trium angulorum V. g. angulorum A, & AZV, & AVZ potes deuenire in cognitionem specificam laterum. Nam si duo ex istis angulis erunt super latus aliquod assumptum V. g. AZ; videbis an tertius, cum altero ipsorum faciat duos rectos. Nam latera ambientia tertium tunc erunt æqualia semicirculo, si faciant magis, quàm duos rectos, latera tertium angulum ambientia erunt maiora semicirculo, quòd si minores simul sumpti sint duobus rectis erunt minora tertium angulum claudentia latera semicirculo.

COROLLARIVM II.

Quod si duorum angulorum ad basim AZ, & vnius lateris habeas notitiam specificam, reliquorum quoque laterum specificam notitiam habebis. Nam si latus AZ oppositum minori angulo AZV erit quadrans certum est ex Coroll. propos. 18. quòd aliud crus AV angulo maiori opposi-tum AZV erit maius, ideo; quòd simul erunt maiora semicirculo. Sic si latus AV oppositum maiori angulo non excedet quadrantem latus oppositum minori AZ minus erit quadrante. Vnde duo latera tertium angulum ambientia erunt minora semicirculo.

THEOR. II. PROPOS. XXVI.

Si sint in vnoquoque triangulo duo latera quadrantibus æqualibus singula æqualia in angulo verticali erit polus.

Patet, quia polus circulorum maximorum distat quadrante à circulis, quorum est polus. Si ergo singula duo latera BD, & DC in triangulo BDC, sint quadrantes erit in angulo D polus.

COROLLARIVM

Hinc facilè fallaciam propos. 22. vitabis, si latera cognita erunt, vel maiora, vel minora quadrante.

THEOR. III. PROPOS. XXVII.

Cuiuscumque trianguli sphærici duo anguli super eandem basim erunt æquales duobus rectis simul sumpti, si latera reliqua simul sumpta sint æqualia semicirculo, & si sint maiora maiores; si minora, minores erunt duobus rectis.

Probatur. Quia VBA, & ZV latera in triangulo VAZ sunt ex pręsupposito ęqualia semicirculo, producto latere VA vsque ad semicirculum in D, erunt in triangulo VZD angulus VZD, & D ęquales ex propos. 19. huius. Sed collaterales ad Z nimirum VZD, & VZA sunt æquales duobus rectis. Ergo ablato VZD ęquali angulis æqualibus A, & D (tales enim sunt ex propos. 1.) remanebunt VZA, & VAZ super eandem basim AZ æquales duobus rectis.

Si verò sint duo crura AV, & VZ maiora semicirculo maiores erũt ãguli A, & Z simul, duobus rectis Nam ex propos. 19. maior erit angulus D, & consequenter ęqualis A, quam VZD, qui cum collaterali est ęqualis duobus rectis: illo VZD, itaque ablato minori angulo, remanent A, & collateralis VZA maiores duobus rectis super eandem basim ZA: si enim quando ęquales erant D, & VZD ęquabantur duobus rectis VZA, & A, modo quia D est maior ob augmentum laterum VA, & AZ vltra semicirculum, erunt quoque illi minores, & è contra angulus A, & angulus AZV maiores duobus rectis.

Si verò crura ZV, AV sint minora semicirculo, erit D minor angulus, quàm alter in eodem triangulo VZD, qui erit maior, ex propos. 19 & consequenter angulo A. Ablato itaque VZD maiori, & cum collaterali VZA ęquali duobus rectis remanent VZA, & A: anguli minores duobus rectis.

COROLLARIVM.

Hinc est. Quòd si duorum laterum habeamus cognitionem specificam, & anguli inueniemus, & cognoscemus specificè reliquos angulos, an sint ambo, vel maiores, vel minores duobus rectis ad effugiendam fallaciam propos. 14.

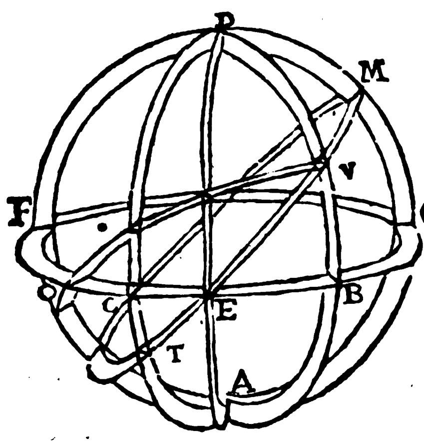
Nam quia scio crura VZ, & AV esse maiora semicirculo, cognosco quoque duos angulos A, & Z in triangulo VZA esse maiores duobus rectis, quod si deinde per cognitionem quantitatiuam agnoscam VZA angulum esse minorem recto, angulus A erit obtusus.

At si latera VZ, & AV essent minora semicirculo, essent quoque anguli Z, & A in triangulo VAZ minores duobus rectis; sed si habeo cognitionem, quod Z, aut rectus, aut maior recto sit, ideo A minor erit.

THEOR. IV. PROPOS. XXVIII.

In omni triangulo sphærico rectangulo, cuius duo perpendiculares arcus sint quadrante minores, anguli reliqui erunt acuti, & si reliqui anguli sunt acuti, erunt omnes arcus quadrante minores.

SIt triangulum rectangulum EVB, & sint arcus VB, & EB quadrante minores. Dico *angulos apud* B, *&* V *esse acutos*.



Producatur crus EB, & BV vsque ad quadrantem in O, & D. Atque per E ducatur circulus AED à puncto D.

Probatur DEA est circulus maximus. Ergo puncta D, & E absunt quadrāte ab eius polo G, ergo GD est quadrans sicut, & GE: quare angulus GED est rectus, & hinc GEM minor recto.

Sic quia arcus OB cadit perpendiculariter ob angulum rectum B super circulum DBA, poli eius in ipso erūt circulo BO, & OV; sed poli absunt quadrante à circulo maximo: ergo erit in O polus circuli ABD: quare OV erit quadrans, & BVO angulus rectus, ergo BVE erit acutus.

Probatur secunda pars, & sint anguli BVE, & EBV acuti: fiant recti. Quia poli circuli maximi absunt quadrante ab eo, ideo poli circuli maximi DBA, erunt in O, ergo BE minor erit quadrante. Sic, quia poli circuli maximi FEG erunt in D, ideo crus BV minus erit quadrante: At quia poli circuli maximi GMD erunt in E, ideo crus EV erit minus quadrante alioquin, & EB esset quadrans.

COROLLARIVM I.

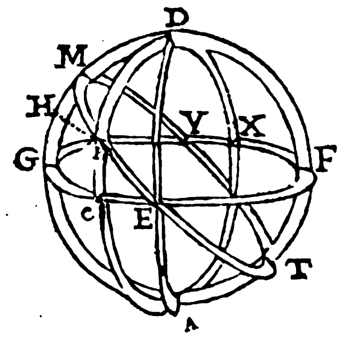
HInc est, quod si rectangulum triangulum omnes reliquos acutos habeat angulos, quòd certò affirmari possit latera esse quadrante minora ad effugiendam fallaciam propos. 14.

COROLLARIVM II.

HInc etiam sequitur, quod si alicuius trianguli sphærici rectanguli duo arcus perpendiculares sint quadrante maiores, vt IDX, & CEFX. vel etiam anguli ab basim I, & E obtusi, quod ipsa basis sit quadrante minor. Quoniam si crura IDX & CEFX sunt quadrante maiora CI, & CE residua erunt minora. Vnde anguli ad basim I, & E in triangulo ICE erunt acuti ex præc. Ergo reliqui externi obtusi, qui pertinent ad triangulum, cuius crus IDX, & alterum CEFX. Vnde basis erit IE eadem quadrante minor. Et idem dicas de angulis conuertendo propos.

COROLLARIVM III.

SIt verò in triangulo rectangulo perpendiculare crus sit maius, quàm quadrans, at alterum sit minus, vt in triāgulo YIC, crus CI, & crus YGC, basis YMI erit maior quadrante & anguli reliqui vnus quidem maior recto, alter verò minor. Nam angulus GYM erit æqualis angulo CEI ex prop. 2. angulus MIC externus obtusus, eòquòd



internus CIE pertinens ad triangulum CIE sit ostensus acutus ex propos. 18. basis verò erit maior quadrante. Nam basis IE residua ostensa est quadrante minor.

COROLLARIVM IV.

QVòd si anguli reliqui alter acutus sit, alter obtusus, crura, vnum erit maius, alterum minus quadrante, sed basis quadrante maior.

Nam angulus apud Y acutus in triangulo YCI æquatur angulo apud E in triangulo CIE; ideo angulus E erit acutus; angulus quoq; I reliquus obtusi externi erit acutus in eodem triangulo CIE: Vnde duo crura, & basis erit minor quadrante. Ergo residuum basis IMY, & cruris CGY erunt maiora quadrante, crus verò CI remanet idem minus quadrante.

COROLLARIVM V.

SI angulus in sphærico rectangulo est acutus, vt Y, & arcus adiacens est maior quadrante, vt YGC; etiam angulus oppositus MIC erit obtusus; alioquin si esset rectus, sequeretur, quod arcus quoque YGC esset quadrans, contra hypothesim, quia tunc polus esset in circulo DCAX, & GCFX, idest in X communi puncto ex propos. 4. 1. part. Si verò esset acutus iam essent duo acuti; Vnde arcus YGC esset quadrante minor ex propos. 18.

Quod si angulus est acutus, & adiacēs crus perpendiculare est minus quadrante, erit quoque angulus alter acutus ei cruri oppositus. Patet, quia si esset maior, crus oppositum esset maius quadrante ex præc. Cor.

COROLLARIVM VI.

SI angulus est acutus oppositum crus perpendiculare est quadrante minus, quod si est obtusus vnus angulus, perpendiculare crus erit maius quadrante. Nam si esset minus etiam angulus esset acutus contra thesim.

Nam vel erunt duo anguli obtusi, & sic ex Coroll. 2. duo crura perpendicularia erunt quadrante maiora, quod si obtusus, & alter acutus, adhuc ex Coroll. 3. erit crus oppositum angulo maiori maius quadrante.

Et idem dicas de acuto. Nam duo anguli acuti faciūt crura minora quadrante, & vnicus acutus Y dat crus ei oppositum minus quadrante velut CI, vt patet consideranti.

THEOR.

THEOR. V. PROPOS. XXIX.

In omni triangulo sphærico Isoscele, si duo crura æqualia sint quadrante minora erit angulus vterque ad basim acutus; si maiora obtusus; si æqualia quadranti rectus. At è contrà de angulis, si anguli æquales ad basim sint acuti, arcus erunt minores quadrante, si obtusi maiores, si recti quadranti æquales.

Sint enim primo GD, & DB æqualia crura quadranti, angulus sit ad verticem D quicumque, semper anguli ad basim B, & G erunt recti. Siquidem facto polo in D, quia GD, & DB sunt quadrantes GB ductus circulus erit idem ac basis, nempe circulus maximus, & ideo ex Coroll. I. prop. 14. part. I. huius, anguli apud G, & B recti erunt.

Quod si sint in triangulo Isoscele B V E minora crura quadrante BE, & BV. Dico *angulos ad* B, *& V esse acutos*.

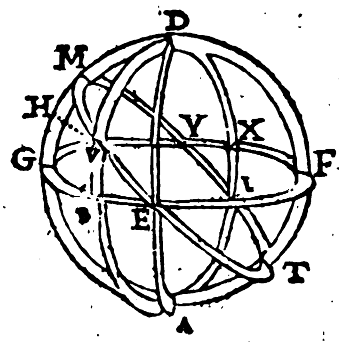
Probatur. Quoniam enim crura ponuntur minora quadrante producto latere BE vsque ad semicirculum in Y erit BGY maius quadrante, & BV minus, vt priùs. Vnde angulus apud V, scilicet MVB maior angulo MYG, vtpote oppositus maiori lateri ex propos. 18. huius. Sed angulus Y æquatur angulo B ex I. huius. & V internus ex Thesi æquatur angulo B trianguli VEB: Quare angulus externus MVB superabit internum. Vnde internus erit acutus; cùm simul ambo sint æquales anguli duobus rectis ex propos. 3. h. & ideo B acutus erit.

Et hinc patet quoque latera maiora quadrante habere oppositos angulos obtusos; siquidem EFX, & VDX crura residua maiora quadrante habebunt angulos oppositos obtusos DVE, & VEF, vtpote residuos ab angulis VEB, & EVB.

Patet quoque secundam partem oppositam esse veram. Nam in triangulo Isoscelle GBD si anguli G, & B sint recti, GD, & BD crura erunt quadrantes eo quod in arcu GBEF sit polus.

Si verò anguli sint acuti in Isoscele triangulo EVB arcus BV, & BE erunt minores quadrante. Nam ex propos. 20. si duo anguli sint æquales crus BGY, & crus BV æquabuntur semicirculo. Sed crus BGI, vtpote angulo oppositum obtuso, quod sit residuum anguli EVB, est maius crure BV oppositum angulo Y minori, vel B ex propos. 18. huius. Ergo est maius YGB quadrante, cum si æquaret quadrantem etiam æquaret BV, quia duos quadrantes, idest semicirculum æquarent. Quadere cum YGB sit crus maius quadrante crus BV erit minus, & BE quoq; vt eius residuum.

Quare patet angulos quoque obtusos obtinere latera opposita quadrante maiora, nam triangulo cuius crura sint EFY, & XDV, & basis VE, quia E, & V anguli in triangulo EVB ostensi sunt rectis minores, erunt reliqui externi obtusi, & quia BE, & BV crura trianguli EVB sunt ostensa minora quadrante reliqua EFX, & VDX erunt maiora, Quadere si aliquis Isoscelles habeat angulos ad basim obtusos, vt DVE, FVE, crura, vt EFX, & VDX erunt quadrante maiora.



COROLLARIVM I.

Hinc euenit, quòd, in omni triangulo sphærico, cuius omnes arcus sint quadrante maiores, vel vnus quadrans, omnes anguli sint obtusi. Nam in triangulo EID, cuius duo crura DXI, & DE sint maiora quadrante, basis autem ETI. Detruncetur DI in X, ita vt DX æquet crus minus, & ducatur EFX arcus. Angulus itaque FED æquabitur angulo FXD, sed cum sint maiora crura quadrante, vel quadrantes, anguli erunt obtusi, vel recti, ergo tanto magis addito angulo FET angulus DET obtusus erit, & sic de quocumque alio asseras.

COROLLARIVM II.

Hinc quoque educitur omnes arcus esse quadrante minores, si omnes anguli sint acuti. Nam si VMD trianguli omnes anguli sunt acuti maiori angulo DMV fiat āgulus æqualis MVD. Erūt itaq; duo oppositi æquales; acutus verò est angulus M ergo, & angulus æqualis DVH: quare, & crura subtensa erunt minora quadrante ex præced. DH, & MV, ergo tantò magis MD.

Aduerte tamen, quod hæc duo Corollaria non conuertuntur: ex eo enim quod omnes anguli sint obtusi non infertur omnia latera esse quadrante maiora. Nec ex eo, quod omnia crura sint quadrāte minora infertur omnes angulos esse acutos: In triangulo enim cuius crura VDX, & XFE basis BV est minor quadrante, tamen anguli omnes obtusi sunt, vel vnus rectus tantum. Et sic in triangulo EBV omnia crura sunt minora quadrante tamen angulus B erit, vel rectus, vel obtusus, vt patet consideranti.

EXPENSIO VI.

De casu perpendicularis in triangulis sphæricis.

QVoniam ad sollutionem triãgulorũ obliquãgulorũ inter alias regulas illa est expedita, & facillima, per quam triangula obliquangula ad duo rectangula reuocantur ducendo perpendicularem. Ideo hìc de casu perpendicularis breuiter agendum, vt omnis postea in sphæricorum solutione triangulorum relegetur difficultas.

THEOR I. PROP. XXX.

In omni triangulo sphærico, si anguli ad basim sint, aut obtusi ambo, aut acuti, normalis arcus intra triangulum cadit.

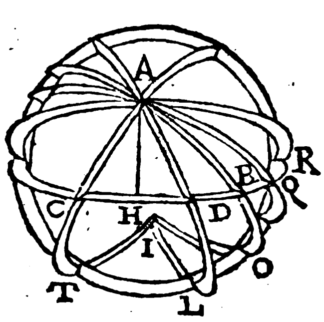
SIt triangulum DAC, & duo anguli D, & C ad basim CD sint acuti. Dico *perpendicularem intra triangulum DAC cadere.*

Probatur ex Coroll. 5. propos. 28. Nam cadat extra. & sit AB, & sequetur absurde simul esse AB maiorem, & minorem quadrante. Quoniam enim C ponitur angulus acutus, erit crus ei oppositum AB perpendiculare minus quadrante. Rursus, quia D trianguli ADC est acutus, externus ADB erit obtusus. Quare crus normale AB ei oppositum erit quadrante maius ex eodem Coroll. minus inquam. & maius quadrante, quod esse nequit. Idem demõstrabis in triãgulo DCLTI, in quo obtusi anguli sunt DCT, & CDL ad basim. Nam si IOB sit crus normale extra cadens, DCT obtusus requiret illud maius quadrante & BDL acutus collateralis anguli CDL requiret illud DOT minus quadrante.

THEOR. II. PROPOS. XXXI.

In omni triangulo obliquangulo, cuius duo anguli ad basim sint vnus acutus, alter obtusus; perpendicularis minor quadrante extra triangulum cadit ad partes anguli acuti.

SIt triangulum QAD, angulusque Q in illo sit acutus alter D obtusus, & AB perpendicularis dicatur intra triangulum cadere, & sequetur idem absurdum præced. propos. Nam quia Q ponitur angulus acutus normale crus AB intra cadens erit minus quadrante ex propos. 28. Coroll. 6. h. Rursus quia QDA ponitur obtusus, crus orthogonale AB erit maius quadrante, maius, & minus, quod esse nequit.



Quod verò normalis minor quadrante cadat ad partes anguli acuti patet ex prop. 28. h. Coroll. 4. quia acutus angulus in rectangulo subtendit crus minus quadrante.

THEOR. III. PROPOS. XXXII.

In trianguli sphæ ci basim, cuius duo crura sint minora quadrante, aut maiora duo crura perpendicularia cadere nequeunt.

PRob. Nam cadant in CAQ triãgulo, & sint AB, & AD. Itaq; ex Coroll. 2. prop 13. h. tract. part. I. in CDQ circulo basis, polos habebunt. Sed ex Coroll. propos. 18. huius par. I. intersectiones maximorum circulorum mutuæ quadrante distant à circulo, in quo polos habent, ergo intersectio A à circulo maximo CDQ quadrante distabit. Quapropter AB, & AD putatę normales quadrantes sunt. Quia ergo punctum A distat quadrante à circulo QDC, etiam AC, & AQ quadrantes erunt contra thesim, & idem dicas, si anguli sint obtusi ob eandem rationem. Vnde si duæ perpendiculares in basim cadunt etiam crura perpendicularia erunt, & anguli duo ad basim recti.

THEOR. IV. PROPOS. XXXIII.

In nullo triangulo sphærico, cuius angulus ad basim sit obtusus, vel rectus: alter verò acutus, duo arcus æquales etiam si non normales cadere possunt.

SIt triangulum RAD, & angulus in eo D ponatur obtusus, angulus vero QRA apud R. acutus, deinde si cõtendat aliquis, posse cadere intra triangulum arcus ęqualis arcui AB, sit ille QA.

Quoniam itaque AQ, & AB arcus sunt æquales, erunt quoque æquales anguli apud Q & B in ipso ideo normalis arcus ab A ductus intra triangulum QAB cadet, & ideo intra triangulum RAD; sed intra triangulum RAD cadere nequit ex prop. 31. huius, sed extra, cum ponatur anguli ad basim R acutus, & D obtusus in triangulo RAD, ergo caderet, & non caderet intra, quod esse nequit.

THEOR. V. PROPOS. XXXIV.

Duo arcus æquales extra triangulum, cuius anguli ad basim vnus sit acutus, alter obtusus in basim productam cadere nequeunt è regione anguli acuti intra perpendicularem.

SIt triangulum RAQ à cuius vertice A cadat arcus normalis in H, contendatque aliquis, quod è regione anguli R. acuti ab A duo arcus æquales cadere possint inter puncta H, & R, quæ sint AB, & AD.

Probatur. Quia ergo AB, & AD ponuntur æquales, erunt anguli ad basim B, & D æquales, & ideo perpendicularis intra triangulum BAD cadere: crus, ergo AD esset vltra perpendicularem non citra, vt ponitur in Thesi, quod caderet intra D, & Q, & ideo non in H.

TRAC-

TRACTATVS XXIII.

PARS TERTIA.

De maximorum circulorum in sphæra, minorumque interſectionibus, contactibuſque mutuis.

VIſâ mutuâ maximorum circulorum interſectione, vltimus labor ſubit, in conſideranda natura tactuum, & interſectionum, quas faciunt maximi circuli, cum minoribus.

EXPENSIO I.

De Contactibus minorum circulorum.

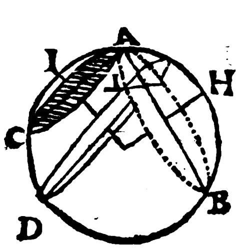
MAximi circuli tangere ſe nequeunt; cum vt probatum eſt, ſe ſolùm ſecare poſſint bifariam; contactus itaque eſt circulorum minorum, vel cum maximis, vel inuicem.

THEOR. I. PROP. I.

Si in ſphæra duo circuli ſecent in eodem puncto circumferentiam eius maximi circuli, in quo polos habent, ſe mutuò tangent illi circuli.

SIt circulus AB, & AC, qui in eodem puncto A ſecent maximum circulum BHAIC, in quo polos H, & I obtinent. Dico *ſe contingere in eodem puncto A*.

* Probatur. Nam in eodem puncto, & non alibi ſecant ABC. Ergo ibi ſe contingunt; neque enim poſſunt in eodem puncto ſecare; niſi in eodem puncto conueniant, & vniantur circuli AB, & AC. Quod autem non alibi poſſint conuenire, patet. Nam in eodem puncto deberent circulum maximum alium cõtingere, vel ergo illũ circulum maximum ſecarent bifariam, polis ſuis I, & H, & ſic eſſent circuli maximi ex prop. 12. contra Theſim, vel non bifariam. Ergo arcus IAH, & alterius maximi eſſet minores ſemicirculo quare BDA, & alius non eſſet circulus maximus contra hypotheſim, cùm arcu HI diſtarent minori ſemicirculo eorum ſectiones.



Quod autem eſſet circulus maximus, qui per alium contactum tranſiret, patet. Nam ductis ad illum contactum diametris planum eius per illos tranſibit ex propoſ. 2. Tract. 22. vnde ex Coroll. 1. propoſ. 14. h. eſſet maximus, cum bifariam circulos CA, & AB diuideret, & per polos I, & H tranſiret.

THEOR. II. PROPOS. II.

In ſphæra, ſi duo circuli ſe mutuò tangant, maximus circulus per eorum polos deſcriptus per eorum contactum tranſibit.

* PRobatur: Nam ſi circulus maximus BAG tranſiens in eadem fig. per polos H, & I minorum circulorum non tranſibit per contactum A tranſibit alibi in L, vel ergo erit ad idem interuallum à polo H, & ſic non erit ad idem interuallum à polo I; alioquin eſſet idem circulus: quòd ſi non eſſet ad idem interuallum à polo I; ſed V: g. ad maius IL; Ergo circulus DL interuallo IL deſcriptus erit maior ſe cotingentibus in A circulis, & conſequenter ſecabit alterum in L: Sed ex præced. propoſ. debet tangere, quòd circulus maximus tranſeat quoque per eorum polos, & per L, in quo ipſum ſecant AB, & DL. Ergo ſecabit, & tanget, quòd eſt abſurdum.

Aliter. Ductis diametris CA, & AB ad contactũ A, cùm ſe tangant in A, erunt in eodem plano ex prop. 2. Tract. 22. Ergo planum circuli per AC, & AB diametros tranſibit. Eritque circulus maximus, cùm eos diuidat bifariam, & tranſibit per polos I, & H ex propoſ. 14. Coroll. 1. part. h.

THEOR. III. PROP. III.

Si in ſphæra duo circuli ſe mutuò tangant, circulus maximus per vnius polos, & per contactum amborum deductus, per alterius quoque polum tranſibit.

TRanſeat circulus maximus ABC in eadem fig. per polum I, & per contactum A. Dico *tranſire quoque per polum H*.

* Probatur. Nam, ſi CAHD tranſiens per I, & A non tranſit per polum H, ducatur aliquis alius, qui tranſeat per vtroſque polos: Vel ergo erit idem circulus, & ſic habemus intentum; vel non idem, & ſic duo maximi circuli ſe ſecant in contactu A, & in polo I. Quare diſtantia IA eſſet ſemicirculus ex propoſ. 12. par. 1. Sed nec poteſt eſſe quadrans, cùm ſit diſtantia AI circuli minoris

noris à suo polo; quæ non est quadrans, cum sphæram mediam non diuidant, vt maximi ex propos. 10. Ergo neque potest esse geminus circulus maximus, quare erit idem, qui per contactum, & per amborum polos transibit.

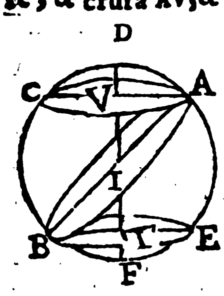
THEOR. IV. PROPOS. IV.

Si in sphæra maximus circulus aliquem circulum minorem tangat, tanget ei æqualem, & parallelum.

TAngat circulus AB maximus, minorem AC; Dico, *quòd, & alterum tanget parallelum, & æqualem circulo minori* AC. Descripto circulo maximo ACB per contactum, & per polum circuli AC, qui transibit, & per polum circuli AB ex 3. h.

Inueniantur poli circuli AC, qui sint F, & D; circaque alterum polum F à plano circuli AC remotiorem describatur circulus ad interuallum BF. Dico *hunc tangere circulum maximum* AB, *esseque alteri* AC *parallelum, necnon, & æqualem*.

* Probatur primò. Quod sit æqualis; ductis enim diametris AC, & AB, EB, & FD. Angulus AID erit æqualis angulo FIB, vtpote ad verticem: anguli verò apud V, & T recti sunt, crus IA verò est æquale cruri IB. Ergo ex propos. 27. elem. I. totum triãgulum AIV toti BIT erit æquale. Quare, & crura AV, & BT erunt æqualia, quæ sunt semidiametri circulorum AC, BE



Probatur quoque secunda pars. Quòd sint paralleli, quia recta DF per eorum polos trãsit; Ergo perpendicularis ipsis est; igitur circuli quoque AC, & EB sunt paralleli.

Probatur tertia pars. Quòd tangat circulus EB circulum AB: quia ex constructione in eodem puncto secat circumferentiam ACBE in B.

COROLLARIVM.

HInc manifestum est puncta contactuum esse per diametrum opposita. Nam tangunt, vbi duo circuli maximi in B, & A, se intersecant, quorum intersectiones semper semicirculo distant, ex propos. 12. par. I.

THEOR. V. PROPOS. V.

Si sint in sphæra duo circuli æquales, & paralleli; maximus circulus, qui eorum alterum tetigerit, reliquum quoque tanget.

SInt in eadem figura, quæ supra duo circuli paralleli & æquales AC, & EB, tangatque BA circulus maximus, alterum eorum in A. Dico, *& reliquum tangere in* B.

* Probatur. Nam sectiones maximorum ACBE, & AB distant semicirculo ADB, sicut etiam contactus minorum EB, & AC distant semicirculo ex Coroll. præced. & diametraliter sunt oppositi.

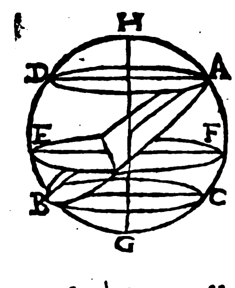
Ergo semicirculus idem inter A contactum, & alterum B, & intersectiones maximorum ACBE, & AIB mediabit, ergo punctum terminans contactum B, & sectionem B, erit idem, vtpote extremum semicirculi ACB, tum contactus, tum sectiones mensurantis.

THEOR. VI. PROPOS. VI.

Si in sphæra aliquis circulus ad aliquem sphæræ circulum maximum obliquus sit, tanget is maximus duos circulos æquales quidem inter se, parallelos autem illi circulo, ad quem obliquus est.

SIt in sphæra circulus quicumque AB obliquus ad aliquem maximum EF. Dico, *quòd hic maximus tanget duos circulos* descriptibiles parallelos dato EF, & æquales inuicem AD, & BC.

Sint H, & G poli circuli dati EF, per quos, & per polos quoque circuli AB circulus maximus describatur ADCB: Deinde centro H interuallo HA circulus minor ducatur AD tangens AB maximum in A; quare ex præcedenti tanget, & alterum ei æqualem, & parallelum CB. Ergo iam habemus AD, & CB esse inuicem æquales, & parallelos.



Probo etiam esse parallelos circulo FE. Nam cum AD sit descriptus super eiusdem FE polos erit ei parallelus ex 19. propos. primæ partis. Vnde omnes erunt paralleli AD: EF, & BC.

EXPENSIO II.

De circulorum minorum, & maiorum intersectionibus proportionalibus, & æqualibus.

POst circulorum minorum tactus communes, oportet eos comparare, & componere cum maximis, & sectiones eorum mutuas considerare.

THEOR. I. PROPOS. VII.

Si maximus circulus maximum secet sectio diameter sphæræ, circulique est.

PRobatur, vt in fig. prop. 4. h. Nam ex 10. primæ partis transeunt per centrum sphæræ, & ambo. V. g. ACBE, & AIB habent illud pro communi centro; sed non possunt habere pro communi centro centrum sphæræ, nisi in communi eorum sectione cum in alijs partibus inuicem nõ concurrant; Ergo communis eorum sectio transibit per centrum. Sed quæ linea transit per centrum sphęrę, circulorumque, eorum diameter est. Omnis ergo sectio maximorum circulorum sphęrę, & ipsorum diameter erit.

THEOR.

THEOR. II. PROPOS. VIII.

* *Si circulus maximus per polos minorem secet, sectio chorda est respectu maximi, & diameter est respectu minoris; quòd si non secet per polos sectio vtrique chorda est.*

SEcet maximus BOAQ per polos B, & A minorem HIFS. Dico *sectionem in minori esse diametrum, in maximo esse chordam* in fig. seq. prop.

Probatur. Quia chorda est linea in circulo dirimens illum in duo segmenta, & vtrumque pariter subtendens: sed sectio FH diuidit maximum BOAQ in duo segmenta FOAH, & FBH, & subtendit ea, ergo chorda est.

Patet verò ex dictis prop. 16. par. 1. huius FH esse diametrum respectu minoris.

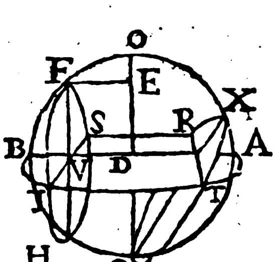
Si verò non secet per polos maximus BRAI minorem XRQT in vtroque circulo sectio chorda est, per se patet cum diuidat vtrumque circulum in duo segmenta circulum quidem maximum in RAT, & RBT; minorem verò in RXT, & RQT segmenta, & omnia subtendat.

THEOR. III. PROPOS. IX.

* *Circulus minor secans duos maximos polos in eorum normali sectione habens. Sectionem illam maximorum diuidit in sinum versum, & sinum complementi. Ipsa verò sectio in duos sinus rectos secatur, etiam si solum in altero maximo tantùm suum polum obtineat.*

SIt circulus AFBQ maximus, qui secet normalē maximum SBIAR sectione AB, & polo E, seu alibi dummodo in AFBQ circulo, ducatur minor circulus FHIS, sectioque eius cum maximo AFBQ sit HF. Dico *sectionem* AB *dirimere* FH *in duos sinus rectos* VF, & VH, sicut, & chordam IS, seu in alio circulo chordam RT.

Probatur. Nam sinus rectus est dimidiata chorda; sed AB sectio diuidit sectionem FH, vel SI, vel TR bifariam, quæ ex præc. est chorda; ergo diuidit in duos sinus; Diuidit autē bifariā, quia



AOBQ, ex pr. 14. p. 1. h. circulus maximus diuidit circulum totum HF, seu XQ bifariam: Vnde transibit per centrum. Ergo maximi, & minoris communis sectio QX, vel FH per centrum transibit, cùm eorum vtraque superficies per centrum feratur, & insistet perpēdiculariter chordę FN, TR, vel SI. Vnde eam bifariam diuidet ex propos. 27. lib. 3. Coroll. 6.

Probatur quoque, quòd sectio FH dirimat semidiametrum, & sectionem BD in duas partes, quarum vna DV sit sinus complementi.

Nam sinus complementi est sinus arcus residui vsque ad quadrantem, vt BF, sed DV est ęqualis ipsi BF. Ergo DV erit quoque sinus complementi; Quòd autem sint æquales DV, & EF patet; quòd, vt sinus debeat esse perpendicularis sectioni, duorum maximorum orthogonaliter se secantium, eo quia OFB debeat esse quadrans, vt FE sinus sit arcus FO, complentis arcum BF, vsque ad quadrantem terminantem in O. Sectio quoque FV ad sectionē DV perpendicularis est ex cit. pr. 14. cor. 1. Vnde DVFE, erit rectangulum, & consequenter latus EF, erit æquale lateri VD.

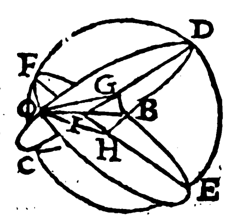
Probatur tertia pars. Nam sinus versus, & pars diametri orthogonalis inter sinum rectum, & circumferentiam intercepta; sed talis est pars sectionis VB. Ergo est sinus versus.

THEOR. IV. PROP. X.

Si in sphæra duo circuli se mutuò secent, maximus circulus per eorum polos ductus secabit bifariam, segmenta eorum circulorum.

DEntur duo circuli in sphæra CD, & EF, qui se mutuò secent in OB. Dico, *quod maximus circulus* DFE, *per eorum polos ductus bifariam secabit eorum segmenta* EFO, & BCO, *sicut* BDO, & BEO.

* Probatur. Nam ex prop. 14. par. 1. h. cor. 1. bifariam circuli DC, & EF secti sunt à maximo circulo EDF. Quare vtraque superficies circulorū EF, & DC circulo maximo EDF perpendicularis erit ex 14. propos. primæ partis.



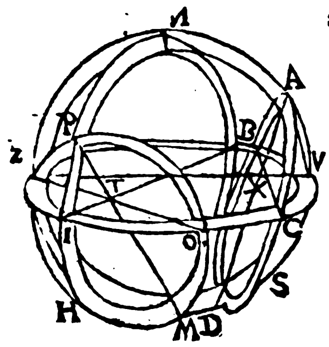
Propterea que eorum communis sectio ex 9. h. quę linea recta erit, cum planæ superficies sint, bifariā secta erit à diametro EF DC per cētra G, & H trāseunte. Cū ergo IO sit æquale cruri IB, & IH crus commune, anguli que ad I hinc inde recti; triangulum totum HIO, toti HBI erit ęquale: Quamobrem, & angulus BHI angulo IHO erit ęqualis, propterea que BF quoque arcus arcui OF, qui angulum mensurant, erit æqualis; & hinc OB arcus residuus de semicirculo EOF erit æqualis reliquo residuo BE semicirculi FBE. Idem ostendi poterit de triangulis BGI, & IGO, quòd sint æqualis, & hinc, quod anguli BGI, & IGO sint æquales, vnde, & arcus eos mēsurantes BC, & OC, & hinc segmenta, vt OIG, & IGB, & cæt. erunt æqualia.

THEOR. V. PROP. XI.

Si in sphæra duo circuli æquales, siue maximi, siue non maximi secent eundem circulum aliquem, & intercipiant circuli maximi per eorum polos transeuntis arcus æquales; eorum segmenta erunt æqualia.

DVplici schemate vtemur, quorum alterum circulos maximos exprimat alterum minores.

Sit ergo circulus ABCD, & alter POZM, qui secent eundem circulum VBCZ, & à circuli maximi per polos secti VBCZ, & secantis PZOM transeuntis intercitercipiat arcum PI æqualem arcui VA alterius circuli maximi, seu etiam eiusdem, dummodo transeat per polos ipsius secti VCBZ, & alterius secantis ACBD; ideoque vtrique plano recti sint isti circuli per polos transeuntes.

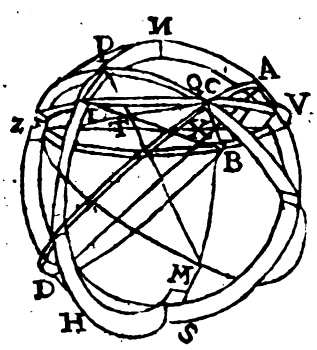


Dico arcus, quos abscindunt se secando esse æquales; nẽpe arcum CVB esse æqualem arcui OIZ; nec non, & arcum CAB esse æqualem arcui OPZ.

Probatur. Quia arcus VA descendit perpendiculariter super vtrumq; planum, quod secat, VX, & XA sectiones erunt perpendiculares sectioni BC, tales quoque erunt sectioni OZ, ob eandem rationem arcus perpendicularis PI, sectiones TP, & TI; & ideo ex propos. 9. sinus arcuum, quibus subtenduntur V. g. AC sinus erit XA, & XC arcus VC, & cęt. & arcus ipsi erunt ex 14. pr. p. 1. h. diuisi bifariam in V, & A, & in P, & I, quibus positis.

Si itaque ostendemus VX sinum esse æqualem sinui TI erit quoq; arcus VC ęqualis arcui IZ, vel VB arcui IO. Sic si ostendemus XA esse æqualem sinui TP ostendemus similiter arcus subtensos esse æquales AC ipsi OP, vel AB ipsi PZ, & ideo arcus integros CVB esse ęquales arcubus OIZ, & CAB ipsi OPZ.

Hoc autem ita est, quia triangula rectilinea VAX, & TPI sunt æqualia, vnde, & latera erunt ęqualia.



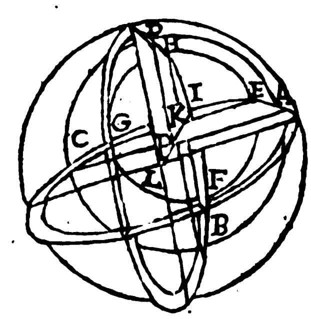
Id verò sic demonstratur VA recta subtensa ob æqualitatem arcuum perpendicularium ex thesi æquatur subtẽsę arcui PI, sic arcus MHIP, & AVSD ęquãtur ob æqualitatem diametrorũ AD, & PM cum circuli ex thesi ponantur æquales, ablato ergo VA ab AVSD, & PI à PIHM restabũt DSV, & IHM æquales arcus quibus ex 26. lib 3. insistent anguli æquales rectilinei VAD, & MPI apud A, & P. Sic, quia VZ sectio, & BI est eiusdem circuli VCZ diameter subtendet æqualem arcum circuli perpendicularis BNI, & VNZ, à quibus ablatis æqualibus arcubus ex thesi VA, & PI restabunt æquales arcus BNP, & ANZ, quibus insistunt anguli rectilinei BIP, & AVZ, triangula itaque rectilinea AVX, & TPI duos angulos æquales habent apud A, & V ijs, qui sunt apud P, & I super basim æqualem VA, & PI, vnde erunt triangula æqualia; & ideo TP æquabitur ipsi XA, sicuti, & TI ipsi XV: ex 27. l. 1. el. quare arcus OPZ, & CAB æquabuntur inuicem, sicut etiam arcus BVC, & ZIO.

THEOR. V. PROPOS. XII.

Si in sphæra maximi circuli à polis parallelorum describantur, truncant eos in partes proportionales, ipsi verò truncantur ab eis in partes æquales.

SInt in sphera circuli paralleli ABCD, & EFHG, à quorum polis describantur circuli maximi BFHD, & AEGC. Dico circumferentias parallelorum interceptas inter circulos maximos, vt AD vel EH esse similes, arcus verò maximorum intercepti inter superficies parallelorum, vt AE, & DH esse æquales.

Sint enim eorum communes sectiones AC, & EG, sic HF, & DB istę erunt parallelæ cum circulorum superficies ipsæ sint parallelæ, rursus se intersecabunt in communi puncto EG, & HF quidem in K, at AC, & BD in P facient autem æqualem angulũ apud K, & apud P, eò quòd sint ex 14. p. 1 planorũ AIL, & IDL sectioni LI perpendiculares.



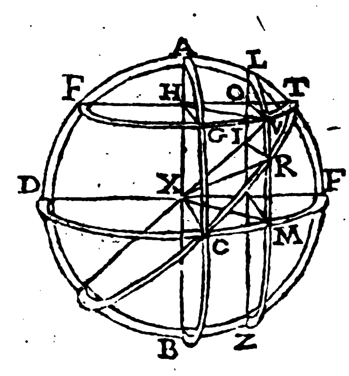
Vnde, & arcus EH, & AD erunt similes, nempe eundem angulum subtendentes, vel eundem numerum graduum comprehendentes; quorum circulus 360. ennumeret.

Probatur quoque secunda pars. Quia enim arcus ex definitione poli sunt æquales à polo I demissi in circulum, vt IE, & IH, sic eadem ratione IA, & ID, si illi minores IE, & IH ab istis maioribus IA, & ID auferantur reliqui AE, & HD erunt æquales arcus.

THEOR. VI. PROPOS. XIII.

Si in sphæra duo circuli maximi se mutuò orthogonaliter secent; circulus verò obliquus tangat vnius parallelum. Parallelus alteri secabit, tum parallelum, tum circulum obliquum in partes similes.

PRoponantur circuli maximi DCE, cui parallelus sit FGT. Deinde orthogonalis illi sit BCA; cui obliquus sit CRT; quem, & parallelum FGT,



quem

quem, & parallelum FGT secet, parallelus LRMZ maximo æquidistans BCA. Dico ita esse arcum TV ad TR arcum, vt est circulus ad circulum, idest. TV, & TR eundem numerum gr. continere.

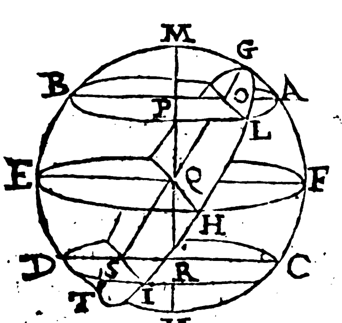
Probatur. Nam triangulum XHT est æquiangulum triangulo OIT, vnde ex 4. propos. 6. elem. ita est XT diameter ad HT diametrum, vt TI ad TO. Ergo ex 19. lib. 5. elem, & reliquum XI ad reliquum OH, vt totum XT ad totum HT, se habebit. Sed HT est æqualis HV, vtpote semidiametri, & XR ad XT, vt pariter semidiametri. Ergo ita se habet XI ad HO, vt XR ad HV, & *permutando*, ita se habet XI ad XR, vt HO ad HV. Quare in triangulis HOV, & XIR, habemus duo latera proportionalia, in quibus notus est angulus, tũ apud O, tũ apud I, quòd sit rectus. Angulus verò reliquus apud X in triãgulo XIR, & reliquus apud H in triãgulo HOV sunt minores recto, eo quod quadrãtũ CRT, & GVT partes sint, ergo ex propos. 7. lib. 6. elem. erunt triangula æquiangula, & angulus apud H erit æqualis angulo apud X. Quare, & arcus eos subtendentes erunt similes, nimirum RT, & VT, vnde, & residui ZC, & VG.

THEOR. VII. PROPOS. XIV.

Si in sphæra duo paralleli circuli, & maximus ipsorum secent aliquem maximum, in arcus æquales inuicem secabunt, & omnes alios in arcus æquales inuicem.

SI in sphera sit circulus ABCD, in quâ etiam paralleli AB, & CD, & maximus ipsorũ FE reperiãtur, secetq; circulum illum in arcus æquales FA, & FC. Dico, *& quemlibet alium V. g.* GHIT *in arcus æquales* LH, *&* HI *secare*.

Probatur. Nam transeat iste circulus ACBD per polos parallelorum MN secabit bifariam, & etiam segmenta ipsorum ex propos. 14. p. 1 h. eruntque diametri AB sectiones, & CD, sic GT, & MN. Vnde se inuicem intercipient, facientq; triangulum OPQ, & QRS. Quia ergo FA, & CF ponuntur æquales erũt portiones diametri, sinusq; æquales PQ, & QR, vtpote æqualibus arcubus subtensæ, vt est videre ex prop. 9. h. Anguli verò ad P, & R recti; anguli autem ad verticem Q æquales: vnde duo triangula rectangula OPQ & QRS erunt æqualia. Ea propter bases quoque erunt æquales QS, & QO: quamobrem arcus quoque HL, & HI, quibus sinus sunt, erunt æquales.



Quòd si datus circulus non transiret per polos, & esset V. g. GLHIT. Fiat aliquis, qui transeat, & tunc ob angulos rectos, & angulos ad verticem æquales, basimque æqualem QO, & QS, vtpote arcubus æqualibus ex hypothesi HL, & HI subtensa; erunt triangula rectangula OPQ, & QRS æqualia. Vnde, & crus QP cruri QR, & ex eo arcus AF arcui FC, hinc verò ad quemlibet alium circulum obliquum priori argumento inferes.

THEOR. VIII. PROPOS. XV.

In sphæra paralleli circuli, inter quos, & maximum parallelorum æquales arcus circuli alicuius maximi intercipiuntur, sunt æquales; illi verò inter quos, & maximum parallelorum maiores arcus intercidunt circuli alicuius maximi, sunt minores.

DVplicem casum habet hæc propositio; quia potest aliquis circulus maximus transire per polos parallelorum, vel non transire: Sed quocumque modo, transeat, siue non transeat, sint itaque paralleli in fig: anteced. AB, & CD minores, FE maximus. Aliquis verò circulus maximus, vt GLHIT non transeat per polos parallelorum NM. At ita secet eos, vt tamen arcus HI, & HL à maximo, & minoribus intercepti sint æquales. Dico, *& minores* ALB, *&* DIC *fore inuicem circulos æquales*.

Probatur. Nam ducto per polos parallelorum, M, N circulo maximo AFNEB, faciet sectiones in quolibet AB, & CD, necnon EF, & TG circulos bifariam secantes ex 14. prop. 3. par. 1. diametrique erunt, & quia arcus HI, & HL ponuntur æquales, erunt arcus FA, & FC æquales ex præcedenti, sicut est EB, & DE. Ablatis igitur arcubus æqualibus FC, & DE à semicirculo ECNDB, & item arcubus æqualibus FA, & EB à semicirculo FAMBE, remanebunt arcus AMB, & CND æquales: Quare, & subtensæ, diametriq; CD, & BA erũt æquales, vnde, & ipsi circuli paralleli CID, & ALB. Et hinc patet secũda pars eodem argumento, nempe, quod paralleli sint inæquales illi, qui arcus inæquales inter ipsos, & maximum parallelorum intercipiunt.

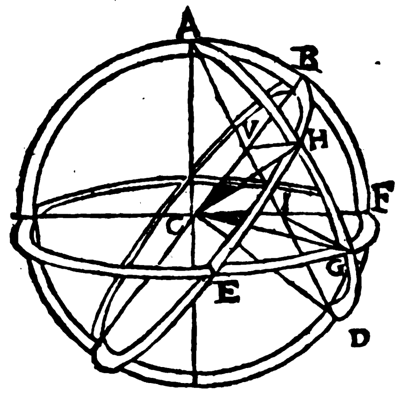
THEOR. IX. PROPOS. XVI.

Si in sphæra circulus transeat per vnum polum vnius, & per aduersum polum alterius circulorum inclinatorum inuicem, ille circulus ab illis abscindet æquales arcus.

SIt circulus AHGD, qui circulorum inclinatorum inuicem FGE, & BHE per polos transeat per vnum vnius nimirum D circuli BHB, & per alterum A alterius FGE, & secet eosdem inclinatos circulos in G, & H. Dico, *quod arcus intercepti* FG, *&* HB *erunt æquales*.

Probatur. Arcus GHA æquatur arcui DGH, quòd quilibet circulus subtensas à suo polo ex defin. 6. habeat æquales. Quare anguli, GDA, & HAD, qui fierent ductis rectis AH, GD, vtpote peripherijs æqualibus insistentes HGD, & GHA essent æquales.

Progress. 2. in triangulo quoque DCA anguli ad D, & A sunt æquales ob æquales semidiametros, quibus subtenduntur ex propos. 14. elem. 1. Trianguli verò DCV angulus rectus est cum DFB sit quadrans ex Coroll. 2. prop. 14. p. 1. sic in triangulo CIA angulus C rectus est eadẽ ratione. Quare reliquus apud V reliquo apud I; triangulaque IAC, & & DVC erunt æqualia. Vnde etiam bases IA, & VD erunt æquales; Ablatâ itaque parte intermein IV communi residuum VA residuo ID erit æquale.



Progress.3. Chorda autem HA æquatur chordæ DG, quas imaginatione suple, vtpote æquali peripheriæ DG, & AH subtensæ. Quia enim GA, & HD sunt æquales, ablata communi portione HG, reliqui arcus HA, & GD restabunt æquales.

Progress. 4. Cum itaque triangulis HAV, & GDI angulus D ex 1. progr. angulo A, & ex 2. latus VA lateri DI, & ex 3. latus AH lateri GD sit æquale. Ergo ex prop. 22. el. 1. erunt æqualia, & basis HV basi GI æquabitur. In triangulis tandem HVC, & GIC habemus IC, & CV crura æqualia ex 2. progr. & HV, & GI ex 4. & HC, & GC sunt radij. Ergo angulus niger angulo nigro æqualis. Et ideo arcus BH arcui FG æquabitur, sicut BG, & EH residui.

THEOR. X. PROPOS. XVII.

Si in sphæra sint paralleli circuli, & describantur maximi circuli, qui vnum quidem parallelorum tangant; reliquos verò secent, circumferentiæ parallelorum interceptæ inter eos maximorum circulorum semicirculos, qui non concurrunt, similes erunt; maximorum verò circulorum circumferentiæ inter duos quoscumque parallelos interceptæ erunt æquales.

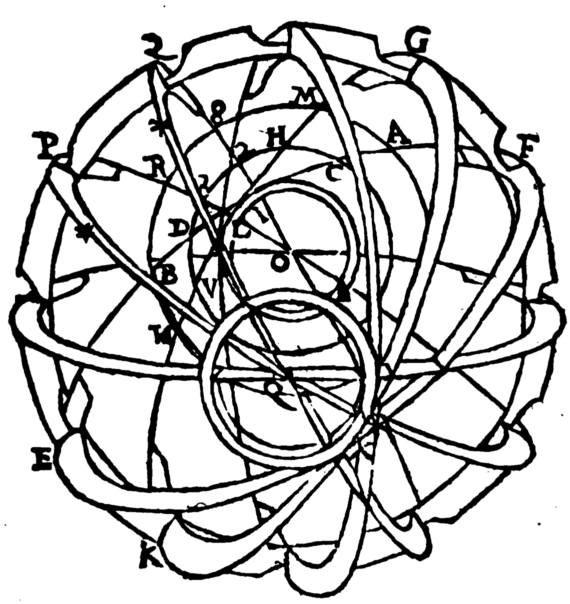
IN sphæra paralleli circuli descripti sint ARB, & CHD, & IL, qui eundem polum habeant O; describanturque maximi circuli AFXE, & MGXK, qui tangant parallelum IL in punctis L, & I; & reliquos parallelos secent in punctis A, C, D, B, & M, H, V, N; se verò inuicem apud I, & X, in duos semicirculos more maximorum circulorum.

Dico arcus IC, & ID, sicut LH, & LV esse æquales; necnon, & arcus CA, & BD; sic, & HM, & VN arcus maximorum circulorum inter parallelos interceptos esse æquales. Arcus verò parallelorum inter circulos maximos interceptos, vt CH, & AM, sic, & DV NB esse similes.

Ducantur ad ineundam probationem circuli maximi OLP, & OIZ transeuntes per puncta contactuum I, & L, & transeuntes per polum O, & Q parallelorum, & per polos maximorum tangentium ⁎ ⁎ ex propos.3. huius. Quare ex prop. 10. bifariam secabunt segmenta ipsorum maximorum, & minorum 2 Vnde segmentum MLN V. g. maximi, & minoris MRN erunt bifariam secti in R, & L, sic, & AIB maximi, & A 8 B erunt bifariam secti in I, & 8, & eadem dicas de segmentis circuli angustioris CHDV: Quarè erunt æquales prædicti arcus, vtpote bifariam secti. Erit ergo æqualis arcus IC, maximi arcui ID eiusdem, & IA arcui IB. Vnde ablato communi arcu CID; remanebit quoque arcus AC arcui DB maximi circuli FIE inter pararallelos intercepti æqualis; idem probabitur de arcubus MH, & VN, quòd sint æquales LM, & LN à quibus ablatus arcus communis HV, æquales restituet HM, & VN.

COROLLARIVM.

IMò arcus quoque AC, & HM; sicut VN, & DB erunt æquales, quòd ostenditur. Nam arcus ACDB, & MHVN sunt æquales ex propos.11. Quia secant eũdem circulum minorem AMBN duo maximi FCB, & GHK, & maximi OIZX, & ORPX per eorum polos ⁎ ⁎ transeuntium intercipiunt arcus æquales LR, & I 8, & ob eandem rationem arcus quoque CID, & HLV æquabuntur. Cùm ergo AC DB, & MH, VN sint arcus æquales ablatis æqual bus CID, & HLV restabunt AC, & MH, sicut, VN, & DB æquales.



Probatur quoque secunda pars. Quod circumferentiæ minorum, vt CH, & H 2 sint similes circumferentijs AM, & M 8. Quoniam circuli maximi IZQ, & LPQ per polum O parallelorum transeunt, erunt arcus 2 3. & 8 R parallelorum polo O descriptorum ex propos.12. similes; ideo, & HC, & AM erunt similes. Quia HC æquatur ipsi 23. & AM ipsi 8 R. Probandum est, itaque CH, & 23. esse arcus æquales, & item AM, & 8 R. Demonstratus autem eò, quia ex propos. 11. CHD, & HLV sint æquales; vtpote duo maximi eundem parallelum secãtes, & æqualem arcum L 3, & I 2 circuli maximi OIZQ, & OLPQ transeuntiũ per eorum polum O intercipientes. Quare, & semiarcus illorum (tales enim sunt ex propos. 10. huius C 2, & H3) erunt æquales. Ablato ergo communi arcu H 2 erant æquales CH, & 23. Sed 23. est similis arcui R 8 ex propos.12. huius; Ergo etiam CH erit similis arcui AM.

Idem poterit probari de arcubus DV, & NB. Quòd sint inuicem similes; siquidem VD, & 32 sunt æquales, eò quia semiarcus 2 D, & 3 V sint æquales. Vnde ablato communi arcu 3 D remanebunt 23. & DV æquales: sed 2 3 est similis arcui R 8. Ergo, & VD similis erit arcui BN.

Maximè

Maximè, quia eodem argumento AM, & BN probantur æquales arcui 8 R. Siquidem A 8, & MR semiarcus sunt æquales: Ablato ergo communi arcu M 8 remanent AM, & 8 R æquales, & ita dicas de arcu NB; quòd sit æqualis eadem ratione arcui 8 R.

THEOR. XI. PROPOS. XVIII.

Circuli, qui tangunt eundem parallellum æqualiter sunt inclinati ad maximum parallelorum, & poli eorum æqualem à polo maximi paralleli habent distantiam.

SIt figura præcedens, & omnia in ea disposita, vt priùs. Quia ex def. 6. par. primæ circulus ad circulum inclinat æquè, cum maximi circuli perpendicularis ad ipsos ambos arcus angulum, quem faciunt eorum plana in se secando, mensurat: Ideo videndum est; an inter circumferentias tangentium eundem parallelum, vt FADE GHVK, & maximum parallelorum FZEK, æquales circumferentię perpẽdiculariũ vtrisque maximo rũ circulorũ intercipiãtur: circuli autẽ OZQ, & OPQ sunt perpendiculares, vtpote transeuntes, vt in præced. probatione fecimus, per eorum contactus IL, & per eorum polos ⁎ ⁎, & per polos etiam Q, & O paralleli maximi FZPEK. Quia itaq; OP, & OZ sunt quadrantes maximorum, quòd transeat maximus FZPEK. per eorum polos ex Coroll. propos. 14. primę partis huius, ideò erunt inuicem æquales. Arcus verò OI, & OL ex prop. 18. par. 1. h. sunt æquales, quibus ablatis à quadrantibus OZ, & OP residua supererunt IZ, & LP equalia, quæ intercipiuntur inter circulos FADE, & GHVK tangentes eundem parallelum, & ad maximum parallelorum FZEK inclinati. Cum itaque sint æqualia residua maximorum, tum tangentibus, tum maximo parallelo perpendicularium. Ergo tangentes eundem parallelum æqualiter sunt inclinati.

Probatur secunda pars, quod habeant polum æquè distantem à polo maximi parallelorum. Polus distat à circumferentia maximorum quadrante. Ergo inter FADE, & KNVG tangentes eundem parallelum, & polum ⁎ ⁎ ipsorum quadrans interest IZ ⁎, & LP ⁎; sed etiam inter polum maximi parallelorum, & circumferentiam parallelorum, quem tangunt, intermediant arcus æquales OI, & OL, additis ergo istis arcubus æqualibus illis quadrantibus IZ ⁎, & LP ⁎ remanabunt arcus æquales OIZ ⁎, & OLP ⁎. Vnde, & æqualiter distabunt à polo Q, vel O, vt patet.

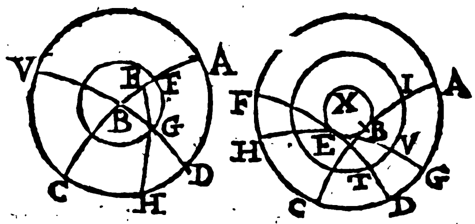
COROLLARIVM.

HInc est quòd cum distent æqualiter à polo parallelorum, poli eundem parallelum tangentium, quod possint vniri circulo aliquo parallelo, qui per eorum puncta ⁎ ⁎ transibit, cum equaliter distent à polo O, & consequenter à polo Q.

THEOR. XII. PROPOS. XIX.

Maximi circuli, qui similes circumferentias parallelorum circulorum in sphæra auferunt isti, aut per parallelorum polos trãseunt, aut eundem vnum parallelum tangunt.

IN Sphæra maximi circuli ABC, DBV auferant circumferentias similes AD, & DC ex parallelis ADV, & FG. Dico, quòd si alter ex maximis circulis transeat per polos parallelorum, quod etiam alius transibit; quòd si alter tangat, & alter quoq; tanget; quòd si vnus non tangat, nec per polum transeat, nec alter continget, vel per polum transibit parallelorum. Sed ambo parallelum minorem contingent; Transeat ergo primo ABC per polum B parallelorum. Dico, & maximum DBV per eundem polum B transire, & erit polus in communi sectione, quod si id negetur, & dicatur punctum B quo se intersecant non esse polum, sed aliud punctum E. Ducatur ex polo E per punctum G arcus circuli maximi HE: Iste ex prop. 12. auferet circumferentias parallelorum similes HA, & GF. Ergo inuicem erunt similes AD, & AH, vtpote eidem arcui FG similes. Ergo cum sint eiusdem circuli erunt quoque æquales, totus inquam AH arcus cum sua parte AD. Non potest itaque euenire, quòd AD, & FG sint arcus similes, & transeunte per polum ABC maximo non transeat quoq; per polum B, et in eo non se intersecet DBV.



Tangat secundo maximus ABC parallelum BE. Dico, & alium maximum DEF eundem tangere, si enim non tangit, sed secet, ducatur maximus aliquis, qui tangat in puncto E, & secet maximum ABC, & sit GH. Quia ergò GH tangit ex propos. 17. BXB, ideo AG, & IV, & BE erunt arcus similes, sed ex hypothesi similes quoque sunt AD, & IT, & BE. Ergo, & inuicem erunt similes IV, & IT, sicut, & AG, & GD; & ideo cum sint in ijsdem circulis, erunt æquales AC, & AD sicut inuicem IV, & IT erunt æquales pars toti, quod esse nequit.

Non tangat tertio ABC parallelum IVT, sed secet: Nec transeat per polum parallelorum X. Dico alterũ quoq; DEF secare, nec transire per polum X. Sed ambos maximos contingere circulum parallelum minorem, si tamen auferant circumferentias de parallelis similes.

Probatur. Nam ex prop. 6. cum obliquus sit, siquidem si rectus esset transiret per polos ex Cor. propos. 13. quod non ponitur. Is continget parallelos inuicem, & etiam circulis assignatis minoribus ADC, & IVT, & æquales inuicem, quorum alter est BE, qui minor erit prędictis parallelis cũ eos secet ABC, hũc autem tangat: Probo etiam DEF ipsos minores parallelos tangere, quorum alter est

BE. Si enim non tangit; alter GEH circulus maximus tangat. Secetq; maximũ ABC. Quia ergo GEH tangit eundem parallelum BE ex propos. 17 erunt arcus AO, IV, & BE similes, sed tales ex thesi sunt arcus AD, & IT, & BE. Quare cum sint similes vni tertio BE arcus IV, & IT erant inuicē similes, cumque sint eiusdem circuli, erunt quoque ęquales pars toti, quod esse nequit, sic, & AD, & AG erunt similes, & eadem ratione æquales, quod est absurdum, pars enim esset ęqualis toti.

EXPENSIO III.

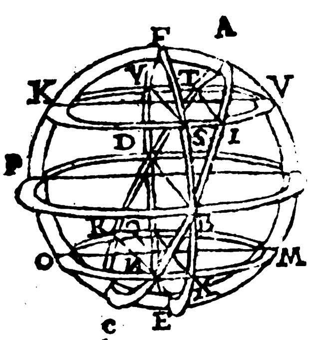
De sectionibus maximorum cum minoribus inæqualibus, & non similibus.

QVia circulum obliquum alteri, vt Zodiacus Æquatori in sphæra cęlesti, circulus perpendicularis eorum alteri, qualis est Horizon Æquatori, non secat æqualiter, vt experimentũ docet; sed dum æquales partes Æquatoris peroriũtur; non tamen æquales partes Zodiaci emergunt; ideo ad tractatum de sphæra funditùs intelligendum, hæc vltima Expensio percurrenda est, in qua de istis sectionibus peragitur.

THEOR. I. PROPOS. XX.

Si in sphæra maximus aliquis circulus aliquos minores in eadem descriptos secet, & non per polos in partes inæquales eos secabit, & segmenta erunt æqualium parallelorum ad easdem partes huius hemispherij segmentis parallelorum alterius hemisphærij inæqualia, & hinc semicirculo maiora, inde minora.

SIt ABCD circulus maximus, qui secet parallelos VIKT, & MXNOZ, & non per polos. Dico eos minores secare in partes inæquales: nempe esse partem maiorem IKT parte IVT, & sic NMR parte RON. Describatur ex circumferentia maximi parallelorum PBQD maximus FBED, qui per eius polum transeat, & per sectiones BD, & sit ei perpendicularis: diuidet is parallelos bifariam in XZ, & SY ex pr. 14. Cor. h. par. I. Quare patet, quod NMR erit maior, quam N OR, & IKT, quam IVT.



Dico secundò. Quòd ad easdem partes segmenta erunt inuicem inæqualia. Nam minor est RON, quàm IKT ex probatione præcedenti.

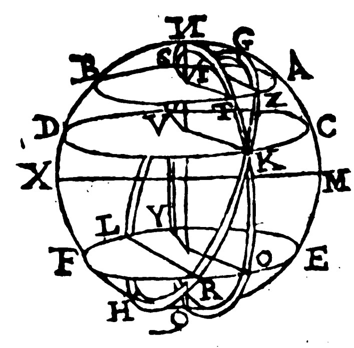
Dico tertio. Quòd ducto maximo parallelorum ad easdem partes ABCD hinc ab illo segmenta sunt semicirculo minora, vt RON, inde maiora IKT; Vt probatum est, cùm SKY, & XOZ sint semicirculi; quibus additur IT VS, vt sit maior, aufertur XZNR, & fit minor arcus semicirculo.

THEOR. II. PROP. XXI.

Si in sphæra circulus maximus parallelos aliquos circulos secet, & non per polos parallelorum arcus ad easdem partes in dimidio hemisphærio sunt maiores, quàm, vt sint similes arcubus in altero hemisphærio existentibus, vel è contrà.

SEcet in sphera parallelos AB, & CD, & EF, & non per polos maximus circulus GH. Dico arcus IBZ in hemisferio MNX esse maiores; quam vt sint similes arcubus RFL alterius hemisphærij MQX.

Per puncta KV, & per polos N, & Q duo circuli, seu semicirculi maximi NYQ describātur, & NKQ. Isti ex prop. 12. h. arcus similes intercipient XDV, & SBT, ergo ZBI erit maior; quam quod sit similis arcui K DV; sic OFY erit arcus similis arcui XDV. Ergo XDV erit maior, quàm, quòd sit similis arcui RFL, & ideo quoque ZBI erit maior, quam, quod sit similis arcui RFL.



THEOR. III. PROPOS. XXII.

Si in sphæræ superficie intra circuli cuiusque peripheriam punctum aliud à polo signetur, & per illud arcus plurimorum maximorum circulorum agantur, qui per polum prædicti circuli transit arcus, erit maior omnibus alijs, & residuus minor.

Reliquorum verò propinquior maximo remotiore semper maior erit.

Et æqualiter distantes æquales erunt.

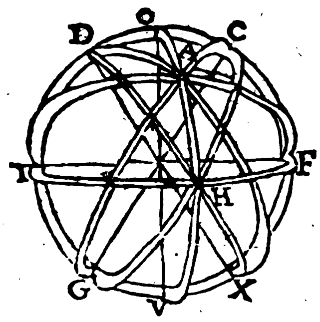
SIt punctum A signatum in superficie sphæræ intra circuli, siue maximi, siue non, peripheriam CDGX, perque punctum A plurimi maximorum circulorum arcus agantur, vt CA, & AG, & FA, & AD, & vnus transeat per polũ H prędicti circuli CDGX, & sit AV, cuius residuus arcus sit AO. Dico maximum esse arcum AV, qui per polum H transit, & residuum eius AO minimum; cæteros verò propinquiores, vt AG remotioribus, vt AD esse maiores, & æqualiter distantes, vt AF, AT æquales.

Trahantur per polum H, & per puncta circumferentię circuli CFGD arcus maximorum circulorum HG, & HD, puncta inquam per quæ transeunt arcus primo ducti. Sic TH, HE, & cęt. Tunc sic.

* Probo primam partem propositionis, ex propos. 9. partis huius secundæ. Cuiuscumque trianguli

guli sphærici duo crura reliquo sunt maiora. Ergo in triangulo AHG erunt maiora crura AH, & HG crure AG. Sed duo crura VH, & HG ex prop. 18. huius part. I. sunt æqualia. Nam arcus HG, & HV ducti sunt à polo H arcus AH idē. Ergo arcus AV maior est, quam AG, & eadem ratio est de crure AT, & TH, vt patet, & de omnibus alijs.

Probatur secunda pars de residuo arcu, quòd sit minimus. Nam duo crura HA, & AC reliquo HC sunt maiora ex cit. propos. 9. secundę partis huius: Sed arcus HO est æqualis cruri HC ex prop. 18. huius part. I. Si ergo auferatur cōmunis arcus HA, remanet AC residuo AO maius.



Probatur quoq; tertia pars. Quod AG sit maior arcu AD. Nam crus HA est commune, & duo crura HG, & HD æqualia: angulus verò AHG maior angulo AHD. Vnde ex propos. 12. secundæ partis huius, basis AG subtensa angulo maiori maior erit basi AD.

Probatur tandem vltima pars, quod AF, & AT sint æquales ex prop. 11. p. I. Nam AH latus est cōmune; crura HF, & HT æqualia; angulus ab illis comprehensus FHA ob hypothesim æqualis distantiæ ab arcu OAV, necessariò est ęqualis angulo AHT: Ergo, & basis AF basi AT æqualis.

THEOR. IV. PROPOS. XXIII.

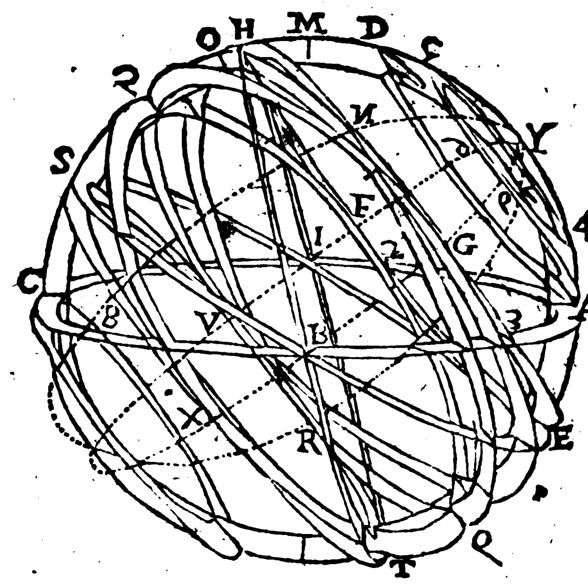
Si in sphæra maximus circulus unum quidem circulum tangat; alium autem ei parallelum secet positum inter sphæræ centrum, & circulum, quem tangit; polus autem eius dicti maximi fuerit inter parallelum, quem tangit, & quem secat; circuli maximi tangentes parallelum, quem secat, erunt ad illum inclinati.

Rectissimus autem tangentium erit in eo puncto, in quo maius segmentum bifariam diuiditur; humillimus, in quo minus segmentum bifariam diuiditur.

Illi verò arcus, qui tangunt in punctis à prædictis contactuum æquè distantibus similiter inclinati sunt, qui verò magis accedunt ad contactum humillimi, magis inclinati sunt, quàm, qui ab eo longiùs absunt.

Poli verò tangentium sunt in parallelo ipsi, qui tangitur, & ipso minore.

Sit in sphæra maximus circulus ABCI, qui tangat parallelum AD, secet verò parallelum EGHF positum inter sphęrę centrum, & circulū AD, quem tangit. Polus autem circuli maximi prædicti ABCI sit in M inter parallelos AD, & EF HG: circuli verò maximi contingant parallelum, quem secat in O, in N, in H, in F, in E dimirum HBTI, & SBEI, & FZXQ, & GZVP, & NOBQ. Dico omnes esse ad circulum ABCI inclinantes. Secundo Rectissimum esse HBTI tangentem in puncto H, in quo maius segmentum 3 H 2 paralleli, qui tangitur, bifariam diuiditur à maximo per polum transeunte, qui est AMCT. Humillimum verò esse BSIE, qui tangit in opposito puncto E, vbi idem AMCT secat paralleli minorem arcum 2 E 3.



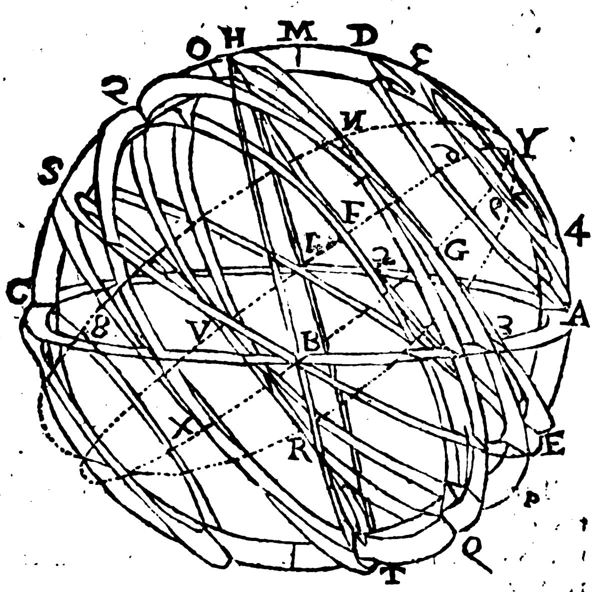
Tertiò æquidistanter ab istis punctis tangentes esse eodem modo inclinatos: sed qui distat magis, in quo tangit humillimus illum eleuatiorem esse.

Quarto polos esse in parallelo 45. minore illo AD, qui tangitur, sed tamen ei parallelo.

Probatur primò hæc vltima pars, vtpote fundamentum cęterarum. In circulo maximo AMCT secante, vtpote ei perpendiculari erit polus circuli tangentis AICB, & distabit ab eius ambitu quadrante. Quia ergo distantia MA est quadrans, & YH est quadrante minor, vtpote à parallelo EH ad eius polum Y: Si mensuretur ab H quadrans versùs A non perueniet ad A, vtpote, quod sit maior quadrante, cum polus M debeat esse inter H, & Y ex thesi. Verùm excedet Y, quòd sit HY minor quadrante; Vnde cadet in puncto 4. inter A, & Y, & polo Y interuallo Y 4. descriptus circulus 45. hic polos omnium tangentiū in se continebit. Describantur enim per polum Y, & puncta contactuū N, F, G, E, & cæt. arcus maximorum circulorum punctati YN, & YF, & YG, & YE erunt omnes arcus à polo Y ad parallelum EH æquales. Nempe YE, & YG, & YN, & YH, & YF. Sunt quoque arcus residui vsque ad parallelum minorem 45 ęquales Y 9. Y 4. Y 6. Y 7. & Y 5. ob eorum parallelismum. Quare, si addātur prædictis erunt omnes æquales, sic EY 5. & HY 4 sic NY 7. & GY 6. & FY 9. erunt æquales: sed HY 4. vnus est prædictis arcubus probatus est quadrans. Ergo omnes quoque alij erunt quadrantes, cùm ergo circumferentia circuli 4, 5. remoueatur quadrante à circumferentijs tangentium, vt remouetur H 4. & in 4. sit polus, erit etiam in omnibus alijs punctis illius circuli 4. 5. polus aliorum circulorum tangentium.

Probatur prima pars, & secunda, quia intra ambitum circuli ABCI punctum Y electum est pręter eius polum M; à quo ducti sunt arcus Y M C, transiens per eius polum, & YA eius residuum, & YAE, & YN 8, & YFI, & YGB, qui etiam transeunt per

per cōtactus H, N, F, G, E, & polum 5. & 4. 7. 9. 6. circulorū maximorū tangentiū EBIS, & HBTI, & cęt. & ideo istis omnibus sunt perpendiculares. Vnde, & tangentium prędictorum ad secantem circulum ABCI inclinationem mensurant ex def. 6. p. 1. h. Quamobrem ex propos. 22. huius arcus YHC erit maior, quàm Y N 8, & hic quam IFY, cui erit æqualis YGB, & hi maiores, quàm Y 4 A. Quia autem diximus in prima probatione YDH, & YN, & YF, & YG, & YE esse arcus æquales; Si hos arcus æquales à successiuè inæqualibus auferamus, remanebit maius residuum HC residuo N 8, & hęc residuis FI, & GB, & hæc residuo nullo arcus IE nihil enim remanet ablato arcu YE; Hi verò om-



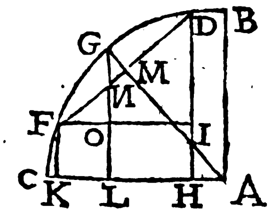
nes arcus inclinationem mensurant arcuum tangentium: Quare cum remaneant inæquales, & semper minor, qui magis remouetur ab arcu YMC transeunte per polum M, manifestè patet, diuersam continuè tangentium esse inclinationem, & semper maiorem eorum circulorum recedentium magis à polo M; minores enim arcus inter eos, & circulum ad quem inclinant ABCI intercipiuntur. Patet quoque tertia pars, quòd si arcus sint æquales, vt BY, & IY, qui sunt quadrantes inclinationem fore ęqualem, cum ablatis æqualibus arcubus GY, & FY reliqua debeant superesse æqualia BG, & FI.

THEOR. LEMMAT. I. PROPOS. XXIV.

Portiones diametri subtensæ arcubus æqualibus, quò propinquiores fiunt alteri diametro in quadrante, eò sunt maiores.

SIt ABC quadrans, in quo sumantur arcus ęquales DG, & GF ducanturque perpendiculares DH, & GL, & FK. Dico portiones diametri HL, & LK esse inęquales, & illam esse maiorem, quæ magis alteri diametro AB propinqua est, nempe HL maiorem esse, quam LK. Ducatur diameter GA, & chorda DF, & IF parallela subtenso diametro AC:

Quia ergo DF secta est bifariam in M, vt satis constare potest ex 27. El. l. 3. Cor. 6. erit maior ND, quam FN. Quia verò in æquiangulis triangulis ita est DF ad IF, vt NF, ad OF ex 4. lib. 6. elem. residuum quoque ex 22. l. 5. el. DN ita erit ad IO, vt NF ad OF, sed DN est maius, quam NF, ergo etiam IO,



quam OF, ex propos. 12. lib. 5. & ideo etiam LH æquales, quàm LK.

COROLLARIVM.

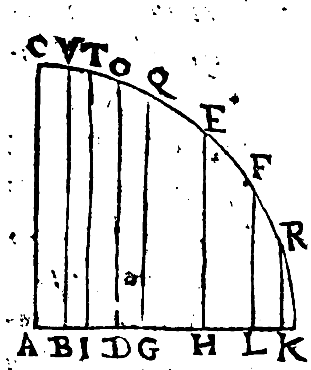
HInc manifestè patet, quod si transferatur LH propinquiùs ad AB, minorem arcum subtensuram, sicut, & LK. Quia, si subtenderent æqualem arcum, iam ipsi arcus, quo viciniores alteri diametro eo segmenta diametri maiora non subtenderent; cum subtenderent ipsa eadem, quæ subtendebant sibi remotiores arcus.

THEOR. LEMMAT. II. PROPOS. XXV.

Portiones diametri duobus arcubus inæqualibus subtensæ remotioribus ab altero diametro in quadrante; si illi diametro alteri viciniores arcus subtendant, illi arcus erunt inuicem inæquales, & remotior erit minor.

SInt arcuū ęqualiū, & diametri portiones LH, & LK, quæ trāsferātur viciniores diametro alteri AC. Dico *eas subtendere duos arcus inuicem inæquales, maioremque esse* VO *propinquiorem diametro alteri* AC; *quam* OQ *remotiorem.*

Probatur. Sinus versus LK est minor, quàm LH sinus subtendētes arcus æquales ex præc. quia subtendit arcum remotiorem. Transferatur in DG, & DB manente eodem interuallo, eritque minor DG, quam DB: Mensuretur itaque à puncto D sinus DG, & sit DI: cadetque punctum I inter D, & B puncta.



Quare arcus TO inter parallelas IT, & OD comprehensus est minor; quā OV inter OB, & OD parallelas distantiores clausus; sed arcus TO est maior, quàm OQ, vtpote vicinior alteri diametro AC ex præced. Coroll. Ergo tantò maior erit VO ipsos TO arcus maior.

COROLLARIVM.

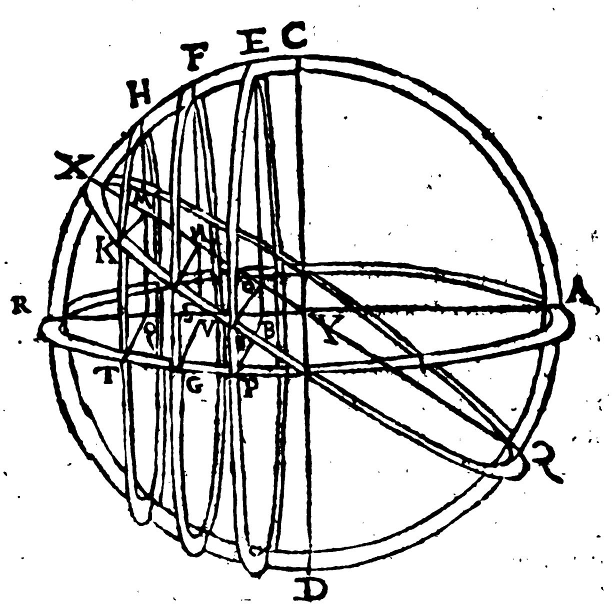
HInc etiam patet, quod etiam si portiones diametri prædictæ diminuantur, & fiant minores in eadem proportione, quòd adhuc translatę arcus inæquales subtendant, & quod maior arcus sit propior alteri diametro. Quoniam enim ponitur KL ad DG, vt HL ad BD, & LK est minor, quam HL; erit etiam DG minor, quam BD: Vnde, si DI fiat ęqualis ipsi DG, cadet inter B, & D Quare arcus VD erit maior arcu TO, quod parallela inter D, & O tendat: Sed TO est maior, quàm OQ ex præced. Coroll. vtpote semidiametro AC vicinior: Ergo tantò magis VO erit maior, quàm OQ.

THEOR.

THEOR. V. PROPOS. XXVI.

Si in circumferentia maximi circuli sit polus parallelorum, qui per partes æquales quadrantis alicuius circuli maximi obliqui ad eosdem ducti sint; hi ex eo circulo, in quo polos habent inæquales circumferentias auferunt, quæ quarum proprior maximo parallelorum remotiore maior erit.

*Sit circulus ACRD, & maximum parallelorum exprimat diameter CD, cui sint paralleli EIP, & FSG, & HKT abscindentes ab obliquo circulo ZX partes æquales IS, & SK, & habentes polos in R, & A maximorum circulorum communi puncto. Dico eos à circulo, in quo polos habent, vel APR, vel ACRD arcus inæquales secare, esseque EF maiorem, quam FH, & PG, quam GT.



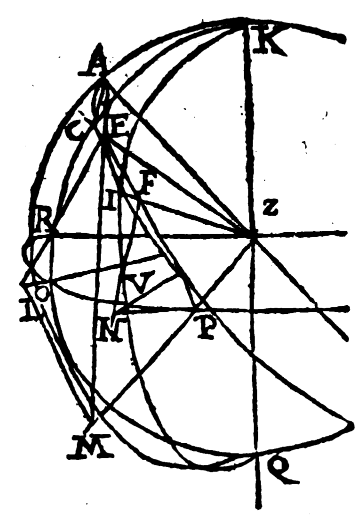
* Probatur ex prælibata propositione. Ductis enim parallelis sectionibus IO, & SN, & KM, parallelę enim sunt ob plana parallelorum inter se æquidistantia, & diametro YX perpendiculares, quòd sit sectio circuli ACRD transeuntis per polos parallelorum, & consequenter eorum planis perpendicularis ex Coroll. prop. 8. p. 1. h. Quare OM, & MN erunt portiones diametri interceptæ per quarum extrema puncta transibunt sectiones OB, NV, & MQ eiusdem circuli ACRD perpendiculariter cadentes super AR axem per polos parallelorum R, & A ductum ex propos. 8. Cor. 1. par. 1. h. Quare facient triangulum rectangulum YMQ, cuius basis YM, in quo sunt triangula æquiangula YBO, & YVN. Quia ergo YO est basis portio diametri YO erit maior; quàm YB: quare aliæ portiones BV, & VQ viciniorem arcum diametro DC subtendent, vt pote quod sint illi viciniores. Rursus ob parallelas BO, & VN, & MQ: ita erit ON ad BV se minorem, vt MN ad VQ minorem se, quare ex præced. propos. & Coroll. arcus, quos subtendunt portiones BV, & VQ, ne dum erunt minores arcubus IS, & SK obliqui circuli; sed, & erunt inæquales, & maior erit FE, quam FH, vtpote diametro CD vicinior, & idem dicendum de arcubus PG, & GT; vicinior enim PG erit maior, quàm GT, quod nimirum subtendantur à proportionibus diametri translatis VB, & VQ, & in eadem proportione minoribus, quàm ON, & MN.

THEOR. VI. PROPOS. XXVII.

* *Sectorum æqualium plana in circulo inclinante, quo circulo inclinationem mensuranti sunt propinquiores, & eo circulis intercipientibus minus obliqui, seu inclinati sunt.*

*Sint sectores AZC, & CZI in circulo maximo inclinante ACP, angulo AZR ad circulum ROP. Dico sectorem AZC esse minus obliquum circulo intercipienti KCQ, quam sector CZI plano KIQ normalibus circulo ROP.

Ducantur perpendiculares sectioni ZC, sectoris AZC, & sectioni ZI sectoris CZI, quæ sectiones sint AEM, & EFP, quæ producantur vsque ad sectionem circulorum productam ZM, & incidant in eam in M, & P, aganturque plana per has sectiones AM, & EP perpendicularia circulo ACP, eritq; sectio EL perpendicularis plano ex prop. 4. Coroll. 1. & 2. tract. 22. & sectioni ZC rectangula, & angulus LEM erit angulus inclinationis planorū idemq; dicendum de sectione FV, & LZ, & de angulo NFP, quod sit angulus inclinationis planorum. Quia itaque AEZ est angulus rectus, ZEM triangulum erit rectangulum, sicut, & ZFP, in quibus, quia angulus ad centrum EZM est maior, quàm angulus FZP; consequenter erit residuum ZME minus reliquo ZPF, cum duo quilibet in vno quoque triangulo recto sint æquales ex Coroll. 9. prop. 17. lib. 1. el. Cum ergo ZME sit minor angulus, linea EM obliquius incidet in sectionem ZM, quàm linea FP in eandem.



Quia autem fecimus angulum LEM esse inclinationis ob latera sectioni EZ perpēdicularia, planum ELM, ex Cor. 2. cit. at LZM vt in plano ei normali POR, sunt normalia KCOQ plano; etiam ex 16. tract. 22. communis illorum sectio ML erit rectangula plano, & sectioni EL, & idem afferas de sectione PN. Quia ergo in rectangulo ZLM est maior angulus apud Z, quàm in rectangulo PZN residuus angulus apud M erit maior residuo apud P in rectangulo ZNP; Cum ergo duę sectiones EM, & LM cū sectione ZM faciāt āgulum acutiorē, & magis obliquū, quā duæ sectiones

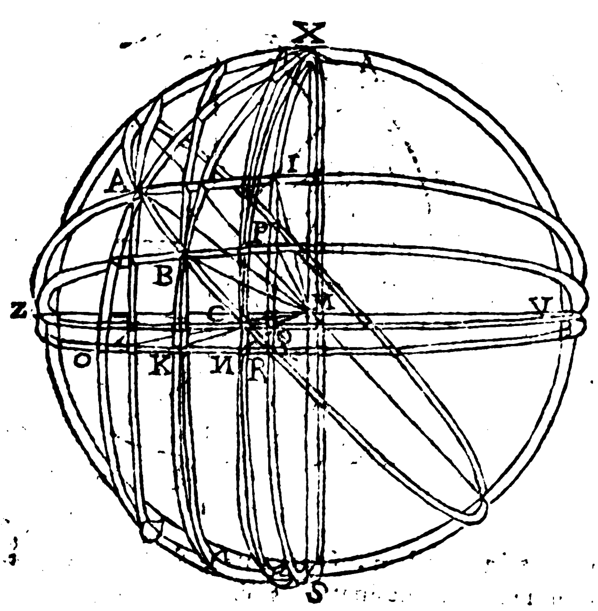
FP,

FP,& NP minor erit angulus apud M ex pr.20.tr.22 in rectāgulo MEL, quàm FPN in rectangulo FPN: quare residuus angulus apud E in MEL rectangulo, erit maior, quàm NFP in rectangulo NFP; sed angulus apud E,& F est angulus inclinationis sectorum, ergo minus inclinabit AZC sector, vtpote cuius est maior angulus inclinationis ad KCQ, quàm sector CZI ad XIQ circulum. Sector autem AZO vicinior est circulo XARQ inclinationē mēsuranti.

THEOR. VII. PROPOS. XXVIII.

Si in circumferentia circuli maximi sit polus parallelorum; huncque ad angulos rectos secent duo alij circuli maximi, quorum alter sit vnus parallelorum; alter verò obliquus ad parallelos, & per obliqui circuli aequales arcus, & polum describantur maximi circuli, hi circumferentias inaequales intercipient de maximo parallelorum; quarum propior maximo circulo primo posito remotiore maior erit.

SIt polus parallelorum Z in circumferentia maximi circuli XZSV; paralleli verò sint circuli ducti per circumferentias ęquales circuli obliqui RCBA. Quorum maximus sit XRS; A polo verò Z per ea puncta terminantia aequales circumferentias CB. & AB circuli maximi educantur ZCQV, ZAIV, & ZBPV. Dico hos maximos circulos de maximo parallelorū XRS aequales circumferētias non auferre: sed esse maiores; quae proximiores sunt circulo primo posito XZSV, nempe esse maiorem IP, quam PQ.



* Probatur ex praeced. propos. 27. Nam, quia arcus AB aequatur arcui CB ex Hyposi, & MC, & MB, & tandem MA radij sunt; erunt triangula AMB, & BMC aequicrura. Et plana circulorum maximorum ZAIV, & ZBV claudunt angulum apud M trianguli AMB: sic plana circulorum maximorum ZBPV, & ZCQV claudunt trianguli BMC angulum apud M. Inciduntque illi circuli in planum maximi parallelorum XQRS rectangulè; & quia proximior est maximo circulo XZS maximam planorum inclinationem mensuranti ex thesi arcus AB arcu CB eius plani AMB inclinatio erit minor, seu minus obliquum, quam planū CAMB; quadere angulus IMP in maximo parallelorum XQR interceptus à planis maximorum circulorum rectangulè ei existentiū ex propos. 22. Tract. 22. erit maior angulo PMQ. Quadere ex propos. 39. lib. 6. etiam arcus IP erit maior arcu PQ. Anguli autem LMP, & PMQ sunt anguli inclinationis planorum ex 6. definit. primae partis huius.

THEOR. VIII. PROPOS. XXVIIII.

Iisdem positis, si in circulo polos continente parallelorum punctum medium inter eos eligatur, & ad circulū maximū per sectionem obliqui, cum maximo parallelorum, & per eorum polos transeuntem ab illo puncto circuli maximi per arcus aequales in obliquo sumptos ducantur, isti de illo maximo per polos, & sectionem transeunti arcus inaequales intercipient, & maior erit ille arcus, qui polos continenti maximo circulo proximior erit.

*PVnctum medium X sumatur inter polos ZV, à quo in circulum VRZ circuli maximi ducantur XCNS, & XBKS, & XAOS per partes ęquales à parallelis abscisas CB, & BA in obliquo circulo RBA. Dico *hos circulos maximos à puncto* X *descendentes intercipere arcus inaequales, esseq; maiorem* KO, *quam* KN, *vtpote viciniorem circulo maximo* XZS.

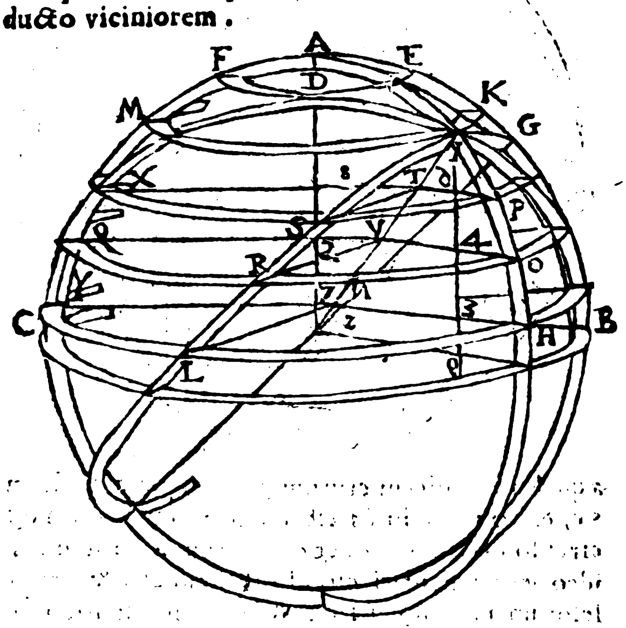
Probatur prorsus eodem modo, ac praecedens propos. Plana enim maximorum circulorum descendentium à puncto X stringunt triangula aequicrura AMB, & BMC, quae plano VRZ habeat diuersam inclinationem ex 27. huius; siquidem ABM triangulum, vtpote vicinius circulo XZS maximam inclinationem mensuranti, & sectioni VZ planorum intercipientium ZIV, ZPV, & ZQV minorem obliquitatem, seu minorem inclinationem habet, quam BMC triangulum, & subtensa arcui BA, quam subtensa arcui BC, quare plana maximorum circulorum cadentium ex vertice X perpendiculariter ex 22. tr. 22 intercipient triangula inaequalia in angulis, eritque triangulum OMK in angulo apud M maius, quam triangulum KMN, vtpote, quia illud OMK subiaceat triangulo AMB, quòd habet minorem obliquitatem, & minorem inclinationem, quam BMC triangulum, cui subiacet triangulum consequenter minus KMN, qui sunt anguli inclinationis planorum CXS, & XKS, & XOS ex 5. propos. 1. par. h. Vnde ex prop. 39. lib. 6. etiam arcus OK erit maior arcu KN.

THEOR.

THEOR. IX. PROPOS. XXX.

Si in sphæra maximus circulus tangat aliquem sphæræ circulum; alius autem maximus circulus parallelis ipsorum contactorum circulorum obliquus tangat circulum maiorem eo, qui tangitur à primo maximo circulo eo in puncto, quo secatur primus ipse: per partes æquales obliqui circuli maximi ducti paralleli auferent à circulo maximo per contactum hunc postremum, & per polum parallelorum ducto, & à primo posito circumferentias inæquales, maiorque erit illa, quæ ad maximũ parallelorum propiùs accedit.

SIt in sphæra maximus circulus BDC, qui tangat parallelum EDF in D; sitque alius obliquus maximus LIG: qui tangat parallelũ maiorem illo XIM in puncto I. Paralleli verò circuli XSP, QRO, & YLH ducantur per arcus æquales SR, & RL obliqui circuli LIG, & secent circulum maximum AIH per polos parallelorum A, & secundum contactum I ductum. Dico has sectiones abscindere ab hoc maximo per polos parallelorum ducto circumferentias inæquales HO, & OP; maioremque esse HO, vtpote maximo parallelorum BLC ducto viciniorem.



Ducantur finus, & sectiones parallelorum ST, VR, & LN cum obliquo circulo maximo GIL vsque ad sectionem, diametrumque IZ circuli maximi AIH perpendicularis planis parallelorum cum per eorum polum A transeat; & ipsi circulo obliquo GIL, cum per eius contactum transeat ex propos. 3. huius partis. Nam tria plana, nempe cuiuslibet paralleli, & duorum circulorum maximorum in punctis sectionũ V, N, T se inuicem solùm communicant; ideoque ea puncta erunt communis sectioni paralleli cum obliquo LIG, & cum perpendiculari AIH. Hæ verò sectiones ST, VR, & ND erunt quoque parallelę ex propos. 14. tract. 22. eo, quia à planis parallelorum fiunt, & occurrent ipsorum parallelorum sectionibus cum maximo circulo transeunte per punctum contactus D, quę sectiones sunt TX; VQ, & NY, quæ, & erunt parallelę eadem ratione.

Quibus animaduersis. Probatur propos. Nam ducto diametro DZ circuli primo tangentis BDC in triangulo rectangulo T8Z basis est ZT, crus verò Z8. Ergo portio diametri ZT erit maior illa Z8. Sic dicas de crure Z2. minus, quàm basis ZV. ita de crure Z7 minùs, quàm basis ZN. Cum ergo portiones diametri TV ad 82, & VN ad 27 sint, vt NZ ad 7 Z, & NZ sit maior, quàm 7 Z, etiam TV portio erit maior, quàm 82, & VN, quàm 27, vnde iuxta propos. 25. huius partis arcus QX, & QY, circuli CDB, quos subtendunt dictæ portiones 82. & 27, erunt inæquales, maiorque YQ, quàm QX.

Dico secundò auferre quoque à maximo circulos AIH parallelos eosdẽ, arcus inæquales, maiorẽque esse HO, quàm OP, vtpote parallelo maximo viciniorem. Ducatur parallela diametro AZ circuli AIH, & 16. & 64. & 43 exprimant sectiones, quas faciunt sinus TP, & OV, & HN. Sunt autem TP, & OV, & HN parallelæ, quia sectiones sunt parallelorum, & circuli ad eos recti, vtpote per eorum polos transeuntis AIH. Sunt quoque perpendiculares sectioni AZ, quia ipsi sectioni AZ plana parallelorum perpendiculariter insistunt, vtpote ducti polo A, qui est maximi parallelorum. Ergo erunt sinus circuli AIH, quare, & erunt perpendiculares lineæ I3: parallelæ ipsi AZ pro radio AZ ad vitandam confusionem substitutæ. Vnde angulus apud 3. erit rectus, & IN erit basis. Quadere eodem argumento concludemus 34 portionem esse minorem, quàm NV, & 46, quàm VT. Propterea; sinus 34, & 46 esse magis propinquos maximo parallelorum BC, quàm TV, & VN, & ideo minores, & esse inæquales inuicem arcus, maioremque esse OH, quàm OP.

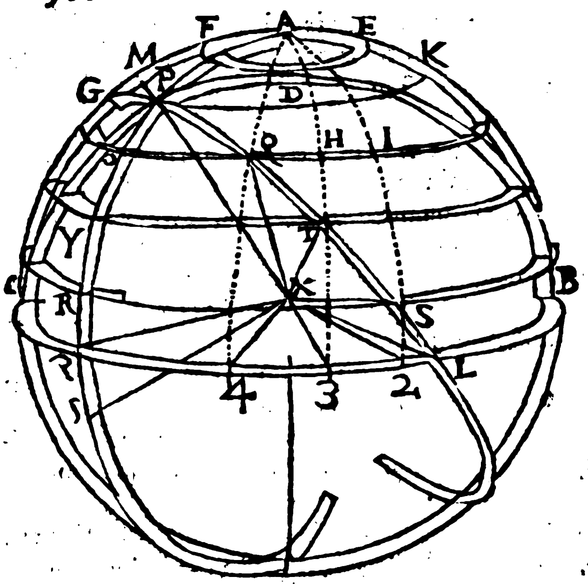
THEOR X. PROP. XXXI.

Iisdem positis omnibus, si per partes æquales circuli obliqui, per quas paralleli ducuntur, à polo circuli maximi parallelorum ducantur circuli maximi; isti ipsius paralleli maximi circumferentias inæquales intercipient, maiorque erit illa, quæ circulo per polum, & contactum transeunti propinquior erit.

SIt circulus maximus in sphæra BDC tangens parallelum EDF in D; Aliusque circulus maximus LPG tangat alium parallelum illo prædicto maiorem MPX in puncto P; paralleli quoque alij, vt OQ, & YT, ita diuidant circulum maximum secundò tangentem LPG in partes æquales ST, & QT, perque polum omnium parallelorum A, & contactum P transeat aliquis circulus, vt APZ; à que polo A descendant circuli maximi per partes æquales circuli secundò tangentis, & per puncta S, T, Q, in quibus obliquum paralleli secant, qui maximi sint A I 2, A H 3, & AQ4. Dico, quod isti circuli maximi abscindent partes inæquales à circulo parallelorum maximo BLZC nempe 23, & 34; maior quæ erit pars 34, quæ circulo APZ per contactum transeunti propinquior est.

Probatur, vt præced. propos. 27. Quoniam plana circulorum maximorum punctis distinctorum à polo A perpendiculariter descendentia super parallelum maximum BLZC lambunt latera triangulorum æquicrurum inuicem TXQ, & TXS ob radios QX, & TX, & SX æquales, & bases sustentas æquales ob arcus æquales QT, & TS descen-

 dunt-



duntque super planum maximi paralleli perpendiculariter. Insuper ipsa triangula habent diuersam inclinationē ad plana A 4, A 3, A 2 à polo A cadētia. Et quia APZ circulus, vtpote per contactum P à polo A descendens ex propos. 3. h. p. transit, & per polum 5 circuli obliqui secundò tangentis GPL; ideo ex prop. 14. Cor. h. par. 1. erit rectus ad ambos circulos maximi paralleli BLZ, & maximi obliqui LPG. Quare maximam inclinationem ipsorum mensurabit. Cum ergo triangulū QXT magis approximet circulo maximam inclinationem ex ostensis mensuranti minus inclinabit, vel minus erit obliquus ex propos. 27. h. part. 3. ad plana à polo A cadentia; quam triangulum TXS, & magis accedet ad sectionem X 4, quare triangula inclinationis planorū ex prop 22 Tract. 22. à planis perpendiculariter descendentibus, & latera eorum QX, & XT, & XS lambentibus effecta, nempe 2 X 3, & 3 X 4 erunt inaequalia in angulis apud X bases 2 3, & 3 4 subtēdētibus, & maior erit angulus 3 X 4 subiacens triangulo XT Q minoris inclinationis, quam angulus 2 X 3 subiacens triangulo S X T maioris inclinationis, & ideo maior erit angulus 3 X 4, & consequenter arcus 3 4 ex prop. 39. lib. 6. elem. qui APZ circulo mensuranti maximam inclinationem magis appropinquat, quām angulus 2 X 3, & consequenter arcu 2 3, qui ab eo circulo APZ maximam inclinationem mensuranti per polum A, & contactum P transeunti magis remotus.

COROLLARIVM.

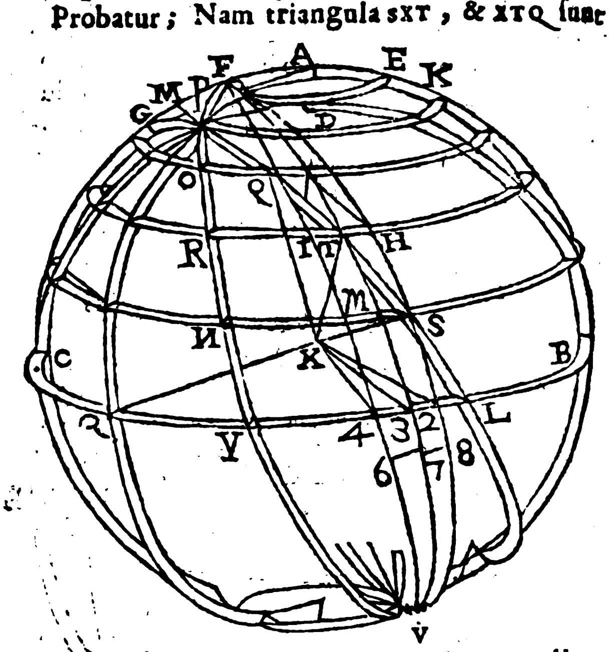
Hinc ellicies arcus quoque cuiuscumque paralleli esse inaequales; maioresque esse eos, qui circulo APZ propinquiores sunt, quia arcus parallelorum omnium à circulis maximis per eorum polos transeuntibus abscisi sunt similes, ex propos. 22. huius, & ideo tot gradus comprehendet 3 & 4 quot HQ, & tot 2 3 quot IH, sed plures gradus comprehendit 3 4, quam 2 3, ergo, & plures QH, quam H I gradus comprehendet, & sic dicas de aliis.

THEOR. X. PROPOS. XXXII.

Eodem posito maximorum circulorum primo paralleli minoris, & secundo maioris contactu; quo maiorem hunc parallelum secat maximus tangens minorem parallelum. Si circuli maximi per aequales partes circuli secundò tangentis ducantur, qui tangant minorem parallelum: hi circumferentias inaequales auferent de maximo parallelorum; quarum, quae propior erit circulo ad easdem partes parallelum tangente à quibus partibus ipsi maximi ducuntur, & per contactum descripto, remotiore erit maior.

Sit eadem prorsus constructio, quae priùs, nempe circulus maximus BDC tangens parallelum minorem EDF, & alius circulus GPL obliquus ad parallelos tangat circulum parallelum maiorem MPK partesque à parallelis insectae eius maximi obliqui equales sint ST, & TQ Dico, quod si ab B descendāt circuli maximi 2SF, & 3TF, & 4QF per puncta has partes terminantia S, & T, & Q, qui tangant parallelum EDF; abscindent à maximo parallelorum partes inaequales 2 3, & 3 4, maiorque erit pars 3 4, quae circulo FRY vicinior est, qui ad easdem partes, nempe ad F tangit non sicut circulus BDC, qui tangit in D, & occurit ipsis maximis FSL, & per contactum P transit inter F Q 4, & APZ; Aduerte BX 7, & 7 X 6, vt triangula debere cōcipi I. crura ad X ducta nō sint.

Probatur; Nam triangula SXT, & XTQ sunt



aequalium inuicem crurum, basiumque aequalium ST, & TQ: Vicinius est autem triangulum TQX circulo maximo APZ per contactum P transeunti, ideo perpendiculari circulo obliquo LPG, & parallelorum maximo BLC: & ideo inclinationem maximam mensuranti. Quare circuli tangentes FQ 4, & FT 3, qui hoc triangulum efficiunt suis sectionibus TX, & QX imprimunt in plano normali, & inclinationis triangulum 6X7; quod erit maioris anguli apud X, quam trianguli remotioris 8 X 7 angulus apud X, quod triangulum substernetur triangulo SXT remotiori. Siquidē triangula, quae inter duo plana intercipiuntur quanto magis appropinquant suis basibus planorum intercipientium sectioni ex propos. 23. Tract. 22. eò maiorem angulum inclinat causant, & ex eadem quanto minus obliqua sunt; Quare cum ex propos. 27. huius subtensa arcui T Q sit minùs obliqua quam subtensa ST, quia vt dixi magis arcus ille TQ accedit ad circulum perpendicularem maximum APZ; & rursus magis quoque sectionibus maximorum circulorum intercipientium accedit, nempe circulorum tangentium parallelum

lum-

lum EDF; quæ apud illum circa F existunt. Quare ex 3. parte prædict. propos.23. Tract. 22. angulus, qui fieret 6 X 7 esset maior, quam 7 X 8, vtpote subiectus angulo QXT minus obliquo, & ex dictis minorem inclinationem habenti. Interfectiones autem 2 X, 3 X, & 4 X incidunt inter circuli maximi planum, cui sunt perpendiculares, & inter plana obliqua triangulorum SXT, & TXQ, siquidem polus circuli maximi, normalis vtrique eorum debet esse in communi eorum intersectione, quæ contingit prope, simulque extra parallelum EDF, & quia circuli perpendicularis intersectio distat quadrante ab eius polo, & BYC parallelorum maximus distat à D, & F minus quadrante, ideo circulus maximus perpendicularis ad tangentes duos, V. g. ad FT 3, & FQ4 infra ipsum BLY cadet, & arcus eius erunt V.g. 8 7, & 76. Facient autē circuli tangentes FQ4, & FT3, & alij cum maximo parallelorum LYZ æquales angulos 4, 3, 2 ob æqualem inclinationem ex 18.h. quia tāgunt ex hypothesi eundem parallelū EDF. Cumq; anguli 4, 3, 2 tangentiū FQ6, &c. sint ęquales, quod sint æqualiter inclinati, anguli vero circuli duobus arcubus illis perpendiculariter incidenti sint recti, patet verificari Coroll. cit. propos.23. maioremque esse angulum 4 X 3, quam 3 X 2, vtpote angulo maiori 6 X 7 subiectum, quam, quod sit angulus 7 X 8; non sunt autem ducta crura 6 X, & 7 X, vel 8 X ad vitandam confusionem, sed mente supplenda. Quamobrem arcus 4 3 quoque ex 39. lib.6. Elem. erit maior, quam 3 2, quod erat ostendendum.

COROLLARIVM I.

Hinc patet idem dicendum de arcu TH, & arcu TI paralleli HR, quòd nempe TH sit minor, quam TI, qui remotior est à circulo FPZ, quia arcus 2 3 est similis arcui TH, & arcus 34 arcui TI, & idem dicendum de omnibus alijs parallelis; qui inter maximum BL YC, & parallelum MPK describi possunt.

THEOR. XI. PROPOS. XXXIII.

Si in sphæra maximus circulus aliquem circulum tangat; alius autem maximus circulus obliquus ad parallelos tangat parallelum maiorem illo, quem tangebat maximus circulus primo positus: Inæquales intercipient circumferentias parallelorum circulorum; quorum propiores vtrouis polorum ad eandem partem maiores erunt, quam vt similes sint remotioribus.

Sit schema præcedens; in quo sit maximus circulus FPY tangens parallelum minorem EDF; & alius circulus maximus GPL tangat parallelum maiorem MPK; secetque duos parallelos quoscumque SN, & TR. Dico arcus TR, & SN inæquales esse; maioremque esse NS polo V propiorem, quā, quod sit similis arcui RT. Ad quòd ostendendum describantur maximi circuli apud F tangentes, vt FT3 per sectionem T, quo facto.

Prob. propos. Nam prop.16. huius ostendimus partes parallelorum interceptas inter maximos circulos eundem parallelum tangentes, vt sunt MN, & TR esse similes. Ergo NS inter maximos circulos tangentes comprehensus erit maior, quā quòd similis esse possit; quia erit maior, quam NM, qui est ille arcus, qui similis est arcui RT. Quod autem tangens FT3 abscindat arcum minorem NM, quam NS patet, quia isti arcus se decussant in T. Vnde GPS arcus remanet vltra m apud S.

EXPENSIO IV.

De partibus, quæ ab intersectionibus maximorum circulorum fiunt, nullam proportionem dicentibus, nec inuicem, nec cum diametris ipsorum circulorum.

Vidimus vsque adhuc aliquos circulos ab alijs posse ita secari, quòd eorum partes, aut similes sint, aut æquales, & de istis nullum dubium est, quod proportionem dicant cum similem rationem habeant.

Deinde adesse alias intersectiones quibus in tales partes circuli diuidantur, vt inter eas nulla reperiatur, aut æqualitas, aut similitudo, modo videndum an inter ipsas aliqua proportio, nempe rationum similitudo inueniri possit, sed priùs quædam pro fundamento substernenda sunt.

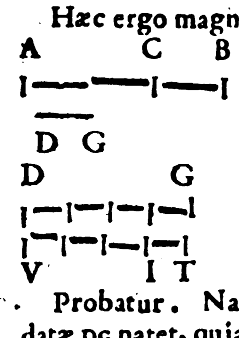
PROBL. LEMMATICVM I. PROP. XXXIV.

Propositis duabus magnitudinibus inæqualibus reperire aliam mediam, quæ datæ vtrique magnitudini commensurabilis sit.

Sint propositæ duæ magnitudines inæquales AB maior, & AC minor, & alia quæcumque DG, cui oporteat reperire commensurabilē magnitudinem talem, quæ sit media inter AB, & AC, nempe maior, quam AC, & minor quam AB.

Excessus, quâ maior AB excedit minorem AC est BC, cui comparata data quæcumque DG, vel erit minor, vel maior; Si est maior bifariam diuidatur, & si neque sic sit minor, vna ex ipsis partibus bifariam diuidatur adhuc, & toties in dimidijs remanentibus id fiat; donec efficiatur minor, quàm excessus CB.

Hæc ergo magnitudo, vel data minor, quam excessus CB, vel diuidendo minor effecta toties replicetur; donec efficiatur proximè maior, quā AC, & sit VT, ita vt si auferatur tantùm vna ex partibus replicatis iam sit minor. Dico *hanc esse quantitatem quæsitam*.



Probatur. Nam, quòd sit commensurabilis datæ DG patet, quia eius multiplex est, aut aliqua ex dimidijs successiuè factis, & ideo pars aliqua lineæ datæ DG.

Quod verò sit media inter AB, & AC patet, quia est quidem maior, quam AC, ex hypothesi necessariò verò minor, quam AB: Nam si esset æqualis, si detraheretur vnica pars V. g. TI; quia detraheretur pars minor, quam excessus CB, remaneret VI maior, quam AC, & ideo non fuisset proximè maior, vt præsupponebatur.

THEOR. II. PROPOS. XXXV.

Si polus parallelorum sit in circumferentia maximi circuli, quem duo alij maximi circuli ad angulos rectos secent, nempe maximus parallelorum, & obliquus alius ad parallelos, quos duos ad easdem partes secent alij duo maximi per polum parallelorum ducti; non erit pars maximi paralleli ad partem obliqui interceptam inter circulum primo positum, & postremum per polos ductum, vt pars eiusdem maximi paralleli altera ad partem aliam obliqui, quæ vtroque maximo circulo per polos ducto intercipiantur.

SIt circulus ACB, in quo sit polus A maximi paralleli BHD, & alius obliquus circuli CFD ei orthogonaliter insistat, quos duo maximi circuli à polo A descendentes secent, nempe AFH, qui secet maximum parallelorum in H obliquum in F, sicut, & AEG secet maximum parallelorum in G obliquum in E. Dico, quod sicut est BH ad CF non erit HG ad FE; sed ad aliquam circumferentiam minorem, quam FE, vt in fig. I.

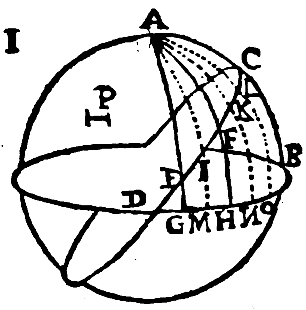
Probatur. Nam vel arcus obliqui circuli CF est commensurabilis arcui FE, vel incommensurabilis. Si commensurabilis inueniatur eorum communis mensura P, & secundùm eam distribuatur arcus CF, & FE, perque puncta diuisionum à polo A maximi circuli ducantur LO, & NK, & MI. Eruntque æquales partes inuicem CL, & LK, KF, FI, & IE. Quare partes in maximo parallelorum ex propos. 28. huius erunt inæquales, maiorque erit BO, quam ON, & ON, quàm NH, & cæt. Quare ex propos. 8. lib. 5. Elem. maior erit proportio partis BO ad CL, quam ON ad LK, & sic successiuè: quia cum BO sit maior, quam ON comprehendit plùs de arcu CL, vel æquali LK, quàm ON, & successiuè de cæteris vsque ad G quapropter, cùm sint tot partes in CF, quot in BH, & tot in FE, quot in HG, & quælibet pars in BH antecedens dicat maiorem proportionem, quam sequens ad suam correspondentem in CF, & idem dicas de HG ad FE, dicet quoque omnes simul antecedentes partes BH ad correspondentes partes sequentes CF numero easdem maiorem proportionem; quam arcus HG partes ad suas in eodem numero correspodentes FE: Quare vt dicant eandem proportionem arcus HG ad FE, quam BH, ad CF, deberet esse minor, sic quia dicit maiorem proportionem 8. ad 4. quam 3. ad 2. quia 8. comprehendit 4. gemina vice, non autem 3 comprehendit 2. numerus 2. debebit esse minor, & fieri $1\frac{1}{2}$, & sic ita est 8. ad 4. vt 3. ad $1\frac{1}{2}$.

Progressu 2. Quod si arcus CF, & FE sint incommensurabiles, tunc si non est, vt BH arcus ad arcum CF, ita HG ad arcum aliquem minorem, quam FE; saltem erit, vel ad arcum maiorem, quàm FE, vel ad eundem FE, vt in fig. 2.

Sit primum HG ad aliquem arcum maiorem, quam FE V g. HG ad FT, vt BH ad CF. Ex præc. propos. inueniatur arcus medius maior, quam FE minor, quam FT, & commensurabilis ipsi CF, & sit arcus FV. Ducaturque per polum A, & punctum V circulus maximus AVR, & quia FV ponitur maior, quam FE erit quoque HR maior, quàm HG, vt per se patet.

Ex præcedenti itaque argumento, ita erit BH

I

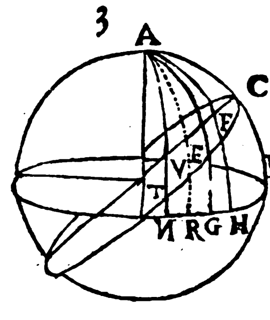


ad CF, vt HR ad arcum aliquem arcu FV minorem: quia commensurabiles ponuntur FV, & CF. Ex aduersarijs verò ita quoque ponitur BH ad CF, vt HG ad TF. Ergo quoniam habēt eandem proportionem, quam BH ad CF; habebunt etiam eandem proportionem inter se; & ita erit arcus HG ad arcum FT, vt HR ad arcum aliquem minorē, quam FV, quia sunt, vt BH, & CF ex aduersarijs, sic HG ad FT, ex probatis autem HR ad minorem, quam FV, vnde *permutando* erit HG ad HR antecedentes, vt FT ad arcum minorem, quam FV: Sed HG est minor, quā HR. Vnde, & arcus FT esset minor arcu minori, quàm FV, qui arcus FV ipso FT minor est, ex 12. lib. 5. elem. quę res est omnino absurda.

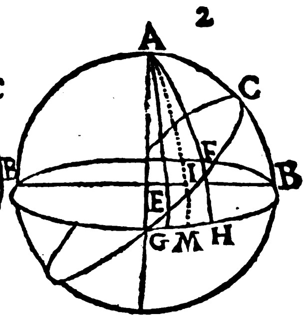
Progress. 3. Quòd si in fig. 3. ita sit BH ad CF, vt HG ad FE, & ponantur incommensurabiles CF arcus, & FE; tunc FE diuidetur per medium in I, & ducetur circulus maximus à polo A, qui sit AIM; Eritque maior HM arcus, quàm MG ex 26. huius, ideoque ex primi progr. probatione maior erit proportio HM ad FI; quàm dimidij totius HG ad FI dimidium arcus FE, sed vt dimidium ad dimidium, ita totum ad totum, quare erit maior proportio HM ad FI, quam totius HG ad totum FE: sed proportio HG ad FE, ex aduersarijs eadem est, quæ BH ad CF. Ergo est maior proportio HM ad FI, quam BH ad CF.

Itaque quia HM habet maiorem proportionem ad FI, quam HB ad CF debebit esse maior arcus ad quem dicit eandem proportionem, quam sit arcus

3



2



FI, quod tamen in secundo progressu ostensum est impossibile, nempe quod BH ad CF ita sit, vt arcus HM ad arcum arcu FI maiorem. Itaque cum nec BH sit ad CF, vt HG ad arcum arcu FE, maiorem, nec ad æqualem erit, vt ad minorem, & sic propositio remanet vndequaque probata.

CO-

COROLLARIVM.

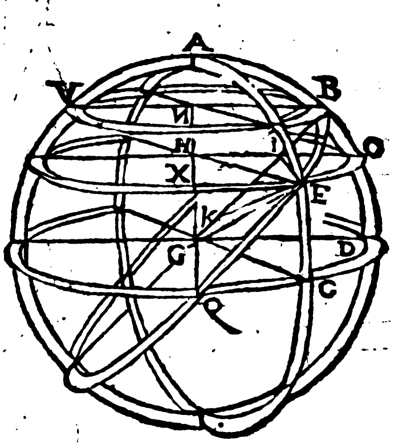
HInc fit maiorem esse rationem arcus BH ad arcum CF, quam arcus HG ad arcum FE. Cùm enim fit, vt BH ad CF, ita HG ad arcum arcu FE minorem: sit autem maior proportio ex 8. propos. quinti elem. arcus HG ad arcum arcu FE minorem; quàm ad FE arcum maiorem: erit quoque maior proportio BH ad CF, quam HG ad FE; ita quia est eadem proportio 8. ad 4. quam 6. ad 3. est autem maior proportio 6. ad 3. quam ad 5. erit quoque maior proportio 8. ad 4. quam 6. ad 5. cùm 8. comprehendat gemina vice 4. non autem 6. comprehendat numerum 5.

THEOR. III. PROPOS. XXXVI.

Si polus parallelorum sit in circumferentia maximi circuli; quem duo alij circuli ad angulos rectos secent, nempe maximus parallelorum, & obliquus aliquis ad eosdem, qui obliquus secetur à maximo circulo per polum ducto.

Semidiameter sphæræ ad semidiametrum eius paralleli, quẽ obliquus circulus tãgit habet maiorẽ rationẽ, quàm circumferentia maximi parallelorũ ad circumfe-etiã obliqui circuli, quæ inter circulos primò, & postremò assumptos per polum parallelorum transeuntes intercipiuntur.

SIt polus A in maximo circulo ABD, cui sint perpendiculares maximus parallelorum DCQ, & obliquus ad parallelos BEQ, & hũc BEQ maximum circulum circulus alter à polo A descendens AEC secet alicubi V. g. in E inter B, & Q. Dico, quòd diameter sphęrę BG habet maiorem proportionem ad diametrum BN paralleli, quem contingit obliquus in B, quàm circumferentia DC ad circumferentiam BE, quę intercipiuntur inter circulos ABD & AEC per polum A transeuntes, quod vt probetur.



Intelligendum est lineas EH, & EI esse sectionem paralleli OEX per intersectionẽ E maximorũ BEQ, & AEC transeuntis cum ijsdem; At EG, & CG esse sectiones maximi AEC, cum obliquo BEQ, & maximo parallelorum DCQ. Et tandem DG, & OH, & BN, esse sectiones circuli ABD, cum parallelis:

Et hinc ex pr. 16. tr. 22. sectionem EI esse perpendicularem ad OH, & ad BG, & angulos BNG, & IHG, & EIH esse rectos, & quia IHG angulus est rectus longior erit basis IG, quam crus IH: vnde translatũ illud crus super basim IG terminabit in K, ducaturque EK: ex 22. primi triãgulum EIK erit æquale triangulo EIH ob angulum rectum ad I in vtrisq; & EI latus commune, & IK, & IH æqualia crura.

Igitur ex Tr. 19. de angulis propos. 4. habebit maiorem rationem GI ad KI, vel ad æqualem IH crura, quam angulus EKI, vel ipsi ęqualis EHI ad angulũ EGI, sed angulus IHE est ęqualis angulo DGC. Ergo habebit maiorẽ proportionẽ GI ad IH, quã angulus DGC ad angulũ IGE, quare, & idẽ verificabitur de circũferentijs mẽsurãtibus ex 39. sexti el. nempe DC, & BE. Et obtinebit maiorem proportionem GI ad IH, quàm arcus DC relatus ad BE: Considerandum verò est, quod eadem proportio est GI basis ad crus IH, quam GB semidiametri sphæræ ad BN semidiametrum paralleli, quem tangit obliquus ex 4. sexti. Quare semidiameter quoque sphęrę ad semidiametrum paralleli DV maiorem rationem habebit, quam arcus DC ad arcum BE.

COROLLARIVM.

VNde cum iam cognoscamus quinam circuli ita se intersecent, vt similes sint, vel ęquales, & ideo inuicem comparabiles, in proportione; quinam verò circuli non se intersecent in partes æquales, vel similes, nec inuicem, nec cum diametro comparabiles, sphęræ cognitionem talem nacti sumus; vt in comparandis portionibus circulorum inuicem error, non facilè suboriri possit. Cognoscimus quoque necessitatem recurrendi ad sinuum, secantium, & tangentium Tabulas, vt arcuum habeamus cognitionem, cum arcus non dicant inuicem proportionem illam, quam sinus arcubus subtensi.

TRA-

TRACTATVS XXIV.

De Sectionibus Conicis.

POst Sectiones sphæricas ingredimur cognatas sectiones conicas, nec minus illis scientiæ cælesti necessarias, nec minus ingeniosas, aut mirabiles; suntq; quinque diuersæ omninò essentiæ, Triangulum, Circulus, Ellipsis, Hyperbola, & Parabola, sed triangulo posthabito, de quatuor sequentibus agemus, & de tribus quidem postremis ex instituto; de circulo verò obiter, quatenùs in ijsdem proprietatibus multoties cum prædictis tribus sectionum generibus communicat. Huius verò mirabilis cognitionis promotor, & ampliator fuit Appollonius Pergęus, qui ob id Principis Geometræ nomen consecutus est.

EXPENSIO I.

De principijs.

ANtequam sectiones ipsas cognitione attingamus, cuius corporis sint sectiones oportet noscere, sicut, & lineas, quę in ipsis trahi possunt, easque vel terminare, vel diuidere, nomine tenùs agnoscere, vt deinde earum quoque natura manifestior euadat, quæ ab harum appellationum intelligentia dependet.

DEFINITIO I.

COnus est corpus habens originem à circumductu lineæ à puncto in sublimi posito determinatæ longitudinis circa perimetrum circularem.

Conus propriè dicitur, vt Hyeronimus Vitalis de Mathematica optimè meritus in suo Lexico asserit. Nux pinea, quæ ex lato in acutum desinit; sed hæc appellatio à Mathematicis translata est ad significandam pyramidem rotundam, cuius basis circulus; Describitur verò, quòd manente puncto D linea, quædam DC recta circa circulū CGHF feratur, donec à C per GFH in C iterū redeat, vt fig. 1.

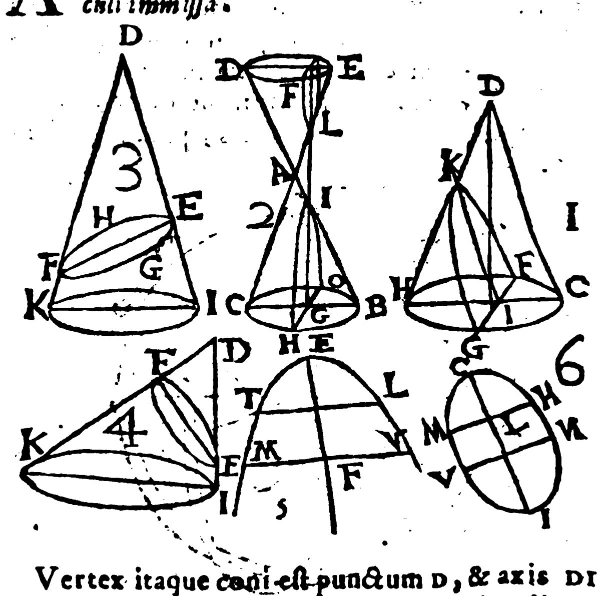
Vnde clarum est omnes lineas, quæ à peripheria circuli ducuntur ad verticem, vt CD, vel CH esse lineas rectas, quæ verò aliter curuas esse, aut certè si rectæ sint, solùm tangere, vel si secant intùs penetrare. Conus quoque posset describi ex ductu lineæ circa ellipsim. Verùm; quia ellipsis ex circulo ortum habet, & in quolibet cono etiam in basi elliptica inixo potest circulus duci, qui, & conum ipsum relinquat, & basim ei sternat, inde est; quod circulum cono pro basi substernant, vt qui certior, & magis determinatus; quàm ellipsis, quæ ab eo originem, & natalia ducit.

DEFINITIO II.

VErtex coni dicitur manens punctum, à quo ducta linea superficiem conicam descripsit.

DEFINITIO III.

AXis coni dicitur recta à vertice in centrum circuli immissa.



Vertex itaque coni est punctum D, & axis DI, & definitur; quòd cadat in centrum circuli non Ellypseos licet, & ipsa cono pro basi deseruire possit; Tum quia eius accidentia nondum manifesta sunt, vnde nec propter id pro basi vsurpatur; tum quia infinitæ diuersitatis sunt prorsùs ellipses, quę eidem cono substerni possunt, & quæ non idem centrum commune possident; vnde nullus axis determinatus assignari posset cum deberent multiplicari

plicari, prò vt infinitæ ellipses in cono assignari possunt, sicut, & earum centra.

DEFINITIO IV.

Conus rectus est, cuius linea circumducta efformatrix vbique æqualis est; Scalenus verò cuius ea linea inæqualis est.

Duplicem itaque conum distinguimus rectum, qui, & isoscellius, æquicrurisque appellatur, & Scalenum, qui obliquus quoque apellatur; hic imperfectior est, vtpote duplici axi obnoxius, ille perfectior, & vnius axis: Cæterum in vtroque omnes coni sectiones exhiberi possunt, non vt antiquitas ante Apollonium Pergeum putauit, quæ distinxit tria conorum genera iuxta tres angulorum species, quas à vertice D rectæ ad basim deductæ continere poterant, nempe Rectos ob angulum ad verticem rectum; Obtusiangulos ob angulum obtusum, Acutiangulos ob angulum acutum, in quibus singulis vnicam sectionem ponebant. In recto parallelam, quam apellabant coni recti sectionem in acutiangulo ellipsim, quam acutianguli, & in obtuso hiperbolem, quam obtusianguli sectionem nominabant.

DEFINITIO V

Coni oppositi sunt ad verticem circa eundem axem existentes.

Tales sunt ABC, ADE in fig. 2. circa axem eundem positos.

DEFINITIO VI.

Coni sectio est figura à plano diuidente conum in superficie coni effecta.

DEFINITIO VII.

Sectio coni per axem est cum planum secans per verticem, & per centrum circuli transit.

Sectio itaque per axem est DHC in fig. 1. quæ per centrum I, axem ID, & per D verticem transit, estque triangul um, vt suo loco ostendemus.

DEFINITIO VIII.

Coni sectio Parabola, est cum planum secans parallelum vni lateri sectionis per axem adigitur.

Vt in 1. fig. FGK planum est parallelum lineæ CD, quæ est crus trianguli, vel sectionis per axem CDH.

DEFINITIO IX.

Coni sectio Ellipsis est, cùm planum secans vtrunque crus, sectionis per axem, secat, & angulos inæquales efficit illis, quas cum prædicta sectione basis circularis facit.

Sic sectio EGHF, quia angulus DFE, est inæqualis angulo DKI, vel alterno DIK; Sic, & angulus DEF est inæqualis angulo DIK, vel angulo DKI alterno, vt in fig. 3. vocatur ellipsis. Si autē angulus DEF angulo DKI, vel DFE angulo DIK alterno, vel sub contrario, vt in 4. fig. æquaretur, sectio esset circulus, ut suo loco ostendemus Tract. seq.

DEFINITIO X.

Hyperbola est, cum sectionis planum alteri sectionis per axem cruri ad verticem producto occurrit.

Sic in fig. 2. si GI productum occurrat CA cruri producto vltra verticem in L, dicetur ea sectio Hyperbola qualis est OIN, & si planum secet vtrunque conum ad verticem erunt oppositę figuræ, seu Hyperbolæ.

DEFINITIO XI.

Diameter sectionum est recta diuidens lineas paparallelas quaslibet, quæ ducuntur intra sectionem bifariam, & primarius quidem, seu axis, qui rectangulè diuidit, alij autem vocantur coniugati axes.

Sic CI in fig. 6. vocatur principalis, & ex generatione diameter primarius, seu axis, quia diuidit bifariam, & orthogonaliter rectas in sectione ductas, quæ dicuntur ordinatæ ad diametrum, seu applicatæ HM, & NV, si verò non ad angulos rectos erit diameter secundarius, seu coniungatus vt in fig. 5. EF, qui LT, & VM licet bifariam diuidat, non tamen ad rectos angulos.

DEFINITIO XII.

Transuersa diameter est illa, quæ inter duo crura trianguli per axem intercipitur.

Talis est in Hyperbola IHL, quæ inter crura sectionis per axem BA, & AE interipitur, & in hac sectione est diameter prolungata; At in ellipsi est ipse diameter absque vlla prolungatione, vt EF in fig. 3. qui si sit primarius, seu axis dicetur transuersus axis. At in parabola nullus est trasuersus diameter, cum enim eius sectio sit parallela vni cruri sectionis per axem, nunquam potest in aliud terminare, quare nec vlla linea in ea poterit in vtrumque crus sectionis per axem incidere.

DEFINITIO XIII.

Vertex sectionum est extremum diametri, cuiuscumque; at vertex supremus extremum axis.

DEFINITIO XIIII.

Centrum est, quod transuersam diametrum bifariam diuidit.

Punctum, quod transuersum diametrum bifariam disceperit; vocatur centrum, quia in Hyperpebola, vel Ellipsi omnes diametri ad illud punctum concurrunt, at Parabola nullum habet centrum, quod diametri omnes sint paralleli, vt ostendetur.

Pręter hęc essent Parametri, & Vmbelici definiendi: sed melius suo loco cum de ijs agemus, natura ipsorum inotescet.

DEFINITIO XVI.

Duæ similes figuræ sunt, quæ cum sint eiusdem speciei segmenta diametrorum ab applicatis facta vnius ad segmenta alterius sunt, vt applicatæ ad applicatas sub æqualibus angulis.

DE-

DEFINITIO XV

Æ *Quales sectiones sunt, quæ superpositæ inuicem consentiunt.*

THEOR. I. PROP. I.

Omnis sectio Coni per axem facta triangulum est.

PRobatur. Nam triangulum est illud, quod rectis clauditur, & tribus angulis constat. In cono autem omnes lineæ terminantes ad verticem rectæ sunt ex def. Cum verò basis sit plana superficies circularis erunt rectæ lineæ per illam extensæ, vnde AE, & BE, & BA tres rectæ erunt. Proptereaque tres tantum angulos se tangendo poterunt efficere, ideoque ABE erit triangulum. in fig. propos. sequentis.

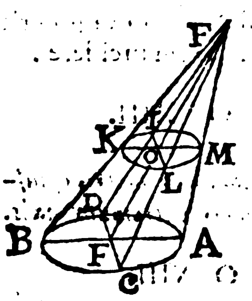
COROLLARIVM

HInceque est, quod si fiat alia sectio per axem efficietur aliud triangulum æqualis basis, vt primum. Nam altera sectio per axem EF incidet in centrum F, & rectæ CF, & FD radij erunt in circulo ACBD, vt sunt AF, & FB.

THEOR. II. PROPOS. II.

Omnis sectio coni circularis parallela basi circulus est.

PRobatur. Nam cum plana sint equidistantia erit, vt FE ad OE, sic CD ad LI, & AB ad MK; quare CD ad LI, & AB ad MK erunt in eadem proportione. Ideoque permutando



AB ad CD erunt, vt MK ad LI; & ideo dimidiæ AF ad FC vt MO ad OL dimidia: sed AF, & FC sunt æquales ex præced. Coroll. ergo etiam MO, & OL, & ita dicas de reliquis: quare cùm omnes MO, & OL, & cæt. à puncto O ducibiles sint æquales; MIKL erit circulus.

EXPENSIO II.

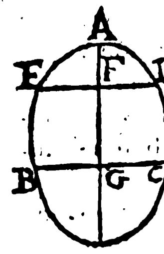
De Diametro, & Applicatis.

PRoprietates mirabiles sectionum ab ipso diametro, & applicatis incipiunt, vtpote illæ, quæ magis obuiam sunt, & faciliores intellectui se produnt, maximè quia ferè omnia, quæ de sectionibus dici possunt, in diametro, & applicatis fundantur.

PROBL. I. PROP. III.

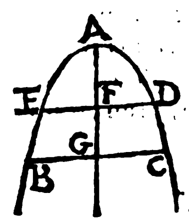
Data quacunque coni sectione eiusdem diametrum inuenire.

SIt data quæcumque coni sectio BAC. Oporteatque eiusdem diametrum exquirere.



Ducantur, vtcumque in sectione binæ rectæ parallelæ BC, & DE; quæ bifariam secentur in F, & G, ductaq; per puncta diuisionum linea FG occurrat sectioni in A. Dico rectam AFG *propositæ* BAC *sectionis esse diametrum*.

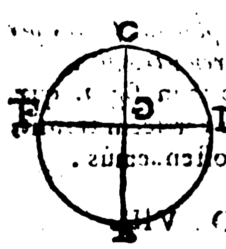
Ratio est. Quia æquidistant DE, & BC; easque bifariam diuidit in G, & F recta AGF. Vnde ex definitione II. erit diameter.



PROBL. II. PROPOS. IV.

Dato triangulo per verticem, & sectionis diametro Applicatæ longitudinem inuenire.

SIt ABC triangulum per axem coni ductum in fig. prop. seq. in quo detur diameter EG. Interuallo dimidiatæ ML diametri baseos, fiat circulus CF, BD. Accipiesq; LX, quam transferes in diametrum circuli CB à puncto G duces perpendiculare, quę sit DGF, & FD erit applicatę magnitudo; quam deinde applicabis diametro sectionis EG interuallo eodem XE in quacumque sectione, vel Hyperbola, vel Parabola, vel Ellipsi, & erit applicata.



Probatur autem facilè. Quia applicata est illa, quæ diuiditur bifariam à diametro: sed punctum G est punctum diametri, illudque bifariam diuidit linea DF in G ex 13. lib. 3. el. cùm ducta sit perpendicularis diametro CB circuli DCBF ex constructione. Quare erit applicata, cùm puncta F, D sint communia circulo BD, & sectionis DEF, & sint I, & V in circulo MILV.

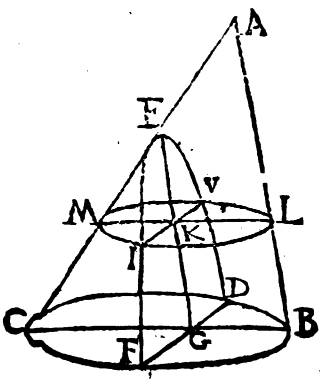
THEOR. I. PROPOS. V.

Si parabolæ cuiuscumque ad diametrum binæ rectæ lineæ sint ordinatim applicatæ, erunt quadrata ipsarum ad inuicem, vt interceptæ diametri portiones inter ipsas, & verticem.

SIt Conus ABC, in quo parabola DEF, cuius diameter parabolica EG; applicatæ verò GF, & IK ad diametrum EG, trahaturque LM. Dico, *ita est quadratum factum ex* GF *ad quadratum factum* ex *ex* KI, *vt* GB *ad* KB portiones diametri inter verticem E, & ordinatim applicatas interceptæ.

Reminiſcenda eſt 35. propoſ. Eucl. 3. hæc enim in illa fundatur.

Nam in circulis ex 2. h. LVIML, & CDBF parallelis ſe ſecent mutuò diametri LM, & CB cum chordis VI, & FD, & ad angulos rectos in K (angulus enim K rectus eſt, licet id fig. non exprimat) vt ex dictis propoſ. 4. huius. Quare, ex ſegmentis LK, & KM conſtituatur rectangulum, & ſegmentis æqualibus VK, & KI conſtituatur quadratum, erunt æqualia: Sic ſi ex ſegmentis BG, GC rectangulum, & æqualibus DG, & GF quadratum conſtituatur, & hæc erunt inter ſe æqualia. Vnde ita erit rectangulum conſtitutum ex CG, & GB ſegmentis diametri maioris circuli ad rectangulū ex ſegmentis LK, & KM minoris, vt quadratum ex ſegmētis chordæ GD, & GF ad quadratum ex ſegmentis chordę IK, & KV. Sed iſtorum duorum



rectangulorum altitudines ſunt eædem: ſiquidem ſegmenta LK, & BG; quia ſunt parallela, & inter parallelas BA, GE ſunt æqualia ex prop. 33. primi. Ergo ſe habebunt inuicem, vt baſes GC, & KM ex propoſ. 1. lib. 6. Eucl. Quo ſuppoſito ſic probò propoſitionem ex propoſ. 4. Coroll. lib. 6. ſicut eſt GC ad KM, quæ ſunt parallelæ in triangulo EGC, ita eſt EG ad EK. Sed, vt eſt latus CG ad MK, ita eſt rectangulum ex ſegmentis EG, & GC ad rectangulum ex ſegmentis LK, & KM; & æqualem proportionem dicit hoc rectangulum ex ſegmentis diametri BG, & CG ad rectangulum ex ſegmentis LK, & KM, quam quadratum ex ſegmentis chordæ DG, & GF ad quadratum ex chordæ KV, & KI, vt diximus. Ergo ex 16. lib. 5. Elem. quam proportionem dicit quadratum hoc GF ex ſegmentis chordæ maioris circuli GF, & GD ad quadratum ex ſegmentis IK, KV chordæ minoris circuli, eandem dicit GB ad KB portiones diametri parabolici à vertice inter applicatas interceptæ; quòd erat probandum.

THEOR. II. PROPOS. VI.

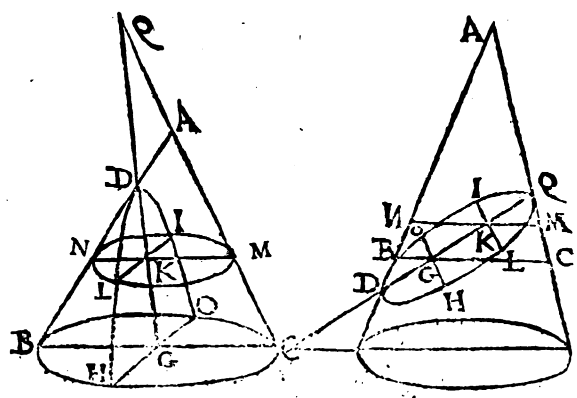
In omni Ellipſi, & Hyperbola quadrata duarum ordinatim applicatarum eam proportionem dicent ad inuicem, quam rectangula portionum diametri interceptarum inter ipſas, & vertices.

SIt conus ABC, ſiue obliquus, ſiue rectus. Hyperbola ODH, vel Ellipſis ODHLIQ, in quibus ſint ordinatim applicatæ HGO, & LKI: diametri autem intercepti portiones ſint in ellipſi GD, & GQ, vel QK, & KD intra ipſam. In Hyperbola autem extra eam, donec diameter occurrat lateri trianguli CA producto in Q, vt eſt GQ, ita quod GQ, & DG ſint portiones interceptæ, vel QK, & KD.

Dicit itaque propoſitio, *quod ſi fiat rectangulum ex* QK, *&* DK *hoc erit ad rectangulum factum ex* QG, *&* GD *interceptis portionibus tamquam ex duobus lateribus, vt quadratum* KL *ad quadratum erectum ſuper* GH.

Aduertendum verò eſt primo progreſſ. id quòd prænotauimus in præced. expenſ. rectangulum factum ex portionibus MK, & KN eſſe æquale quadrato ex KL conſtituto. Sicut, & rectangulum ex lateribus CG, & GB quadrato ex GH confecto, vt probat Eucl. propoſ. 35. lib. 3. & ideo eſſe rectangulum ex MK, & KN lateribus ad rectangulum ex GC, & BG, vt quadratum KL ad quadratum ex GH.

Aduerte, quòd in cono Ellipſis non ſunt deſcripti circuli circa diametros NM, & BC ad vitandam confuſionem; ſed ſunt ſubintelligendi baſi coni paralleli per L, H, O, I tranſeuntes.



Progr. 2. Nota quoq; proportionem laterum MK ad CG in triangulo CQ eſſe eandem ex Cor. prop. 4. lib. 6. Eucl. quæ portionis diametri, cruriſque QK ad crus Q. Sicut ex eadem proportionem lateris KN ad GB latus eſſe eandem, quæ DK ad DG. Quare ſi componatur rectangulum ex QK, & KD lateribus, quæ dicunt eam proportionem, quam latera rectanguli MK, & KN; ſicut, & rectangulum ex QG, & GD lateribus, quæ habent eandē proportionem, quam latera CG, & GB erit compoſitā proportione ex tr. 17. pr. 13. rectangulū ex QK; & KD ad rectangulum QG, GD; ſicut rectangulum ex MK, & KN ad rectangulum ex CG, & GB.

Quo poſito, ecce patet propoſitio. Quadratum ex applicata KL refertur proportione ad quadratum applicatæ GH, vt rectangulum ex lateribus MK, & KN ad rectangulum ex CG, & GB ex primo progreſſ. Sed hęc proportio rectanguli MK, & KN minoris ad rectangulum maius, ex CG, & GB lateribus eſt eadem, quā refertur rectangulum ex diametri Hyperbolici, vel Elliptici portionibus QK, & KD ad rectangulum QG, & GD ſegmentis ex 2. progreſſ. Ergo proportio quadrati applicatæ KL, qua refertur ad quadratum applicatę GH eſt eadem quā rectangulum ex ſegmentis diametri Hyperbolici, vel Elliptici QK, & KD ad rectangulum ex eiuſdem QG, & GD. Quę de Ellipſi dicuntur etiam de circulo debent intelligi.

COROLLARIVM.

PRopoſitio vniuerſaliter intelligenda eſt de quocunq; cono, ſiue obliquo, ſiue recto, ſeu applicatę ſint ad angulos rectos diametro, vt in recto, ſeu ad angulos obliquos, vt in obliquo contingit: Vnde colliges duplex genus diametrorum dari vnum, in quo applicatæ ſunt ad angulos rectos, alterum ad angulos obliquos, ſeu in Parabola, ſeu Hyperbola, ſeu Ellipſi.

EXPENSIO III.

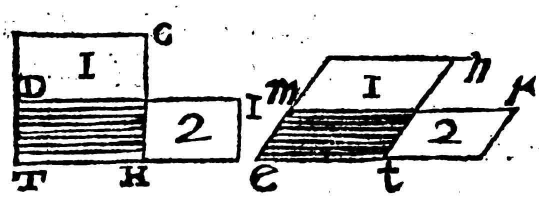
De Parametro.

PArameter est linea quędam assumpta extra sectionem: quæ est extrema proportionalis diametri interceptæ, & applicatę in parabola. At in Hyperbola, & Ellipsi est quoque tertia proportionalis inter diametrum interceptam, & applicatam: sed additâ ei, vel demptâ quędam portione lineæ, quam etiam ostendemus, cuius rationis sit.

LEMMA.

Si sit rectangulum quodlibet, & parallelogrammum rectangulo æquilaterum. Sintque duo alia rectangulum nimirum, & parallelogrammum ei æquilaterum, sed primo parallelogrammo æquiangulum; ita se habebit proportione rectangulum ad rectangulum, vt parallelogrammum ad parallelogrammum.

SIt primum rectangulum TC, & aliud secundum TI, quæ posita vnum super aliud occupabunt spatium commune DH. Item sit parallelogrammum primum, quodcumque, vt e n, sed primo rectangulo TC æquilaterum, & secundum e r aliud secundo TI rectangulo item ęquilaterum; sed quæ sint inuicem æquiangula, ita quod vnum super aliud positum, qua parte conueniunt in angulis æqualibus occupent commune spatium t m dicit propositio, quod primum rectangulum TC primo parallelogrammo e n dicet eam proportionem; quam secundum rectangulum TI dicit secundo parallelogrammo e r.



Probatur. Nam TC rectangulum primum se habet proportione ad e n parallelogrammum primum, vt sua pars DH ad suam partem m t, quòd sint super æquales bases TH, & Et ex prop. 1. lib. 6. Eucl. Coroll.

Sed pars hæc DH rectanguli primi, quæ etiam est communis secundo eadem proportione refertur ad partem m t parallelogrammi item primi, quæ etiam est communis secundo parallelogrammo, vt rectangulum secundum TI ad rectangulum secundum er propter eandem rationem ęqualium basium DT, & e m.

Ergo arguendo ex 16 lib. 5. ita se habet proportione primum rectangulum TC ad primum parallelogrammum e n, vt secundum rectangulum TI ad secuudum parallelogrammum e r, quod est propositum.

Hoc autem Lemma assumitur, vt quando loquimur de rectangulis, idem intelligatur de parallelogrammis illis æquilateribus, dummodo sicut illa omnia conueniant in rectitudine angulorum, sic hæc parallelogrammma inuicem referantur similibus angulis; & æquiangula sint, quod in posterum semper erit obseruandum.

THEOR. I. PROPOS. VII.

Si in omni sectione parabolica, quadratum alicuius ordinatim applicatæ, se habeat ad quadratum diametri parabolici intercepti ab eâ, & à vertice, vt idem diameter interceptus ad contiguam aliquam verticis; erunt quadrata, vel rhombi omnium applicatarum ordinatim æqualia rectangulis, vel parallelogrammis factis à dicta contigua verticis, & intercepto parabolico diametro inter eas applicatas, & verticem.

DEtur Parabola, in quâ diameter AC, applicata ordinatim CB, cuius quadratum sit CI dicit propositio. Quòd si se habeat hoc quadratũ CI in proportione ad quadratum CL, quod est factum super diametrum parabolicum interceptum inter CB ordinatim applicatam, & verticem parabolæ A. Si inquam CI quadratum, seu rhombus sit ad CL quadratum, seu rhombum in proportione, vt ipsa contigua verticis AP ad diametrum interceptum AC. Tunc cuiuslibet alius applicatæ, vt DH quadratum, seu rhombus, quale est DR æquale erit rectangulo, seu parallelogrammo, quod comprehenditur ab ipsa contigua PA, & intercepta diametri portione inter verticem, & alteram applicatam AD, quale est rectangulum, seu parallelogrammum PD.

Progress. 1. Aduertendum est ex propos. 21. lib. 6. Eucl. & ex eius Coroll. figuras similes esse in duplicata ratione laterum homologorum, ita quòd quadratum V. g. CI, sit ad quadratum CL, non vt latus BC ad latus CA; sed proportio debet esse duplicata; nempe gemina vice repetita, quare debet reperiri tertia proportionalis ex 14. prop. 6. Eucl. qualem hic ex ea propositione reperimus PA; sic enim proportio est repetita: nam ita se habet PA ad CB, vt CB ad CA; quare PA ad CA habebit eandem proportionem, quam quadratum CI ad quadratum CL, nempe geminatam laterum.

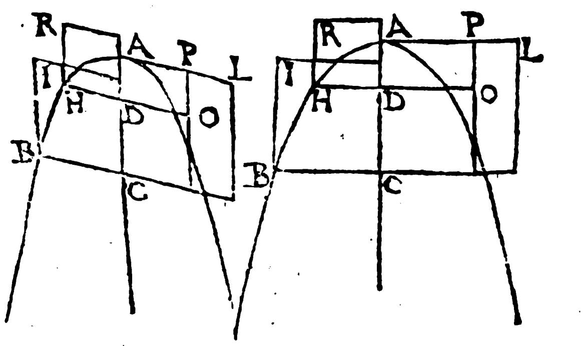
Progress. 2. Reminiscendum est propos. 1. lib. 6. Eucl. nempe ita esse propter eandem basim CA rectãgulum CP ad quadratũ CL, vt altitudines PA, ad AL; & ideo, quòd quadratum CI sit æquale rectangulo PC; siquidem eidem quadrato LC eandem dicunt proportionem; nempe eam ipsam, quam dicit PA ad AC, quadratum quidem CB; quia talem inuenimus PA, rectãgulum verò PC propter basim eandem AC: Quare ex Eucl. prop. 7. lib. 5. erunt rectangulum PC, & quadratum CI æqualia, quòd, & de Rhombo CI, & parallelogrammo CP intelligendum est ob lemma antepositum, quo supposito.

Progress. 3. Rectangulum PC habet eandem proportionem ad rectangulum DP; quam altitudo eius AC ad altitudinem AD propter basim

AP

ad eandem 1. propos. Euclid.& è contrà.

Quare Probatur propos. Nam propos. 5. demonstratum est quadratum CI esse ad quadratum DR; vt altitudo CA ad altitudinem DA; sed etiam ex 3. progress. quam dicit proportionem AC ad AD altitudines eandem dicunt, & rectangula PC ad PD adiacetia eis, ergo ita erit in proportione CI ad DR quadrata, quam PC ad PD rectangula. Ergo, vti



poterimus *permutatione*, & comparare quadratum malus, rectangulo maiori, sicut minus quadratum, minori rectangulo, & ideo ita se habebit quadratum IC maius ad rectangulum PC maius, vt quadratum minus DR ad rectangulum DP minus.

Sed in 2. progressu vidimus maius rectangulum PC, & maius quadratum CI esse æqualia, ergo erit etiam æquale quadratum DR minus rectangulo PD minori, quod cöprehenditur à contigua verticis PA, & diametri parabolici portione intercepta AD, & ita dicas de alijs.

COROLLARIVM.

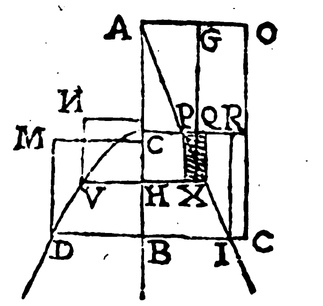
Hinc colliges. Quod cum contigua PA habeat hanc specialem proprietatem, vt rectangula ab ea comprehensa, & diametri portione interceptâ fint æqualia quadratis effectis super ordinatim applicatas speciali nomine insignitur, & vocatur Parameter, quòd sit mensura omnium rectangulorum, quæ æquantur quadratis cuiuscumque applicatæ ordinatìm, quæ in parabola trahatur.

THEOR. II. PROP. VIII.

In omni sectione Hyperbolica, vel Elliptica, si quadratum alicuius ordinatìm applicatæ se habeat ad rectangulum, quod sub diametro transuerso, & intercepto comprehenditur, vt diameter transuersa ad contiguam lineam verticis; Alia quadrata aliarum applicatarum erunt rectangulo, quod sub hac contigua, & intercepta diametri portione inter applicatas, & verticem comprehenditur, æqualia, si tamen figuram similem similiterque positam in Hyperbola addas, in Ellipsi subducas.

Sit Hyperbola, vel Ellipsis DVC, sitque ordinatìm applicata DB, cuius quadratum BM, sit ad rectangulum BO, quod sub portionibus, nempe transuersa AB, & intercepta CB, vel portionibus interceptis. Si ergo quadratum BM sit ad rectangulum BO, vt diameter transuersa AC ad aliquam, quæ sit verticis C contiguam, nempe CP; idest sit duabus BC, & DB tertia proportionalis.

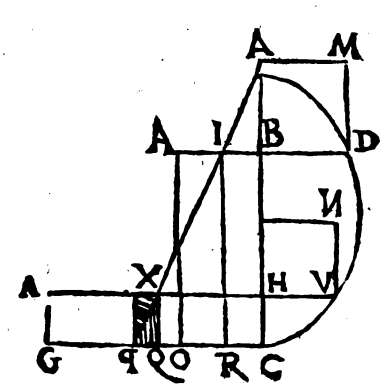
Dicit propositio, quod si sit aliud, cuiuslibet applicatæ VH quadratum HN hoc erit æquale rectangulo, quod sit ab intercepta CH inter applicatam, & verticem pro vno latere, & contigua verticis



pro alio CP; sed cum hac cautella; quòd in Hyperbola insuper abundat figura XP similis, similiterq; posita, vt totum rect. AH. GX: in Ellipsi verò deficit.

Progr. 1. Rectangulum BO ad rectangulum BR dicit eadem proportionem, quam AC ad CP. Ratio est; quia sunt super eandem basim BC; ex constructione, vnde sunt inuicem, vt altitudines BA ad BI. Istę vnrò altitudines correspódent proportione, & ita est BA ad BI, vt CA ad CP. Ratio est, ex Euclid. propos. 4. lib. 6. in Coroll. quia sunt in eodem triangulo parallelæ CP, & BI, Ideoq. rectangulū BC ex BA erit ad BR ex BI, vt CA ad PC; quòd istæ lineæ sint, vt BA à BI altitudines.

Progr. 2. Prorsùs idem dicendum de parallelogrammis HG, & HQ. Sunt enim super eandem basim CH ex constructione: siquidem debet comprehendi rectangulum HG à lateribus AH, & HC, & rectangulum HQ à lateribus HC, & HX. Vnde erunt inuicem, vt altitudines XH, & HA. Altitudo verò HA ad altitudinem HX dicit eam proportioné, quam AC ad CP cum CP sit ei ex parallela in eodem triangulo ACB, & ideo AC erit ad CP, vt HG rectangulum ad HQ.



Progress. 3. Quadratum BM est æquale rectangulo BR. Ratio est; quia eidem proportionem eandem dicunt; quæ verò eidem proportionem eandem dicunt ex 7. lib. 5. Eucl. sunt æqualia. Dicunt autem eandé rationem eidem. Nam ita se habet quadratum BM applicatæ ad rectangulum comprehensum sub BC, & BA, quam AC diameter ad CP contingentem ex pręsuppositione. At in progress. 1. probatum est, quod huic eidem CA ad CP dicit eandem proportionem rectangulum BO ad rectangulum BR. Quare, cùm quadratum applicatæ DB, & BR rectangulum eidem rectangulo BO eandem proportionem dicant, quam AC ad CP; necesse est DB, quadratum, & BR rectangulum esse æqualia.

Progress. 4. Probatur Itaque ex præmissis principijs propos. Ita est AC diameter ad CP contiguam verticis, vt HA ad HX ob similitudinem triangulorum ACP, & AHX, & ex eadem ratione HA ad HX est in proportione, vt BA ad BI. Ergo etiam parallelogramma super eis constituta, & quæ cum eis eandem proportionem habent ex 1. & 2. progr. inter se proportionalia erunt, & ita erit BO ad BR, sicut HG ad HQ; quia lineę BI, & BA sicut, & HA, & HX sunt eorum altitudines: Cum ergo sit rectangulum BO ad BR, vt HG ad HQ, poterimus vti permutatione, & inferre, quòd etiam BO rectangulum ad HG rectangulum sit, vt BR rectangulum ad HQ rectangulum.

Sed ex propos. 2. Hæc rectangula BO, ad HG dicunt eandem proportionem, ac quadrata applicatarum nimirum BM ad HN. Ergo etiam eadem proportionem fruetur BR rectangulum relatum ad rectangulum HQ.

Progress. 5. Sed rectangulum BR ex 3. progr. est æquale quadrato BM; Ergo etiam rectangulum HQ erit æquale quadrato HN. Quod oportebat ostendere. Vides autem, quòd in Ellipsi rectangulum CX continetur sub CP contigua, & CH diametro intercepta, defficiente tamen figura PX, & in Hyperbole abundante.

COROLLARIVM.

Recta itaque CP contigua vertici vocabitur Parameter, seu latus rectum, seu coeficiens, eo quod iuxta eam mensurentur cæteræ applicatæ diametro, quòd eorum quadrata, vt HN, & BM sint æqualia parallelogrammo sub ipsa, & diametri portione intercepta inter applicatam, vt HQ, & BR, & verticem C; figura tamen PX, vel PI, in Ellipsi deficiente illi parallelogrammo, & abundante in Hyperbola. Et inde istæ figuræ nomen sortitæ sunt: quia .n. in parabola quadrata applicatarũ æquãtur rectangulo sub Parametro, & intercepta diametri portione, vocatur Parabola, idest æqualis. Quia verò aliquid deficit in Ellipsi ad æqualitatem, eo nòmine, quod significat defectum, insignitur: at quia abundat in Hyperbola dicitur talis, quod nomen est idem ac excessus.

COROLLARIVM II.

Hinc etiam colliges illam Hyperbolam, seu Ellipsim esse specie notam, cuius diametri transuersi proportio ad contiguam Parametrum sit, vt rectangulum sub AB, & BC comprehẽsum ad quadratum BM vel è contra, Siquidem AC est ad CP, vt AB ad BI, idest vt rectangulum eiusdem basis CA ad CI, idest vt CA ad quadratum BM applicatę, æquale ipsi CI. Vnde ex præc. & omnia alia rectangula à diametro transuersa, & intercepta simul pro vno latere, & intercepta tantùm pro alio dicent eam proportionem, ad quadratum applicatæ, quam diameter transuersa ad Parametrum; Quoniam enim quadratum BM ostensum est æquale in 3. progr. rectangulo BR, & hoc sit ad rectangulum B O ex AB, & BC diametro intercepta; vt PC ad CA ex 4. progress. *conuertendo* etiam quadratum ex DB erit ad BO ex BC, & BA; vt CP Parameter ad CA diametrum interceptam.

Sic dicas de quadrato HN, quòd est ostensum progress. 5. ęquale rectangulo HQ, quod est ad HG rectangulum, vt HA ad HX altitudines, at CQ, idest HX est ad HA, vt CP ad CA, & sic de alijs.

COROLLARIVM III.

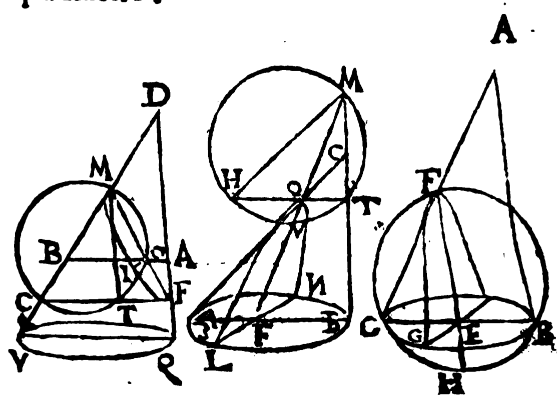
Hæc verò, quæ dicta sunt de Ellipsi etiam de circuli circumferentia prorsùs militant, vt si pro Ellipsi substituas circulum, eadem ostensione intelligere poteris.

PROBL. I. PROPOS. IX.

Cuiusque sectionis in cono Parametrum exhibere.

Sit conus ABC, & exhibita in eo sectio parabola; cuius diameter EF, & BE perpendicularis ad eius applicatam EG. Per tria puncta B, C, F transeat circulus BCF, & prolungetur diameter FE ad circumferentiam in H. Dico EH *esse sectionis Parametrum*.

Progress. 1. Obseruandum est BGC esse circulum, vtpote basis coni; ideoque ex 35. lib. 3. quadratum EG esse æquale rectangulo ex BE, & EC: & quòd ex 3. huius quadratum lineę EG quoque æquale sit rectangulo ex diametro sectionis EF, & parametro.



Progress. 2. Vnde ostenditur propos. Rectangulo BEC, & ideo æquali quadrato est EG est æquale rectangulum ex FE diametro, & FH. Ergo EH erit Parameter, vtpote efficiens cum FE diametro æquale rectangulum quadrato ex EG ex 8. h. Cor.

Sit pro secundo casu exhibita Hyperbola in cono ACB; cuius diameter transuersa MF; ducanturque AB perpendicularis sectioni LN; & ideo, vt diameter basis circuli dirimet NL in duo segmenta æqualia ex prop. 27. l. 3. Cor. Vnde FL erit applicata. Deinde lateri trianguli conici CA per A transeuntis ducatur à vertice M diametri transuersæ parallela MH, & per O verticem sectionis TH parallela basi AB, perque tria puncta T, M, H transeat circulus, hic abscindet VO, quam dico *esse Parametrum*.

Progress. 3. Pprænotandum est FL esse applicatam, cuius quadratum ex 35. lib. 3. æquatur rectangulo ex AF, & FB. Rursusque ex propos. 8. h. Coroll. 2. esse quadratum applicatæ FL ad rectangulum diametri transuersæ ex MF, & OF; vt Parameter ad transuersam diametrum MO, & ideo etiam rectangulum ex AF, & FB ad rectangulum ex FM, & FO, erit, vt Parameter ad OM diametrum. Ideoque ostendendum est rectangulum ex AF, & FB, & ideo FL quadratum esse ad rectangulum MF, & FO; vt VO, ad OM, vt sic ostendetur VO esse Parametrum.

Progr. 4. Sic verò ostenditur. Vt BF est ad MF; ita TO est ad MO ob parallelas TO, & BF ex

propos.

propof. 4. lib. 6. & AF ad FO, vt HO ad OM ob similia triangula, & æquiangula MOH, & FOA: cùm sint parallelæ OH, & FA; nec non, MH, & OA ex constructione; Quare rectangulum ex AF, & FB, & ideo quadratum FL ei æquale erit ad rectangulum ex MF, & FO; vt rectangulum ex TO, & OH ad rectangulum OM, & OM cum ex ijsdem proportionibus componatur earum ratio BF ad FM eadem, quæ TO ad OM, & FA ad FO eadem, quæ OH ad OM, vt hic est videre.

BF, vt	TO	& FA, vt	OH
est ad	ad	ad	ad
FM	OM	OF	OM
Ergo Compositum,		vt Compositum	
ex BF, & FA	f. LF erit	TO, & OH	
ad		ad	
FM, & OF		OM, & OM	

At rectangulum TO, & OH est æquale rectangulo MO, & OV. Ergo rectangulum MO, OV erit ad quadratum æqualis altitudinis OM, & ideo, vt basis OV ad basim OM, vt Rectang. AF, & FB, idest FL quadratum ad rectangulum ex FM, & OF. Quadere; Cùm parameter ponatur ad OM ex Cor. propof 6. h. vt FL quadratum ad rectangulum ex FM, & FO, & OV talis sit rationis ad OM; erit OV Parameter.

Sit tandem data ellipsis, cuius diameter FM, & sectio plani acti per axẽ FCD in ipso cono cuius basis QV circulus, cuius diameter QV sit sectio quoq; plani DQV, cui agatur ab F extremo diametri parallela FC, & ab altero extremo diametro M parallela lateri DF, sit MT, per q; tria puncta MCT transeat circulus. Dico rectam FO esse parametro æqualem.

Præassumptum. Agatur itaque ostensionis gratia per O parallela basis AB; & à puncto O applicata OI, Igitur ex AO, & OB rectangulum erit æquale quadrato applicatæ OI, ex 35. lib. 3. elem.

Sic etiam ex 6. Coroll. huius quadratum OI, & ideo rectangulum ex AO, & OB erit ad rectangulum ex diametri segmentis OM, & FO, vt parameter ad diametrum FM,

Probatur propof. ob parallelas FA, & TM, necnon, & AO, & FT triangulum FAO est æquiangulum triangulo FMT; ideoque vt AO ad FO; sic FT ad FM: Rursúsque eadem rationem ob parallelas OB, & FC in triangulo FMC erit OB ad OM, vt FC ad FM, vt hic vides.

AO vt	FT	& OB vt	FC
ad	ad	ad	ad
FO	FM	OM	FM
Ergo Compositum,		vt Compositum.	
AO & OB	erit	FT & FC	
ad		ad	
FO & OM		MF & MR	

Quadere rectanguli AO, & OB ratio ad rectangulum FO; & OM erit composita ex ijsdem rationibus rectanguli ex FT, & FC ad quadratum MF; & ideo componendo rationes erit rectangulum ex AO, & OB ad rectangulum FO, & OM, vt FT, & FC rectangulum ad quadratum MF.

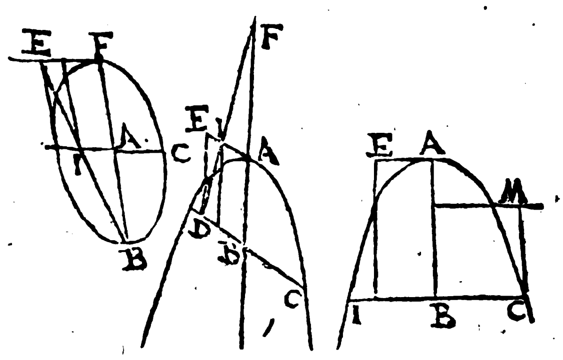
Vnde Quadratum ex OI; quod æquatur rectangulo ex AO, & OB, erit quoque ad rectangulum FO, & OM, vt rectangulum ex FT, & FC ad quadratũ FM. Sed rectangulum ex FT, & FC est æquale rectangulo FM, & FO, ex Coroll. 1. propof 36 lib. 3. elem. quod incidant in circulum CMO. Ergo ex OI quadrarum erit ad rectangulum FO, & MO, vt ex FM, & OF rectangulum ad quadratum FM. Rectangulum verò FM, & FO est æqualis altitudinis quadrati FM. Ergo erit basis FO ad diametrum transuersam FM, vt quadratum OI ad FO, & OM rectangulum, & ideo FO erit æqualis Parametro.

PROBL. II. PROP. X.

Datæ cuiuscumque sectionis contiguam Parametrum inuenire dato diametro, & applicata.

Sit primum Coni sectio Parabola CAI, eiusque diameter AB, cui applicata sit CB; factoque quadrato BM, fiat rectangulum ex BA ei æquale, reperiendo applicatæ BA, & BC ex Euc. prop. 14 l. 6. tertiam proportionalem EA. Nam ex propof. 19. Eucl. 6. parallelogrammum ex BA, & AE constitutum erit æquale quadrato BM. Porrò ex propof. 7. vidimus quadratum CB esse æquale rectangulo sub diametro intercepta, & parametro contigua. Vnde AE Parameter erit.

Si verò daretur applicata, quæ BM Rhombum faceret, quod angulus B non esset rectus esset reperiendum parallelogrammum Rhombo æquiangulum, at æquilaterum ipsi BE.



Casus 2. At detur sectio Hyperbola CAD, cuius diameter FAB transuersa, & intercepta; applicata verò CB data. Portioni BA diametri intercepti, & CB applicatæ reperiatur tertia proportionalis BD, eritque ducta AE æquali BD, & parallela, repertum rectangulum, vel parallelogrammum DABE: deinde ab extremo datę diametri F ducatur FD ad D, quę secabit AE in I. Dico AI *esse Parametrũ.*

Probatur. Quòd ex propof. 8. rectangulum contentũ ab ipsa AI, sit æquale quadrato applicatæ abundans tamen figura ID simili, similiterque posita ac esset rectangulum ex BF, & FD.

Casus 3. Si postremò sit Ellipsis FCB, cuius diameter FAB, & applicata AC diametro interceptæ AF, & applicatæ AC inueniatur tertia proportionalis, prout supradictum est, quæ sit AI, & ex vertice B per I ducatur recta, & ab F vbi terminat diameter, agatur parallela applicatæ CA, quę sit BF, Dico *rectam* FE *esse parametrum.* Nam continet FI rectangulum ęquale quadrato ex CA, si tamen deficiat figura IE similis, similiterque posita ex propof. 8. ac BF, & BF rectangulum,

EXPENSIO III.

De tangentibus,

Sicuti circulus suas tangentes habet, ex quibus mirabiles circuli passiones prodeũt, ita, & conicæ tangentes; nec minoris vtilitatis sunt, maximè ad descriptionem sectionum.

THEOR. I. PROP. XI.

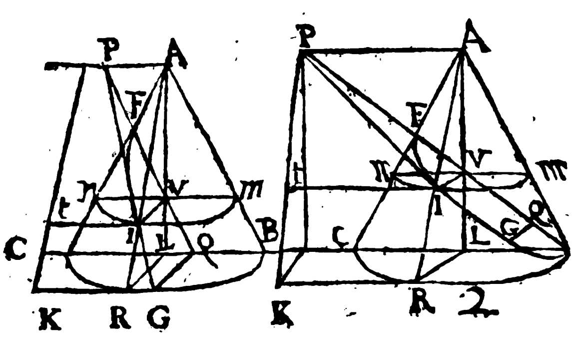
Si conus per axem plano aliquo, sectus sit, & alia sectione ex tribus coni ad angulos rectos ei sectioni, denuò secetur, & electo in sectionis posterioris circumferentia puncto à vertice coni per illud ad circulũ basim eiusdem coni, planum aliquod agatur.

Hoc planum conum secundum lineam rectam tanget.

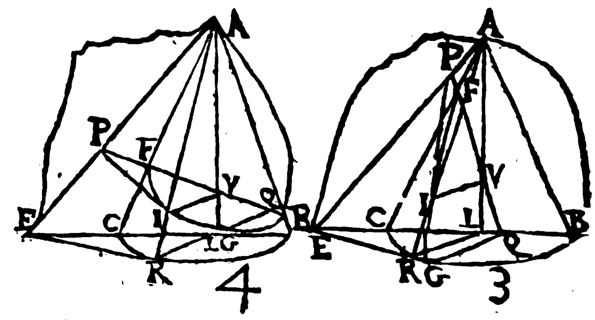
Et diametrum figurarum secabit, & à puncto, quo secat illum recta ducta ad punctum electum, hæc linea sectionem conicam non secabit, sed tantum tanget.

Tres partes habet hæc propositio, sed facilis est probatio; penèque à sola explicatione propositionis habetur.

Sit ergo medietas coni ABC, qui sit per axem à plano aliquo BAC sectus, cui sectioni, alia sectio, seu Elliptica, seu Hyperbolica, seu Parabolica fiat FIG, deinde electo in circumferentia sectionum posteriorum puncto I, per quod, & verticem coni A planum ARP adaptetur. Dico *primo hoc planum tangere totum conum à vertice A vsq; ad basim circularem BRC secundùm lineam rectam AIR.*



Probatur. Quia tangit secundùm altitudinem AR, quæ est linea recta, siquidem conus à rectâ efficitur. Ergo potest cum sit planum totam lineam AR continuo tactu tangere, sed conus ex definitione secundùm crassitudinem est circulare; planum verò in puncto circulum tangit, ergo ille tactus secundum latitudinem non erit amplior puncto, quæ est linea secundùm latitudinem accepta. Dico secundò. Quod si diameter sectionũ QFP producatur in plano ABC, in quo est, quòd ab hoc posteriori plano PAR secabitur. Nam, vel planum, vt in primâ, vt secundâ figurâ æquidistat; ita vt LR faciat cum RK & LC lineis angulos rectos, & totum planum PARK cum plano LAR. Quare ex 16. Tract. 21. sectio AP erit ad AL ad rectos ãgulos. Fiet autẽ hęc sectio, quia cum propter angulũ acutum R planum AP feratur versùs verticem coni A, & inclinet ad planum BAC, secabit in vertice A secundùm sectionem AP planum per verticem ductum BAC.



Quod, si non æquidistet, vt in 3. & 4. fig. sed faciat angulum acutum ERL, tunc clarum est, quod versùs E tandem occurret plano per verticem coni ducto EAB, & faciet in eo sectionem AE. Vnde clarum euadit, quod si versùs eam partem, versùs, quam inclinant inuicem plana, vt F producatur diameter FQ necessario impinget in hanc sectionem AB in P.

Dico tertio, quod si ab hoc puncto P ducatur in plano tangente RPA ad punctum electum I recta PI; quòd continget sectionem, & non secabit. Quod patet. Nam est in plano, quod sectionem in I tangit. Ergo, & linea per punctum I ducta; etiam si prolungaretur, non secaret, sed cum ipso plano contingeret.

COROLLARIVM.

Elicies hinc in figura 1, & 2, cum plana secans ABC, & tangens AK parallelè se habeant applicatam VI esse semidiametrum, cùm enim mn sit diameter, patet ex 2. probatione, quòd si contingens IT facit angulum rectum, cum VI, & VI facit angulum rectum cum mn, quod necessario V est centrum circuli mIn ex 21. propos. 3. lib. Elem.

THEOR. II. PROPOS. XI.

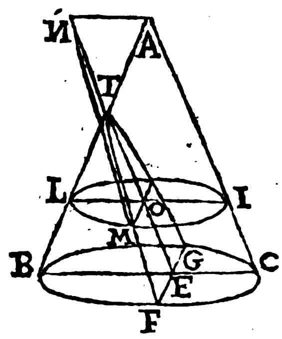
Si parabolam recta contingat linea producta diametro occurrens, & à tactu ad diametrum recta sit ordinatim applicata, erunt interceptæ diametri portiones, vtrinquè partes æquales; nempe inter occurrentem, & verticem, & inter applicatam, & verticem,

Sit parabola OTP in cono ACB, cuius diameter ET, cuius vertex T; recta verò contingat sectionem in M, vbi, & applicata OM terminat, & occurrat diametro productę in N, & pro primo Casu AN sit parallela diametro IL. Dico *primo, quod portio diametri inter verticem parabolicum OT, & portio TN diametri à vertice vsque ad punctum N tangentis sunt æquales.*

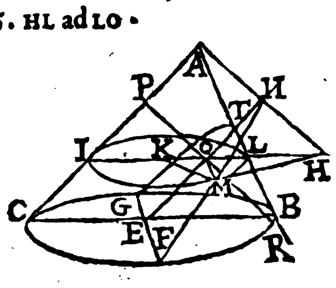
Probatur faciliter in isto casu, Nam OI, & AN

sunt

sun parallelæ, & æquales, quod sint inter parallelas CA crus, & EN diametrum; sed cum ex Coroll. propos.11.h. O sit centrũ circuli, IO erit æqualis lineæ OL; Ergo etiam AN erit æqualis OL. Quare, & OT erit æqualis TN: Cùm enim anguli inter parallelas in triangulis OTL, & ATN sint æquales, & bases æquales omnia latera singula singulis erunt æqualia, ex 27. propos. lib 1. elem.



At si linea AN non sit æquidistans; quòd planũ, super quod contingens deducta est non sit æquidistans, vt ex prop.11.huius, & in altera fig. patet, tunc in circulo IML ex propos 27 lib.3. elem.contingens MH erit perpendicularis ad diametrum KM, & ad IL applicata OM, & MK ducta à contactu M ad centrum K. Quare ex propos.23. progr.3. Tract.15. erit HI ad OI, vt HL ad LO: ducta igitur parallela ad AH lineam sectionis planorum tangentis, & secantis per punctum O, quæ sit PR. ostendendum est, quod PO, & OR sunt æquales, & ideo etiam OT, & TN. Sic verò ostenditur. Crus HI est ad OI, vt AH ad OP in triangulo AHI, ex Coroll. prop.4.l.6. Eucl. ob parallelas AH, & RP. Sed, quę est proportio HI ad IO, eadem est ex propos. 23. Tract.15. HL ad LO.



Ergo in duobus triangulis ad verticem ęquiangulis ALH, & OLR ob parallelas basium, erit etiam eadem proportio AH basis ad OR basim ex 4. lib.6. Elem. vt est HL ad LO, & ideo, vt HI ad IO, & HA ad OP. Quare cum eisdem PO, & OR crus AH eandem dicant proportionem, quam HL ad LO, erunt æquales ex propos.7. lib.5.

Et quia ON est parallela lateri PA in triangulo PRA, erunt quoque æquales AT, & TR, sicut sunt RO, & OP; Quod si tales sunt, in triangulis æquiangulis ATN, & OTR ob bases parallelas ex prop. 30. & 17. lib.1.elem. OR, & AN, erunt quoque ęqualia crura OT, & TN sicut sunt RT, & TA: quod est propositum. Nam sic TO est pars diametri interior, ęqualis exteriori TN.

COROLLARIVM.

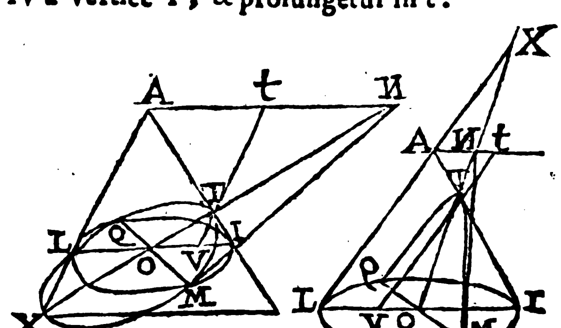
Colligę itaque, quod cùm sit ęqualis TN ad NO quadratum ex OM, quod propos. 7. expens. 2. Probatũ est æquale rectangulo ab OT portione diametri intercepta inter verticẽ, & applicatã, & parametro comprehenso erit, etiam æquale rectangulo comprehenso ab eodem parametro, & æquali TN inter verticem, & contingentem.

THEOR. III. PROPOS. XIII.

Si in Hyperbola, vel Ellipsi contingens ducta sit, & à contactu ordinatim applicata. Diametri portio inter terminum transuersi diametri, & applicatam erit ad portionem eiusdem à vertice sectionis ad applicatam, vt portio à termino transuersi diametri vsque ad contingentem ad portionem, quæ est inter contingentem, & verticem sectionis.

DVos casus hæc propositio possidet, primus est, si planum contingens sit parallelum plano secanti per verticem, vt in prop.12. est dictum, alter si non sit.

Sit ergo pro primo casu Hyperbola, vel Ellipsis QTM diameter transuersa TX, quæ transeat per centrum O, vt euenit cum plana tangens, & secans per axem sunt parallela, vt dictum est Coroll.1. propos.11. & AN æquidistans diametro coni LOI, à cuius puncto N originem ducit contingens MN, quæ tangat in M, à quo contactu applicata enascatur MO ad angulos rectos ipsi OI. Dico, *quod portio diametri transuersi* XO *inter terminum eius* X, & applicatam OM est in proportione ad portionem OT inter applicatum OM, & verticem sectionis T, quemadmodum XN inter terminum X, & punctum N, à quo oritur contingens, ad portionem NM. Ducatur cruri XL parallela TV à vertice T, & prolongetur in t.



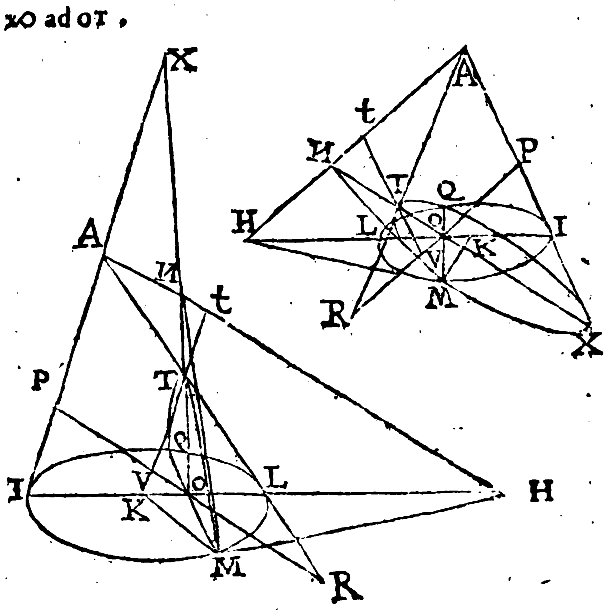
Prob. In triangulo Hyperbolæ LXO, & OTV, sicut est XO ad TO ita est ob parallelam VT Radius LO, vel OI ad suam portionem VO ex Coroll. prop.4. l.6.Eucl. Sed vt est OI ad VO ita est AN ad N t ob bases parallelas in triangulis ad verticem ATF, & VTI, & æquiangulis ex propos.4. lib.6. Eucl.

Eademque ratione prorsus XN ad NT, vt AN ad NT in triangulis ad verticem ANX, & TNt, quorum parallelæ sunt bases t T, & AX. Ergo ex prop.16. lib.5. Elem. vt est NX ad NT, ita est XO, ad TO.

In Ellipsi verò ferè idem argumentum. Nam in Ellipsi, quòd sint XL, & VT parallelæ in triangulis ad verticem OXL, & TOV ita proportionabitur XO ad OT, vt LO ad OV, vel æqualis OI. Sed ob triangula ad verticẽ OTI, ATN inter bases parallelas AN, & OI; ita est OI ad OV, vt AN ad t N: sed in triangulo XAN ob parallelas XA, & T t, vt est AN ad tN, ita est XN ad TN: Ergo ita etiam erit XO ad OT ex prop.16. lib.5. argumentando, vt est XN ad TN, quòd sit eadem, ac proportio AN ad t N, & hæc eadem ac OI ad VO, & hæc eadem, vt XO ad OT.

gulis

Sed iam sit secundus casus, in quo planum contingens non sit parallelum plano secanti, & ideo, quòd AN non sit parallela IL diametro coni. Tūc animaduertendum est ex progr 2 prop. 23. tract. 15. Quòd HI se habet ad OI, vt HL ad LO; ducaturque per O ęquidistans PR ad AH, & ęquidistans TV per T lateri IX trianguli per verticem IAL. In triangulo itaque POX Hyperbolę, ita est ob parallelas VT, & PX portio XO ad TO, vt OP ad OV; Supponatur itaque æqualis PO ad OR, quod infra ostendetur, ita itaque erit OP, vel RO ad OV, vt AN ad NT ob triangula inter parallelas opposita ad verticem ATt, & VTR: Sed ob rationem triangulorum ad verticem inter parallelas ANt, & TNt erit quoq; vt AN proportione ad Nt, sic correspondebit XN ad NT, ergo XN ad NT, ita erit, vt XO ad OT ob identitatem rationis, cum duabus AN, ad Nt, & harum cum OR, vel OP ad OV, & harum cum XO ad OT.



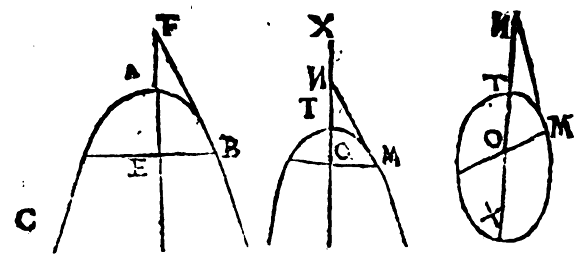
In Ellipsi verò XO est ad TO, vt OP ad OV ob triangula ad verticem TVO, & POX inter parallelas TV, & PX, & ob eandem rationem æqualis vt ostendam RO eidem OP erit ad VO, vt AN ad Nt, in triangulo autem NAX ob parallelas Tt, & AX, ita est XN ad NT, vt AN ad Nt: Vnde ex 16. lib. 5. Elem. ita quoque XO ad OT, vt XN ad TN. Remanet solum probandum, quòd OR, & OP sint æquales. Probatur autem prorsus eadem ratione in Theor. anteced. in 2. Casu. Nam ex prop. 4. lib. 6. proportio PO ad AH est ea, quæ IO ad IH: sed hęc est eadem ex propos. 23. tract. 15. *conuertendo*, ac LO ad HL. & hęc, quę OR ad AH ob triangula ęquiangula ORL, & ALH, ex 21. lib. 6. Proptereaque AH est illa, cui PO, & RO eandem dicunt proportionem. Ergo sunt ęquales ex 7. l. 5. elem.

PROBL. I. PROPOS. XV.

Lineas tangentes in sectionibus conicis ducere.

SIt data parabola BAC, & in ea punctum B, & oporteat ducere contingentem illius puncti Ducatur diameter AE ex 1. huius, & ei à puncto B ducatur applicata EB: ęqualis autem fiat AE ipsi AF productæ diametro, & à puncto B ad F ducatur recta FB; hęc enim erit contingens.

Probatur; quia ex pr. 12. h. tangens linea Parabolę intersecat diametrum EF productam in parte F à vertice distante interuallo AF ęquali interuallo AE applicatę, & vertici interposito.



Sit deinde data Hyperbola, seu Ellipsis MT, & eius applicata OM, & diameter trāsuersa XT prolūgata in Ellipsi quantùm oportet, si fiat ex prop. 9. tract. 15. de lineis secandis, vt XT tota ad segmentum OT, ita XN tota cum addita TN ad additam TN in Ellipsi erit punctum N, à quo ducta NM tanget Ellipsim.

At in Hyperbola fiat ex propos. 23. tract. 15. de lineis secand, vt segmentum OX ad segmentum OT ita segmentum aliquod NX in TX parte ad compartem TN, & erit punctum N, à quo ad M ducta MN tanget Hyperbolam.

Probatur ex preced. Quia iam ostensum est, quod in Ellipsi TN à vertice, & tangentem intercepta, sit quarta proportionalis trium XO, & OT segmentorum, & totius XN.

At in Hyperbola. Quod TN sit quarta proportionalis trium totius diametri transuersę simul, & interceptę OX interceptę OT, & transuersę segmenti NX.

EXPENSIO IV.

De interceptis diametri portionibus inter contingentem, & alia puncta in ipso impressa.

QVę fiunt puncta in diametro ea efficiuntur ab eius mediate nimirum centro, à vertice sectionis, ab applicata, ab eius extremo, & à contingente, quę omnia puncta diuersas partes cōstituunt in diametro, quę potentia, seu longitudine inuicem comparantur, & cum contingentibus analogiam habent.

THEOR. I. PROPOS. XVI.

Si parabolem recta contingat linea productæ diametro occurrens, si ad ipsam recta ducatur æquidistans ordinatim applicatæ, quadratum eius erit æquale rectanguli quartæ parti contento à diametri portione producta ad tangentem, & parametro contigua.

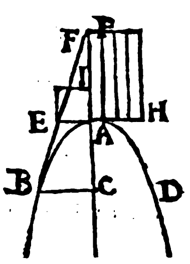
SIt sectio parabolica BAD, quam contingat BF occurrens diametro in F, ad quam à vertice A ducatur linea EA ęquidistans applicatę BC. Dico *quod quadratum ex* E A *erit æquale quartæ parti rectanguli ex* AH *parametro, &* AF *diametro producto vsque*

vsque ad contingentem comprehensi.

Progr. I. Obseruandum est quadratum ex ordinatim applicatis, vt BC ex dictis propos. 7. esse æquale rectangulo, quod fieret ex AH Parametro, & diametro intercepta AC, & quod diximus supra prop. 12. Rectam AF propter contingentem BF esse æqualem rectæ AC; quare, & rectangulum ex AF, & AH parametro, rectangulo, quod fieret ex AC æquali, & parametro AH eodem esset æquale, vnde, & æquale quadrato ex BC, quo supposito.

Progress. 2. Probatur. Assumptum quadratum EAI est quarta pars quadrati ex BC. Ergo, & rectangulo FH ei equalis ex progr. I. nimirum rectangulo AP equabitur.

Prob Antecedens in triangulo BFC crus FC est duplum suæ portionis FA ex progr. I. Propterea, & BC linea est dupla lineæ EA. Ergo cum figuræ similes, similiterque positæ sint in duplicata ratione laterum homologorum ex prop. 20. lib. 6. Elem. quadratum BC erit quadruplum quadrati EA; nam proportio sic gemina vice repetitur, sic est 1. ad 2. sicut 2 ad 4. & ideo si est latus 1. ad 2. quadrata debebunt esse, vt 1. ad 4. Quare quadratum EI quarta pars quadrati ex BC erit etiam quarta pars rectanguli HF nimirum equale rectangulo AP.



THEOR. II. PROPOS. XVII.

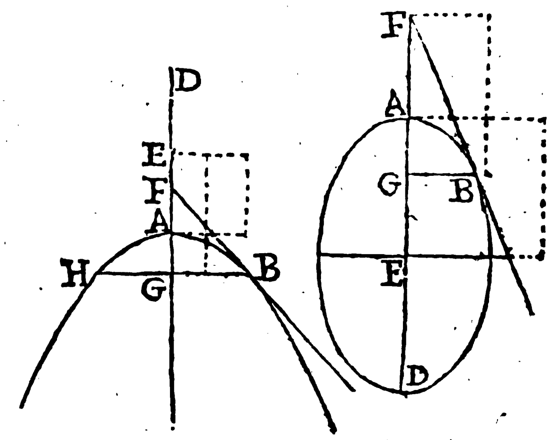
Si Hyperbolem, vel Ellipsim recta contintingat linea, cum diametro conueniens, & à tactu ad diametrum recta ordinatim sit applicata, erit quadrato dimidiæ transuersæ diametri æquale rectangulum sub intercepta ab ordinatim ducta, & centro diametri portione, & sub alia portione inter centrum, & contingentem comprehensum.

Sit primum Hyperbola BAH, cuius vertex A transuersa diameter AD, & centrum E, quod habetur diuiso AD bifariam. Sectionem verò contingat in B recta BF, cum diametro producta in F conueniens, & ad diametrum ordinatim applicata BG. Dico *quadrato* AE *æquale esse rectangulum factum ex* EG, *&* ex EF.

Iam ex propos. 11. huius habemus esse eam proportionem GD ad GA; quæ est FD ad FA. Ergo componendo simul DG, & GA erit ad GA, vt DF, & FA simul ad FA, diuisis autem lineis DG, & GA, vt vna linea per medium in E erit medietas GE nempe ipsa medietas lineæ DA, quæ est EA, cum GA, siquidem ED cum ipsa AG denuo assumpta complent alteram medietatem.

Diuisis quoque lineis, DF, & FA medietas est ipsa EA: Quare cum ponatur totum GD cum AG ad GA, vt totum DA ad FA erit etiam ex 18. lib. 5. elem. medietas EG ad GA, vt medietas EA ad FA, & *diuidendo* erit quoque medietas EG ad residuum EA, sublata consequenti GA, vt EA ad FE subducta consequente FA. Qua de rè AE est media proportionalis. Vnde si iuxta prop. 17. Elem. fiat ex hac AE quadratum: ex duabus verò extremis GE, & FE rectangulum, hæc duo erunt æqualia.

Probatur quoque de Ellipsi ferè eodem modo. Namcùm dictum sit prop. 11. quod proportio GD ad GA sit qualis est proportio FD ad FA. Erit quoque



componendo simul antecedens, & consequens DG, & GA ad solam consequentem GA, vt antecedens, & consequens FD, & FA ad solam consequentem FA, & si dimidiemus has compositas antecedentes, erit pariter proportio AE dimidiatæ ad AG eandem consequentem, vt EF dimidiata lineæ FD cum AF, ad FA eandem consequentem. Quare per conuersionem rationis sumendo excessus GE, & AE, quibus antecedentes EA, & FE superant consequentes suas GA, FA, respondebit proportione excessus GE antecedentis EA ad ipsam antecedentem EA, vt excessus AE antecedentis EF ad antecedentem EF. Quare ex Elem. prop. 17. lib. 6. ex AE poterit componi quadratum, tamquam ex media proportionali, quòd erit equale rectangulo ex duabus extremis constituto GE, & EF.

THEOR. III. PROPOS. XVIII.

Posito diametro transuersa, vt superiori propos. contingenti, centro, & applicata: Rectangulum ex portione à termino transuersæ diametri vsque ad applicatam, & portione ab applicata vsque ad verticem sectionis comprehensum est æquale rectangulo comprehenso ex eiusdem diametri partibus interceptis inter centrum, & applicatam, & inter applicatam, & contingentem.

Sit eadem figura; quę superiùs. Dico *rectangulum ex* DG, *&* GA *esse æquale rectangulo ex* EG, *&* FG *lineis comprehensum.*

Probatur. Nam in Hyperbola ex anteced. prop. contextu medietas EG est ad AG, vt AE ad FA. Quare *Permutando* erit fundamentum EG ad fundamentum AE, vt terminus AG ad terminum FA. Quapropter cōponendo EG erit ad AE cū EG, vt AG ad FA cum AG: Linea verò AE cum GE est diameter GD, & FA cum AG est FG. Vnde si fiat rectangulum ex extremis EG, & FG hoc erit æquale rectangulo facto ex medijs DG, & GA. Ex prop. 18. lib. 6. Elem.

 Idem

Idem dicas de Ellipsi. Nam AE dimidia est ad AG, vt EF ad FA, ergo diuidendo GE compars erit ad GA compartem, vt AE pars ad AF compartem, & permutando antecedens GE ad antecedentem AE, vt sequens GA ad sequentem AF. Quare componendo GE erit ad AE, & EG, idest GD, vt GA est ad GA, & AF, idest GF. Quare rectangulum ex extremis GF, & GE æquale erit rectangulo ex medijs GD, & GA.

COROLLARIVM.

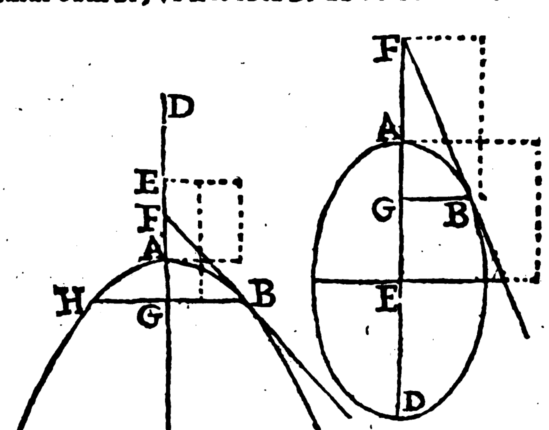
CVm rectangulum ex GD, & GA sit illud idem propos.8. contextu, & Coroll.2. quod demonstratum fuit esse ad quadratum applicatæ, vt transuersa diameter ad Parametrum. Hinc est, quod etiam rectangulum GB, & GF in vtraque sectione æquale rectangulo ex interceptis diametri portionibus GD, & GA erit ad quadratū applicatæ, vt transuersa diameter ad parametrum.

THEOR. IV. PROPOS. XVIIII.

Iisdem positis, erit rectangulum comprehensum à portione inter applicatam, & contingentem, & inter contingentem, & centrum mensurata æquale rectangulo facto ex portione diametri inter contingentem, & terminum, & inter verticem sectionis, & contingentem intercepta.

POsitis illis ipsis, quæ priùs. Dico *rectangulum* GF, *&* FE *esse æquale rectangulo ex portionibus* DF, *&* FA *confecto*.

Probatur ex propos.17. (cum argumentati fuimus diuidendo) habemus; ita esse in proportione GE ad EA, vt AE ad EF. Quare si componamus eas erit GE simul cum AE, vel æquali ED, vt fiat tota GD ad EA, vel æquali ED tantùm, vt AE, vel æqualis ED simul cum EF, vt fiat tota DF ad EF tantum.



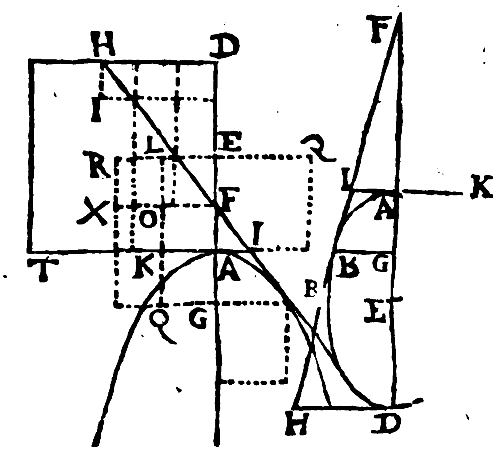
Quare vtendo *permutatione* erit antecedens DG composita, vt priùs ad antecedentem DF compositam. Veluti priùs consequens simplex AE ad consequentem simplicem EF.

Accipiamus itaque excessū FG super DF sequētē antecedētis DG, & excessum FA super sequentē EF antecedentis AE, vel è cōtrà. Et *diuidēdo* erit compars FG ad compartem DF, vt compars FA ad compartem EF. Vnde si fiat rectangulum ex medijs DF, & FA hoc erit æquale rectangulo ex extremis FE, & FG in Hyperbola, sed in Ellipsi idem sequetur: sed *conuertendo*.

THEOR. V. PROPOS. XIX.

Si Ellipsim, vel Hyperbolam recta contingát, rectangulum factum à linea, quæ à vertice sectionis discedit, & alia, quæ à vertice diametri discedit, & ambæ in contingentem terminant est æquale quartæ parti rectanguli diametro transuersa, & parametro contenti.

SIt Hyperbola, vel Ellipsis AB, cuius vertex A diameter transuersa DA parameter AK tangens BF, discedatque à vertice sectionis A linea, & terminet in contingentem, quæ sit AI, aliaque DH ambæ rectangulę diametro discedāt à termino diametri D, & in contingentē productam terminēt in H, & I. Dico, quod rectangulum istis DH, & AI duabus constitutum est quarta pars rectanguli sub transuersa diametro DA, & parametro constituti.



Probatio ob multas comparationes est parùm laboriosa; ideo eam clariùs, quàm fieri poterit trademus.

Progr. 1. Primo itaque ex præced. propos. rectangulū ex DF, & FA est rectangulo GO ex GF, & FE æquale. Quare si ex GF fiat quadratum GX, cum sit super eandem basim FG, ac rectangulum ex GF, & FE erit ipsum rectangulum DF, & FA ad hoc quadratum GX, vt ad ipsum hoc quadratum GX rectangulum OG ex GF, & FE, quæ est eadem, ac altitudinum FE ad FG. Ratio est, quia cum DF, & FA rectangulum, & GF, & FE rectangulum sint æqualia habebunt ex 7. lib.5. Eucl. eidem quadrato GX eandem rationem, quæ est altitudinum FE ad GF ob eandem basim GF.

Progr. 2. Quo posito obseruandum est, quòd hæc proportio ad quadratum GX rectanguli DF, & FA; componitur ex proportione lateris FD rectanguli ad GF lateris quadrati, quę est eadem DH ad GB ob triangula BFG, & DFH ad verticem inter parallelas bases BG, & DH ex propos.15. lib.6 Eucl.

Componitur quoque ex proportione AF lateris rectanguli ad GF lateris quadrati, quę est eadem, ac AI ad GB ob parallelas BG, & IA in triangulo BGF ex Coroll. prop.4.l.6. Eucl.

Ergo

Ergo ſi componantur, vt hic vides.

FD	vt	DH	&	AF	vt	AI
ad		ad		ad		ad
GF		GB		GF		GB

Ergo compoſitum, vt compoſitum.

DF	&	AF	DH	&	AI	ideſt HI
	ad			ad		
GF	&	GF	GB	&	GB	

Vnde DF, & FA rectangulum erit ad quadratum GX, vt ex DH,& AI, ideſt DI rectangulum ad quadratum GB.

Progr. 3. At ex primo progr. rectangulum ex DF, & FA erat ad quadratum GX, vt EF ad FG ob æqualitatem, quam dicebat cum rectangulo OC illis lineis conſtituto. Quare ſi ſuper EG fiant duo rectangula, vnum ex EG, & EF, vt eſt rectangulum EQ erit ad alterum ex GE, & GF rectangulum GR cum ſint ſuper eandem baſim GE, vt altitudines EF ad GF ſupradictę lineę; Rectangulum verò GE,& EF eſt ęquale quadrato AEZ ex AB ex 17. huius. Quare quadratum AEZ æquale ipſi EQ erit ad rectangulum GR, vt EF ad FG, quę eſt eadem, ac ex progr. 1 rectanguli GO ex GF, & FB ad quadratum GX,& ex prog. 2. rectāguli ID ex HD, AI ad quadratum applicatę GB; quare ex 16. lib. 5. quadratum AEZ erit ad rectangulum GR, vt rectangulum ID ad quadratum applicatę GB.

Progr. 5. itaque *permutando* erit antecedens quadratum AEZ ad antecedens rectangulum ID, vt ſequens GR rectangulum ad ſequens applicatæ GB quadratum.

Progr. 6. Reminiſcendam verò eſt ex propoſ. 18. Coroll. quod rectangulum GR ex GE, & GF eſt ad quadratum BG, vt tranſuerſa diameter AD ad contiguam parametrum AK: Quare talis etiam proportio AEZ quadrati ad DI rectangulum cum 5. progr. fit eadem, ac GR rectanguli ad quadratum BG.

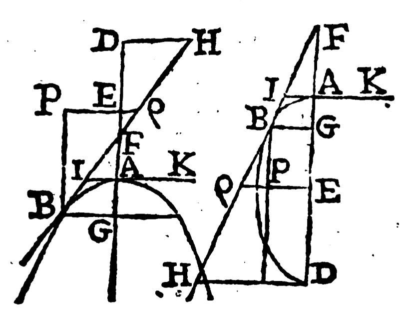
Progr. 7. Si ergo ſuper DA conſtituamus quadratum DT, & ex DA, & AK conſtituamus rectangulum; Quadratum conſtitutum DAT; cùm ſit ſuper eandem baſim erit, vt altitudo DA, vel AT ad AK: Vnde dicet eandem proportionem ad ſuum rectangulum, quam DA ad AK, quæ ex 6. progreſſ. eſt eadem quadrati AEZ ad rectangulum DHI. Sed quadratum AEZ eſt quarta pars quadrati DAT, cùm ſit ſuper dimidiam AD, quę eſt diſtātia centri à vertice ex 6. lib. 2. Ergo, & etiam rectangulum DHI eſt quarta pars rectanguli DAK parametro, diametroq; tranſuerſa comprehenſi.

THEOR. VI. PROPOS. XXI.

Si Hyperbolem, vel Ellipſim recta contingat linea, occurratque lineæ æquidiſtanti alicui ex applicatis, & à contactu ad hanc lineam æquidiſtantem recta parallela diametro ducatur, quæ eam terminet, hæc linea inquam æquidiſtans à diametro erit ſecata in duas partes, ex quibus compoſitum rectangulum erit æquale quartæ parti rectanguli ſub tranſuerſa diametro, & parametro contenti.

SIt Hyperbola, vel Ellipſis, cuius vertex A tranſuerſa diameter AD, & centrum B, quam contingat linea BF productam in H, à centro verò B ducatur parallela alicui applicatæ BG in vtraſque partes, vt PQ vſque ad Q tangentem, quam parallela BP diametro AD educta à cōtactu B terminet ad aliam partem, dico P Q lineam eductam à centro in tales partes ſecari à diametro AD, vt *illa componant rectangulum quartæ parti rectanguli ſub tranſuerſa diametro AD, & parametro AK contenti.*

Probatur. Nam ex pr. 19. h. rectangulum ſub DF,& FA contentum eſt æquale rectangulo ſub EF, & FG cōtento: Quare erunt latera proportionalia reciprocè ex 14. l. 6 & ita DF ad FG, vt EF ad FA. Sed vt DF ad FG, ita aſſimilatur in proportione DH ad BG parallelæ in triangulis æquiangulis,& vt EF ad AF, ita EQ parallelę ad AI ob triangula æquiangula BFG & DFH, ideoq; ex 16. l. 5. erit DH ad BG, ſic EQ ad IA, ergo ſi cōponātur rectāgula vnū ex duobus DH,& AI, aliud ex BG,& EQ ſumēdo eas lineas reciprocè ſcilicet conſequentem cum antecedenti pro vno; ſicut conſequentę, & antecedentem pro alio iuxta propoſ. 22. Eucl. 6. erit rectangulum DH, & AI æquale rectangulo BG, ſeu ęquali PE,& EQ. Sed ex præced. rectangulum DH, & AI eſt æquale quartę parti rectanguli DA intercepta, & parametro AK. Ergo, & rectangulum PE,& EQ.



COROLLARIVM.

PRæallegatę propoſitiones de Ellipſi; etiam de Circulo intelliguntur,& ſufficit loco Ellipſis circulum ſubſtituere, nam eædem rationes militabunt.

EXPENSIO V.

De Vmbelicis.

VMbelicus est quoddam punctum intra sectionem, quod insignes proprietates obtinet, maximè ad ipsarum sectionum descriptionem. Vocatur autem Focus, & Polus, qui in Hyperbola, & in Ellipsi gemini sunt, in Parabola verò vnicus.

PROBL. I. PROPOS. XXII.

Parabolæ Vmbelicum assignare.

INueniatur Parameter, & illius quarta pars assumatur, & mensuretur in ipso diametro à vertice sectionis, & illud punctum erit Focus, seu Vmbelicus.

Ostenditur ipsa definitione. Nam definitur, quod sit quarta pars parametri in ipso axe à vertice sectionis assumpta.

PROBL. II. PROPOS. XXII.

Hyperbolarum, & Ellipsium Vmbelicos inuenire, data Axe transuersa, & Parametro.

QVoniam Vmbelicus Hyperbolæ non est tantùm quarta pars Parametri à vertice mensurata. Sed latus rectãguli illius quartę parti ęqualis, cuius alterum latus sit trãsuersa diameter addito ei latere ipso, quo clauditur V. g. rectangulo ex diametro trãsuersa MA addito ei MX ęquali XP; In Ellipsi verò dempto V. g. rectãgulũ ex CD dempto CL.

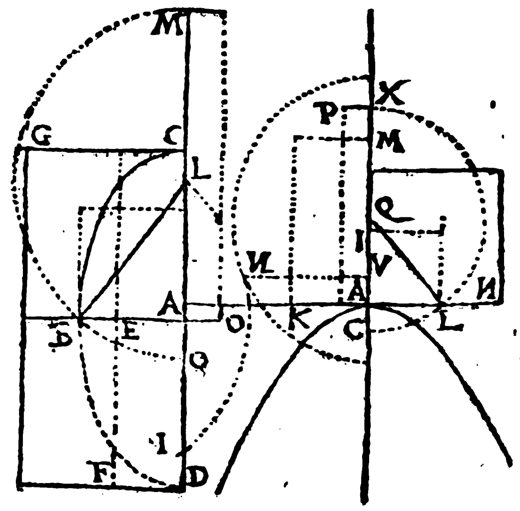
Reperto itaq; Parametro ex 10. propos. & 18. AK; sicut, & diametro transuersa AM; rectangulo ab illis comprehenso MK inueniatur quadratum ęquale NA ex 16. lib. 2. Eucl. vt vides factum mediante media proportionali NV ex 16. lib. 6. cuius latus diuidatur bifariam in L, coniungaturque LQ, & centro Q medietate transuersę diametri, interuallo QL describatur circulus CLX; Dico puncta X, & C Vmbelicos esse Hyperbolę.

Id verò ostendetur, si demonstretur habere conditiones à definitione requisitas, s. quod MX, vel ęqualis CA sit latus rectanguli talis; cuius vnum latus sit, nedum transuersa diameter AM.

Sed insuper distantia XM, vel CA, & aliud ipsa distantia MX, vel CA, quod tamen sit æquale quartæ parti figuræ, & rectanguli contenti à diametro transuersâ, & parametro.

Probatur verò. Nam quadratum NA ex VN est ex constructione æquale rectangulo MK. Sed huius quadrati quarta pars ex 6. lib. 2. Elem. Cor. cum sit ex medietate laterum est quadratum LI. Ergo erit quarta pars rectanguli KM, sed huic quadrato paruo LI est ęquale rectangulum AP, ex propos. 16. Eucl. lib. 2. Ergo rectangulum AP est ęquale quartę parti rectanguli KM. Rursùs comprehenditur diametro transuersa MA, & XM, & aliud latus est ęquale MX, vt patet ex eadem 16. propos. lib. 2. Eucl. Ergo habet conditiones requisitas. Vnde distantiæ ab extremis A, & M diametri transuersę, nempe puncta X, & C erunt Vmbelici.

Si verò sit Ellipsis, cuius Vmbelici sunt inueniendi.



Primo pręsupponendum est quadratum ex AB applicata ad centrum esse æquale quartæ parti rectanguli sub diametro transuersa CD, & parametro AE; nimirum CF. Nam ex propos. 8. Expens. 2. Coroll. 2. ita est diameter CD ad Parametrum AE, vt est ad quadratũ applicatæ AB ad rectangulũ cõprehensum sub portionibus diametri CA, & AD, quæ hic sunt æquales, quãobrẽ hoc rectangulũ erit quadratũ AC. Sed ita se habet quadratũ magnũ ex toto diametro CD, ad rectãgulũ ex eodẽ CD & AE Parametro, vt ipse diameter CD ad parametrum, quod sit super eandem basim CD. Vnde erit, vt altitudo CD ad AE. Ergo ex 16. lib. 5. elem. quadratum AG ad quadratũm ex applicata AB dicit eam proportionem, quam dicit quadratum magnum ex diametro CD ad rectangulum CF; cum sit eadem ac proportio diametri ad parametrum. Sed quadratum AC est quarta pars quadrati magni ex diametro DC ex 6. lib. 2. Ergo, & quadratum ex applicata AB erit quarta pars rectanguli CF.

Cum itaque sit quadratũ ex AB quarta pars rectãguli CF ex diametro DC, & parametro AE, reperiatur huic ęquale rectangulum, comprehensum à diametro DC, defficiente tamen longitudine alterius lateris, vel ex 30. lib. 6. vel ex 36. lib. 10. & aliud latus erit vmbelicus.

Hęc enim est conditio, quæ exposcitur ad Vmbelicos Ellipsis ex definitione, vel sic: Accipiatur distantia AC, & facto centro in B describatur portio circuli; quæ secabit diametrum in L, & I. Dico LI *puncta esse Vmbelicos*, quod, vt probetur.

Facto centro in L interuallo CA describatur circulus, qui secet axem, in M, & O, & latere AM, & alio AO fiat rectangulum OM; iam manifestum est ex 16. lib. 2. Eucl. hoc rectangulum esse æquale quadrato ex AB. Ideo quartæ parti rectanguli CF, ex prædictis, sed hoc rectangulum continetur à diametro OM æqualis CD minus latere OA. Ergo est rectangulum, quod requiritur, & AO distantia requisita ad vmbelicum. Sed LO est æqualis LB, at LB est æqualis AC, ergo etiam ablata communi LA distantia OA est æqualis distantiæ LC. Vnde L erit Vmbelicus, & I alius Vmbelicus.

EX-

EXPENSIO VI.

De inclinatis rectis à contactibus ad focos.

PVncta contactuum, & foci lineis connectuntur, quæ inuicem quibusdam analogijs insignibus referuntur,& ad transuersum diametrum; de quibus quidem speculatio ardua; sed, & singulari vtilitate fecunda.

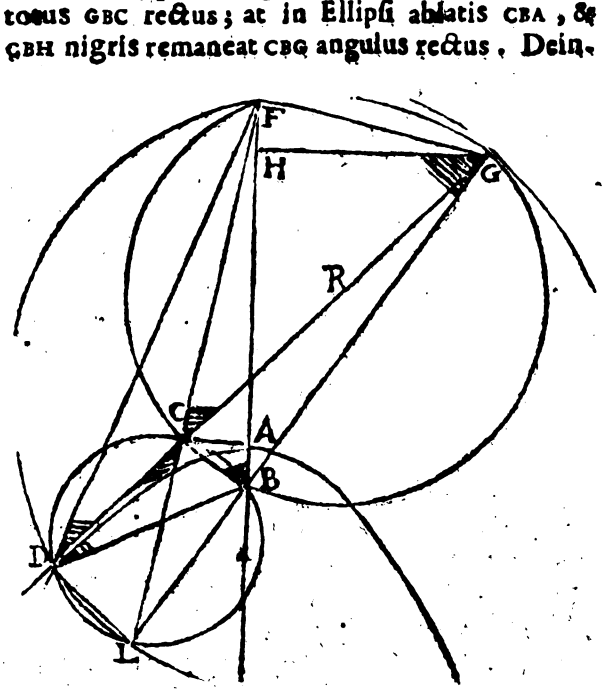
THEOR. I. PROPOS. XXIII.

Si Hyperbolem, vel Ellipsim recta contingat linea, quæ à tactu ad vtrumque sectionis Vmbelicum rectæ ducentur lineæ æquales hinc,inde cum contingente angulos efficient.

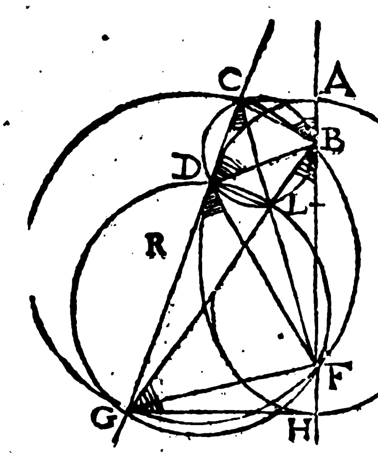
SIt Hyperbola, vel Ellipsis AD; in qua Diameter transuersa AH; repertique Vmbelici B, & F, tangat verò sectionem recta DG, à cuius tactu ad vtrumque vmbelicum ducantur rectæ BD,& & DF. Dico *angulos* BDC,*&* GDF *esse æquales*.

Probatur verò per tres præcipuos progressus. Primus intendit ostendere circulum GF BC super diametrum CG transire per puncta B, & F; quod sic demonstratur.

Rectangulum factum ex AC, & GH ex prop.19. est æquale quartæ parti rectanguli comprehensi à Parametro, & Diametro transuersa, cui etiam quartæ parti fecimus æquale rectangulum ex BH, & BA comprehesum ex prop.22.h. Quare cum sint æqualia habebunt latera proportionalia reciprocè ex 10. lib.6. Eucl. Vnde HG erit ad HB, vt AB ad AC: Iunctis ergo B, & C linea BC, & G,& B linea GB, erunt triangula BAC, & GHB similia; siquidem secundùm propos 5. lib. 6. Eucl. habent latera proportionalia circa æquales angulos rectos H, & A,& ideo angulus niger G angulo B nigro æqualis; vnde, & reliquus GBH reliquo BCA; Cum ergo angulus B niger, & angulus ACB sint æquales vni recto ex 17. lib.1. Eucl. fit, vt angulo B nigro additus GBH equalis angulo ACB in Hyperbola fiat totus GBC rectus; at in Ellipsi ablatis CBA, & GBH nigris remaneat CBG angulus rectus. Deinde idem probabitur de angulo GFC, quòd sit rectus. Nam iunctis recta G,& F,sicut F,& C triangulum GHF erit similis triangulo FAC. Nam *permutando* sicut se habet GH ad HF,æquali BA (cum F sit alter vmbelicus) ita FA æqualis HB ad AC, cum ergo latera sint proportionalia circa angulos rectos H, & A triangula erunt similia, & reliquos angulos reliquis æquales obtinebunt. Vnde angulus HGF angulo AFC erit æqualis, qui additus angulo GFH conficiet totum angulum GFC rectum ob dictam rationem, quòd CFA æquetur angulo HGF,qui cum HFG æquat rectum in hyperbola,at in Ellipsi relinquet GFC rectũ ablato CFH, & CFA: Quare ex 32. lib.4 Eucl. facto super GC centro in R, circumferentia transibit per puncta F, & B; quod anguli recti probati sint, & ideo necessariò in semicirculo debeant esse.



Progressus 2. Intendit probare; quòd erecta in puncto contactus D perpendiculari LD vsque ad lineam FC prolungatam in L,si opus sit, & producta GB; tres lineæ LC, & DL, & GL in idem punctum conspirent in L. Considerandum est itaque GFC triangulum rectangulum triangulo LCD rectangulo esse ad verticem in Hiperbola, in Ellipsi vnum contineri in alio, & angulum C nigrum hic esse eundem,ibi æqualem: quare, & reliquus angulus reliquo æqualis, & latera erunt proportionalia ex Coroll. 2. propos.17. lib.1. Elem.



Sunt autem triangula GBH,& GFC æquiangula. Ex eo,quod rectangula habeant angulum GCF angulo GBF æqualem, quòd sit super eandem circumferentiæ portionẽ circuli GFCB. Quare, & triangulum GFC erit triangulo BAC simile, cui simile in primo progr.probatum est triangulum GBH. Quare erit quoque simile ei BAC triangulo LCD; quod probatum est simile triangulo GFC, vnde & latera pportionalia erũt.Deinde producatur GB vsq; quò occurrat rectæ FL si opus sit, erit triangulum BLC triangulo GLF simile; siquidem in primo progress. anguli GFC, & CBG probati sunt equales,& recti, & angulus L est communis in Hyperbola in Ellipsi ad verticem.

Cum itaque triangula sint similia BAC, & LCD, erit AC ad CB, vt CD ad CL, & *permutando*, vt AC ad CD; ità BC ad CL. Et propter triangula similia GFL, & BCL, vt BC ad CL, ita est GF ad GL; Quare erit commune latus CL triangulo CDL, & GLF, aut BCL; & latus GL conueniet cum CL, & DL in L.

Progress.3. Cum ergo angulus GFL in progr.1. pbatus sit rectus. Angulus verò LDG talis factus sit; si diametro GL fiat circulus erunt anguli recti vertices F, & D ex propos.28. lib.3. Eucl. in circuli circumferentiã.

Rursus. Cùm angulus CBL, vel quod idem GBC

sin

in I. progr. probatus sit rectus, & CDL factus talis si diametro CL circumferentia ducatur, hæc transibit per D, & B puncta, & vertices angulorum rectorum ex 28. lib. 3. Elem.

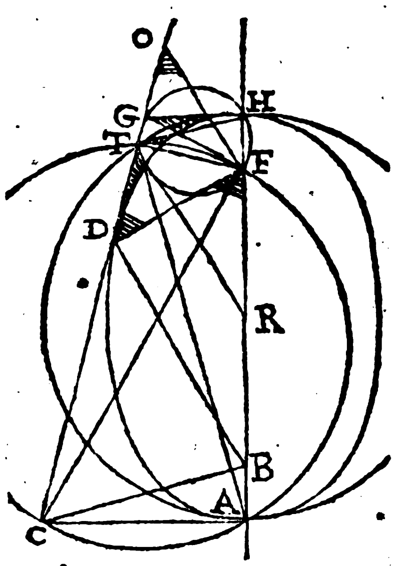
Cum itaque angulus BLC sit in eadem circuli circumferentia, ac angulus BDC, & angulus idem BLC, vel GLF (in Ellipsi ad verticem) sit in eadem circuli circũferentia GF, ac angulus GDF, erunt angulus BDC, & GDF ad contactum D æquales, vtpote æquales vni tertio BLC.

THEOR. II. PROPOS. XXIV.

Si Hyperbolam vel Ellipsim recta linea contingat, & ab vtroque vmbelico ad tactum binæ inclinentur lineæ: Illa linea, quæ parallela alterutri à centro ducetur ad contingentem erit æqualis dimidio transuersi axis.

Sit Hyperbola, vel Ellipsis AD, quam contingat OD in D, & ad contactum D ab vmbelicis B, & F binæ lineæ inclinentur BD, & FD, deinde à centro R ducatur TR parallela alterutri, aut FD, aut BD, vt est exemplum, donec contingentem secet in T. Dico RT *esse æqualem axis transuersæ dimidio* RA, *vel* RH.

Iungatur punctum T cum punctis F, H, & A, & vt in antecedenti figura sit ducta GH perpendicularis ad axem, & coniunctum punctum G, vbi secat tangentem, cum vmbelico F, sitque ducta OF parallela TR vel BD.

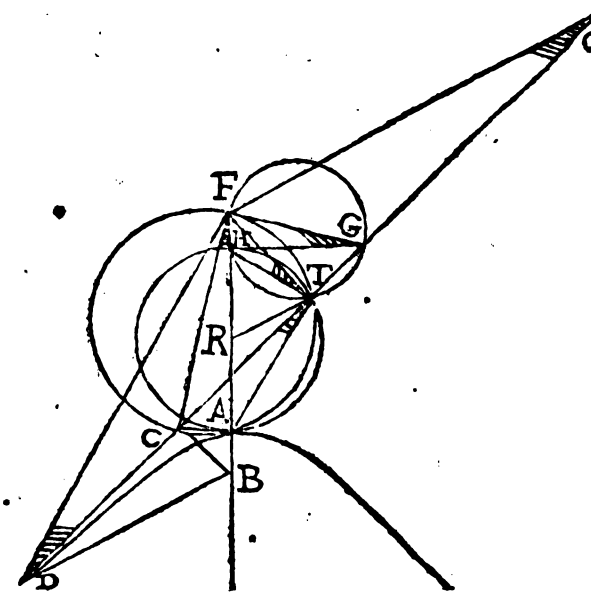


Progress. I. Probatur itaq; Angulus T (vt ostendam) in triãgulo GTF rectus est, & ideo cum H angulus in triangulo GHF ex constructione sit rectus, poterit ex prop. 28. Cor. l. 3. El. diametro GF describi circulus, qui transeat per puncta, & vertices angulorum rectorum T, & H, & sic angulus apud G in triangulo FGH, & T in triangulo FTH, vtpote anguli ad circumferentiam, & super eandem peripheriam FH erunt æquales ex 27. lib. 3. elem.

Progress. 2. Itaque ostenditur angulus T in triangulo GTF rectus. Quoniam triangulum magnum OFD est æquicrurum, & OT medietas basis; Ergo FT est perpendicularis.

Est autem æquicrurum: Quia anguli O, & D nigri sunt æquales, angulus enim alternus niger O factus ab incidente OD in parallelas OF & BD alteri alterno BDC æqualis, qui BDC probatus est æqualis in antec. propos. angulo nigro D, vtpote ab inclinatis ad contactum effecti, ergo O, & D æquantur.

Quod autem OT sit medietas basis OD probatur. Nam BR incidens est æqualis RF ob æqualem distantiam vmbelicorum à verticibus H, & A, & centri R ab iisdem. Ergo etiam OT est æqualis TD cum secetur in easdem partes ex 13. propos. lib. 6. Elem. à parallela TR ipsa OD, quæ parallelas ad extrema coniungit; Quare cum in triangulo OFD æquicruro OT sit æqualis DT, angulus OTF erit rectus, & TF perpendicularis. Vnde verificabitur, quod per T, & H transeat circulus assumpto pro diametro GF.



Progress. 3. Ostendendum est deinde angulum ATC nigrum angulo FTH esse æqualem.

Angulus CTF est rectus, ex progr. I. angulus quoque CAF est rectus ex constructione præcedenfiguræ; Ergo diametro CF circumferentia transibit per C, F, A, & T; Anguli ergo nigri CTA, & CFA, inixi super eandem peripheriam AC, & vertices T; & F in peripherijs erunt æquales; sed angulus niger CFA probatus est ęqualis angulo nigro HGF in præced. propos. in fine progr. I. & hic angulus G niger in progr. I. & 2. huius propos. angulo T in triangulo FTH; Ergo hic angulus FTH est ęqualis angulo T nigro trianguli ATC.

Progr. 4. Duo anguli nigri ad T sunt æquales, & angulus CTF rectus ex 2. progr. ergo, & angulus HTA erit rectus. Idem enim vtrisque additur angulus HTC in Hyperbola, & in Ellipsi FTA. Si ergo fiat circulus diametro HA centro R transibit per T anguli recti verticem ex 28. lib. 3. Eucl. Vnde TR erit radius est semidiameter æqualis semiaxi transuersæ AR, seu æquali RH.

THEOR. III. PROPOS. XXV.

Si in Hyperbola, aut Ellipsi ab eodem sectionis puncto binæ inclinentur recta lineæ ad vmbelicos; in Hyperbola maior minorem quantitate transuersi axis superabit, & in Ellipsi erunt simul transuerso axi æquales.

Sit Hyperbola, vel Ellipsis AC in quibus à puncto circumferentiæ C binæ lineæ inclinentur ad vmbelicos vnam adhunc K alteram ad illum B. Dicit, quod in Hyperbola linea maior KC superabit minorem BC portione æquali diametro transuersæ AH, in Ellisi verò simul sumptæ KC, & BC diametro HA erunt æquales, ducatur GD parallela

CF

GF per centrum F in vtraque sectione.

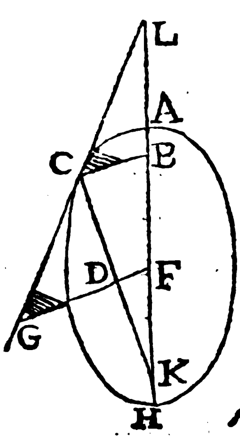
Progress. I. Primo ostendendum GD in Hyperbola esse æqualẽ DC, quod demonstratur. Nã triãguli GDC anguli nigri ad basim G C sunt æquales, siquidem GC in parallelas incidens GD, & BC ex 30. lib.1. Eucl. facit angulos alternos BCG, & G nigrum æquales; sed BCG est æqualis angulo nigro C ex prop.23.h. Ergo G, & C niger sunt æquales, quare GD crus est ęquale DC ex 17.lib.1.Elem.

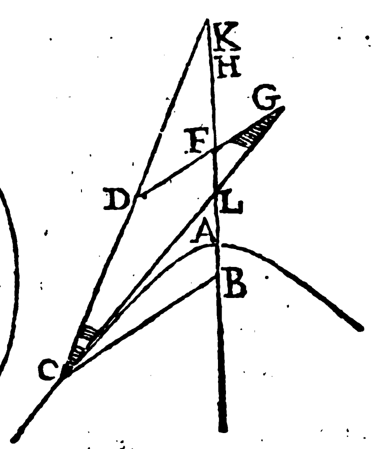
Progr. 2. Prob. quoq; CD esse æqualem portioni DX: In triãgulo enim BXC ob parallelam FD ad basim BC, quia XB est dupla XF etiã XC erit dupla portionis XD ex 2. lib.6. quare XD, & DC erunt ęquales, & tota CX erit dupla CD, quæ est æqualis suæ dimidię DC, necnon in eodem triangulo, & BC erit dupla FD ob eandem rationem.

Progr. 3. Cum ergo DG sit æqualis CD: ergo FD, FG eius medietates duplatæ æquabunt CX, sed BC est dupla FD, & AH est dupla GF præc. propos. Ergo BC, & AH æquabunt totam CX; quod erat probandum.

Idem ostendetur in Ellipsi cum LG in parallelas BC, & FC incidat angulus C niger est ęqualis angulo nigro G internus, & ad easdem partes externo ex propos.30. lib.1. Elem. sed angulus C niger est æqualis, vtpote ad contactum ex propos.23. huius angulo DCG. Ergo est æqualis angulo G, & triangulum GDC æquicrurum: Ergo CD, & DG crura æqualia

Progr. 2. Probatur quoque in triangulo KBC ob parallelas FD, & BC crus KC esse duplum cruris KD, & BC cruris FD; sicut est KB duplum cruris FX.





Progr. 3. Igitur DG est æqualis DC. Ergo si DG dupletur erit æqualis CK; sic FD, si dupletur, erit æqualis BC. Vnde duplicata GF ęquabit CB, & CK; sed FG simplex ex pręced. propos. est æqualis dimidio diametro transuerso FH. Ergo duplicata erit ęqualis toti AH. Vnde, & BC, & CK erunt æquales toti diametro AH.

THEOR. IV. PROPOS. XXVI.

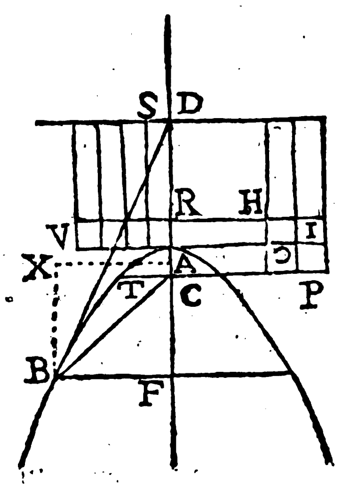
Si parabolem recta contingat linea, quæ à tactu ad sectionis vmbilicum recta linea ducetur, æqualis erit axis portioni, quæ intercipitur inter contingentem prædictam, & Vmbilicum.

Sit Parabola AB, in qua vertex apud A, contingensque DB Vmbilicus C signatus à vertice nempe quarta pars parametri, applicata ad tactum FB, iungaturque CB. Dico, quòd hæc linea CB erit æqualis axi CD, qui intercipitur inter Vmbilicum C, & punctum D, quo diametrum secat tangens BD in puncto D.

Progress. I. Aduertendum ex propos.12. huius diametri portiones inter applicatam, & verticem FA, & inter verticem, & contingentẽ DA esse ęquales.

Secundò. Ex propos.11. lib.2. Elem. quadratum ex CB esse ęquale quadratis ex CF, & FB, quòd angulus ad F rectus sit. Vnde erit æquale quadrato FX facto ex FB, & quadrato HD facto ex CF: quadratum verò FX est ęquale rectangulo VD sub DA axis portione, & AV Parametro comprehenso ex Coroll. propos.12. huius. Quare fit quadratum CB fit ęquale quadrato DH facto ex CF, & rectangulo DV, quod comprehenditur à portione diametri DA, & Parametro AV quadruplo lineę CA ex hypothesi.

Progr. 2. Prob.propos. Quadratum CD quale est DP æquale est quadrato ex CF, quod fecimus DH, & quatuor rectangulis, quibus vnum latus est linea



ipsa DR æqualis lineę CF, & aliud linea AC, vel ęqualis AR; siquidem ex ęqualibus DA, & AF ablatis æqualibus DR, & CF residua sunt ęqualia. Insuper est quoque ęquale idẽ DP quatuor paruis quadratis ex CA qualia sũt P, I, O, H. Nam hæc omnia nempe quadratum maius DH, quatuor quadrata parua T, I, O, H, & rectangula quatuor, vt SO concluduntur in ipso DP.

Progress. 3. Sed hęc omnia quatuor rectangula, & quatuor quadrata complent, & æquantur rectangulo sub DA intercepta diametro, & AV parametro comprehensum: Nam parameter est quater CA, vnde sub AR ęquali, & AV quadruplici rectangulum quatuor parua quadrata cõprehẽdet, & rectangulum sub DR æquali CF, & quadruplici RV quatuor rectangula quale vnum ex illis est SR.

Progr. 4. Ergo quadratum magnum DCP est æquale quadrato ex CF, quale est DH, & rectangulo DV ex parametro, & axe AD.

Progr. 5. Sed hoc rectangulum DV ex parametro, & axe intercepta, vt ex I. progr. est æquale quadrato ex BF; Ergo quadratum magnum DCP est æquale quadrato ex CF, quale est DH, & quadrato ex FB.

Sed quadratum ex linea CB à contactu B ad parametrum ducta ex progr. I. est æquale duobus quadratis ex CF, & FB. Ergo etiam est æquale quale quadrato magno DCP. Cùm ergo hęc duo quadrata sint æqualia; etiam latera erunt ęqualia, & CB erit ęqualis lineę CD, quòd erat ostendendum.

COROLLARIVM.

Hinc elicies CB esse ęqualem FA, & AC simul positis, quia probata est ęqualis lineę DC, cuius vna pars AD est ęqualis ipsi AF, altera CA ipsa eadem. Quod si CB sit vna quoque ex applicatis, & & cadat in punctum T ad diametrum perpendiculariter, vt CT; tunc CT dupla erit CA; quia eodem modo

modo erit æqualis CA inter se applicatam, & verticem intercepta, & eidem CA, vt quartæ parti Parametri.

Alia quoque ratio esset, quod tangens secabit in R, vtpote æquali CA: At CT à tactu ad Vmbilicum probata est æqualis CR diametro inter vmbilicum, & punctum R intercepto.

EXPENSIO VII.

De Diametris secundis.

NOn vnus diameter sectionibus conicis inest: siquidem præter illum, qui oritur à generatione, & in ipsa sectione coni est, quę per verticem coni ducitur; aliæ etiam lineę, quę illi diametro æquidistantes in Parabola, vel in Ellipsi, & Hyperbola ad centrum ducuntur, diametri dignitatem obtinere possunt; siquidem, & omnes applicatas, quę intra sectionem ducuntur bifariam diuidere possunt; vt ergo id demonstretur.

THEOR. I. PROPOS. XXVII.

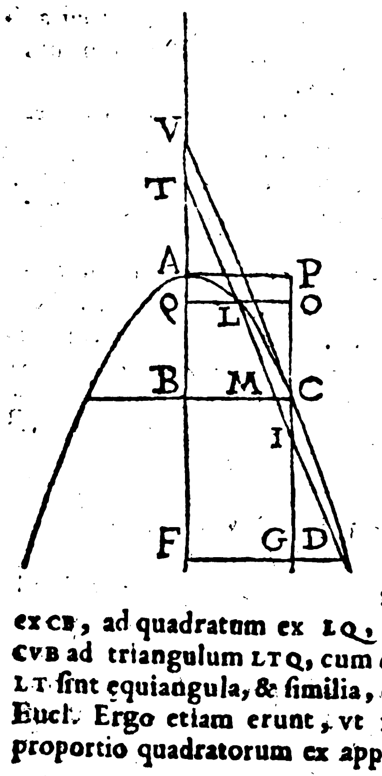
Si Parabolam recta contingat linea, quæ per tactum diametro parallela ducetur, omnes alias tangenti æquidistantes intra sectionem existentes bifariam secabit.

IN parabola ACD, sit tangens CV, diameter VF, & ipsi parallela PG per tactum C ducta, tangenti verò parallela DL intra sectionem, ita vt eius extrema terminentur in D, & L puncta sectionis.

Dico hanc DL bifariam à linea PG transeunte per tactum C secari in I.

Progr. I. Priùs Triangulum TLQ ostendendum est æquale rectangulo QAP; sicut, & triangulum DTF parallelogrammo, seu rectangulo FP.

Quod vt ostendatur, reminiscendum est id, quod diximus propos. II. huius portionem diametri BA esse ęqualem AV ob contingentem CV; quare ex Euc. lib. I. propos. 39. rectangulum PB erit æquale triágulo BCV ob eandem altitudinem CB, & basim duplicatam BV.



Progr. 2. Reminiscendum quoque quadratum CB, & LQ applicatarum esse ad inuicem, vt BA ad AQ ex prop. 5. huius Exp. I. sed vt quadratum ex CB, ad quadratum ex LQ, ita est triangulum CVB ad triangulum LTQ, cum ob parallelas CV, & LT sint equiangula, & similia, ex prop. 22. lib. 6. Eucl. Ergo etiam erunt, vt BA ad AQ, quę est proportio quadratorum ex applicatis.

Progr. 3. Vt autem BA ad QA, ita est rectangulum BP ad rectangulum QB ob eandem altitudinem ex I. lib. 6. Eucl. Ergo, & triangulum CVB ad triangulum LTQ erit, vt rectangulum BP ad rectangulum PQ; & permutando, itaquoque est triangulum CBV ad rectangulum BP ex BA, quod ei probatum est æquale, vt triangulum LTQ rectangulo QP: Ergo quoque LQT triangulum erit æquale rectangulo QP ex prop. 12. lib. 5. Elem.

Progr. 4. Eadem prorsus est probatio de triangulo DTF; quòd sit æquale rectangulo FP. Vnde non deseruit eam repetere, quibus positis.

Progr. 5. Auferendum est triangulum LQT, & æquale rectangulum QP, & remanebit ablatis æqualibus quadrilatera figura LQFD rectangulo residuo FOGQ æquale, quæ prius erant æqualia, ex progr. pręced. 4. & 3.

Progr. 6. Quod si auferatur quinquelaterum commune, & occupans idem spatium FGILQ remanebunt duo triangula æqualia, & similia DIG, & IOL; Quare basis IL erit æqualis basi ID; quod erat probandum. Similia autem sunt, quod anguli apud I sint æquales, vtpote ad verticem, & apud G, & O recti: vnde, & reliquus D reliquo L, ęqualis erit; ideo ex def. I. lib. 6. Elem. erunt similia.

COROLLARIVM.

COlligitur itaque omnes parallelas diametro principali, siue ex generatione in Parabola diametri quoque vices, & naturam obtinere. Nam diameter est ille ex definitione, qui per medium diuidit omnes rectas, quæ intra sectionem parallelę inuicem ducuntur.

THEOR. II. PROPOS. XXVIII.

Si Hyperbolem, vel Ellipsim recta contingat linea, quæ ei parallela ducitur intra sectionem, diuiditur per medium à lineâ, quæ à centro procedit, & per contactum deducitur.

SIt Hyperbola, seu Ellipsis ABD, quam tangat recta BÇ, cui parallela agatur DF, discedatq; à centro E recta ad contactum B. Dico, quòd hęc diuidit portionem parallelæ intra sectionem remanentis, scilicet LD in duas partes æquales. Ducantur ad punctum contactus B applicata BP, & ad extrema L, & D applicatæ LO & DI, & tandem à vertice sectionis AS, quæ terminet in S puncto lineę EB, à centro ad contactum ductæ.

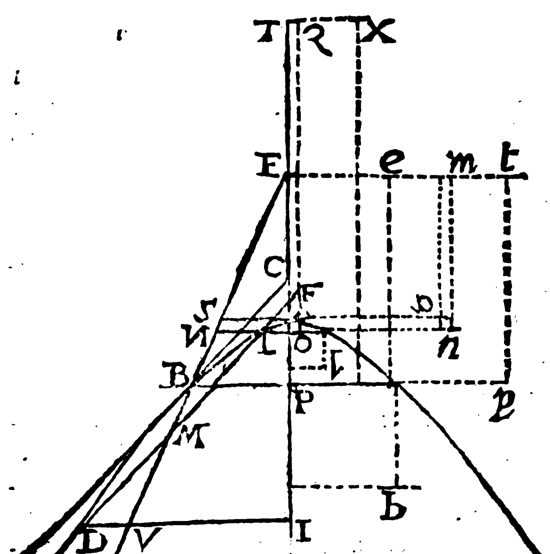
Progr. I. Iam ex propos. 17. Expens. 4. huius nosti rectangulum PE, & CE esse ęquale quadrato BA ex AE, ideoq; proportionalia esse latera ex 17. lib. 6. & vt PE ad AE, ita esse AE ad EC, & ideo PE ad EC duplicata esse proportione. Ex hoc itaq; demonstrandum est in primis EBC triangulum esse æquale triangulo SEA cum eidem triágulo BEP eandem dicant proportionem, quam rectangulum CE, EP æquale, quadrato AE dicit.

Prob. Dicit eandem proportionem triangulum SEA triangulo BEP, sicut quadratum EA ad quadratũ ex PE, eò, quòd SEA, & BEP triangula sint super eandem, basim, ac quadrata EA, & PE: Vnde, tum triangula; tum quadrata erunt in duplicata ratione laterum suorum, nempe eâ quam latus CE tertia tiā proportionalis,vt dixi habet ad BP.

Item rectangulum EP ex PB, & EC est ad quadratum PE, vt altitudo EC ad altitudinem PF ob eandem basim PE; Idest triangulum BEC ad triangulum BEP ob eandem altitudinem PB. Cum ergo triangulum AES sit ad triangulum BEP, vt EC ad EP. Rursusque triangulum BEC sit ad triangulum idem BEP, vt eędem lineę EC ad EP triangula EBC,& ESA ex prop. 7.lib.5.Elem. erunt æqualia, cum eidem eandem dicant proportionem.

Progr. 2. Quapropter ab eodem triangulo BEP in Hyperbola, si auferatur SEA, & BEC æqualia inuicem,residua remanebunt ęqualia quadrilaterum SBAP, & triangulum BCP.

Pariter si in Ellipsi auferatur à triangulo ASE, & CBE ęqualibus triangulum commune PBE remanebunt residua ęqualia triangulum PCB,& quadrilaterum APSB.



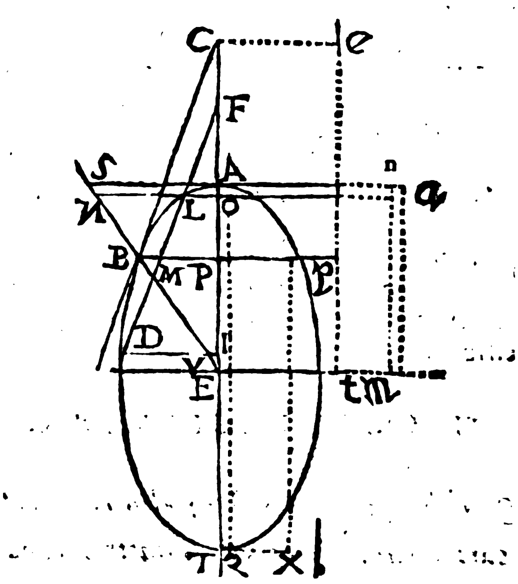
Progress. 3. Considerandum autem est rectangulum OZ esse ęquale gnomoni o a m, nam EZ ęquatur parti a m; & EO ęquali reliquo gnomonis AN. Et idem dicas de gnomone p a t eadem ratione, quod æquatur px rectangulo. Rectangulum verò ZO esse ad rectangulum Px ex diametro transuersa,& intercepta pro vno latere, & intercepta solùm pro alio ex prop.6. huius, vt quadratum LO ad quadratum BP.

Quoniam itaque 1. progr. diximus, ita esse quadratum ex EA ad quadratum ex EP,vt SEA triangulum ad EPB triangulum; erit etiam ex prop.20. lib.5. reliquus gnomon P a t, idest Px rectangulum ad quadratum ex EA, vt reliquum quadrilaterum SBAP ad triangulum SEA.

Progr. 4. Et ex eadem ratione erit ex EA quadratum ad quadratum ex EO, vt triangulum ESA ad triangulum ENO ob rationem duplicatam suorum laterum, quę sunt eadem in quadratis, & triangulis, vt dictum est progr.1. Quare, & reliquus gnomon o a m, idest OZ rectangulum erit ad quadratum ex EA,vt reliquum quadrilaterum SANO ad triangulum SEA, *permutando* itaque OZ rectangulum erit ad ASNO quadrilaterū,vt quadratum ex EA ad triangulum SEA. Itemq; *permutando* progr. 3. proportiones, ita erit rectangulum Px ad quadrilaterum SAPB, vt quadratum ex EA ad triangulum SEA.

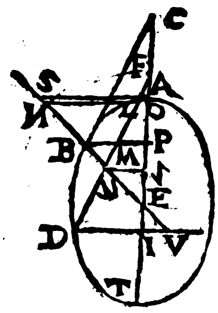
Quapropter erit eadem proportio quadrati EA ad triangulum SEA hoc est OZ rectanguli ad AOSN quadrilaterum, quam Px rectanguli ad SPBA quadrilaterum. Vnde *permutando* erit OZ rectangulum ad PX rectangulum, quam SANO quadrilateri ad SABP quarilaterum.

Progress. 5. Proportio verò OZ rectanguli ad PX rectangulum est eadem, quæ quadrati LO ad quadratū BP, & ideo eadem, quæ trianguli LFO ad triangulū BCP 26.l.6.ob parallelas, & easdē bases, ob quę sunt similia triangula inuicem, & ideo in duplicata ratione suorum laterum communium quadratis. Ideo quadrilaterum SNAO erit ad quadrilaterum SABP,vt LFO triangulum ad BCP triangulum; Et *permutando*, Quadrilaterum SNAO erit ad triangulum LFO, vt Quadrilaterum SABP ad triangulum BCP. Sed hæc sunt æqualia triangulum BCP,& quadrilaterum BSAO ex progr.2. Ergo etiam illa SNAO quadrilaterū, & LFO triangulū pr.6. Idem probabis de quadrilatero IVSA, quod sit æquale triangulo DFI. Nam supposita eadem consideratione, quæ progr.3. Ita erit quadratum ex EA ad quadratum EI, vt triangulum ESA ad triangulum EVI ratione eadem: Quare, & reliquus gnomon, idest gnomoni æquale rectangulum ex IT, & IA erit ad quadratum EA, vt reliquum quadrilaterum SAVI, seu in altera ellipsi ASVI ad triangulum SEA, & ideo erit rectanguli TI, & IA ad ASIV quadrilaterum quam PX rectanguli ad SPBA quadrilaterum; cum sit etiam horum eadem ratio, quæ EA quadrati ad triangulum SEA ex progr.3.



Quare *permutando* erit rectangulum ex TI, & TA ad PX rectangulum, velut ASIV quadrilateri ad SPAB quadrilaterum. Proportio autem rectanguli ex TI, & TA ad rectangulum PX ex TP, & PA est eadem ex 6. huius, quæ quadrati DI ad quadratum BP, & ideo eadem, quæ trianguli DFI ad triangulum BCP æquiangulorum ex 26. lib.6. elem. sunt enim figuræ similes super easdem quadratorum bases. Ideo quadrilaterum ASIV erit ad quadrilaterum SPBA; vt triangulum DFI ad triangulum BCP: ideo *permutando* quadrilaterum ASIV erit ad triangulum DFI, vt quadrilaterum SBPA ad triangulum BCP; sed quadrilaterum SBPA æquatur triangulo BCP, vt 1. progr. ostensum est. Ergo etiā Quadrilaterū ASVI æquabitur triāgulo DFI.

Progr. 7. Vnde, si ab æqualibus SAVI quadrilatero auferas NSAO quadrilaterum æquale triangulo LOF, quod auferatur à triangulo DFI quod est ęquale ipsi ASVI, reliquum NOVI quadrilaterum restabit æquale reliquo LODI trapezio. Si verò ab vtroque auferas commune spatium quinquelaterum LMVIO, remanebunt duo triangula NML,& DMV æqualia, & ob parallelas, & angulos M æquales ad verticem similia, Vnde basis LM erit æqualis basi MD.



Obseruandum verò est in Ellipsi aliquando FD cadere infra centrum versus T. Sed tunc idem erit argumentum: nisi quòd à triangulo ASB auferendũ est triangulum EuI. linea ui in serie probationis, prog. 6. quod sit æquale triangulo BVI; quod tunc fit infra centrum E versus T. Et tandem pro vltimo progr. cum sit æquale IDF triangulum quadrilatero ASIu, & triangulũ OFL quadrilatero ASON ablatis istis restat ON Iu quadrilaterum æquale quadrilatero OLID; adde vtrisq; BVI, & uIB efficiẽtur ęqualia triangulum ONB, & figura irregularis OLUDVB, à quibus ablato cõmuni spatio MBLO erũt æqualia MNL, & MVD triangula insuper, & similia ob æquales angulos alternos V, & N inter parallelas positos, & angulos ad M ad verticem.

COROLLARIVM I.

Hinc deduces omnes protractas à centro in Ellipsi, vel Hyperbola posse habere proprietates diametri; Quod omnes in sectione cõprehensas æqualiter diuidant. Vnde præter diametrum ex generatione tot erunt diametri in sectionibus Hyperbolicis, vel Ellipticis, quot erunt lineæ intra sectionem à centro ductæ, & circumferentiam secantes.

COROLLARIVM II.

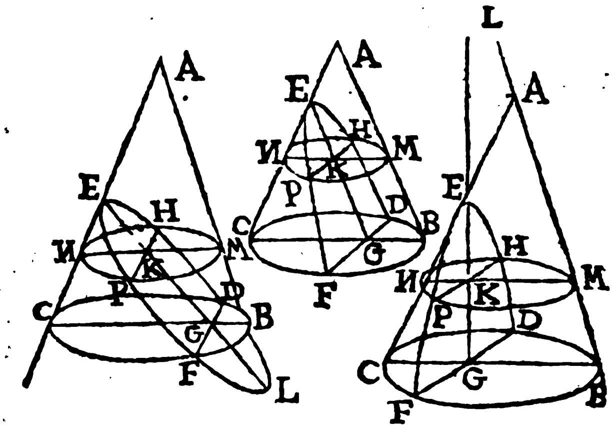
Hinc cognosces, quod quę dicta sunt de ellipsi etiam de circuli circumferentia debeant cognosci, vt quilibet pro ellipsi substituto circulo intelliget.

THEOR. III. PROPOS. XXIX.

* *Quælibet sectio potest in alio cono collocari, cui aliqua ex diametris coniungatis sit axis.*

* Sit diameter cõiungata GE, AL in sectione DEF, cui sint applicatę GF, & KP parallelę, & ęquales ipsis ex pręc. DO, & HK. Dico *hanc sectionem posse in cono collocari aliquo, cui diameter hæc coniungata sit axis.*

Applicatę FG duę extremę proportionales inueniantur CG, & GB ex propos. 16. tract. 15. quę ad punctum G perpendiculares applicatis FG, & GD constituantur, & per eas circulus actus intelligatur diametro CB, & transibit per F mediã proportionalẽ, & D ex eadem propos. 16. tract. 15. A puncto itaq; C per verticem E in plano per EGL transeunte ducatur CA, & à B in eodem ducatur ad verticem diametri transuersę BA, in L in parabola verò parallela GE diametro, in quo etiam per punctũ K parallela ipsi CB ducatur NKM, & per PH, NM ducatur planum, quod ex propos. 13. tract. 22. erit parallelũ plano BDCF, in quo diametro NM describatur circulus NPM. Dico, quod istę circulus transibit per P, & H puncta: Vnde superficies conica circumuestiens hos duos circulos sectionem quoque FEHD circumuestiet, eo quia sicut probabitur de punctis P, & H applicatarum, quòd per eas transeat circulus MHNP: sic par ratio militet de omni alio circulo, qui diametrum aliam aliquam parallelam diametro CB obtineat, nam transibit per extremum punctum applicatę diametro sectionum, eo puncto, quo diameter circuli transit.



Probatur itaque NPMH transire per puncta P, H applicatarum KP, & KH. Nam rectangulum NK, & KM ęquatur quadrato PK, vel KH, ergo diametro MN circumferentia transibit per NPMH puncta ex propos. 35. lib. 3.

Ostendendũ est itaq; rect. NK, & KM esse ęquale quadrato PK, vel KH, Nam CG est ad NK in Hyperbola, & Ellipsi, vt GE ad KE; sic GB est ad KM, vt GL diameter transuersa ad KL. Ergo si componantur proportiones erit CG, & GB rectangulum ad rectangulum NK, & KM; vt GE, & GL rectangulum ad KE, & KL rectangulum; & ideo, vt quadratum FG applicatę ad quadratum applicatę PK, ex prop. 6. huius. & Thesi; quia GL, GE facimus diametrum. Ergo CG, & GB rectangulum erit ad rectangulum NK, & KM, vt FG quadratum ad quadratum PK: Ideoque *permutando* CG, & GB rectangulum erit ad FG quadratum, vt NK, & KM rectangulum ad PK quadratum. Sed CG, & GB rectangulum est ęquale ex effectione quadrato FG: Ergo etiam ex propos. 7. lib. 5. Elem. NK, & KM rectangulum quadrato PK, & KH. Vnde circumferentia NPKM transibit per P, & H, & ita dicas de alijs applicatis.

In Parabola quoque idem argumentũ militabit. Nam rectangulũ CG, & GB est ad rectangulũ NK, & KM ob eandem altitudinẽ GB, vel KM, vt CG ad NK, scilicet, vt GE ad KE. Verũ, vt GE ad KE, ita est quadratũ FG ad quadratum PK ex 5. huius. Vnde vt rectãgulũ CG, & GB ad rectangulum NK, & KM, ita quadratum FG ad quadratum PK, & *permutando* rectangulum CG, & GB erit ad quadratum FG, vt rectangulum NK, & KM ad quadratum PK: sed rectangulum CG, & GB æquatur ex effectione quadrato FG, ergo etiam ex propos. 7. lib. 5. NK, & KM rectangulum æquabitur quadrato PK.

COROLLARIVM I.

Hinc est diametros secundarias esse propriè axes, qui licet non deseruiant conicis sectionibus, quatenùs in hoc assignato cono existunt; sunt tamen axes possibiles; quia hæc coni sectio, quæ assignato cono applicata est, aut in eo effecta potest, & in alio cono Scaleno reperiri, & in eo diameter coniugata axis erit, licet non præcipua, eo quod normalis non sit suis applicatis: Propterea etiam proprietates axis obtinebit.

COROLLARIVM II.

HInc quoque fit euidens; quod si FG duæ proportionales extremæ inueniantur ex 16. prop.tr.15.CG,& GB,& collocata Hyperbola,& Ellipsi sectione ad punctum G ad quęcumque angulum, ita tamen, vt FG sit perpendicularis ipsi toti CB; si deinde per E ducatur recta CE, & ducta NK parallela CB, duabus NK, & PK extrema proportionalis MK inueniatur, & ducatur BM vsque dum occurrat diametro in L: quod detruncabit BL tali modo; vt rectangulum GE, & GL sit ad rectangulum KE & KL, vt quadratum FG ad quadratū PK; Nā eodem argumento BG erit ad GL; vt KM ad KL, & CG erit ad GE, vt NK ad KE: vnde compositis proportionibus rectangulum CG,& GB erit ad rectangulum NK, & KM, idest æquale quadratum FG ad æquale PK, vt rectangulum GL, & GE ad KL, & KE rectangulum, ideoque, vt quadratum FG ad quadratum PK.

In parabola verò, si FG duæ extremæ inueniantur, & collocentur vt supra ad angulos rectos cum applicata; deinde duabus KM æquali GB, & PK extrema proportionalis inueniatur NK, & parallelæ ad CB constituantur linea CN occurret vertici parabolæ E. Nam ob eandem altitudinem rectangulum CG, & GB erit NK, & KM, vt CG ad NK, idest vt EG ad KG, ideoque, vt CE ad NE. Vnde ex prop.9. lib.6. composita triangula GCE, NKE in vnam rectam cohibunt.

Quare linea diuidens bifariam rectas,& ideo ex pr.28. transiens per centrū poterit esse diameter, si ei addatur in Hyperbola diameter transuersa, idest talis pars extra sectionem; donec occurrat alteri lateri BA trianguli per axem ducti; Talis verò diameter est duplus portionis, quę pertingit à vertice sectionis ad centrum ex definitione centri.

COROLLARIVM III.

PRaxi præced. Coroll. poteris quoque quamlibet sectionem cono alicui inserere in quo possibile est reperiri, vt per se patet.

PROBL. I. PROPOS. XXX.

Diametros coniungatas, centrumque in Hyperbola inuenire.

DVcantur FD, & GE parallelæ quomodocumque, & bifariam diuidantur; perque puncta illa medietatum ducatur KA. Nam erit diameter; rursus ductis alijs quomodocumque sibi parallelis HI, & BC diuidantur bifariam, & per puncta divisionum LA ducatur, & LA erit quoque diameter, quæ conueniet in centrum figuræ ex præc. Coroll. in A; Quare A erit centrum.

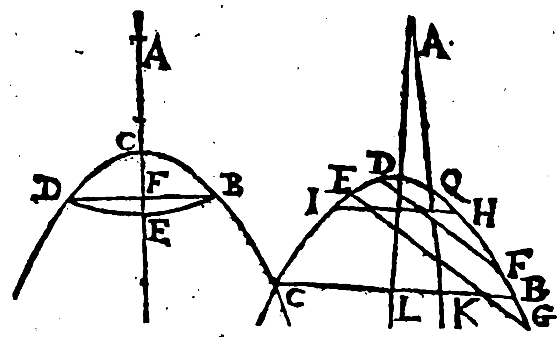
Prob. Diametri enim sunt, quòd bifariam parallelas in sectione diuidant, & A est centrum, quoniam rectæ in centrum procedentes sunt diametri coniugatę, vt propos.28. huius.

Oportet tamen ex præced. 2. Coroll. eis LA, & KA addere portionem DA, & QA, scilicet diametrum transuersam complere, vt omnimodam diametrorum rationem dignitatemque obtineant, quam prop.6. huius ostendimus.

PROBL. II. PROPOS. XXXI.

Dato Hyperbolæ centro Axem principalem inuenire.

EXhibeatur hyperbolęcentrum A ex præc.& facto in eo centro ducatur intra sectionem FCD arcus BED, diuisaque peripheria bifariam à centro ducatur AE. *quam lineam assero esse diametrum principalem sectionis, & axem.*



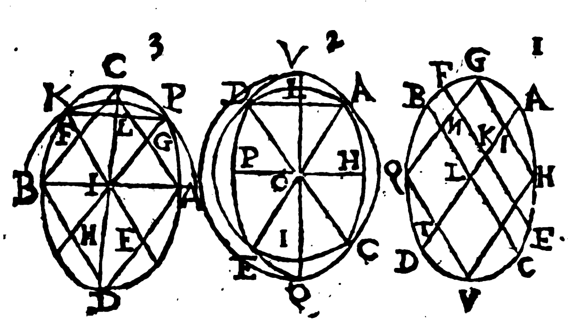
Probatur ducta BD illa à recta AE in F diuidetur bifariam, & ad angulos rectos ex propos.27. El.Cor.6. Cùm ergo BFD secta sit bifariam, & normaliter à linea AE, quæ transeat per centrum A, hæc linea erit diameter principalis.

PROBL. III. PROPOS. XXXII.

In Ellipsi diametrorum quamlibet coniungationem inuenire.

SIt Ellipsis ABCD fig. 1. in qua ducatur aliqua HG, & alia illi parallela EF, quæ diuidantur bifariam in I, & K, ducaturque per illa puncta recta AD, & erit vna diameter. Deinde diuidatur bifariam AD in L, & ducatur parallela CB eisdem EF, vel GH, eritque CB altera diameter coniungata.

Ad quod ostendendum interuallo LI ducatur applicata à puncto T, & fit TQ, & TV; conectanturque GQ, & HV, & Dico NG, & NQ esse applicatas, & ęquales, & ideo CB transiens per centrum, & bifariam diuidens applicatas esse quoque diametrum.



Probatur. Quoniam AD est diameter, erit, vt AID rectangulum ad ATD rectangulum, sic TQ quadratum ad IG quadratum; sed rectangula ex effectione sunt æqualia; quia fecimus LT æqualem LI; Vnde, & IA æquabitur TD; Ergo quadrata lateraq; IG, & TQ erunt æqualia, vnde QG erit parallela axi AD; sed, & TQ, & IG sunt parallelæ ex effectione. Ergo NG, & NQ erunt æquales lineis LT, & LI æqualibus; Ergo, & inter se: quare erunt applicatæ, & CB diameter coniugata.

COROLLARIVM I.

HInc data diametro quacumque ei inuenies coniungatam diametrum,& applicatas: Sit enim data diameter CB; duc ei parallelam HG, quas diuides bifariam in I,& L, & per ea ages rectã AD, quę erit diameter coniugata, huic verò duc parallelas quascumq; vt GQ, & erunt applicatæ diametro CB.

COROLLARIVM II.

HInc eruitur, quomodo data Ellipsi in ea centrum inueniatur, ducatur enim, vt cumque HG, & ei parallela FE, quas diuides bifariam, & ages per ea puncta lineam AD. Nam cum sit diameter, in illa erit centrum; diuidatur itaquę bifariam in L, & DL erit Ellipsis centrum.

THEOR. IV. PROPOS. XXXIII.

Diametros principales coniugatas in Ellipsi exquirere.

DEtur Ellipsis VPQH in fig.2.& centro ex superiori Cor. reperto O, ducatur circulus, qui eã secet in quatuor aliquibus pũctis, vt A,D,C,E. Diuidatur itaque AD circumferentia bifariam, & item CE, necnon, & ED, & AC; perque puncta diuisionum ducantur rectę, PH,& VQ,& erunt axes.

Probatur. Nam habent duas conditiones, quæ ad axes requiruntur prima; quòd sint sibi inuicem perpendiculares, secundà, quod vna sit maxima altera minima omnium diametrorum, quæ in Ellipsi duci possunt.

Quod autem sint sibi perpendiculares ducantur diametri AE, & CD, eritque ADE semicirculus, & DEC talis quoque, ablata itaque communi circumferentia DE, erunt æquales arcus AD, & CE, qui diuisi bifariam erunt semiarcus EQ, & LD æquales arcui AD, quibus additis arcui ED erit LDEQ semicirculus, & ideo LQ transibit per centrum. Et quia DE peripheria secta est per medium ex effectione; additis æqualibus erit quoque LDEI secta per medium. Vnde OP erit perpendicularis, vtpote à medio arcus DE, & ideo LDEI ducta. Patet autem, quod etiam AD, & CE sunt diuisæ bifariam, & ad angulos rectos ex Coroll.6. prop.27.lib.3. Elem. Vnde erunt applicatæ orthogonales.

Quod verò VQ sit maxima patet. Nam CA,& DE puncta æqualiter distant à centro, vtpote puncta quoq; peripheriæ, ergo punctũ Q, & V mediũ inter ista, & extimum circulo, erit maximè remotum, & de punctis H,& P contrarium dicas.

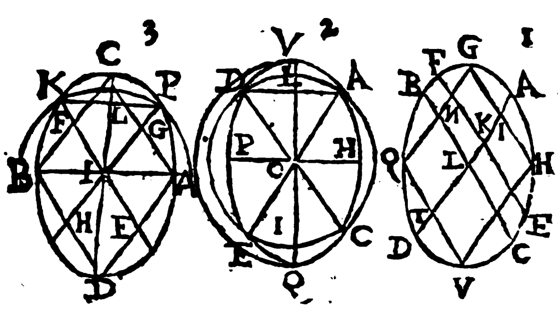
Quod autem punctũ medium V,& Q, sit maximè remotum, patet. Nam circulus per eorum extrema ductus non secat Ellipsim, sed comprehendit, & tangit in V, & Q; vnde omnes alij circuli eo minores secabunt, quare ad puncta sectionum ductæ semper minores erunt radio VQ circuli tangentis, vt sunt OD, & OA.

PROBL. V. PROPOS. XXXIV.

In Ellipsi diametros coniugatas æquales, inuenire.

REpertis axibus CD,& BA coniungantur eorum extrema rectis AC,& CB; sicut, & AD, & DB in fig.3. quæ diuidantur bifariam,& per ea puncta rectæ transeãt GH, EF. Dico *has lineas esse diametros coniungatas, & æquales.*

Nam, quod sint æquales patet; Quoniã in triãgulis CGI,& CIF ob cõmune latus CI,& ęqualia crura CG, & CF, & angulos apud C æquales, vtpote rectangulorum quoque AIC, & CIB crus IB, & IA æquale,& IC commune habentium erunt ex 22. lib.1. Elem. æquales anguli PIC, & KIC, quare cũ angulos æquales cõprehẽdãt IK,& IP diametri, ęqualiter remouebũtur ab axe,& ideo erũt æquales. Nam si tales nõ sunt, sit minor IF,& producatur, vt sit æqualis IK, ducatur arcus PK, & subtensa PK, quia ergo angulus PIC ęquatur angulo CIK erit sinus PL æqualis sinui LK; sed PL est applicata, & ad eundem angulum rectum, cum P sit in ambitu ellipsis, ergo etiam KL, quare K erit etiam punctum Ellipsis, non ergo terminabit IK in Ellipsim in F infra K; quare non erit minor, quam IK, & ideo, nec minor, quàm IP.



Quod verò sint diametri coniugatę patet; Nam ob æqualia triangula CIA, & BID bases AC, & DB æquantur,& sunt parallelę: quare etiam medietates. Cum ergo BG,& AD, coniungant æquales, & parallelas, & ipsę parallelæ sunt, sunt autem AG, & GC æquales ex effectione sicut CF, & FB; Ergo etiam BH,& HD, necnon ED,& EA. Vnde cum bissecent GC, & GA & BH, HD, sic BF,FC, & AE,FD parallelas, & æquales, KE, & PH erunt diametri.

THEOR. V. PROPOS. XXXV.

Applicatarum ad diametros coniugas æquales quadrata sunt æqualia rectangulis ex diametri portionibus.

SIt diameter coniugata in fig.1. BC ęqualis alteri AD. Dico *quadratum applicatæ* GN *esse æquale* rectangulo BN, & NC.

Probatur BL,& LC rectangulum, seu quadratum æquatur quadrato applicatæ LA, quę est dimidium alterius diametri, sed vt rectangulum BL,& LC ad rectangulum BN, & NC ex 6. huius, ita est quadratum LA ad quadratum GN; & ideo *permutando*, vt rectangulum BL,& LC ad quadratum LA, sic BN, & NC rectangulum ad quadratum GN, sed rectangulum

BL,

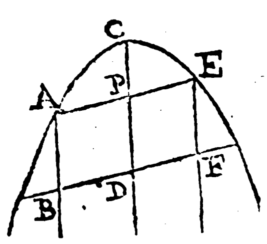
IL, LC, vt dixi æquatur quadrato LA. Ergo etiam rectangulum BN, & NC æquabitur quadrato GN ex 12.lib.5.elem.

PROB. VI. PROPOS. XXXVI.

Data diametro coniugata alteri in Parabola applicatas ponere, & à dato puncto in ea diametrum ducere.

SIt data diameter aliqua coniungata, vt DC, cui applicatas oporteat ponere: Ducatur ipsi CD parallela diameter AB, & altera æquidistãs BF, & in puncto E, quo secat Parabolam ab A ducatur AE dico esse applicatam diametro C.

Patet quia ob æquidistantiam diametrorũ AB, & EF á CD erunt æquales AP, & PE, vt patet. Sit deinde assignatum pũctũ A, à quo oporteat diametrum ducere; ducta ab eo puncto quauis AE, & ei parallela BF, diuidantur bifariam in D, & P, & ducatur diameter DC per P, D, cui ponatur æquidistans AB, quę ex prop. 27. huius diameter erit.



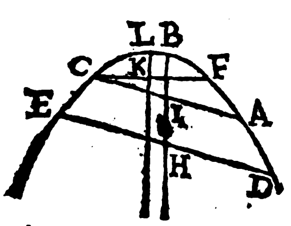
PROBL. VII. PROPOS. XXXVII.

Diametrum coniugatam in Parabola, & axem inuenire.

DEtur Parabola ABC, & duæ parallelæ quæcumque ducantur AC, & DE; diuidanturque per medium, & ducatur HIB, & hæc erit diameter quæcumque ex defin. 11. h.

Deinde huic BH perpendicularis ducatur FC à puncto C, diuidaturq; bifariam in K, & LK erit axis.

Nam quod sit diameter patet, eo quòd sit parallela diametro BI, quod autem sit axis constat; quia applicatæ FC, vtpote bifariam diuisæ incidit ad angulos rectos, qood sit æquidistans ipsi BI.



EXPENSIO VIII.

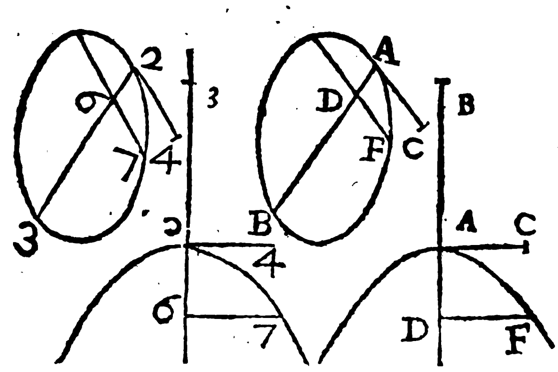
De sectionum æqualitate.

ANteqnam perueniamus ad sectionum descriptiones explicandas visum est tractationem generalem, quæ omnibus sectionibus conuenit expedire, & simul quoque eas comparare; vt sciamus, quæ descriptio alteri deseruire possit, & quæ non possit.

THEOR. I. PROPOS. XXXVIII.

Si binæ Hyperbolæ, seu Ellipses, æquales habeant Parametros axibus transuersis æqualibus applicatas, æquales erunt inuicem.

SInt binæ Hyperbolæ, vel binæ Ellipses FA, & 27, quarum æquales sint diametri transuersæ BA, & 23, & parametri eundem angulum cum diametro facientes, & æquales inuicem CA, & 24. Dico Hyperbolas, vel Ellipses esse inuicem ęquales.



Probatur. Nam sumantur æquales diametrorum portiones ad libitum, vt DB, & 3, 6, ex quibus ducantur applicatæ FD, & 6, 7. demonstrabitur enim has futuras ęquales, & pari ratione si alię, & alię portiones sumantur diametrorum, à quibus applicatę ducantur, semper ostendetur eas esse tum in vna, tum in altera æquales, ergo sectiones ipsæ ęquales erunt, cum superpositæ, quod vult definitio 15.h. vt conuenirent applicatæ applicatis, ita, & sectiones sectionibus.

Ostenditur verò assumptum, nempe FD, & 6.7. futuras æquales. Nam ex 8.h.Cor.2. vt est BA transuersa diameter ad AC parametrum, ita est DF quadratũ ad rectangulum AD, DB. Item in alia sectione, vt est 2 3 trãsuersa diameter ad 2 4 parametrũ, ita est quadratũ applicatæ 6 7 ad rectãgulũ ex 6 2, & 3 6 effectum; sed vt est AB ad CA, ita est 2 3 ad 2 4 ob earũ æqualitatẽ ex Thesi. Ergo, vt est rectangulum AD, & DB ad rectangulum 2 6, & 6 3 ita est quadratum DF ad quadratum 6 7: sed rectangula sunt æqualia ob æqualia latera AD ad 6 2, & BD ad 6 3 ex Thesi ob ęquales axes transuersas. Ergo, & quadrata erunt ęqualia ex FD, & 6 7: quare, & latera eorum DF, & 6 7 erunt æqualia.

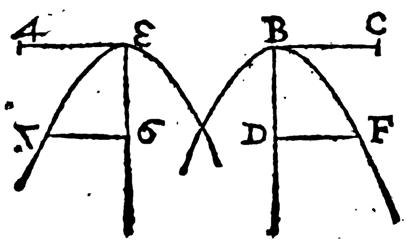
THEOR. II. PROPOS. XXXIX.

Si sint binæ parabolæ, quæ parametros æquales habeant, & in æqualibus angulis ad diametros applicatas Parabolæ erunt inuicem æquales.

SInt Parabolę BF, & 3 7. Dico, quod si parametri BC, & 3 4 sint æquales, & in ęquali angulo applicatæ, Parabolas futuras ęquales.

Sumantur ęquales diametrorum portiones ad libitum BD, & 3 6, à quibus applicatę ducantur DF, & 6 7, probabitur de istis, sicut, & de omnibus alijs, quod sint inuicem ęquales. Vnde necesse erit, quod linea parabolica per eadem puncta

cta in vtraque transeat. Ex Theor. 1. exp. 2. constat quadratum FD, esse ęquale rectangulo diametro intercepta DB, & parametro contento.



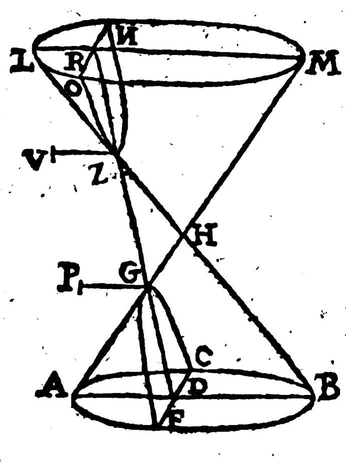
Rectangula autem, tum vnius, tum alterius parabolę sunt ęqualia ob ęqualem parametrum BC, & 3 4, & æqualem interceptam BD, & 3 6 ex constructione. Ergo, & quadrata ęqualia; nempe quadratum ex FD quadrato ex 6 7; quare, & ipsorum latera erunt ęqualia FD, & 6 7, & hinc Parabolę ipsę erunt ęquales, cum super positę, vt patet, vt conuenirent applicatę applicatis, ita, & parabolę parabolis. quę per extrema applicatarum ducerentur, vt vult def. 15. h.

THEOR. III. PROPOS. XL.

Hyperbolicæ sectiones, quæ fiunt in duobus conis ad verticem, quorum bases parallelæ, ab eodem plano, habent æqualem transuersam diametrum, & æquidistantem, & eandem parametrum.

SIt conus LHM positus ad verticem alteri AHB, transeatque per vtrosque idem planum ONFC, quod faciat in eo sectiones Hyperbolicas OZN, & FGC, sintque conorum bases inuicem parallelę; nempe LNMO, & ACBF, dico has Hyperbolas habere eandem transuersam diametrum CZ, & ęqualem parametrum, & ęquidistantem alteri parametro, & inuicem sectiones esse ęquales.

Probatur. Nam triangula AGD, & GMR sunt ęquiangula, cum sint ad verticem, & inter parallela LM, & AB sicut, & triangula DZB, & LZR. Vnde obtinebunt latera proportionalia, & propter hoc eam proportionem, quam dicet BD ad DZ, eandem dicent LR ad RZ, & in alijs triangulis RMG, & AGD eam proportionem, quā dicit AD ad DG eādem quoq; dicet MR ad RG. Quare ex eis poteris componere rectangulum accipiendo duas antecedentes prò vno parallelogrammo, & duas sequentes pro alio, vt ex propos. 22. lib. 6. Eucl. colligitur; Igitur ex BD, & AD antecedentibus componatur rectangulum dicet eam proportionem ad rectangulum cōpositum ex DZ, & DG consequentibus, quam rectangulum compositum ex MR, & RL antecedentibus ad rectangulum ex consequentibus RZ, & RG quemadmodum hic vides.



Crus	BD	ad	DZ	est vt	AD	ad	DG
Sic	RL	ad	RZ	vt	RM	ad	GR.

Ergo, vt compositum ad compositum.

	BD	&	AD		DZ	&	DG
Sic	RL,	&	RM	erit ad	RZ,	&	GR.

Progr. 2. Sed rectangulum ex AD, DB est æquale quadrato ex applicata FD, & rectangulum ex MR, & RL quadrato applicatę RO: Ergo quadratum RO habet eam proportionem ipsam ad rectangulum ex GR, & RZ, quam quadratum FD habet ad rectangulum ex DZ, & DG.

Progr. 3. Sed horum quadratorum ad hęc rectangula proportio est illa, quā habet ad diametrū transuersam ZG parameter PG, ergo erit eadem proportio prorsus parametri VZ ad transuersam diametrum GZ, ac ad eandem diametrum GZ parametri PG, siquidem huius parametri PG est ex 8. h. Cor. 2. eadē quam habet quadratum FD ad rectāgulum ZD, & DG, quæ probata est eadem cum illa, quam possidet quadratum OR ad rectangulum GR, & RZ, quę est rursus ex prop. 8. h. Cor. 2. eadem, quam habet parameter VZ ad diametrum transuersam ZG.

Cum itaq; eidē diametro trāsuersę ZG eandē dicant proportionem parameter, PG, & VZ ex 7. lib. 5. Eucl. erunt ęquales parametri. Paralleli quoque sunt ob parallelas OR. & FD; cui parametri ęquidistant; siquidem sunt parallelę; quia sunt in basibus parallelis LNMO, & ACBF; Et eis parametri ęquidistant, quod fint contiguę diametri, vt habetur ex prop. 8. huius.

Probatur autem, quod vna sectio alteri sit eadem ex pręc. quia habent parametros ęquales in ęqualibus angulis, vtpote perpendiculares diametro RD, & diametrum transuersam eandem.

COROLLARIVM.

COlligitur hinc oppositarum Hyperbolarum idem esse commune centrum, & communes omnes transuersas diametros, axem quoque communem, communesque vmbelicos, quia erit ad axem transuersam factum rectangulum, (vt docuimus prop. 23. h.) ęquale quartę parti rectangulo sub axe transuersa, & parametro conclusi, tum vnius, tum alterius sectionis.

EXPENSIO IX.

De parallelis ad diametrum sectionis à vertice coni ductis.

PArabola diametro nulla potest esse parallela ducta à vertice coni, quia incidit in ipsam superficiem coni. Vnde cum non secet basim, nec rectangulum à segmentis diametri basis factum eius quadrato comparari potest.

Quarè portione cruris trianguli per axem, & diametro parabolico rectangulum constitutum, rectangulo segmentorum, quę diameter parabolicus facit in diametro basis trianguli per axem, comparabimus.

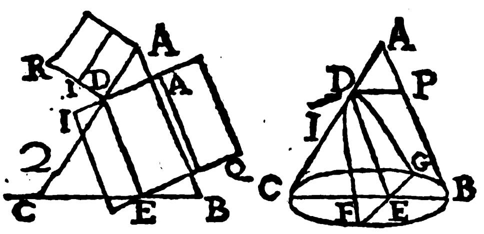
THEOR.

THEOR. I. PROPOS. XLI.

Rectangulum ex basis portionibus est ad rectangulum ex diametro, et intercepta inter verticē coni, & verticē sectionis trianguli per axem, vt Parameter ad eā interceptam.

Sit Conus BAC idem in vtraque figura, in quo parabola GDF, cuius diameter ED, & applicata EF, intercepta portio crucis trianguli per axem AD, & parameter DI. Dico, quòd *rectangulum ex* EB, & EC *est ad rectangulum ex* ED, & DA, *vt* DI *ad* DA.

Quadrato ex FE applicatæ, ideo rectangulo BE, & EC ex 5. huius est æquale rectangulum ex ED, & DI, & ideo ex prop. 22. El. lib. 6. Cor. quadratum DQ ex ED prima erit ad quadratum ex EF secunda, vt ED prima ad tertiam proportionalem DI.



Sed rectangulum ex ED, & AD dicit eam proportionem ad rectangulum ex AD, & DI, quam ED ad DI ob eandem altitudinem AD. Ergo quadratum DQ ex DE dicit eam proportionē ad quadratum EF, vel rectangulum ei æquale BE, & EC; quam ADE rectangulum ad IDA rectangulum, quod sint, vt ED ad DI ex 16. lib. 5. Ergo *permutando* quadratum ex DE erit ad ADE rectangulum eiusdem basis DE, vt rectangulum BE, EC ad rectangulum ex DA, & DI.

Verùm, vt quadratum ex ED ad rectangulum ex AD, & DE, ita est idem rectangulum ex AD, & DE ad quadratum AR ex DA ob eandem altitudinem ED, & AD.

Rectangulum itaque ex BE, & EC erit ad rectangulum DA, & DI ex 16. lib. 5. vt ADE rectangulum ad AR quadratū ex AD, & *permutando* Rectāgulū ex BE, & EC erit ad rectangulum AD, & DE, vt AD, & DI rectangulum ad DA quadratum, idest ob eandem altitudinem, vt ID ad AD.

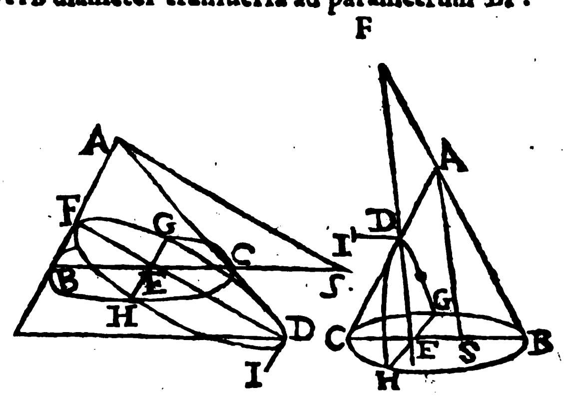
COROLLARIVM.

Colligitur esse quoque proportionem BC quadrati ad CA, & BA rectangulum, vt DI ad DA. Quoniam rectanguli BE, & EC proportio ad rectangulum DA, & DE est composita ex proportione BE, idest DP ad DA, eademque ob triangulorum similitudinem ex 4. lib. 6. CB ad CA, & ex proportione EC ad DE, idest CB ad BA; quare rursus componendo rectangulum CB, & CB, idest quadratum CB erit ad rectangulum CA, BA, vt ID ad DA.

THEOR. II. PROPOS. XLII.

Si Conus per axem sectus sit, & ei triangulari sectioni sit normalis Ellipsis, vel Hyperbola, quarum diametro acta sit parallela à vertice coni, quadratum huius parallelæ est ad rectangulū ex interceptis basis partibus factū, vt trāsuersæ diametri portio intercepta ad parametrū contiguū.

Sit Conus ABC sectus triangulo ABC per axem, sitque sectio Hyperbolica, vel Elliptica GDH normalis ipsi plano triangulari, cuius diametro FD ducta sit parallela AS. Dico, quod si fiat quadratum ex ipsa AS habebit eam proportionem ad rectangulum ex diametri baseos portionibus interceptis SC, & SB in hyperbola BC, & SC in Ellipsi, vt FD diameter transuersa ad parametrum DI.



Præassumpt. Aduertendum est Quadratum applicatæ EG ex 35. lib. 5. Elem. esse æquale quadrangulo ex segmentis diametri conici BE, & EC; Et transuersam diametrum FD esse ad Parametrum DI sicut rectangulum FE, ED ad quadratū EH applicatę ex prop. 8. h. Cor. 2. Tandem considerandę sunt lineæ in sectionibus, quæ proportionem dicunt. Nam vt FE ad EB ita AS ad SB ob parallelas AS, & FE in triangulo BFE, & BAS ex 4. lib. 6. Deinde vt ED ad EC, ita AS ad SC ob parallelas AS, & DE in triangulis ASC, & CED, in Ellipsi ad verticem.

Quare poterimus conficere duo rectangula ex istis proportionibus composita, vt vides.

FE	vt	AS	&	DE,	vt	AS
ad		ad		ad		ad
EB		SB		EC		CS

Ergo compositum erit, vt compositum.

FE	&	DE	AS,	&	AS
	ad			ad	
EB	&	EC	SB,	&	CS

Assumendo simul fundamenta, quæ non referuntur FE, & DE, & comparando ad suos terminos simul, quæ proportio erit eadem, quæ AS ad AS suos terminos collata quo supposito.

Probatur. Rectangulum ex EF, & ED est ad rectangulum EB, & EC, vt quadratum ex AS ad rectangulum ex BS, & SC. Sed rectangulum FE, & ED ad quadratum HE, hoc est ad rectangulum ęquale ex prop. 35. lib. 3. Elem. CE, EB refertur, vt diameter transuersa ad parametrum FD ex Cor. prop. 8. huius. Ergo quadratum AS erit ad rectangulum BS, & SC, vt diameter transuersa FD ad parametrum ID.

EX-

EXPENSIO X.

De Asymptoto Hyperbolarum proprietate.

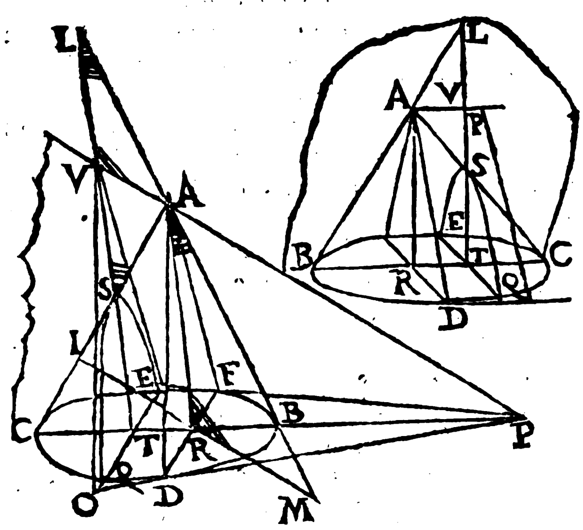
Triangulum quoddam ambit Hyperbolam, cuius latera singularem ipsi analogiam possident, estque formatum à duorum planorum conum tangentium intersectione, quam cum Hyperbolæ plano extra conum extenso efficiunt, nec huius trianguli inutilis contemplatio, vt ea, quę descriptioni hyperbolarum optimè deseruit.

THEOR. I. PROP. XLIII.

Sint duo plana, alterum, quod conum tangat, alterum, quod illum secet in contactu, & per verticem etiam transeat, & huic secanti Hyperbola sit æquidistans diameter transuersa Hyperbolica à tangente plano in centro secabitur.

DVos casus hęc propositio habet, nam planum contingens conum potest secare planum per verticem secando rectangulè, vel non rectangulè.

Sit ergo primus casus, in quo planum tangens sit ADPQ, quod tangat conum BAC secundùm lineam AD; cui occurrat, secetque aliud planum ductum per verticem A, quod sit ADR, in ipsa linea contactus AD, huic plano FAD ęquidistet Hyperbola EQS. Dico, *quod eius diameter transuersa* TL *secabitur ab hoc plano tangente* DAPQ *in centro* V.



Probatur. Nam primo, quòd secet clarum est. Siquidem, si planum BLC interminatum per vtrosque axes AR coni, & TVL Hyperbolæ rectangulum ad eorum plana ducatur. Hoc vtique secabitur à plano tangente DAPQ. Ergo etiam secabit diametrum TVL in illo plano descriptum: Quòd autem à plano tangente DAPQ secetur planum ductum per axes BLC patet; quia planum contingens ADPQ occurret vertici coni in A, & eius axi, ergò necessariò secabit planum per eundem verticem ductum BLC; in quo est vertex etiam, & axis RA.

Quod verò punctum V, sit centrum in quo secat diametrum Hyperbolicum planum contingens ADQP.

Probatur. Nam cum planum ADQP sit rectangulè ad planum per verticem ductum RAD ex hypothesi, cui etiam est rectangulum planum interminatum ductum per verticem; proptereaque plana hæc perpendicularia plano RAD, quare, & eorum communis sectio AP, cui etiam plano RAD perpendiculare est planum coni basis BFCD. Ergo ex propos. 16. tract. 22. & eius communis sectio RC cum interminato BLC est perpedicularis; Quare ex prop. 7. tract. 22. AP, & RC, cum sint eidem plano perpendiculares erunt parallelæ. Cùm itaque AL crus incidat in parallelas AR, & LT angulus L internus angulo BAR externo erit æqualis ex 30. lib. 1. Eucl. Quare, cum sint rectangula BRA, & AVL triangula erunt quoque similia. Nam reliquus angulus reliquo erit æqualis, ita dicendum de triangulo AVS, cuius angulus ASV alterno SAR est ęqualis, & hinc est similis triãgulo RAC; Radius autem BR ęquatur RC ex cor. pr. 11. h.

Probatur itaque assumptum ostendendo SV, & VL eidem AV eandem dicere proportionem, & ideo ex 7. lib. 5. Eucl. esse inuicem ęquales.

Nam, vt BR ad RA, ita est ob similitudinem triangulorum AV ad VL. Item quam proportionẽ dicit BR, idest RC ad RA eandẽ dicit AV ad VS. Ergo LV, & SV ipsis AV eandem dicit proportionẽ, quam BR ad RA, & propter hoc erunt æquales; quaderè V erit centrum Hyperboles.

Sit iam secundus casus, in quo planum PADOV tangens conum secundùm lineam AD non se secat cum plano FAD rectangulè; dico *adhuc* V *centrum esse Hyperboles*.

Probatur. Nam tracta MI parallela PV, iam clarum est, quòd secabitur diameter Hyperbolicus à plano PVC, quod transit per AR coni, & axe TVL hyperboles, quod verò sessecet cum plano PVC patet, quia in P, & A cum illo concurrit.

Quod verò V sit centrum demonstratur, quòd sint æquales SV, & VL, eo quia eidem AV eandem dicant proportionem.

Siquidem MR, & RI sunt æquales, vt probabitur: Sed ob parallelas AR, & LT in triangulo LMI ita se habet MR ad AR, vt AV ad VL ob similitudinem triangulorum LAV, & MRA, vt infra ostendam. Rursus eadem VA se habet ad VS, vt RI, idest æqualis MR, vt ostendam, ad RA ob similia triangula AVS, & AIR. Vnde cum eadem VA eisdem SV, & LV eandem dicat proportionem RM ad RA ipsę SV, & LV erunt inuicem æquales.

Sunt autem similia triangula ARI, & SAV, quòd angulus S internus niger sit æqualis angulo SAR externo inter parallelas RA, LT, & angulus SVA alterno VAL sit æqualis, idest angulo ARI, & hinc reliquus reliquo. Sic, & triangula LAV, & MRA sunt similia; quòd angulus niger L sit æqualis angulo nigro A ob parallelas RA, & LT, & angulus V, & R nigri sunt æquales ob parallelas MI, & PV.

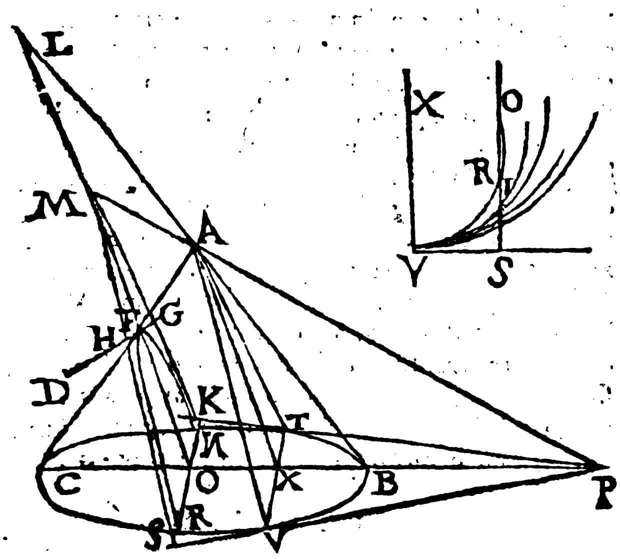
Probatur modo MR, & RI sint in linea MI æquales portiones. Nam ex propos. 23. Tract. 15. ita se habet CR ad BR, vt CP ad BP. Quamobrem etiam permutando, vt CR ad CP, ita erit BR ad BP; Sed in triangulo PAC, vt CR ad CP, ita RI ad PA ob parallelas PA, & RI, vt ex Coroll. propos. 4. lib. 6. Eucl. & vt BR: ad BP; ita RM ad PA, eò quòd triangula sint ad verticem inter parallelas PA, & MR; Ergo eidem PA lineæ RI, & MR eandem dicunt proportionem, quam CR ad CB, vel quæ eadem BR ad PB: quare sunt æquales.

THEOR.

THEOR. II. PROPOS. XLIV.

Si planum aliquod contingat conum, & illud duo plana secent, alterum triangulare ductum per verticem coni in ipso contactu secans planum contingens, aliud Hyperbolicum æquidistans à triangulo; sectio hæc contingentis, & Hyperbolici plani accedet semper ad Hyperbolem, sed nunquam eam continget.

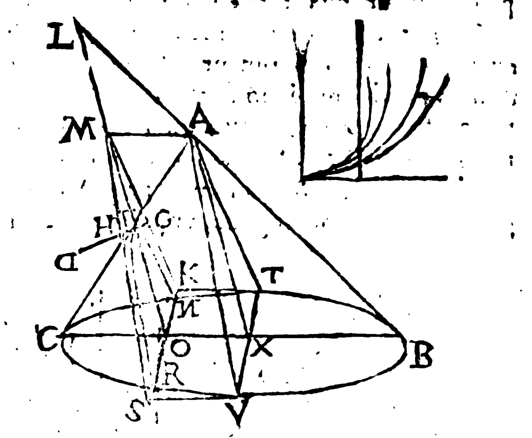
SIt ABC conus, & planum contingens AVMS in in linea VA, siue normaliter ad XV, siue non, quod secetur à duobus planis; primum ductum sit per verticem, vt TAV secans contingens illud VAMS in linea contactus AV; aliud æquidistans KMS, in quo Hyperbola NFR. Dico, quòd sectio huius plani Hyperbolici cum plano contingente AVMS facit sectionem MS, cui Hyperboles crus FR semper accedet; sed numquam tanget, quantumlibet producantur.



* Probatur primò, quòd nunquam tangat; sunt enim plana secantia triangulare TAV, & Hyperbolicum KMS æquidistantia: Ergo VA, & MS sectiones ipsorum in plano contingente AVMS æquidistabunt, quare nunquam conuenient: Sed planum contingens VAMS tangit in linea AV solummodo; ergo numquam tanget MS superficiem coni quantumlibet producantur, & planum contingens, & conus. Ergo neque tanget Hyperbolã RF, quæ in superficie coni reperitur, & idem dicendum de plano ad alteram partem contingente TAMK, vt patet.

* Quòd verò semper accedat ostenditur. Quia quælibet portio circuli inter duas parallelas intercepta, nempe VX ductam ad contactum V, & alteram parallelam OS in altera figura semper magis accedit ad contingentem VS, quò maior est circulus, & portiones SR parallelæ OS interceptę inter peripheriam, & tangentem sunt semper minores, vt est minor IS, quàm RS.

Sed quò magis conus producitur, eò magis circulus basis fit maior, ergo minor erit distantia inter contingẽtem VS, & peripheriã VR illius inter plana parallela TAV, & KMS interceptã, qualis est RS; distantia enim sectionum TV, & KR semper



erit eadem productis planis TAV, & KMS parallelis sed circuli bases coni semper maiores; vnde, & distantia RS semper minor.

Dicentur verò sectio SM, & MK Asymptoti.

THEOR. III. PROPOS. XLV.

Quæ à vertice sectionis ad vnam, seu aliam Asymptotum recta ducetur linea parallela ordinatim applicatæ, hæc poterit describere quadratum æquale quartæ parti figuræ contentæ à diametro transuersa, & parametro.

SInt eadem fig. quę priùs, & ab F vertice Hyperboles ducatur FH, vsque ad Asymptotum MS, vel FG vsq; ad Asymptotum MK, parallela sectioni KS basis BKRC cum plano KMS. Sitque sectionis parameter, seu cofficiens latus FD.

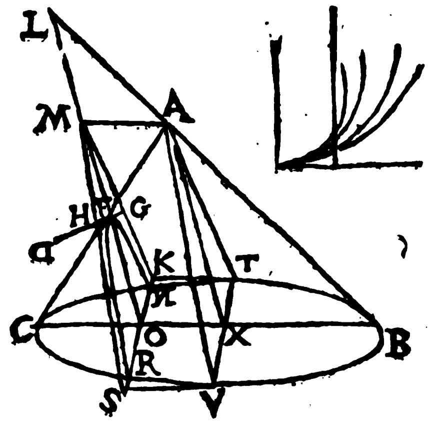
Dico rectã FG, seu FH constituere quadratum æquale quartæ parti figuræ, quam constituit LF diameter transuersa, & parameter FD.

Progress. 1. Probatur. Quadratum constitutum ex MF est quarta pars quadrati constituti ex LF, cum sit latus eius FM, dimidium lateris LF. Ergo etiam quadratum ex FH quarta pars rectanguli ex LF diametro, transuersa, & FD Parametro.

Progr. 2. Probatur conseq. Nam sicut se habet quadratum ex LF ad rectangulum ex LF, & FD ita se gerit quadratum MF; vt probabitur in 3. progress. ad FH quadratum, & sic se debet gerere quarta pars quadrati FL ad quartam partem rectanguli ex LF, & FD ex 18. lib. 5. Elem. Sed Quadra. ex FM est quarta pars quadrati ex FL descripti, vt dictum est. Ergo etiam quadratum ex FH erit quarta pars rectanguli ex LF diametro transuersa, & parametro FD descripti.

Progress. 3. Remanet itaque probandum quadratum MF esse ad quadratum HF, vt quadratum ex LF ad rectangulum ex LF, & FD. Nam cum sint super eamdem basim FL, erunt vnum ad aliud, vt altitudines, nempe altitudo quadrati, quæ est LF ad altitudinem rectanguli, quæ est FD, nempe, vt diameter trãsuersa ad parametrum; Sed ex prop. 42. huius, vt est diameter transuersa ad parametrum, ita est quadratum ex AX ad rectangulum ex CX, & XB, vel quod ei æquale ex 35. lib. 3. Eucl. ad quadratum ex XV. Sed, vt quadratum AX ad quadratum XV, tale quoque ob similitudinem triangulorum XAV, & OMS, & MFH reperitur MO quadratum ad quadratum OS, & quadratum FM ad quadratũ FH. Ergo ex 16. l. 5. el. erit eadem proportio quadrati FL ad rectangulum LF, & FD diametri transuersæ, ad parametrum primo proposita, ac quadrati FM ad quadratum FH.

Quod verò triangula sint æquiangula patet, quia ex parallelis conficiuntur. Nam AX, & MO existentes in eodem plano sunt parallelæ, sic, & XV, & OR, sicut, & VA, & SM; quia efficiuntur à planis parallelis ATV, & MXS secantibus planum BAC secans per axem, & planum BCTV basim Coni, & planum AVMS contingens, vt patet pr.14. Tr.22.



COROLLARIVM.

Elicitur quadratum MF dimidiæ transuersæ diametri ad quadratum FH esse, vt diameter LF ad parametrum FD; quia ex prog.3. est, vt quadratum ex LF ad rectangulum ex LF diametro, & FD parametro. Hoc autem quadratum ex LF est ad rectangulum ex LF, & FD ob eandem altitudinem FL, vt diameter ad parametrum, vnde etiam talis erit proportio quadrati MF ad quadratum FH.

THEOR. VI. PROPOS. XLVI.

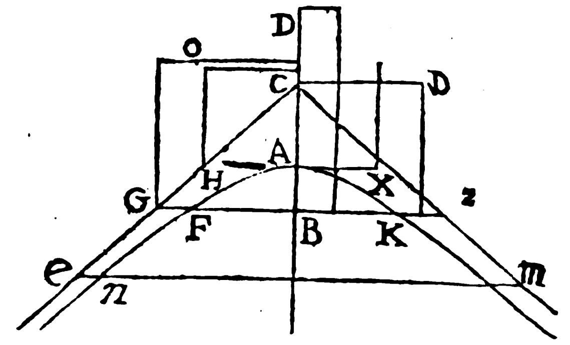
Si in Hyperbola applicata producatur vsq; ad Asymptotum hinc, & inde, erit rectangulum factum ex vna portione inter figuram, & Asymptotum intercepta, & ex tota reliqua vsque ad Asymptotum æquale quartæ parti figuræ à transuersa Diametro, & Parametro comprehensæ.

Sit Hyperbola FAK, cuius asymptoti CG, CZ, centrum C, cuius contingens verticem vsque ad Asymptotum AH, sitque applicata producta extra sectionem vsque ad Asymptotum in Z, & G. Dico, quòd si fiat rectangulum ex interclusa inter sectionem, & Asymptotum FG pro vno latere, & ex reliqua ZF pro alio; hoc erit æquale quartæ parti figuræ, quæ sub transuersa diametro AD, & parametro comprehendatur.

Probatur autem. Quia quadratum ex AH, vt ex præcedenti, est æquale quartæ parti figuræ, quæ ex parametro, & diametro transuersa comprehenditur. Sed huic quadrato est æquale rectangulum ex ZF, & FG, ergo hoc rectangulum est æquale quartæ parti figuræ, quæ à diametro transuersa, & parametro concluditur.

Sunt autem quadratum AH, & rectangulum ZF, & FG æqualia, quod eidem AC quadrato eandem dicant proportionem.

Nam ex prop.6.Cor.2.h.vt diameter transuersa ad parametrum proportione respondet, sic rectangulum ex DB, & BA ad quadratum ex BF proportionem dicit, & eandem proportionem dicit quoque ex præced. Coroll. quadratum CA ad quadratum AH, & ex eadem prop. eius progr.3. quadratum CB ad quadratum BG.



Debes autem antequam progrediamur aduertere, rectangulum DB, & BA esse æquale BXD gnomoni, & rectangulum ZF, & FG gnomoni, quid remaneret ablato quadrato FB à quadrato GB, vt ex se patet. Aufer ergo duo proportionalia in eadem proportione nimirũ rectãgulũ DB, & BA à quadrato BCD, aut gnomon BXD æquale illi rectangulo, & remanebit quadratum CX ex CA. Aufer quoque quadratum BF à quadrato BG, & remanebit gnomon æqualis rectangulo ex ZF, & FG, quæ etiam vtpote residua rerum dicentium eandem proportionem, ac sua tota, in quibus erant; erunt ex 22. prop. lib 5. Elem. in eadem proportione. Eritque ex AC quadratum residuum in ea proportione ad rectangulum ZF, FG, quam totum BC quadratum ad totum quadratum BG, quæ est illa ipsa, quam habebat quadratum AC ad AH quadratum. Quamobrem CA quadratũ ad quadratum AH eandem progulũportionẽ dicit, quã idẽ CA quadratũ ad rectã. ZF, & FG, itaque erunt æqualia rectangulum ZF, & FG, & quadratum AH ex 7 lib.5. Elem. Vnde hoc rectangulum ZF, & FG quartæ parti figuræ, ex diametro transuersa, & Parametro æquabitur, sicut ex præc.prop. æquatur ei quadratum AH. Et idem probabitur de rectangulo GK, & KZ, cum militet eadem ratio, cùm æquentur KZ, & FG.

COROLLARIVM.

Qvare colligas velim omnia rectangula ex ZF, & FG, & alijs parallelis, vt m n, & n e esse æqualia tum inter se, tum quadrato AH, vt patet, cùm singula fiat æqualia quadrato AH.

PROBL. I. PROPOS. XLVII.

Data cuiuscumque Hyperbolæ Asymptotos inuenire dato centro, & Parametro contigua.

Rectangulo DV Parametro, & DA transuersa diametro reperiatur quadratum æquale ex propos.14. lib.2. Eucl. & huius quadrati dimidium latus à vertice figuræ A super parametrum mensuratum dabit punctum AH, per quod à centro C transibit Asymptotus CG, & sic producta in aliam partem, quæ sit etiam æqualis ipsi AH dabit aliud punctum, per quod à centro C Asymptotus transibit CZ.

Probatur autem ex prop.45. Quia AH lineæ per quam à centro transit Asymptotus subtendit quadratum æquale parti quartę rectanguli à parametro, & diametro transuersa comprehensi. Sed hoc

hoc quadratum ex AH, vel ei æquali ad alteram partem, vtpote ex dimidio eius latere est quarta pars quadrati, quod fecimus, æquale dicto ex diametro transuersa, & parametro rectangulo; Ergo etiam huius rectanguli quarta pars erit, & consequenter erit linea, per cuius extremum à vertice sectionis à centro transibit Asymptotus, quod facere oportebat.

EXPENSIO VII.

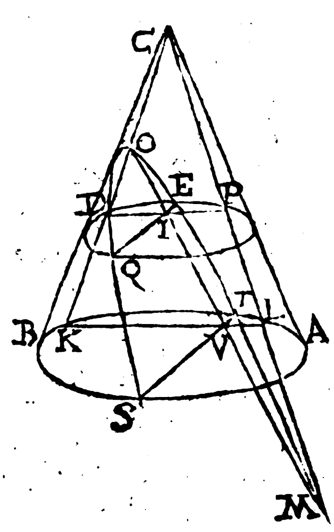
De lineis in sectionibus, vtcumque ductis applicatas, seu parallelas secantibus.

Nos hanc doctrinam faciliter trademus, cùm alij non nisi post multas præuias propositiones, à quibus dependet, tradant, & non de omnibus simul, sed de singulis, vt videre est apud Ambrosium Vincentium virum in Mathematicis admirabilem, in quo quædam etiam desumemus in sequentibus.

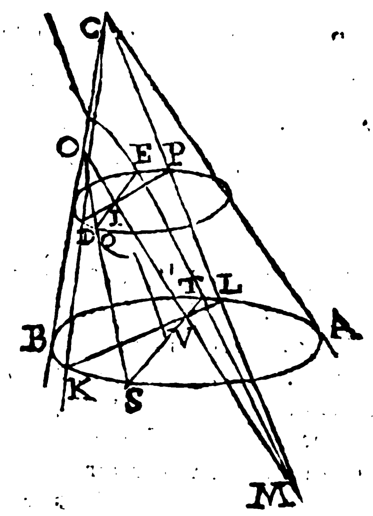
THEOR. I. PROP. XLVIII.

* *Si in sectione Conica qualibet, quæcumq; ducta secet duas parallelas in ipsa sectione, rectangulum ex segmentis illius interceptis ab vna erit ad rectangulum ex interceptis ab alia segmentis, vt rectangulum ex segmentis vnius ad rectangulum ex segmentis alterius parallelarum.*

* Sit conus ABC, & triangulum LKC à vertice descendens; at non per axem, & in sectione TOS faciat sectionem MO, sintque sectiones effectæ à circulis parallelis in illa parallelæ EQ, & TS. Dico rectangulum MV, VO lineæ OM secantis conicam figuram in O, & M esse ad rectangulum MI, IO, vt rectangulum TV, VS ad rectangulum EI, IQ parallelarum.



Probatur. Rectangulum LV, & VK ex propos. 35. lib. 3. Eucl. est æquale rectangulo TV, & VS ob eundem circulum, in quo se intersecāt; & eadem ratione PI, & ID æquatur rectangulo EI, & IQ: Sed vt PI ad LV; sic est IM ad VM, ob parallelismum in triangulo eodem IMP, & vt ID ad VK, sic OI ad VO ob parallelas in triangulo eodē KOV, ergo si cōponātur proportiones, & fiant rectangula, ita erit rectangulum ex PI, & ID ad rectangulum LV, & VK, vt IM, & OI rectangulum ad rectangulum ex MV, & VO, vt hic vides.

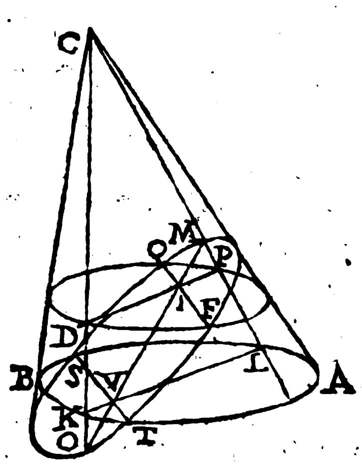


PI vt IM & ID vt OI
ad ad ad ad
LV MV VK VO

Ergo compositum, vt compositum.

PI & ID IM & OI
Erit ad compositum ad compositum.
LV & VK MV & VO

Quare etiam rectangulum EI, & IQ erit ad rectangulum TV, & VS, vt rectangulum MI, & OI ad rectangulum MV, & VO, quod erat probandum. Quod verò sectio V, g. MTOS parabolę, & MO sectio in ea, & latus trianguli MC conueniant in M patet. Nam cum sit planum TOS parabolę, cruri AC parallelum non erit parallelum cruri CM. Vnde conueniet, cum eo crure CM; sed illud est in superficie coni. Ergo conueniet cum eo in superficie coni. Sed puncta plani parabolici in superficie coni sunt ipsa linea flexa parabola. Ergo ipsa in M incidet; sed sectio MO est in plano parabolę, & in plano triāguli, cū sit eorū communis sectio. Ergo ibi debebit esse vbi planum parabolæ cruris trianguli coniungūtur in M scilicet in ipsa flexa SOTM.



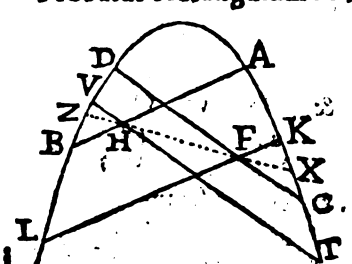
In Ellipsi patet; quia si secat latera trianguli CBA per axem; tantò magis, & reliquorum triangulorum minorum intra conum ductorum. In Hyperbola CM crus potest non conuenire cum sectionis SOTM plano, sed neque secabit Hyperbolam altero extremo M; quod requiritur in propos. Siquidem si sectio OM conueniret cum Hyperbola etiam contra Thesim cum MC conueniret; quia totius trianguli KCL, cuius sectio est, & plani Hyperbolici, tantùm crura, vtpote sectiones superficiei conicę in superficie conica sunt. Nota verò, quod sectio OM potest etiam secare axem, vt dedimus exemplum in Hyperbola.

THEOR. II. PROPOS. XLIX.

Si duæ parallelæ duas alias parallelas in qualibet conica sectione intersecent erunt rectangula segmentorum proportionalia.

SIt Parabola, vel Hyperbola, vel Ellipsis TADL parallelę in ea KL, & AB alias parallelas intersecantes TV, & CD, & per puncta intersectionum F, & H ducatur XZ. Dico, quod rectangulum AH, & HB erit ad rectangulum ex KF, & FL, vt rectangulum TH, & VH ad rectangulum CF, & FD.

Probatur rectangulum AH, & HB ad rectangulum KF, & FL erit ex præced. vt rectangulum HZ, & HX ad rectangulũ ZF, & FX. Verùm vt ZH, & XH rectangulum ad ZF, & FX rectangulum



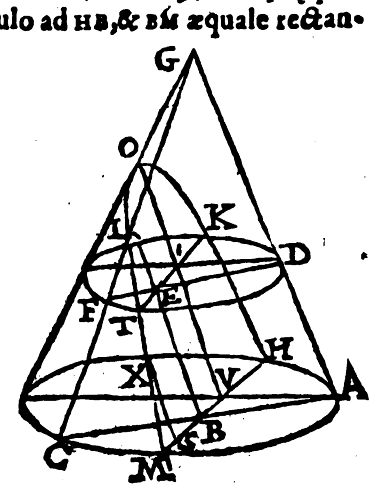
ta est quoque ex præc. TH HV rectangulum ad CF, & FD rectãgulũ, ergo cum sint eædẽ vni tertię proportioni istę proportiones rectanguli, nimirũ XH, & HZ ad XF, & FZ rectangulum, erit quoque AH, & BH rectangulum ad KF, & FL rectangulum, vt TH, & VH rectanguli ad CF, & FD rectangulum, quod erat probandum.

THEOR. III. PROPOS. L.

Si in parabolâ, qualibet parallelæ secent diametros, erit intercepta diameter ad interceptã diametrũ vt ex segmẽtis vnius parallelæ ad rectãgulũ ex aliis segmentis.

EXponatur conus. In quo parabola HOLM, & triangulum, sed non per axem AGC secet eam in BL, & circulos basi parallelos in DF, & AC qui etiam circuli secent parabolam in KT, & HM, quæ sectiones erunt parallelæ, sicut etiam sectio BL lateri AG ex Coroll. 3. propos. 4. tract. 22. eo, quia totum planum parabolicum ei AG sit parallelum, & ideo etiam erit parallela diametro principali VO, ex propos. 9. eiusdem tract. & ideo LB erit diameter. Dico itaque KE, & ET rectangulum esse ad HB, & BM rectangulũ, vt EL ad LB.

Probatur. Nam rectangulum DE, & EF ad rectangulum AB, & BC ob æquales, vtpote inter parallelas, sunt ad inuicem, vt altitudines EF ad BC; sed EF, & BC ita est EL ad LB. Ergo rectangulum DE, & EF ad rectangulum AB, & BC est, vt LE ad LB: & ideo vt rectangulum KE, ET ex 35. lib. 3. æquale DE, & EF rectangulo ad HB, & BM æquale rectangulo AB, & BC.



COROLLARIVM I.

HInc habes BL esse ad LE, vt VO ad OI eo, quòd sint, vt parallelę eędem AG ad DG ex 16. L5. El. & ideo MB, BH esse ad TE, EK, vt MV, VH ad TI, IK rectangula; quòd sint ex præc. vt LB ad LE, vel VO ad OI. Ideo vt LB, BE ad LE, BE, vel OV, VI ad OI, IV rectangula ob eandem altitudinem in eadem proportione, ac linearum. Vnde permutando MB, BH erit ad MV, HV, vt LB, BE ad OV, IV rectangula, s. vt LB ad OV, & sic alias proportiones potes permutare.

COROLLARIVM II.

HInc haurire licet ea rectangula esse æqualia ex segmentis à diametro aliquo factis, quibus ipsi diametri insistunt æquales, quoniam HS, & SM rectangulum erit ad KE, & ET rectangulum ad SX ad EL, sed hæ lineæ SX, EL sunt æquales ex Thesi, ergo etiam rectangula KET, & HSM.

EXPENSIO VII.

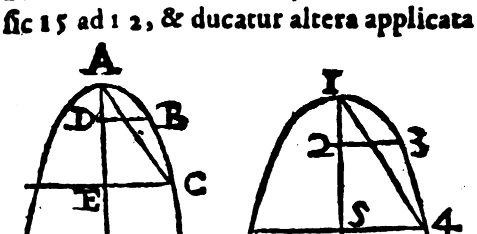
De similitudine Figurarum.

DEfinitio duarum figurarum similium ab Eutocio 3 æquiponderantium, & Apollonio Conici sexto allata est, quòd segmenta diametrorum inter vertices, & applicatas vnius ad applicatas suas, proportio sit, vt segmenta alterius ad suas applicatas, cui Mydorgius lib 4 con. eam conditionem addit, quam demonstrat omnino necessariam, quod applicatarum ad diametrum anguli sint æquales in vtraque figura.

THEOR. I. PROPOS. LI.

Omnes parabolæ in quocũq; cono similes sunt.

SInt datæ parabolæ CBA, & 431, quæcumque, & data diameter in prima AE, applicatæque CE, & BD, repertoque in secunda diametro 15. fiat angulus 415 æqualis angulo CAB apud 1, & A, & ducatur 45 à puncto, in quo 41 Crus trianguli secat figuram iuxta eundem angulum, ac CE applicata facit cum diametro AE; Deinde fiat, vt AE ad AD sic 15 ad 12, & ducatur altera applicata 32.



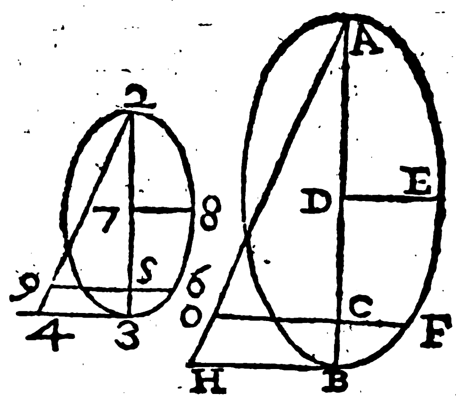
Progr. I. Probatur ex prop. 5. h. vt 12 ad 15, & ideo ex effectione, vt AD ad AE, ita quadratum 32 ad quadratum ex 45, & ideo, vt BD quadratum ad CE quadratum, & ideo ex 26. l. 6. El. erit etiam latus 32 ad latus 45, vt latus BD ad latus applicatæ CE.

Progress. 2. Postea considerandum est ob duos angulos ex effectione æquales apud 1, & 5 ipsis B, & A triangula 145, & CAE esse ęquiangula ex Cor. prop. 17. lib. I. Elem. Et ideo esse 45 ad 51, vt CE ad EA. Et vt 51 ad 21; Sic EA ad DA. Sed erat in I. progr. 32 latus ad 45 latus, sic BD ad CE, & nunc vt 45 ad 51, sic CE ad EA, & vt 51 ad 21; sic EA ad DA. Ergo ex æquo, vt 32 ad 21; Sic BD ad DA; Et sic ostendetur de aliis, quæ possent trahi. Cum ergo sit 32 applicata ad segmentum diametri 12 in vna parabola interceptum, vt in in altera applicata BD ad diametri interceptum segmentum DA, & idem argumentum fit de alijs anguliſque applicatarum ſint æquales. Parabolæ erunt ſimiles ex definitione 16. h.

THEOR. II. PROPOS. LII.

Si binæ Ellipſes, ſeu Hyperbolæ, ſint quarum vna, habeat ſegmenta intercepta inter verticem, & applicatas ad alterius ſegmenta, vt applicatæ ſibi ad applicatas alterius in angulis æqualibus; illæ erunt figuræ ſimiles.

Sit figura 3 6 8. in qua ſit ſegmentum 3 5 ad ſegmentum BC alterius, vt 5 6 applicata ad CF applicatam, & idem ſit de alijs omnibus ſegmentis in angulis æqualibus ACF, & 3 5 6. Dico figuras eſſe ſimiles.

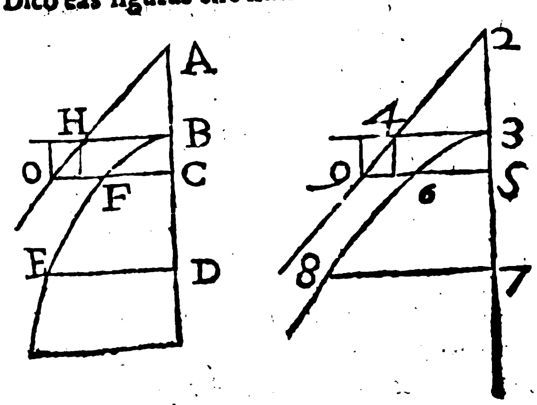


Probatur. Ita ponitur 3 5 ad CB, vt 5 6 ad CF. Ergo *permutando* erit quoque 3 5 ad 5 6, vt CB ad CF, vel *conuertendo* 5 6 ad 3 5, vt CF ad CB. Ergo cùm ſint in angulis æqualibus, figuræ erunt ſimiles ex def. 16. huius.

THEOR. III. PROP. LIII.

Hyperbolæ duæ, ſeu Ellipſes, quarum diameter tranſuerſa vnius ad contiguam parametrum ſit, vt alterius intercepta diameter ad ſuam contiguam parametrum in angulis æqualibus, illæ figuræ erunt ſimiles.

Sit Hyperbola, ſeu Ellipſis 3 6 8, & DFE, & ſit intercepta diameter 3 2 ad parametrum 3 4, vt AB intercepta alterius ad BH parametrum. Dico eas figuras eſſe ſimiles.



Probatur. Fiat, vt 2 3 ad 3 5. Sic AB ad BC, & ducatur CO, & 5 9. Sicut etiam 2 9, & AO per extrema parametri; Triangula erunt æquiangula ex 5. l. 6. cũ ponatur 2 3 ad 3 4, vt AB ad BH ex Theſi.

Quia itaque triangula ſunt æquiangula, erit 5 9 ad 3 4, vt CO ad BH, & vt 3 4 ad 3 2, ſic BH ad BA, & vt 2 3 ad 3 5, ſic ex effectione eſt BA ad BC Ergo ex æquo, vt 5 9 ad 3 5; ſic eſt CO ad CB. Sed CO ad CB habet proportionem duplicatam CF ad CB, ſicut etiam 5 9 ad 5 3 eius quę eſt 5 6 ad 5 3, quia ex propoſ. 8. huius BO rectangulum quadrato CF, & 3 9 rectangulum eſt æquale quadrato 5 6. Vnde ex 19. lib 6. ſunt CO, & CF, & CB veluti etiam 5 9, 5 6, & 5 3 in continua proportione: Ergo erit 5 6 ad 5 3, vt CF ad CB vt tract. 16. propoſ. 2. & idem poterit oſtendi de ſegmentis 3 7, & BD ſicut de applicatis 7 8 & DE, & quibuſcumq; alijs. Cum ergo ſit 5 6 applicata ad interceptam diametri portionem 5 3, vt CF ad CB in æqualibus angulis C, & 5 cum applicatæ parallelæ ſint parametris figuræ; ex defin. 16. ſimiles erunt.

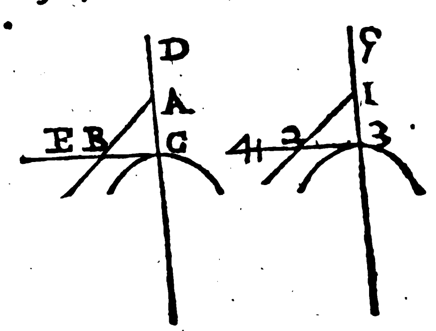
COROLLARIVM.

Ideò figuras eas eſſe ſimiles iudicabis, cum rectangulum ex diametro intercepta, & ſegmento V. g. 2 5, & 5 3 eſt ad quadratum applicatæ 5 6 vnius, vt rectangulum AC, & CB ad quadratum CF alterius. Quia enim eſt 2 5, & 5 3 rectangulum ad quadratum 5 6, vt diameter tranſuerſa 3 2 ad parametrum 3 4, & rectangulum AC, & CB ad quadratum CF. vt AB ad BH erit diametri tranſuerſæ 2 3 ad parametrum vnius 3 4, vt AB diameter tranſuerſa ad BH parametrum alterius. Vnde figuræ ſimiles erunt ex prop. prec.

THEOR. IV. PROPOS. LIV.

Si duæ hyperbolæ ſint, quarum vna obtineat tranſuerſam diametrum ad ductam à vertice ad Aſymptotum, vt alterius diameter tranſuerſa ad ductam ſimiliter, illæ Hyperbolæ erunt ſimiles.

Sit CA ſemidiameter tranſuerſa in Hyperbola AB Aſymptotus, & CB ducta à vertice. Sicut alterius 1 3 ſemidiameter 1 2 Aſymptotus 3 2 ducta à vertice ad Aſymptotum: Dico, quòd ſi ſit 1 3 ad 3 2, vt CD ad CB eas Hyperbolas eſſe ſimiles.



Probatur. Quadratum ex 3 2 ex propoſ. 45. h. æquatur rectangulo ex ſemidiametro 3 1, & ex dimidio parametri 3 4. Ergo cum ex Theſi ponatur 3 1 ad 3 2, vt AC ad CB erit etiam 3 1 ſemidiameter ad ſemiparametrum CB ſ. in duplicata ratione AC ad CB, vel 1 3 ad 3 2 ex Coroll, prop. 21. lib. 1.

lib.6. Elem. Quare, & tota diameter 35 ad totam parametrum suam eam habebit rationem, quam CD tota diameter ad parametrum suam CE ex prop.18. lib.5. Elem. quare ex præced. figuræ erunt similes.

COROLLARIVM I.

QVod si adsint duæ Hyperbolæ, quæ sint in Asymptotis æquiangulis, & etiam 23, & CB sint applicatæ ad verticem in angulis æqualibus, tunc illæ Hyperbolæ erunt similes, quod ob æquiangula triangula, ita sit 21 ad 32, vt CA ad CB.

COROLLARIVM II.

COlligitur quoque eas figuras esse similes, quarum rectangula contenta sub parametro, & diametro transuersa sunt similia; quia etiam tunc erit diameter vnius ad suum parametrum, vt diameter transuersa alterius ad suum quoque parametrum ob similitudinem triangulorum sub ijs contentorum.

EXPENSIO XIII.

De descriptione vniuersali Sectionum.

EX principijs, proprietatibusque explicatis iam conuenit fructum excerpere, & descriptionem Sectionum, tum ad Specula Vstoria perpollienda, tum ad Parallelos Solis in Horologijs Solaribus describendos, tum etiam in motibus planetarũ per Ellipses explicandis deseruientẽ explicare; Secundùm itaque diuersa principia, quæ tradidimus, sic sunt diuersi modi Sectionum describendarum, & in hac Expensione modos docebimus vniuersales omnibus sectionibus deseruientes.

PROBL. I. PROPOS. LV.

Data basi sectionis alicuius, & diametro, & angulo ab illis facto sectionem describere per puncta.

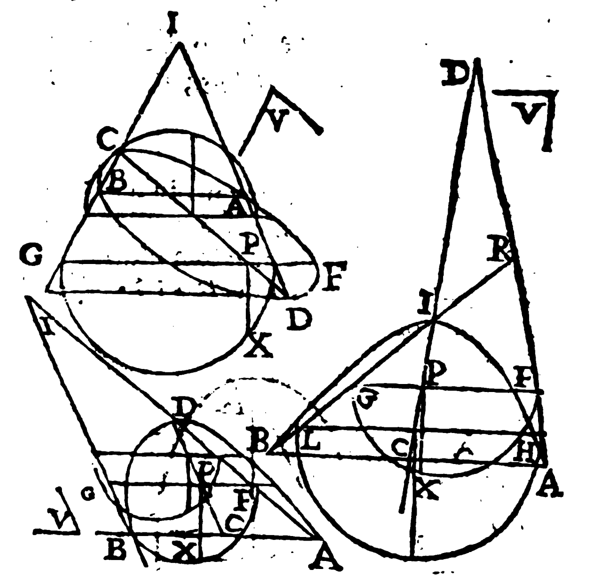
HOc prob. fundatur in secunda expensione de diametro.

Sit itaque primò data sectionis basis AB, quę erit etiam coni, nimirum applicata illa, quæ per centrum basis coni transit; ideoque cum transeat per centrum erit semidiameter, quòd verò pertingat ad sectionem erit applicata.

Hac AB itaque data, & diametro sectionis CD, & angulo V, quem facit applicata cum diametro, sic describetur quęlibet sectio.

Applicabitur diameter totus DC ipsi applicatæ, & basi BA secundùm angulum datum V, ad eius medietatem C, ita vt CA & CB sint portiones ęquales; duceturque à puncto B, vel A, quæ pertingat ad verticẽ diametri D recta AD, & in parabola ab alio extremo B educetur diametro parallela BI. In hyperbola autem AB, quæ trãseat per verticẽ diametri intercepti I, & occurrat AD in L; in Ellipsi verò coniunges aliud extremum diametri C, & basis B, producesque quantùm placuerit.

Ducas deinde FG parallelis, & HL, & etiã pluribus ad exactiorẽ descriptionẽ inter FP, & PG reperies mediam proportionalem ex prop. 16. lib. 6. Eucl. qualis vna est PX; quas medias proportionales omnes applicabis diametro CP interceptas puncto P secundùm angulum datum mensurando eas in lineis GF, productis vbi est opus, & per extrema earum puncta duces manu æquabili flexam lineam; illa enim sectionem requisitam repræsentabit.



Probatur. Nam lineę repertę, quarum vna est PX sunt applicatæ, ergo per extrema earum transibit sectio. Consequentia patet ex definitione applicatarum. Antecedens verò propositio probatur, quia quadratum ex applicatis prop.5. & 6. huius, est æquale rectangulo ex diametris basium coni confecto, quæ à diametro sectionis intercipiuntur, quales ibi in fig. illarum prop. sunt LK, & KM, aut MK & KN. Sed HL in ista fig FG, & cęt. sunt parallelæ diametro basis coni AB, cobus verò est IAB, vel BLA, ergo, & etiam ipsæ diametri basium coni sunt; quare eorum rectangula ex segmentis FP, & PG, & cęt. facta erunt æqualia quadrato PX, & cęt. ex Probl.14. lib.2. Eucl. & ex prop.19. lib.6. Ergo erunt applicatæ.

PROBL. II. PROPOS. LVI.

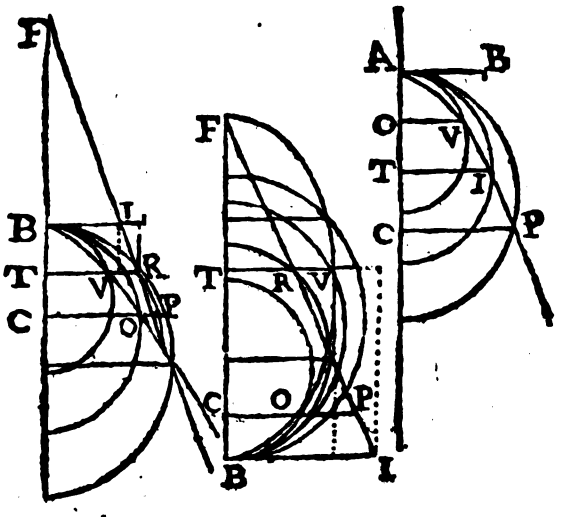
Dato parametro, & diametro intercepta, Sectiones conicas per puncta delineare.

HÆc descriptio fundatur in 3. Expensione. Detur ergo Parameter applicata AB alicuius parabolæ, & diameter, cuiuscumque longitudinis ad placitum AC. Eligantur in ipso quælibet puncta V. g. punctum C, inter AB, & AC inueniatur media proportionalis CP hæc erit applicata, sic si electo alio puncto T inter AT, & Parametrum AB inueniatur media proportionalis TI, hæc erit applicata, sic facias in puncto O, & reperias OV. Nam hę omnes, & quascumque alias inueneris, erunt applicatæ: quare si per extrema puncta manu æquabili ducas lineam, hæc erit parabolica sectio.

Quod verò CP, & TI, & cęt. sint applicatæ patet. Nam in parabola ex prop.6. h. rectangulum ex Parametro, & intercepta portione diametri inter verticem, & applicatam est æquale quadrato ipsius

ipsius applicatę, sed si super CP, & quamlibet aliam, ita inuentam fiat quadratum hoc erit æquale rectangulo ex CA diametro intercepta, & AB Parametro: Quoniam est media proportionalis inter vtrasque lineas AB, & AC ex constructione, vnde fit ex Prop. 19. lib. 6. Euc. quòd quadratum mediæ sit æquale rectangulo extremarum. Ergo CP, & aliæ similes inuentę erunt applicatæ ex pr. 7. h.

Si verò describenda sit aliqua Hyperbola, vel Ellipsis, & detur diameter transuersa FB. Parameter verò contigua in Hyperbola, & in Ellipsi BI. Ab extremo diametri BF per extremum Parametri I ducatur recta FI.



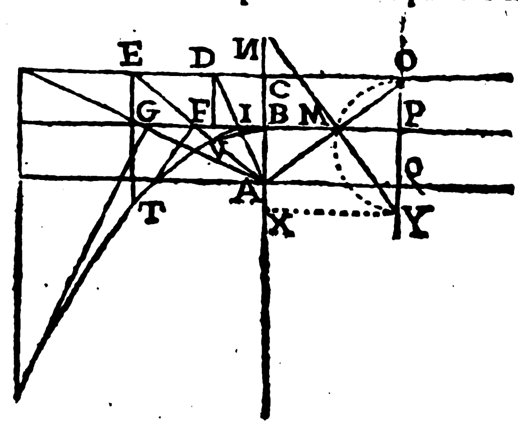
Deinde electis quibuslibet punctis C, & T ducantur in FI producta, si opus fuerit parallelę TV, & CP ipsi BL, interque TB, & TR inueniatur media proportionalis TV, nã TV erit applicata. Sic si inter CB lineam, & CP inueniatur media proportionalis CO hæc erit applicata. Quare si inueniantur plurimę aliæ, habebimus puncta, per quæ suaui manu ducta linea Hyperbolicam sectionem, vel Ellipticam exprimet. Quod verò sint applicatæ patet. Cum sint medię proportionales V. g. TV inter TB, & TR erit ex TV quadratum æquale rectangulo sub TR, & TB contento; Sed hoc rectangulum est æquale rectangulo TI, sub TB, intercepta diametro, & BI parametro, si addatur figura IR in Hyperbola auferatur in Ellipsi similis, similiterque posita, ergo TV erit applicata, quia continet quadratum iuxta propos. 8. huius æquale rectangulo sub Parametro BI, & intercepta diametro contento deficiente ei in Ellipsi fig. IR, vt ibi requiritur, vel abundantę in Hyperbola, vt fiat rectangulum TI sub parametro BI, & intercepta TB contentum, & sic asseras de omnibus alijs similiter inuentis. Quapropter si per extrema puncta earum, cùm plurimæ inuentæ fuerint ducatur flexa, hæc erit Ellipsis, vel Hyperbola.

PROBL. IV. PROPOS. LVII.

Datis Vmbelicis, & vertice, & positionę sectionum, eas in eodem plano describere per puncta.

Sit datus vertex parabolæ B, & Vmbilicus A distantię BA fiat ęqualis BC, perque puncta B, C ducantur in vtramque partem perpendiculares CE, & BC, & ab Vmbelico A ad D, & E puncta, vt placet in os rectæ ducantur AD, & AE; & alię ad libitum, quæ secabunt lineam BC in I, & F, à quibus punctis excitentur perpendiculares IV, & FT; à punctis verò D, & E perpendiculares ad CE educantur DV, & ET; Nam hæ se intersecabunt, cum prioribus orthogonalibus IV, & FT in Punctis V, & T, per quę à vertice B necessariò parabola ducta transibit.

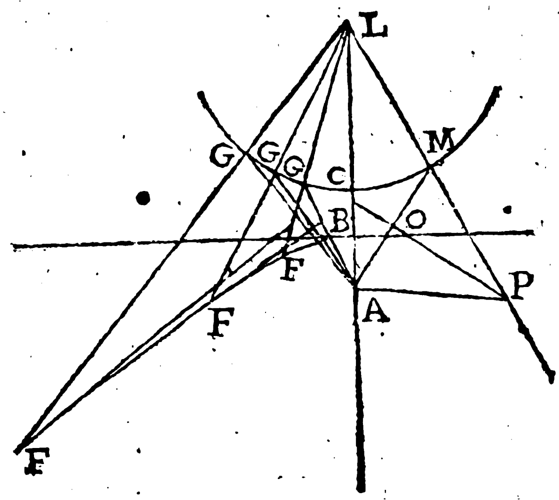
Hæc descriptio fundatur in propos. 16. huius, pro cuius ostensione inspice dextram partem fig.



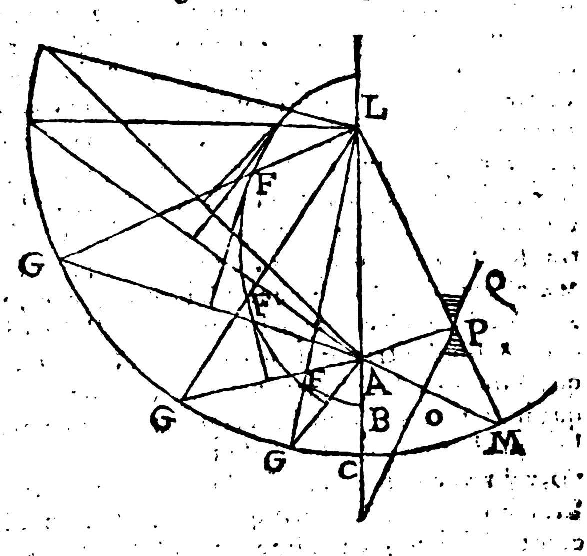
Ibi enim probatur, quod à verticę parabolæ ducta ad contingentem, quę est ibi BA, & hic BM sit æqualis quartæ parti figuræ sub diametro intercepto, & parametro cõtentæ, & in ipsius probationis progr. 1. quod quadratum applicatæ, quæ ibi est CB hic XY sit æquale rectangulo, quod sub intercepta diametro inter contingentem, & sectionis verticem, vt ibi est AF hic BN, & Parametro continetur. Si ergo hic probetur, quod quadratum MB à verticę in MY perpendicularem ipsi AO ductæ sit ęquale quartæ parti quadrati, cuius latus XY, hęc erit applicata, & Y punctum, per quod parabola transit, & NY contingens, Id verò ita probatur MA est æqualis MO ob æquidistantes CO, & BP, & AQ. Vnde, & BM erit æqualis PM ob parallelas OY, & CA, & similia triangula POM, & MBA. Quamobrẽ quadratum ex dimidiã MB, vel PM erit quarta pars quadrati totius BP, quale quadratum ex YX; Sed hoc quadratum PM est æquale rectangulo ex PY, & PO, vel PQ equali ob rectangulum triangulum OMY Ergo hoc rectãgulum erit quarta pars rectanguli contenti sub PY, & sub linea quadrupla ipsius PO, vel PQ æquali BA; verũ PY æquat BN; siquidę ex propos. 12. BX, & BN æquantur, Vnde etiam PY, & BN, quod, & ab æquiangulis triangulis MBN, & MYP constat, Linea verò QP est æqualis ipsi BA, cuius quadrupla est parameter; Igitur quadratum ex XY erit rectangulo ex BN, & parametro, æquale: Vnde XY latus applicata erit, per cuius extremum Y transibit sectio parabolica.

Si verò sit Hyperbola, vel Ellipsis datis duobus Vmbelicis A, & L, sumatur BC æqualis AB, & centro L interuallo LC portio circuli describatur, quam eductæ à centro L, secent quæcumque rectę quomodocumque in punctis MCCOG; Et ad hæc puncta ab vmbelico A rectæ ducantur AM, & AG, & cęt. quibus bifariam sectis V. g. in O, à punctis medietatum perpendiculares excitentur, quæ lineas ab L vmbelico productas secent in FFFP. Dico puncta F, F, F, P esse in Hyperbolæ, vel Ellipsis ambitu.

Probatur. Nam LC est æqualis diametro transuersę; Vmbelici enim ęqualiter sunt remoti ab extremis diametri transuersę in hyperbola, quidem extra diametri transuersæ extrema, in Ellipsi verò intra eam; quare diameter transuersa in Hyperbola.



perbola est minus linea AL distantia vmbelicorum gemina BA, qua distat vmbelici à vertice, in Ellipsi verò maior est. Sed in vtraque figura talis est LC, cum deficiat in Hyperbola AB, & BC æqualibus; in Ellipsi verò abundet. Ergo LC diameter transuersa est. Quo posito, si probetur angulos ad P esse æquales PO erit tangens ex propos. 23. huius, & propter hoc erit punctum P in Hyperbola, siquidem ibi ostenditur tangentem cum duabus emissis ab vmbelicis angulos efficere æquales.

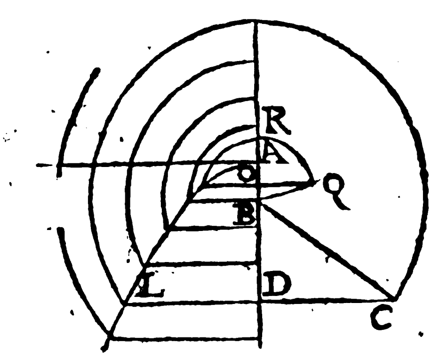


Sed id facilè ostenditur. Nam triangula MPO, & POA cum sint rectangula, & habeant PO latus commune, & MO, & OA crura æqualia, ex propos. 17. lib. 1. Eucl. habebunt etiam angulos apud P æquale APO, & OPM. Quare, & in Ellipsi QPL erit æqualis cum sit ad verticem angulo MPO, & consequenter angulo OPA. Et hinc cùm prouenientes ab vmbelicis LP, & PA faciant cum PO angulos æquales in Hyperbola MPO, & OPA in Ellipsi QPL, & APO, linea PO erit tangens, & punctum P punctum contactus. Vnde erit in ambitu Hyperbolæ, vel Ellipsis. Accedit, quod ob æqualitatem triangulorum PMO, & OPA, basis PM est æqualis basi PA: quare LP in Hyperbola superat diametrum transuersam LM, vel LC linea PA; In Ellipsi verò addita linea PA ipsi LP, vt fiat LM diametro transuersę æquatur LC iuxta id, quod exigit prop. 23. h.

PROBL. V. PROPOS. LVIII.

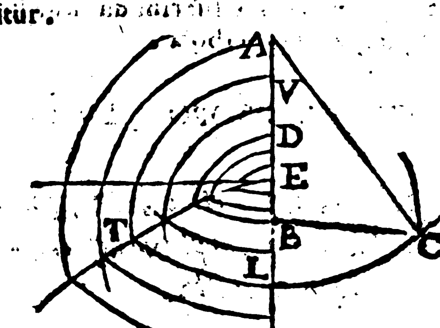
Datis Conicæ sectionis, Vmbelico, & vertice, eam per puncta promptius describere.

SIt primùm describenda Parabola, & datus sit Vmbelicus B, & vertex A. Extendatur diameter AB, quantum opus fuerit, & sumptis in eo RA æquali AB vltrà verticem, deinde plurima alia puncta, vt O, & D sumantur, & ab illis ducantur perpendiculares OQ & DL, deinde interuallo DR, vel OR, nempe ea distantia, quà vnaqueque educta DL, & OQ distat ab R, centro verò Vmbelico ipso B ducantur arcus, & vbi secant eductas in Q, & L, vel C, ibi transibit ambitus Parabolicus.



Probatur ex illis, quę diximus propos. 26. huius. Nam omnis linea, vt ibi probatum est, quę ducitur ab vmbelico ad applicatas, qualis est BC, vel BQ, est æqualis distantiæ eius à vertice in diametro sumpta; nimirum distantiæ DA, vel OA, & insuper distantiæ, quam vmbelicus habet à vertice AB, vel AR; quare BC, quæ est æqualis distantię DR, & BQ distantiæ OR, cum applicata CD, vel OQ conueniet necessariò in puncto Q, vel C ex prop. 26. huius Coroll.

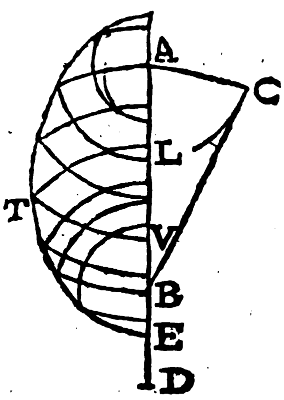
Si verò sit Hyperbola, vel Ellipsis, in qua dentur Vmbelici B, & A, vertex E. Lineæ EB accipiatur æqualis, quæ sit ED: deinde centro A ducantur plurimi gyri interuallo maiori, quam AE, in Hyperbola, quorum vnus sit LT. Et in Ellipsi non maiori, quam AE, sed maiori, quàm BE, quorum vnus TV. Rursusque interuallo D, & quolibet ex circulis ductis facto centro in vmbelico B alij circuli ducantur, quorum vnus sit TV in Hyperbola radio DE, in Ellipsi verò LT radio DV, vbi se interfecant in T; illud punctum T, & alia similia erunt in circumferentia sectionis conicę. Vnde linea per ea ducta Hyperbolam, vel Ellipsim imitabitur.



Probatur verò ex iis, quæ ostendimus prop. 25. huius. Nam in Hyperbola. Linea, quæ ab vmbelico ad contactum ducitur, quæ ibi est, XC debet

debet esse maior, quàm alia, quæ ad eundem contactũ ab alio vmbelico ducta est, vt ibi est BC quantitate diametri transuersę, talis autẽ est AC in hac figura. Nam comprehendit diametrum transuersam DA, quæ remanet subductis duobus vmbelicis DE, & EB, & insuper cõprehendit totam DL, quæ est mensura lineę BC; Ergo AC est ęqualis lineę BC, & diametro transuersę AD.

Sed in Ellipsi ex eadem propos. duę lineæ ab vmbelicis ad ambitum eius incinatę simul sumptę debent esse ęquales diametro transuersę tales verò sunt BC, & CA. Nam BC est equalis diametro transuersæ BA, & CA lineę BD; Siquidem tota AD est diameter totus, & semper gyri accrescunt tali ratione, vt eâdem quantitate, quâ priùs ducti crescunt, eædem posteriùs ducti decrescãt, quem modum etiam docuimus prop.25.tract.18. vnde patet, quod Ellipsis ibi descripta est ꝓpriè sectio coni Elliptica.



EXPENSIO XIV.

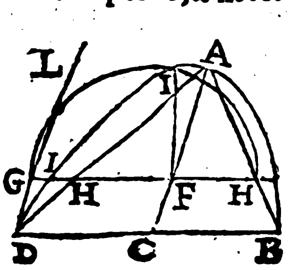
De circumscriptione figurarum conicarum.

SIcut agit Euclides de circumscriptione circuli circa figuras rectilineas, ita, & hic breuiter debemus agere de circumscriptione figurarum, saltem circa triangula; cùm illa sola omnibus figuris possint inscribi, quę à sectione coni deriuant.

PROBL. I. PROPOS. LIX.

Circa datum triangulum Parabolam circumscribere.

SIt datum triangulum BAD, cuius basis BD diuidatur per medium in C, & à vertice A ad diuisionem C recta ducatur, cui parallela DL excitetur à puncto D. Electis verò in AC, quibuslibet punctis; vt F; ducatur basi parallela HG, inter autem eius portiones GF, & HF inueniatur media proportionalis ex Eucl. prop.16.lib.6. FI, & transferatur super FG, & sit FI. Dico, quòd per punctum I transit parabola, cuius ambitus per BAID transeat. Vnde si plurimæ aliæ ducantur, vt FG, ab alijsque punctis in AC ad libitum assumptis, & mediæ proportionales, vt FI inueniatur plurima puncta obtinebimus, per quę parabola ducatur.



Probatur. Nam quoniam FI est media proportionalis inter FH, & FG; quę est æqualis DC erunt tres proportionales; vnde ex Cor. prop.22.lib.6. Eucl. quadratum ex tertia CD erit ad secundę quadratum FI, vt DC ad FH lineas.

Sed, quòd FH, & CD sint parallelę in triangulo CAD, ita erit CD, vel CB ad FH, velut respondet proportione AC, ad AF ex Cor. prop.4. lib.6. Euc. Ergo quadrata CD ad quadratum FI, ita erit proportione, vt AC ad AF: quare latera horum quadratorum erunt applicatę ex prop. 5. huius, & sic per extrema earum I, & D transibit ambitus parabolę, cuius vertex A.

PROBL. II. PROP. LX.

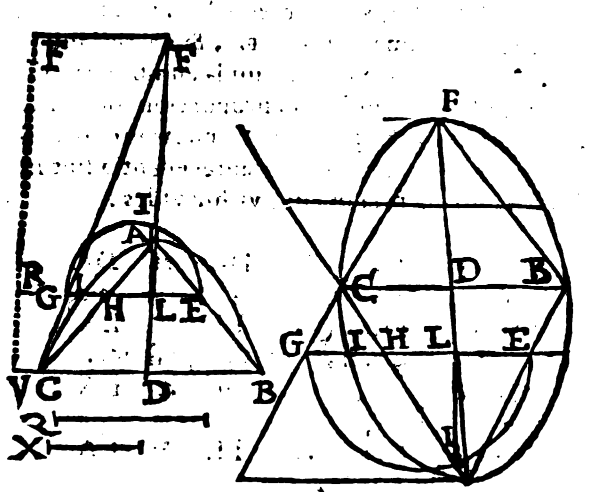
Circa datum triangulum describere Ellipsim, seu Hyperbolam etiam specie notam.

SIt triangulum quodcumque ABC, circa, quod describenda sit Hyperbola, vel Ellipsis, quę potest esse indeterminata, & quęcumque illa sit, & & tunc ducta DA, quę diuidat basim BC per medium à puncto C ducenda erit ad DA productam in F, quod libuerit punctum, recta CF.

Quod sit proponatur sectio conica specie nota, cuius diameter sit ad parametrum, vt Z linea ad X lineam.

Primo lineis DC semibasi, & AD reperiatur tertia proportionalis RV, vt exhibemus in hyperbola exemplum, rectangulumque DR erit ęquale quadrato ex media DC constituto, vtpote constitutum ab extremis, nempe DV ęquali DA, & VR.

Secundo fiat, vt X ad Z, ita RV ad DF reperiendo nimirum quartã proportionalem FD. Dico, quod exhibebitur specie nota Hyperbola, vel Ellipsis, cuius diameter transuersa sit ad contiguam parametrum, vt Z ad X: quia nimirum rectangulum FV sub FD, & DA contentum dicit eam proportionem ad rectangulum DR super eandem basim DV constitutum, quam altitudo DF ad altitudinem VR ex I. lib.6. Eu. ergo etiam rectangulum FV ita est ad ęquale quadratum ex DC; Sed VR ad DF se gerit ex constructione, vt X ad Z vel *conuertendo* DF ad VR, vt Z ad X. Ergo etiam rectangulum FV ad quadratum ex DC. Ergo etiam diameter transuersa FA talis erit ad Parametrum; qui semper est in quacumque figura conica, vt rectangulum sub FD, & DA ad quadratum ex DC, quę debet esse vna ex applicatis in Hyperbola, vel Ellipsi, quę circumscribatur circa tres vertices B, A, & C.

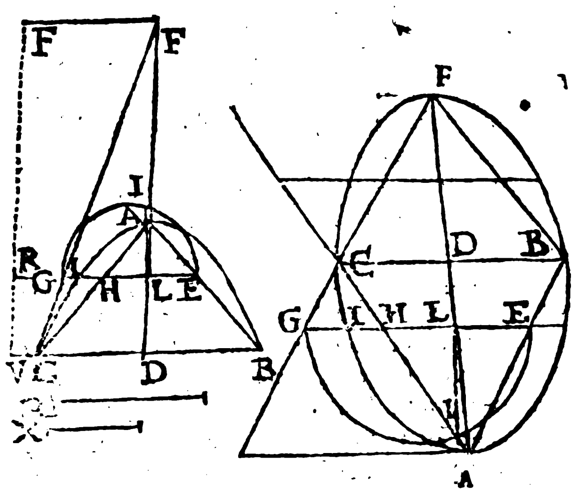


Sit ergo describenda Hyperbola, vel Ellipsis circa BAC, iam siue sit specie nota, siue non, siue CF ducta sit fortuitò ad DF, siue ad describendam specie notam sectionem, electa sit FD modo prędicto eodem pacto describetur.

A puncto quolibet V.g. L ducatur basi BC parallela LH, quę pertingat vsque ad FC, vel CA in G, inter-

interque LG, & LH inueniatur media proportionalis LI, quę hinc inde transferatur ab L versus E, & L, & fit LI. Dico, quod Ellipsis, vel Hyperbola transiens per B, A, C vertices, transibit quoque per I in linea EG punctum signatum, & sic de quibuscumque alijs, quæ à punctis in DA electis trahantur, & inuentis eodem modo proportionalibus erit dicendum. Vnde plura puncta poterimus venari, per quę Hyperbola, vel Ellipsis ducatur. In Ellipsi verò etiam in FD idem efficiemus, & Ellipsim completam consequemur, quę transeat per BFCA vertices.

Probatur autem. Quia tres sunt proportionales ex constructione LG, & LI, & LH. Ergo quadratum ex media est æquale rectangulo ex extremis ex Eucl. prop. 19. lib. 6. quo posito, si probetur rectangulum ex FD, & DA lateribus esse ad rectangulum ex FL, & LA, vt quadratum ex DC ad quadratum ex LI ostendetur ex propos. 6. h. DC, & LI esse applicatas, hoc autem sic ostendimus.



Nam in triangulo FDC ob parallelam GL ad basim DC, ita est DC ad LG, vt DF ad FL, & eadem DC ob eandem rationem in triangulo DAC ita est ad LH sicut DA ad LA. Si ergo ex antecedentibus in primam combinatione componatur quadratum; nimirum DC, & DC, & ex antecedentibus in secunda rectāgulum DF, & DA; quadratum DC, & CD erit ad rectangulum ex consequentibus in prima combinatione, & LG, LH, vel huic æquale quadratum ex LI, vt rectangulum DF, DA ad FL, & LA rectangulum ex consequentibus in secunda combinatione, vt est regula Rectāgulorum proportionalium Tr. 17. propos. 13. vt in parallelogrammis proportionalibus latera proportionalia antecedentia sint in vno, & consequentia in alio, vt hic vides.

DC	vt	DF	&	DC	vt DA
ad		ad		ad	ad
LG		FL		LH	LA
Ergo Compositum,		vt Compositum.			
DC	& DC		DF	&	DA
erit	ad		ad		
LG	& LH	vt	FL	&	LA
idest	LI				

Vnde patet, quod ita est rectangulum FD, & DA ad rectangulum FL, & LA, vt quadratum ex DC ad quadratum IL, vnde DC, & LI erunt applicatæ, & consequenter à vertice A per eorum extrema I, & C transibit Hyperbola, vel Ellipsis.

EXPENSIO XV.

De Parabolis specialiter describendis.

VIsis Sectionum conicarum vniuersalibus regulis, quę scilicet in omnibus tum Hyperbolis, tum Ellipsibus, tum Parabolis adhiberi possunt, oportet etiam aliquas speciales descriptiones docere, quæ à singularibus vnius cuiusque speciei proprietatibus ortum habent.

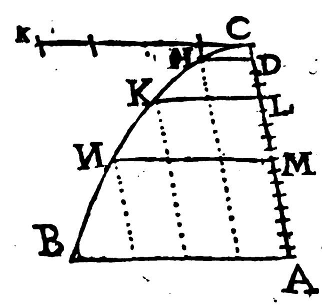
PROBL. I. PROPOS. LX.

Parabolam per puncta describere data diametro, & applicata.

SIt data applicata AB, & diameter quæcumque AC. Diuidatur AB, in quas libuerit partes æquales V. g. in quatuor, & diameter AC in tot alias æquales, quę quadratum numerum prędictarum applicatæ AC partium exęquent V. g. 16.

Si ergo rectę ducantur ęquales applicatæ partibus, & ei parallelę à diametri partibus, quæ quadrato partium in applicata assumptarum respondeant V. g. vnam si assumpseris, quoniam quadratum vnius est vnum, duces à prima parte diametri D ęqualem DH vnicę parti applicatæ: Si duas à quarta parte diametri educes LK, ęqualem duabus partibus, quoniam quadratum duarum est quatuor; si tres à nona parte deduces MN, & cęt. Si ergo per puncta CHKNB ducas flexam, hęc erit Parabola.

Probatur. Nam ex propos. 2. huius, ita se habet AC intercepta ad CL interceptam, vt quadratum AB ad quadratum LK; sed quadratū AB est 16. & quadratum applicatę LK est 4. Linea verò CA est 16. & linea CL est 4. Ergo ita se habet AC ad CL, vt quadratum applicatę AB ad quadratum applicatę LK, & ita dicas de alijs.



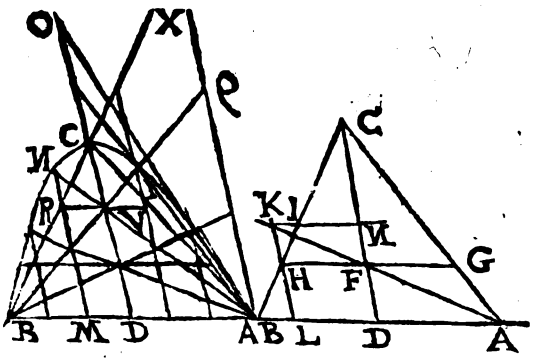
Possent etiam trahi à partibus applicatę AB, quę essent ęquales AD, vt AL, aut AM successiuè semper diminuendo, dempto quadrato à singulis partium, à quibus deducitur, vt vides factum in punctatis H, K, & N: Nam à prima H ablatum est quadratum vnius; quòd à prima parte, & viciniori diametro deducatur, si à K quadratum duarum partium, quòd à gemina. Possent quoque trahi à CX contingente verticem, & parallelam applicatæ, quę secundum quadrata partium distantium à C crescerent.

PROBL. II. PROPOS. LXII.

Parabolam circa datum triangulum describere.

SIt triangulum ACB; circa quod oporteat Parabolam delineare. Diuisa per medium basi BA in D, ducatur CD, & in illa sumptis quibuslibet partibus

partibus V. g. 5; ducatur ab angulo A per F parallela ad basim AB, quæ sit GH, & vbi secat crus CB oppositum angulo A parallela ducatur ad CD, quę sit LK occurrens AF ab angulo A ductæ in K. Dico K *punctum esse Parabola, qua transit per* A, C, B, *vertices trianguli dati.*



Probatur autem: Quia, si ducatur KN, hæc erit applicata. Quare punctum K, vtpote extremum applicatę erit in Parabola. Quod verò KN sit aplicata patet, quia est media proportionalis inter NI, & DB. Vnde iuxta doc. 59. huius erit applicata, quòd verò sit media proportionis ita patet. Nam in triangulis ADF, & FHK æquiangulis, quòd sint ad verticem inter parallelas DF, & HK, ita est AD, vel æqualis DB ad FH, quæ æquatur NK, & lineę DL, sicut DF, vel æqualis LH ad HK idest est DB ad DL, vt LH ad HK in triangulis quoque ad verticem, & inter parallelas IHK, & LHB, sicut est LH ad HK, ita LB ad IK, quamobrem, & reliqua DL, quę est æqualis lineæ NK; ad reliquam NI eodem pacto se habebit, vt LB ad IK, & LH ad HK, & DB ad FH, vel NK: Si ergo sicut se habet DB ad NK, ita se habet NK ad NI; patet. NK esse mediam proportionalem inter DB, & HI.

Nota idem sequi, seu parallelæ sint productę basi ęquidistanter, vt in fig. hac NK, seu ab ęquidistantibus ducantur diametro parallelę, vt HK ab HF, quę occurrant lineę AK, seu in in altera fig. RN ab RV ad AN, seu æquidistantes diametro, vt MN, seu LK, sic nec interet, si ab angulo A, siue ab angulo C, vel B emittantur. Ita nec interet an partes, per quas transeunt, sint in ipso diametro DC, vt BV, quæ transit per V, seu in eius parallela intra partes in diametro producto assumptas, vt per R ducitur BR, seu extra, vt AX, ad quam ducitur BX, seu in partes in diametro producto assūptas, & ducitur AO, quę tamen partes in eo producto debent esse æquales ijs, quę intra diametrum CD sunt assumptæ.

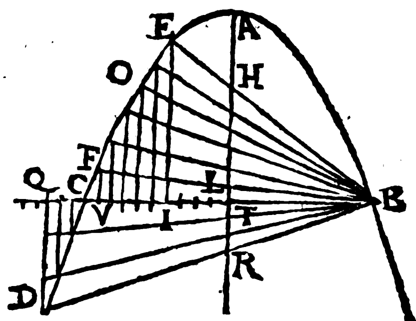
PROBL. III. PROPOS. LXIII.

Parabolam producere, seu resarcire.

SIt Parabola BAC, quam oporteat restaurare ab E vsque ad F, seu producere à C vsque in D.

Resarciatur ergo primo reperiendo diametrum quemcumque AL, & applicatam quamcumque BC, à puncto itaque B, vbi applicata sectionem tangit, è regione partis restaurandæ ducantur ad E, & ad extremas oras abruptæ partis rectę BE, & BF, secabunt diametrum in H, & L: Pars ergo diametri intercepta in quot libuerit partes æquales diuidatur V. g. in 5. & à B per eas rectæ ducantur, vt ... Deinde ab ijsdem oris E, & F ducantur diametro parallelæ EI, & FV, parsque intercepta IV in eisdem partes diuidatur V. g. rursus in 5. & ab his parallelæ diametro ducantur; quæ primò ductis à B occurrant. Nam puncta in quibus occurrunt V g. D erunt in eadem parabola. Vnde per eam ducta linea EOF partes in parabola abruptas coniunget.

Ostensio verò eadem, quæ antecedentis propos. vt patet ex ipsa constructione, sicut, & sequentis operationis.



Similiter, & partes extendentur. Diuisa enim TC in quasllibuerit partes, sicut, & diameter TA tot ex ijs partibus diametri V g. 3 transferantur in productam diametrum TR; & tot ex partibus applicatę TC transferantur in ipsam productam CQ, à quibus diuisionibus parallelæ diametro educantur, vt QD, quę occurrant lineis, quę à pūcto B per partes in diametro TR producta signatis transeant: Nā puncta mutui concursus, vt D linearū QD, & DB erunt ea, per quæ parabola producenda transibit.

EXPENSIO XVI.

De Hyperbolarum particulari descriptione.

HYperbola ex Asymptoto, quā sola habet inter figuras, particulares sibi vendicat descriptiones, quarum plurium modos diuersis problematibus exponemus.

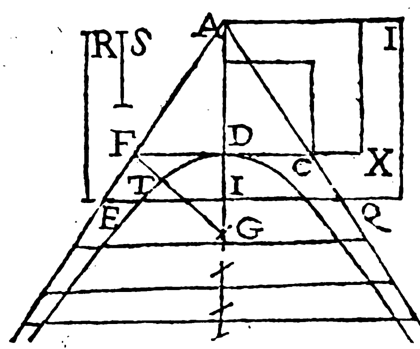
PROBL. I. PROPOS. LXIV.

Datis Hyperboles transuersa diametro, & eiusdem ratione ad contiguam parametrum in dato angulo Hyperbolem in plano per puncta describere.

SIt data AD dimidia transuersæ diametri, & proportio eius ad contiguam parametrum, quę sit vt R ad S. Angulus verò, si ita placet, detur rectus. Inter lineas R, & S reperiatur media proportionalis DC, & iam vt R ad S, ita erit ex Coroll. prop. 21. lib. 6. Eucl. quadratum ex AD ad quadratum ex CD; Talis autem etiam est ex prop 44. h. progr. 3. & Coroll. portio diametri transuersæ ad parametrum, nempe quadrati AD ad quadr. CD; ideoque Coroll. prop. 8. huius hyperbola erit specie nota, & AC & AF erunt Asymptoti ex prop. 47. huius, quę sic describetur.

A punctis in diametro AD producta, quibuscumque placuerit, duces æquidistantes ad applicatam ad verticem DF, qualis est EI, Auferesque quadratum DF à quadrato IE; ita tamen, vt id, quod remanet quadrati latus existat, quod fiet ex prop. 31. l. 6. vel 11. l. 2. si ad id interuallū IE ex puncto C, vel F ducas portionē circuli, quę secet diametrū in

G. Nam recta DG erit latus quadrati tale, quod cum quadrato DF erit æquale quadrato IE. In triangulo enim rectangulo FGD quadrata crurum DF, & DG sunt æqualia quadrato basis FG æqualis IE. Quare GD est latus talis quadrati, cui deficit quadratum ex DF, ad hoc vt æquetur quadrato IE.



Si ergo DG transferatur in IE, vt sit IT, dico IT esse applicatam, per cuius extremum T à vertice D transeat Hyperbola in specie nota.

Probatur autem. Nam sicut est diameter transuersa ad Parametrum, ita est rectangulum ex AI, DA pro vno latere, & pro alio ID ad quadratum ex IT. ex 8. h.

Progress. I. Quoniam, si auferatur quadratum AD à quadrato ex AI remanebit rectangulum sub tota diametro transuersa, cuius dimidia est AD, & ID pro vno latere, & ID seorsim pro alio, qui est gnomon IXI, vt patet, & à quadrato IE quadratum DF ablatum fuit in praxi, & remansit IT.

Progr. 2. In triangulo autem AQI ob parallelas CD, & QI; vt est AD, & DC, & ideo etiam eorum quadrata ex AD ad illud ex DC. Ita ex 26. l. 6. simili proportione alludit quadratum ex AI ad quadratum ex QI. Aufer itaque proportionalia antecedens AD quadratum primæ combinationis ab antecedenti quadrato AI secundę combinationis; sicut, & consequens CD, vel DF quadratum à consequente QI, vel IE quadrato, vt fecimus prog. I. & remanebunt residua adhuc proportionalia. Nempe gnomon IXI, vel quod ęquale rectangulum ex AI, AD pro vno latere, & ID pro alio ad quadratum ex IT ex prop. 22. lib. 5. Elem.

Progr. 3. Sed quadratum AD ex constructione est ad quadratum ex DC, vt diameter transuersa ad parametrum: Ergo etiam rectangulum AI, & AD, nempe toto diametro pro vno latere, & DI tantùm pro alio refertur ad quadratum IT, vt diameter transuersa ad parametrum, & vt R ad S, ergo ex propos. 8. huius erit punctum T ad hyperbolam, quod erat ostendendum.

Si verò libeat Hyperbolem specie non notam describere; trahantur AD, & DC, cuius placet longitudinis nullo habito respectu ad datas S, & R, & cęt. vt priùs exequantur.

PROB. II. PROPOS. LXV.

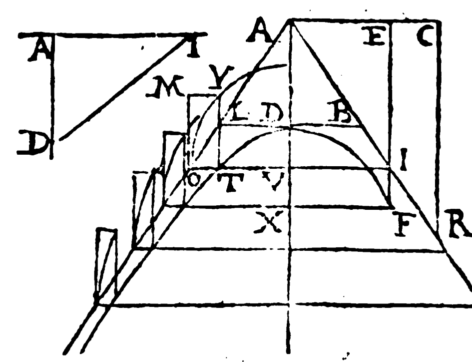
Dato Asymptoto, & dimidia transuersa diametro cum Angulo Hyperbolam per puncta delineare.

Dvobus modis potest hoc in opus reduci, vel per lineas diametro transuersę parallelas, & iuxta proportionem datam. Vel per lineas ei perpendiculares.

Sit ergo primus modus. Et dentur Asymptoti AB, & AL, diametrique transuersę dimidium AD; sitque ad parametrum diametri transuersæ data proportio, vt quadratum CR ad quadratum CA.

Ducta AC parallela BD, & in ea electis quibuslibet punctis, vt E, ducantur parallelæ ad diametrum AD, vt EF; fiatque EF tantæ longitudinis, vt eius quadratum sit æquale duobus quadratis AI, & AD eas seorsim componendo rectangulè, & ducendo basim ID, quæ ęquet FE; nam ex pr. 11 l. 2. Euc. Quadratum basis in rectangulo est æquale duobus quadratis crurum. Et EF dabit punctum F, quod erit in Hyperbola, cuius vertex D, & proportio diametri ad contiguam Parametrum, quam quadrati ex RC ad quadratum ex AC. Et sic erit, si eodem artificio alias producas.

Ostendendum est autem, quòd FX sit applicata ex eo, quòd eius quadratum se habeat ad rectangulum AX, & DA, vt vno crure, & DX pro alio, vt transuersa diameter ad parametrum. Nam tunc sic constabit ex prop. 8. huius FX esse applicatam, & ideo extremum F lineę EF esse in Hyperbola.



Id Probatur verò. Nam ex constructione quadratum EF est æquale quadrato IE, & AD: quadratum dratum verò idem EF est etiam ęquale quadrato eidē AD. & rectangulo AX, AD, & DX, quod sit ęquale hoc rectangulum residuo gnomoni quadrati ex AX, vel EF ablato quadrato AD. Ergo hoc rectangulum ex AX, AD pro vno crure, & DX pro alio erit ęquale quadrato ex linea IE.

Sed in triangulo CRA ob parallelas IE, & CR, vt est quadratum CR ad quadratum CA; ita est quadratum EI, & consequenter rectangulum AX, AD, & XD sibi ęquale ad quadratum ex EA linea, quę est ęqualis applicatę FX.

Vnde rectangulum ex AX, AD, & XD erit ad quadratum ex XF, vt diameter transuersa ad parametrum; cum tale sit quadratum CR ad quadratum CA ex præsupposito.

Secundus modus est, vt datis Asymptotis AB, & AL semidiametro transuersa AD, & angulo ADL ducantur ad diametrū transuersam perpendiculares, vt VO, & vbi occurrunt Asymptotis, vt in O erigantur perpendiculares æquales ipsi LD, qualis est OM, & vbi terminat in M ducatur rursùs perpendicularis MY, quantùm sufficit. Deinde centro V radio VI portio circuli ducatur OY, & vbi secat MY in Y demittatur perpendicularis YT. Nam punctum T erit in Hyperbola.

Probatur facilè. Nam ex Eucl. prop. 16. lib. YT est media proportionalis inter TI, & TO. Quare eius quadratum, nempe ex YT erit æquale rectangulo IT, & TO ex prop. 19. lib. 6. Eucl.

Sed rectangulum per cuius latera in lineam extensa transit hyperbola, vt IT, & TO ex propos. 42. Coroll. est ęquale quadrato ex TY, vel æquali DL ex constructione. Ergo inter IT, & TO

in

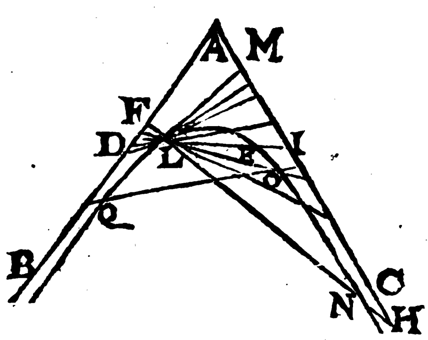
in puncto T transibit Hyperbola, cuius vertex D.

PRORL. III. PROPOS. LXVI.

Datam Hyperbolam resarcire, etiam si eius, non nisi vnicum punctum constaret, vel vlterius producere. Datis eius Asymptotis, & vnico eius puncto.

Sint dati Asymptoti AB, & AC, & punctum L, Ex puncto L ducantur plurimę lineę ad vtrumque Asymptotum, vt FH, & DI, & distantiæ minores ad vnum asymptotum, quàm ad aliud puncti L transferatur super eandem lineam ad alterum extremum, quo tangit aliud asymptotum. V. g. DL transferatur in EI, eo quod sit minor DL, quàm LI, sic FL in HN; Nam puncta Q, O, L, E, N, & si quę alia inuenta fuerint, erunt in eadem Hyperbola.

* Probatur verò ex eò, quòd in Hyperbola puncta ab vtroque Asymptoto ęqualiter remota, signata in eadem linea in Hyperbola reperiantur; Qualia sunt FL, & NH; sicuti EI, & DL, & cęt.



Reperiuntur autem, quia quęlibet ducta in sectione Hyperbolica, vt LN ex propos. 28. huius potest deseruire pro applica, cum in duas partes æquales ab aliquo diametro secundario diuidi possit ex propos. verò 46. Coroll. habemus, quòd rectangulum ex ambobus applicatis, quas diuidit diameter, vt tota LN cum intercepta inter sectionem, & vnum ex asymptotis, vt FL pro vno latere, nimirum tota NF, & intercepta inter sectionem, & alterum Asymptotum, vt NH est ęquale rectangulo facto ex LH, & LF: quare habebunt latera proportionalia ex Eucl. propos. 10. & erit in eadem proportione NF ad NH, sicut LH ad FL. Ergo componendo ita erit NH, & NF simul, nempe HF ad NH; vt LH, & LF simul, quę est eadem FH ad LF, cum ergo LF; & NH eidem FH eandem dicant proportionem erunt inuicem æquales ex 7. propos. lib. 5. Eucl. Quare cum quælibet hyperbola transeat per puncta æqualiter ab asymptotis remota, vt N, & L alicuius quomodocumque lineæ ductę, ista puncta L, & N, vel E, & L, vel O, & Q taliter signata erunt in Hyperbola.

COROLLARIVM.

Hinc ergo patet quaslibet interceptas, vt FL, & NH, quascumque inter sectionem, & Asymptotos esse ęquales inuicem, vt ex ostens. propos.

EXPENSIO XVII.

De Descriptione particulari Ellipsium.

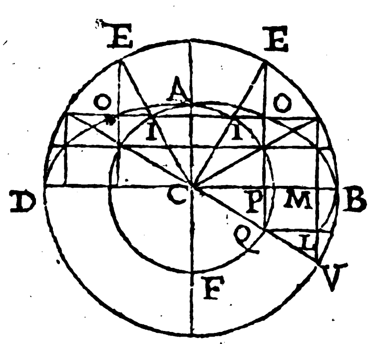
Sicut singulari descriptione Parabolas, & Hyperbolas prosecuti sumus, sic, & Ellipses, quę propter duos axes coniugatas, quos habent, diuersas descriptiones obtinere queunt.

PROBL. I. PROPOS. LXVII.

Datis Ellypsis extremis diametris, eandem in plano per puncta quotlibet describere.

Centro C interuallo assumpto dimidio diametri maioris CD describatur circulus circa maiorem diametrum BD; rursúsque eodem centro C circa minorem AF, & à communi centro C radij exeant, qui transeuntes per circumferentiam minoris in I secent circulum maiorem in DE, vt sunt CE, à quibus punctis E perpendiculares EP ad diametrum BD descendant, quibus occurrant in O puncta I I rectę connectentes: Nam vbi secant perpendiculares EP ab ijsdem radijs dimissas, vt in O, ibi erit punctum Ellipsis, & per eam intersectionem O transibit.

Id verò ostendetur probando rectam OP, vel ML esse applicatam; eò quòd rectāgulum DM, MB ex interceptis diametri trāsuersę segmentis ex propos. 6. h. se habeat ad quadratum ML, vt quadratū BC, quę est loco rectanguli ex interceptis diametri portionibus BC, & CD ad quadratum CF minoris diametri, quæ, & locum applicatę tenet. Vnde si per F transibit ambitus Ellipsis transibit quoque per L.



In triangulo rectangulo CMV ob parallelas MV, & PQ ex prop. 4. Coroll. lib. 6. Eucl. ita est CV, seu CB ęqualis ad VM, vt CQ ad PQ, vel LM ęqualem. Ergo *permutando* ita erit CV, vel CB ad QC, vel æqualem CF, vt VM ad ML. Si ergo ex CB fiat quadratū hoc se habebit quadratū CQ: Vt quadratū ex VM ad quadratū ML ex 26. l. 6. El: sed hoc quadratum VM, eò quòd VM sit media proportionalis inter segmenta BM, & MD, vt patet ex 13. lib. 6. Eucl. est ęquale rectangulo ex segmentis diametri BM, & MD. Ergo rectangulum ex segmentis diametri DM, & MD se habet ad quadratum ML, vt rectangulum, quadratumque ex BC ad quadratum CQ, vel CF, quod erat ostendendum.

PROBL.

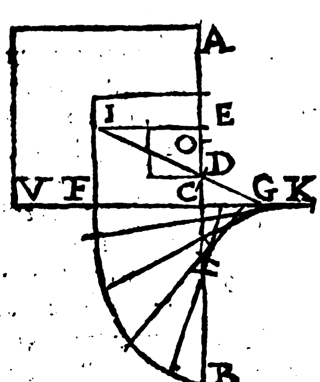
PROBL. II. PROPOS. LXVIII.

Datis Ellipseos extremis diametris Ellipsim per puncta describere.

SInt dati Ellipseos diametri extremi KF, & AB bifariam inuicem, & ad rectos angulos se secantes. Sumpta circino eorum semidifferentia CO, qua nimirum semidiameter CF minor est, quã semidiameter CA, accõmodetur à G puncto minoris diametri ad libitum electo versùs C, ducta arcus portione, qua secetur diameter maior in D, vt DG æquet CO, ductaq; GDI fiat DI æqualis semidiametro minori; Dico itaq; quod extremũ I erit in Ellipsi, cuius ambitus per extrema axiũ K, F, A, B, transeat. Vnde si plurimæ ex istis lineis, sic ducantur habebimus multa puncta, per quæ ambitum Ellipseos ducere poterimus, vt vides factum in ambitu FB.

Probatur autem ex eo, quòd ducta EI sit vna ex applicatis, quare I eius extremum erit in circumferentia Ellipsis.

Quòd autem sit applicata, ostenditur ex eo, quòd quadratum semidiametri minoris, simulque applicatæ CF se habeat ad rectangulum, simulque quadratum ex segmentis CB, CA diametri transuersæ AB, vt quadratum dictæ EI ad rectangulum ex segmentis BE, & EA diametri transuersæ AB. Vnde ex doctrina pr.6.h. erit applicata. Quod verò res ita se habeat ostenditur. In triãgulis ad verticẽ & rectangulis, & ideo æquiãgulis, & similibus IDE, & CDG, vt CD ad DE, ita erit GD æqualis ex constructione CO ad DI, quæ æquatur lineæ OA. Igitur vtendo argumento compositionis ita erit CDE simul ad suam partem ED. Velut AEC simul ad suam partem AO: Et ita quoque erunt eorum quadrata, nimirùm quadratum EC ad quadratum DE respondebit proportione, vt quadratum AC ad quadratũ AO, vel æqualis CF, aut DI ex 26.l.6.



Considera verò, quòd, si auferatur quadratum ex EC à quadrato CA remanebit gnomõ VIA æquale rectangulo ex BE, & EA. Sicut si quadrato ex DI auferatur quadratum DE remanebit quadratum ex EI, (nam in triangulo rectangulo DEI duo quadrata crurum sunt æqualia quadrato basis ex 11. lib.2. Elem.) Ablatis ergo proportionalibus quadratis EC ab AC, & DE à DI, quæ item proportionalia sunt in eadem proportione, remanent rectangulum BE, & EA, vel gnomon VIA, & quadratum ex EI ex pr.22.l.5. proportionalia, ac sua tota. Erit ergo vt quadratũ AC, quod stat loco rectãguli ex segmẽtis diametri ad applicatæ, & semidiametri minoris CF quadratum, sic rectangulum ex BE, & EA segmentis ad quadratum lineæ EI, & *conuertendo*; Vnde EI erit applicata.

EXPENSIO XVIII.

Sectiones omnes describere ope parallelogrammi.

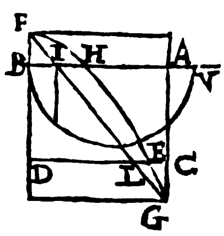
OPortet etiam docere modum descriptionis sectionum, quæ ex datis figuris eruuntur, inter quos non infimæ sortis est ea descriptio, quæ ex dato parallelogrammo in opus deducitur.

PROBL. I. PROPOS. LXIX.

Dato quocumque parallelogrammo ex illo Parabolam efformare.

DVctis parallelis AB, & CD vni laterum, & diametro FG inter AB, & IB ponatur BH, sic inter CD, & LD media proportionalis ED; puncta E, & H, G, F erunt ad parabolam.

Probatur. Quoniam AB, & CD latera æqualia sunt, erit IB, & AB rectangulum ad CD, & LD rectangulum, idest quadratum HB ad quadratum ED rectangulis æqualia ex propos.19. lib.6. Elem. eò quod sint formata ex medijs proportionalibus, vt altitudo IB ad LD: Sed IB, & LD est vt FB ad FD ob parallelas ex 4 lib.6. Ergo HB quadratum erit ad ED quadratũ, vt FB ad FD, & ideo HB, & ED ex 5. huius erunt ad parabolam.

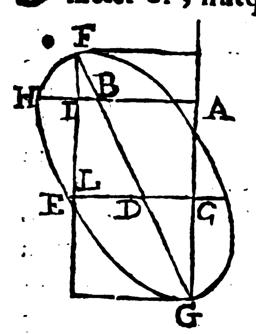


PROBL. II. PROPOS. LXX.

Ex parallelogrammo quocumque Ellipsim delineare.

SIt datum FG parallelogrammum, & in eo diameter GF, fiantque ductæ parallelæ alteri laterum AH, & CB, & inter AB, & BI media fiat BH, & inter CD, & DL media DE. Dico GH, & E, F esse ad Ellipsim.

Probatur. Ita est AB ad CD, vt BG ad DG; rursùs ita est BI ad DL, vt BF ad FD. Ergo rectangula composita ex ijsdem proportionibus AB, & BI ad rectangulum CD, & CL erit, vt BG, BF rectangulum ad GD, & DF rectangulum, vt hic vides.



AB ad CD	vt	BG ad DG	&	BI ad DL	vt BF ad FD

Ergo compositum vt compositum.

AB & BI ad CD & DL	erit	BG & BF ad DG & FD	

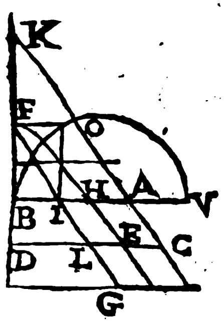
Quare rectangulum AB, & BI erit ad CD, DL, idest æqualia quadratum HB ad DE quadratum, vt rectangulum BG, & BF ad rectangulum DG, & FD: quare ex 6. h. puncta H, & E erunt ad Ellipsim.

PROB.

PROBL. II. PROPOS. LXXI.

Dato Parallelogrammo quocumque Hyperbolam delineare.

SIt parallelogrammum OG, & producta CO in K ducatur per F linea KD, fiatq; triangulum CKD, & ductis AB, & CD parallelis lateri OF; inter lineas AB, & BI inueniatur media HB, & inter CD, & LD media ED, & puncta E, & H erunt ad hyperbolam.



Probatur ob similitudinem triangulorum KB est ad KD, vt AB ad CD, & vt BF ad DF, sic IB ad LD. Componantur, itaque ex istis proportionibus rectangula.

KB	vt	AB	&	BF	vt	IB
ad		ad		ad		ad
KD		CD		DF		DL

Ideo compositum erit, vt compositum.

KB	&	BF	AB	&	IB
	ad			ad	
KD	&	DF	CD	&	LD

Quare, & quadratum HB equale rectangulo AB, & IB erit ad quadratū DE æquale rectangulo CD, & DL, vt rectangulum KB, & BF ad rectangulum KD, & DF: quare puncta H, & E ex 6. huius erunt ad Hyperbolam.

EXPENSIO XIX.

De transumptione figurarum conicarum ex circulo.

SIcut ex dato parallelogrammo sectiones deducimus, sic & ex dato circulo eas adipiscimur, & tantò potiori iure, quantò circulus sectionibus maiori accedit annalogia.

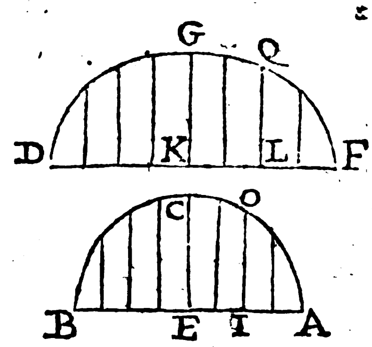
PROBL. I. PROPOS. LXXII.

Dato circulo quocumque Ellipsim quamcumque describere.

SIt datus circulus ABC, ex eo describemus quamcumque Ellipsim, si statuamus eius diametrum pro diametro Ellipseos minori, & ad libitum eligamus maiorem V. g. DF.

Diuidemus itaque AB, in quas placuerit equales partes, & trahemus perpendiculares ad diametrum, vt est OI, & EC. Diuidemus quoque FD in totidem partes, & erectis ad ea puncta diuisionum perpendicularibus, quę æquales sint prioribus in circulo tractis quælibet nimirum sibi correspondenti V. g. KG erit æqualis EC, & LQ correspondenti OI, & per extrema earum ducemus æquabili manu lineam curuam, quæ erit ambitus Ellipseos.

Id verò ostendetur demonstrando LQ esse applicatam sicut KG, quòd ita se habeat rectangulum, & quadratum ex segmentis diametri FK, & KD ad rectangulum ex segmentis DL, & LF, vt quadratum KG, se habet ad quadratum LQ. Nam ex prop. 6. hæc est proprietas essentialis applicatarum ellipticarum.



Probatur autem. Nam cum AB, & DF sint diuisæ in partes numero ęquales erit tota ad medietatem suam, vt alia tota ad medietatē, sicut, & V. g. sex partes ad duas vnius nēpe BI ad AI erunt quoq; vt partes sex ad duas alterius, vt DL ad LF. igitur, & quadratum ex medietate EB, ita erit ad rectangulum ex BI, & IA, vt quadratum ex medietate KD, ad rectangulum ex DL, & LF, cum ex ijsdem proportionibus cōponātur rectę BI, ad AI, & DL ad LF. &c. Sed rectangulum BI, & AI est æquale quadrato IO, cum IO sit media proportionalis inter BI, & IA. Ergo, & quadrato LQ huic ęquali, sicut, & quadratum EC, vel EB est ęquale quadrato KG. Quare KD, DK, & KF rectangulum erit advt rectangulum ex LD, & LF lineis quadratum KG ad quadratum LQ.

COROLLARIVM.

HInc autem ellicies sufficere ad formandam ellipsim ex circulo, si lineam datam, vel maiorem, vel minorem ita seces proportionaliter, vt ab applicatis, seu sinubus in circulo secatur, vel vt ipsę applicatę, sinusque crescunt.

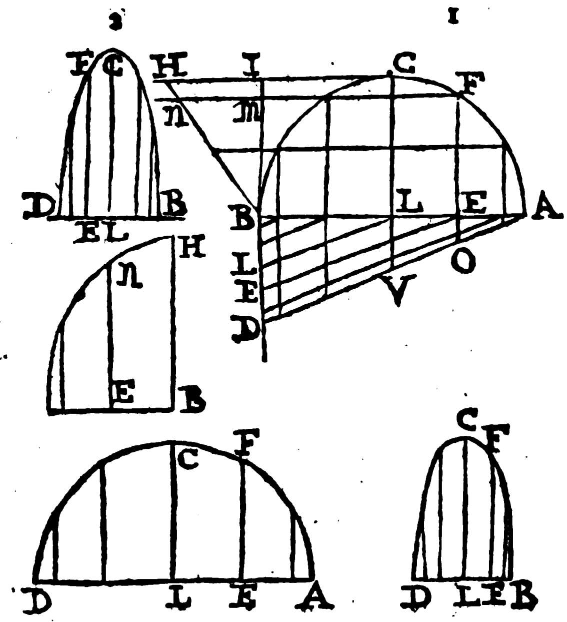
Sit semicirculus ABC, in quo diuiso in partes ęquales ducti sint sinus CL, & EF, & cęt. seceturq; BI primum in partes æquales, iuxtà quas sinus ipsi sunt, ita, quod BI sit æqualis LC, & BM sit æqualis EF, & cęt. deinde iuxtà partes lineę BI detruncetur BH in partes proportionales ex propos. 10. lib. 6. ita quòd sit BH, ad BI, BN ad BM, & cęt. Dico sinus BH, & BN, & alij similes sinubus prędictis LC, EF, & alijs dispositi per puncta B, L, & alia in quibus priùs erant suis extremis esse in ellipsi.

Probatur. Ita est BN ad BH, vt EF ad LC: Ergo, etiam quadratum ex BN ad quadratū ex HB erit, vt quadrtū ex EF ad quadratū ex LC ex 26. l. 6. sed quadratū EF est æquale rectangulo EB, & EA, itemq; quadratum LC est æquale rectangulo ex AL, & LB: Ergo rectangulum EB, & EA ad rectangulum AL, & LB habebit eandem proportionem, quam quadratum ex EF ad quadratum ex LC. Ergo etiam eandem, quam quadratum ex BN ad quadratum ex BH;

cum

eum fint in eadem proportione cum prędictis ex BF, & LC quadratis. Cùm ergo ex BN quadratum fit ex BH quadratum, vt rectangulum ex AE, & EB ad rectangulum AL,& LB; lineę BN, & BH erunt ad diametrum AB applicatæ in punctis E,& L. Vnde earum extrema puncta erunt in Ellipsi ex 6. h.

Idem dicendum. Si iuxta diuisiones diametri AB diuidatur proportionaliter aliqua alia linea, seu maior, vt AD, seu minor, vt BD. Nam si illi lineæ, vt factum est seorsum applicentur sinus LC,& EF quilibet ad suum punctum correspondens, horum sinuum extrema puncta erunt in Ellipsi.



* Probatur. Nam quia AE ablatum est ad OA ablatum, vt AB totum est ad AD totum, erit etiam reliquum EB ad reliquum OD, vt AE est ad AO. Quare rectangulum AO, & OD erit compositum ex ijsdem proportionibus; quibus AE, & EB componitur. Sic quoque AL ad AV erit, vt AB est ad AD. Quare, & residuum LB ad residuum VD erit, vt AL ad AV: quare, & rectangulum ex AV, & VD, quod est quadratum componetur ex ijsdem proportionibus, quibus quadratum ex AL,& LB. Cum ergo rectangulum ex OA,& OD sit compositum ex ijsdem proportionibus, quibus rectangulum ex AE, & EB erit ad rectangulum, seu quadratum AV, & VD compositum ex ijsdem proportionibus, quibus rectangulum, seu quadratum AL, & LB, vt rectangulum AE, & EB ad idem quadratum ex AL,& LB: Sed rectangulum ex AE, & EB ad quadratum ex AL, & LB est, vt quadratum ex EF ad quadratum ex CL. Ergo etiam rectangulum ex AO, & OD est ad rectangulum ex AV, & VD, vt quadratum ex EF ad quadratum ex LC. Quare EF,& LC erunt applicatę ad diametrum AD,& earum extrema puncta in Ellipsi reperientur.

COROLLARIVM I.

POssunt etiam Ellipses è circulo desumi, etiam, si diameter circuli, seu ei proportionalis sumatur pro secunda diametro in Ellipsi, & ei ad angulos obliquos eosdem applicentur, seu sinus, seu sinubus proportionales paralleli; dabunt enim puncta, per quę ducta Ellipsis circundabit diametrum secundariam.

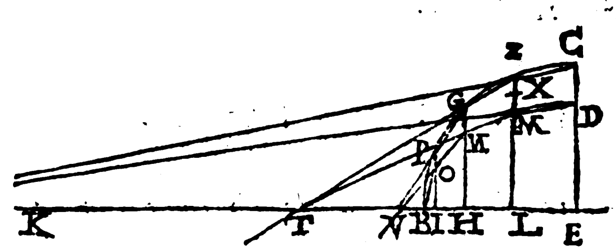
COROLLARIVM II.

QVin etiam describetur Ellipsis, si tùm Sinubus, tùm portionibus diametri proportionales sumantur, vt est videre in fig 2. Nam rectangulum BL, & LD est ad rectangulum BE, & ED in fig. 1. vt est AL, LB rectangulum ad BE, & EA rectangulum, quòd est vt quadratum ex LC ad quadratũ ex EF; Quadratũ verò LC ad quadratũ EF est, vt quadratũ BH, vel æqualis LC in fig. 2. ad quatum BN, vel æqualis EF. Quare ex ęquo rectangulum BL, & LD erit ad rectangulum BE, ED erit, vt quadratum LC ad quadratum EF. Quare LC, & EF erunt applicatæ in fig. 2. ad diametrum DB.

PROBL. II. PROPOS. LXXII.

* *Ellipsim dato circulo, & minori diametro per puncta describere.*

*SIt datus circulus, seu quadrans BC, & diameter minor Ellipsis ED; diuidaturque circulus in quaslibuerit partes CZ, ZG, GP, & tandem PB ducanturque rectæ CZK, ZGT, GPV, & cęteræ si adsint ad diametrum productum EK; ab ijsdem quoque punctis perpendiculares ducantur ZL, GH, PI, & deinde à vertice D diametri minoris ED ducatur ad punctum diametri K, in quod cadit CZK recta DK, & à puncto M, in quo secat ZL ducatur recta ad T; quę sit MT, in quod cadit ZGT rursusque à puncto N, vbi hæc postremo ducta secat perpendicularem GH ducatur recta NV ad punctum V, in quod cadit GPV, & sic agatur successiuè de alijs. Si ergo per puncta DMNOB flexa æquabili manu ducatur, hæc erit Ellipsis quarta pars, & puncta illa DMNOB erunt in Ellipsi.



Probatur Progr. 1. quia (vt ostendam) in Ellipsibus ita est EC ad ED, vt ZL ad ML, & è contra *conuertendo*. Ergo conuenient in vnicum punctum K. Alioquin si aliqua non transiret per punctum K, sed alibi V. g. per X, & perueniret ad punctum D ex Coroll. propos. 4. Element. esset EC ad ED, vt LZ ad XL, quia enim DXK recta esset, vt dicunt aduersarij, & perueniret ad punctum K per X lineę DE, & LX essent in eodem triangulo parallelæ, sed etiam CE esset ad DE, vt ZL ad LM, quia DE, LM sunt in Ellipsi, vt pręsupponimus quapropter cum XL, & ML eisdem LZ eãdem proportionem diceret, quam CE ad ED, essent inuicem æquales ex propos. 9. lib. 5. Elem. quòd est absurdum. Ergo DK transibit per punctum M, per quod transit Ellipsis.

Progress. 2. Quod verò CE in Ellipsibus sit ad DE, vt ZL ad ML, patet. Nam in circulo ita est quadratum EC ad quadratum ZL, vt rectangulum ex BE & EB ad rectangulum ex segmentis diametri LB, & residuo segmento LEB, quod ex propos. 35. lib. 3. Elem. quadratum ex EC, & rectangulum ex segmentis diametri BE, & residuo EB sint ęqualia sicut etiam

etiam ZL quadratum, & rectangulum ex LB, & reliquo LEB segmento eiusdē diametri, sed etiā quadratū DB ad quad. ML, vt rectangulū EB, EB ad rect. ex ijsdem BL, & LEB diametri portionibus circuli simulque Ellipsis ex prop. 6. h. cum ergo in eidem proportione rectangulorum referantur EC quadratum ad LZ quadratum, vt DE quadratum ad LM quadratum erunt ex propos. 16 Elem. 5. in eadem proportione. Quare, & latera erunt in eadem proportione ex 26. lib. 6. & erit EC ad LZ, vt ED ad ML; quare *permutando*, quoque erit EC ad ED, vt LZ ad ML.

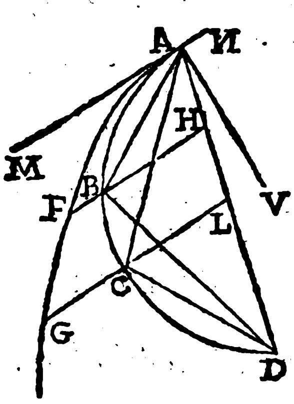
PROBL. III. PROPOS. LXXIV.

Dato circulo, seu circuli portione Parabolam describere.

Fiant æquales lineis BA, & AC ductis à vertice A segmenti ABCD ad peripheriam ipsius applicatæ GL ad HF, quæ tamen debent esse æquidistantes tangenti circuli MA: Si deinde per puncta GF ducatur flexa, hęc erit *Parabola*.

Probatur. Nam vt est GL quadratum ad FH quadratum, sic intercepta LA est in proportione ad interceptam AH. Ergo ex 6. h. AFG est parabola.

Hoc autem ostenditur. Nam ex prop. 29. lib. 3. El. angulus NAH æquatur angulo ABD, & ob parallelas MN, & BH angulo AHB. Quaderè ABD angulus ãgulo BHA erit æqualis; angulus verò ad A est communis. Ergo triangula ABD, & BAH erūt ęquiãgula; ideoq; similia; ideoque



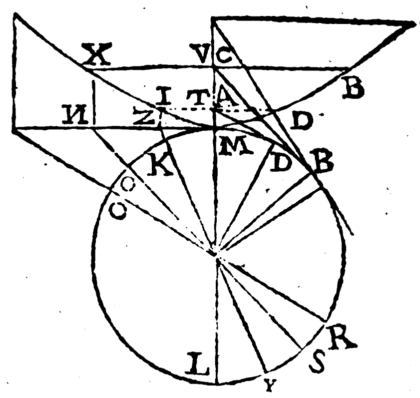
AH erit ad AB, vt AB ad AD, quadere AB erit media proportionalis, & AH, & AD extremæ. Vnde rectangulum ex DA, & AH æquabitur ex progr. 19. lib. 6. quadrato BA, idest quadrato HF. Et idem concludes de quadrato CA idest LG, quòd sit æquale rectangulo ex DA, & AL. Ideoque quadratum CA erit ad quadratum BA, vt rectangulum ex AD, & AL ad rectangulum AD, & AH; sed hæc rectangula ob eandem altitudinem AD ex prop. 1. lib. 6. Elem. sunt vt AL ad AH. Ergo etiam quadratum CA ad quadratum BA erit, vt AL ad AH. Ergo etiam quadratum GL ad quadratum FH, quæ lineis CA, & BA æquantur erunt, vt LA ad HA. Vnde GFA ex 5. huius erit Parabola, & AD Parameter.

PROBL. IV. PROPOS. LXXV.

Dato Circulo Hyperbolam describere.

Tangentes, quæcumque AD, & CB pro applicatis cōstituantur à pūctis A, & C, quibus intersecant diametrum ML productum, quæ erunt AD, & ita flexaque BDM per extrema applicatarum ducta erit Hyperbola.

Probatur. Quadratum CB tangentis est æquale rectangulo ex CL secantis, & CM ex propos. 36. lib. 3. Eucl. sicut, & quadratum AD tangentis est æquale rectangulo AL secantis, & AM. Ergo vt est BC quadratum ad quadratum DA; sic rectangulum ex CM, & CL ad rectangulum LA, & AM. Quare ex 6. huius BC, & AD erunt applicatæ Hyperbolæ, cuius diameter transuersa ML.



Idem efficies; si vtaris tangentibus MZ, MN pro applicatis VX, & IT, & pro interceptis diametri portionibus parte exteriori secantium KZ, & ON, quas transferas in TM, & VM. Itaque eadem ratione quadratum tangentis IT, vel ZM æquabitur rectangulo YZ secantis, & exteriùs assumptæ KZ, idest rectangulo ex TL, & TM; sic tangentis quadratū MN, idest ęqualis VX ęquabitur rectãgulo ex NS, & NO, vel VL, & VM, & ideo quad. VX erit ad quadratum TI est, vt rectangulum ex VL, & VM ad rectangulum ex TL, & TM. Quapropter erunt ex 6. huius VX, & TI applicatæ hyperbolæ; cuius diameter transuersa ML.

EXPENSIO XX.

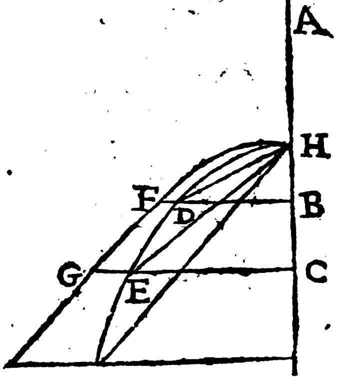
De mutua sectionum trasſumptione.

Eductioni sectionum à circulo, & rectangulo debet iure succedere mutua earum transformatio, atque transumptio; & modus docendus est, quo data vna sectione, altera ex illa extrahatur.

PROBL. I. PROPOS. LXXVI.

Data Parabola ex ea Hyperbolam transcribere, vel è contra.

Sit HC diameter, & ordinatim applicatæ in parabola BD, & CE; cuius parameter AH; Qua-



dratis igitur DB, & BH fiat æquale quadratum ex FB; Iterum quadratis EC, & CH fiat æquale quadra-

 tum

tum GC ex 11. lib.2. & puncta G,F extrema erunt ad Hyperbolam.

Sit AH æquale Parametro Paraboiæ. Igitur BH, & HA rectangulum æquabitur quadrato DB,& ideo si addas quadratum BH; erit rectangulum ex AB,& BH quadratis DB, & BH æquale, & ideo quadrato BF ex Thesi æquale. Sic dicendum de quadrato EC æquale rectangulo AH, & HC; addito, ei quadrato HC quadrata ex EC, & CH, idest quadratum GC ex Thesi eis æquale, erit etiam æquale rectangulo AC, & CH. Quapropter ita erit FB quadratum ad quadratum CG, vt AB, & BH rectangulum ad rectangulum AC, CH, ideoque BF, & GC erunt applicatæ Hyperbolæ ex prop.6.huius, cuius diameter intercepta HA.

PROBL. II. PROPOS. LXXVII.

Data Hyperbola, in qua quadrata applicatarum sint æqualia rectangulis, ex interceptis diametri portionibus Parabolam describere.

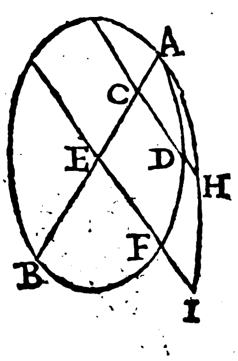
Detrahatur in præced. fig. à quadratis applicatarum FB, & GC quadrata interceptarum diametri portionum BH,& CH ex 33.lib.6. & quadratorum residuorum latera erunt applicatæ Parabolæ ad easdem diametri portiones BH, & HC.

Probatur. Nam quia ex Thesi GC quadratum æquatur rectangulo AC, & CH. Ergo ab eis vtrisque ablato quadrato CH erit quadratum CE æquale rectangulo AH,& HC. Rursus si à BF quadrato, & ab AB, & HB rectangulo dematur quadratum BH erit quadratum DB æquale rectangulo AH, HB; at quia ista rectangula conficiuntur ex eodem latere HA erunt inuicem, vt altitudines CH ad BH. Ergo etiam quadrata EC ad BD erunt vt CH ad HB: Ideoq; CE,& DB erunt applicatæ Parabolæ,cuius parameter HA.

PROBL. III. PROPOS. LXXVIII.

Data Ellipsi Parabolam describere.

Sit Ellipsis AB, & in ea diameter coniugata æqualis alteri AB, & applicatæ DC, & EF: Fiatque quadratum HC æquale quadratis ex DC. & AC, & quadratum IE æquale quadratis FE & EA. Et CH, atque IE horum quadratorum latera erunt applicatæ in Parabola.



Probatur ex prop.35.Tr.24. cum AB sit diameter coniugata erit rectangulum AC, & CB æquale quadrato CD, & ita quoque AE, & EB æquale quadrato FE: Addito igitur quadrato AC rectangulo AC, & CB fiet totum rectangulum ex AB, & AC æquale quadratis DC,& CA; sic addito quadrato AE rect. ex EA,& EB fiet totum rectangulum ex AB,& AE æquale quadratis BE,& EA eiusdem altitudinis AE; Ideo erũt inuicem, vt altitudines AC, & EB; sed quadratum HC rectangulo ex AB,& AC ex effectione æquatur; sic etiam EI quadratũ rectangulo ex AB, & AE. Ergo ita erit quadratum ex CH ad quad. EI, vt AC ad AE. Quare CH,& IE erunt applicatæ parabolicę.

PROBL. IV. PROPOS. LXXIX.

Data Parabola Ellipsim describere.

Ex parabola describetur Ellipsis adhibita fig. pręc. ex propos.33.lib.6. Auferatur quadratum AC portionis diametri à quadrato CH,& latus DC residui quadrati statuatur pro applicata diametri coniugatæ æqualis alteri.

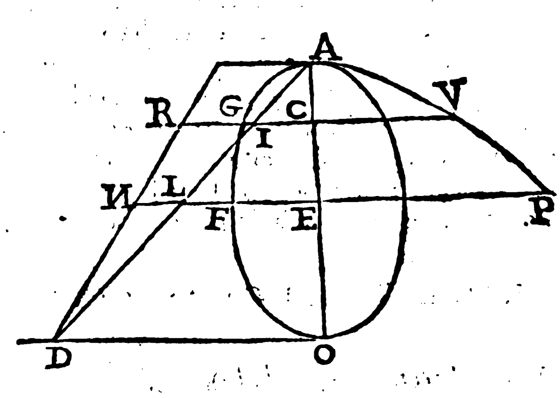
Probatur. Nam quia HC quadratum æquatur rectangulo AB parametri, & AC; si auferatur ab vtrisq; quadratum ex AC remanebunt æqualia quadratum DC, & CA, CB rectangulũ; sic dicas de rectangulo AB, & AE, & quadrato EI à quibus si auferatur quadratum AE remanebunt EF residuum quadrati,& AE,& EB rectãguli ęqualia. Quare erit vt quadratum DC ad quadratum FE; ita CA,& CB rectangulum ad rectangulum AB,& EB. Quare ex 6. huius DC,& FE erunt applicatę Ellipticæ.

Quod verò rectangula applicatarum quadratis æqualia sint eiusdem basis patet, quia habent eundem Parametrum, & AB Parabolæ datæ erit Parameter, at in Ellipsi erit diameter coniugata æqualis alteri, eo quod BEA rectangulum remaneat æquale quadrato FE,& sic de alijs.

PROBL. V. PROPOS. LXXX.

Data Ellipsi Hyperbolam describere.

Fiat rectangulum isoscelles AOD, deinde ductis in Ellipsi CG, & EF applicatis secabunt AD in I, & L, fiat quadrato CG æquale rectangulum CI, & IR, & quadrato ex FE æquale rectangulum EL, & LN. Erit ADR triangulum, & recta transibit



à puncto D per extrema N,& R. Nam cum sit CI, & RI rectangulum ad EL,& LN rectangulum,vt CG quadratum ad EF quadratum, idest vt CA, & CO rectangulum ad AE, & EO rectangulum habebunt ea rectangula proportionem ex lateribus compositam, sicque stabunt.

Compos.

Compos.			vt	Compos.		
CI	&	IR		CA	&	CO
	ad				ad	
EL	&	LN		EA	&	EO
Ergo latera				latera		
CI	vt	CA		IR	vt	CO
ad		ad		ad		ad
EB		EA		LN		EO

Sed CO, & EO, vt ID ad LD, & ideo erit, vt RD ad ND, quare ID, RD latera stipantia parallelas IR, EN erunt rectæ, quòd triangula sint similia RID, & NDL ex 5. lib. 6. & ideo posita vnum super aliud in angulo D conuenient, & eadem crura efficient.

Si rectangulo igitur CI, & CR fiat quadratum æquale VC, & EL, & EN rectangulo quadratum EP æquale, erunt VC inter CI, & CR, & PE mediæ proportionales inter EN, & LE. Quare ex prop. 59. erunt VC, & PE applicatæ Hyperbolicæ, & P, & V puncta ad Hyperbolam.

PROBL. V. PROPOS. LXXXI.

Datam Hyperbolam ad Ellipsim reuocare.

HOc fit auferendo quadratum CA ab VC in fig. præced. & EA ab EP, & cęt. & latera, quæ residuorum quadratorum contexunt latera erunt applicatę in Ellipsi; cuius diameter transuersa est eadem, ac diameter Hyperbolica, quę potest etiam esse diameter secundaria, licet figura sit de solo axe.

TRACTATVS XXV.

De Sectionibus corporum sphæroicorum per planas superficies.

VIdimus Sectiones Sphęrę per planas superficies, relationes, proprietates, & dependentias; modo sectiones corporum, quæ aliquid sphærici possident per planas superficies contemplandæ, quæ deinde ad proiectiones, tum sphæræ, tum circulorum, seu orthographicè, seu stereometricè mirabiliter deseruiunt.

EXPENSIO I.

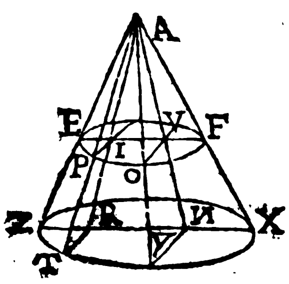
De sectione Coni, cuiuscumque per planas superficies.

SEctio coni post sphæram celebrior, vtpote, quę tres mirabiles sectiones exhibeat Ellipsim, Hyperbolam, Parabolam, & insuper triangulum, & circulum, & licet iam de coni sectionibus egerimus, non tamen pro vt etiam pro basi Ellipsim posidet, de ijs tractauimus; quemadmodum nunc agere oportunum iudicamus.

THEOR. I. PROP. I.

Omnis sectio coni Elliptici parallela basi Ellipsis est.

PRobatur, quod in cono AXZ, cuius basis XYZ sit Ellipsis, *quod, & sectio parallela* FOPE *sit Ellipsis*. Nam vt NA ad VA, sic XN ad FV, & sic NZ ad VE, & NY ad VO, & *permutando*, ob parallelas in triangulis XAN, & NAY, & ANZ, quorum commune latus est NA. Vnde etiam rectangulum XNZ ad rectangulum FVE erit ex 26. lib. 6. vt NY quadratum ad VO quadratum. Eodemque modo concludes, quod XR sit ad FI, vt RZ ad IE, & RT ad IP: sint in eadem proportione, & *permutando*, ac RA ad IA, eo quòd in triangulis ob parallelas similibus ex 4. l. 6. existāt. Quare pariter XR, & RZ rectangulū erit ad rectangulum FI, IE, vt quadratum RT ad quadratum IP. Itaque XN, & NZ rectangulum est ad FV, & VE rectangulum, vt quadratum NY ad quadratum VO, & *conuertendo* FV, & VE rectangulum est ad XN, & NZ rectangulum, vt quadratum VO ad quadratum YN, & vt XN, & NZ rectangulum ad XR, & RZ rectangulum, ita est quadratum YN ad quadratum RT cum XQZ ex Thesi sit Ellipsis, vt autem XR, & RZ rectangulum ad FI, & IE rectangulum, ita est quadratum RT ad quadratum



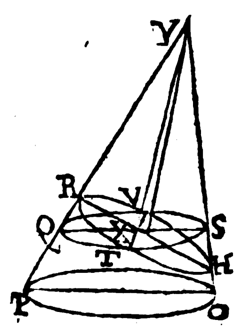
PI, ergo ex æquo erit FV, & VE rectangulum ad FI, & IE rectangulum, vt quadratum VO ad quadratum IP: quare ex propos. 6. Tract. 24. FOE Ellipsis erit.

THEOR. II. PROPOS. II.

Omnis sectio coni circularis scaleni, quæ angulos alternos efficiat æquales basi, & ipsa quaque circulus est.

SIt conus QYP, cuius basis circularis OP, & circulus æquidistans, & parallelus QVTS. Iam notum est ex præc. tr. pr. 2. quod si OP basis sit circulus, fore etiam circulum QSVT. Quo supposito ducatur alius circulus, qui cum isto QVST angulos alternos æquales efficiat, ita quod angulus H conclusus latere conico OY, & diametro HR, sit ęqualis angulo Q clausus latere coni QR, & diametro QS. Et superficies RTH, QTS supponantur perpendiculares triangulo per axem OYP, quare TX, & XV sectio, OYP plano perpendiculariter incumbet ex 16. tract. 23.

Reitaque ita concepta Probatur propos. Angulus apud R in triangulo RQX est æqualis angulo apud H in triangulo XHS. Anguli quoque ad verticem X sunt ęquales ex prop. 12. lib. 1. Ergo ex propos. 17. lib. 1. Coroll. 2. hæc duo triangula sunt æquiangula: Quamobrem latera erunt proportionalia, quæ circum æquales angulos ex propos. 4. lib. 6. Proptereaq; ita erit crus XQ ad crus XR alterum, sicut crus XH ad crus XS alterius trianguli.



Sed

Sed ex propos.18.lib.6.si quatuor rectæ proportionales fuerint illud rectangulum, quod constituitur à medijs V. g. ex cruribus xq, & rx est æquale rectangulo ex extremis constituto, nempe vt qx, & xs.

At ex propos.35. lib.3. rectangulum qx, & xs constitutum æquatur quadrato, ex planorum semisectione xt, aut xv constituto, quia sunt lineæ, quæ in circulo se intersecant. Ergo pari ratione Rectangulum ex xr, & xh erit eidem quadrato æquale ex semisectione cõstituto; Quare ex dictis pr.35.l.6 el. hęc duo puncta erũt in circuli circũferentia. Quapropter rthv circuli circũferentia erit, cùm idem argumentũ valeat, etiã si sectio tv fiat aut superius, aut inferius, dummodo parallela sectioni iam factæ planorum rtvh, vel qtvs.

COROLLARIVM I.

*Hinc est in Cono scaleno duos axes reperiri. Quia duo centra sunt circulorum, à quibus à vertice y axis ad quemlibet duci potest, qui non coincidunt in idem punctum, nempe basis rectæ, quæ fieret, qui, & esset axis coni propriè dictus, & basis obliquæ.

* Ponantur enim æquales rx, & xh: Dico, xq, & xs inæquales esse, & ideo punctum x circuli qtsv centrum non esse. Quod si æquales dicantur, ostenditur sine absurdo id esse non posse.

Nam rxq, & xhs sunt triangula ad verticem ex hypothesi, æqualia quoque crura ambientia æquales angulos ad verticem x, scilicet xs, & qx sicuti rx, & xh ex Thesi, ideo bases ęquales habebunt qr, & hs. Quare cum anguli apud q, & h remaneant æquales etiam bases xs, & rx oppositę illis angulis septis à cruribus æqualibus erunt æquales ex 22. lib.1. sed xs ex ęqualis ex aduersarijs ipsi qx. Ergo qx, & xr erunt bases æquales. Quare ex 14. lib.1. Elem. anguli r, & q erunt æquales: Quare r, & h, vtpote tertio q æquales, erunt æquales anguli alterni, & ideo ex 28. lib.1. qr, & hs essent parallelæ; quod est absurdum.

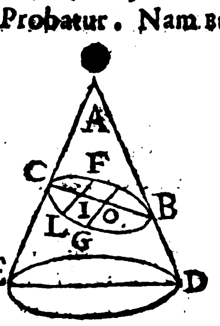
Cum igitur lineæ qx, & xs æquales esse nequeant axis basis qtvs nõ poterit esse basis rtvh etiamsi has bases ponas esse Ellipses. Ideoque nullæ Ellipses, vel circuli in conis habebunt communem axem, nisi paralleli.

THEOR. III. PROP. III.

* *Omnis sectio Coni Elliptici, quæ secet vtrumque latus, in qua possit esse maior axis æqualis alteri axi circulus est.*

Sit in cono adr sectio bc, cuius semiaxis bo maior possit esse æqualis axi alteri og. Dico bfcg *esse circulum*.

Probatur. Nam bo, & oc, rectangulum ex radijs est ad quadratum og, æqualis, vt bi, & ic rectangulum ad il quadratum, & *permutando*; sed bo, & oc quadratum æquatur quadrato og; Ergo, & bi, & ic rectangulum æquabitur quadrato il; cumque boc axeis asseratur, Ergo ex 35.lib.3. bfgc erit circulus.



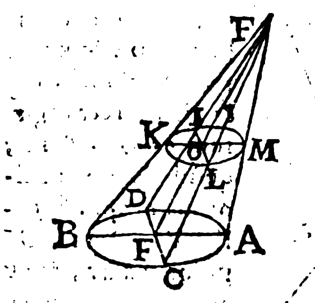
COROLLARIVM.

Illum conum Ellipticum nullam basim posse habere, quæ sit circulus, si saltem bc axis qui deberet esse maior factus perpendicularis vel laterum trianguli per axem dae sit maior adhuc, nã tunc axi minori fc etiam ceteræ omnes ex Cor. propos.17. lib.1. Elem. erunt maiores ipsa eb; Quod si accidat perpendicularem ec posse esse minorẽ, tunc aliqua alia longior erit æqualis. Vnde in eo cono poterit fieri aliqua sectio circulus.

THEOR. IV. PROPOS. IV.

In Cono quocumque Ellipses parallelæ similes sunt.

Sint duę Ellipses parallelę in quocumque cono, siue elliptico, seu circulari aeb, nempe mlik, & adbc. Dico *eas esse similes*.



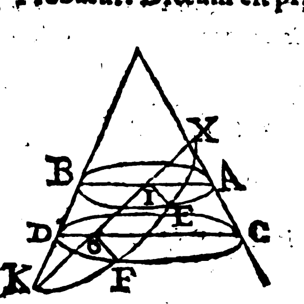
* Probatur. Quod sint similes, vt fb ad oe; sic af ad mo, & ita cf ad lo ob parallelas mo & af in triangulo mef, & cf ad lo in triangulo cef, sed cf, & lo sunt applicatæ, & mo, & af portiones diametri, ergo acdb, & mlik erunt Ellipses similes ex def. 16. Tract. 24.

THEOR. V. PROPOS. V.

* *Omnis sectio coni Elliptici non parallela basi etiam Ellipsis, est si vtrumque latus secet trianguli per axem.*

Sint aeb, & cfd duæ Ellipses, & sit obliqua basi xbk. Dico eam esse Ellipsim.

* Probatur. Dictum est pr.53.Cor.Tr.24. aib rectangulum esse ad cod rectangulum, vt quadratũ ei ad quadratũ of ob ellipses parallelas, quę similes sũt ex prec. Sed vt ai ad co; sic xi ad xo in triangulis æquiangulis ob parallelas axi, & cxo. Pariterque vt ib ad od ita ob eandem rationem ik ad ko.



Componendo igitur proportiones

cum ai	vt xi	& sit	ib	vt	ki
ad	ad		ad		ad
co	xo		od		ok

Ergo compositum vt compositum.

ai	&	ib	erit	xi	& ki
	ad				ad
co	&	od		xo	& ok

Quare etiam vt rectangulum xi, & ki ad rectangulum xo, & ok sic erit quadratum ei ad quadratum of ex propos.16. lib.5. cum sit eadem proportio quadratorum, ac rectangulorum ai, & ib ad co, & od. Vnde ex 6. tract.24 xbfk erit ellipsis.

THEOR.

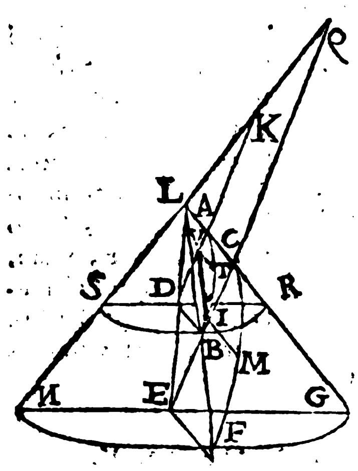
THEOR. VI. PROPOS. VI.

Hyperbolæ parallelæ in Cono similes sunt.

IN cono GLN secto triangulo per verticem ELF ab intersectionibus BD, & FE circulorum RBS, & GFN duæ hyperbolæ parallelæ CMFE, & ATBD discedant ei diametri transuersæ protendantur vsque ad Q, & K. Sint autem hæ omnia plana perpendicularia triangulo ex generatione GLN. Dico *has sectiones parallelas esse Hyperbolas*.

Intelligatur I. non sit satis expressa ab L vertice in aliquod punctum I producta linea, & à puncto, quo secat diametrum vtrumque I, & V duæ perpendiculares ad idem planum LNG erigantur IM, & VT; & ex prop. 8. Tract. 22. erunt parallelæ quoque.

Quo posito probatur, cùm EQ, & DK sint parallelæ, & segmenta ipsarum erit rectangulum ex KV, & VA ad rectangulum ex DA, & KD, vt rectangulum ex QI, & IC ad rectangulum ex QE, & EC; quòd latera obtineant proportionalia. Vt autem rectã gulum ex KV, & AV ad rectangulum ex KD, & DA, ita est TV quadratum ad BD quadratum ex 6. h. Et vt rectangulum CI, & QI ad rectangulum ex QE, & EC, ita est qudratum MI ad quadratum FE. Ergo erit etiam TV quadratum ad quadratũ BD velut MI quadratũ ad quadratũ FE ex 16. l. 5. Quare talia quoque erũt latera ex prop. 26. lib. 6. Elem. s. erit TV ad DB, vt IM ad EF; sed est etiã AV ad AD, vt IC ad CE ob parallelismũ linearũ AD, & CE: Ergo hyperbolæ erũt similes ATBD, & CMFE ex prop. 52. Tr. 24. de conicis.



De circulis, & Parabolis non est difficultas. Nam omnes parabolæ, & omnes circuli sunt similes, vt ostendimus.

Et omnes quoque in cono circulari sunt parallelæ figuræ, cùm circulus basi sit parallelus, at parabola lateri.

THEOR. VII. PROPOS. VII.

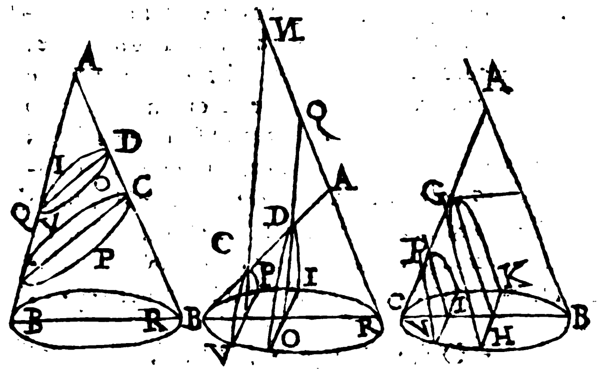
Æquidistantes in eodem cono sectiones, non possunt esse eædem.

SIt primùm sectio parabola in cono ABC per axem secto plano ABC, & parabolę KGH, & FIV æquidistantes.

Dico, quòd hæ sectiones non sunt vna alteri eadem.

Probatur. Quia obtinerent parametrum ex propos. 39. Tr. 24. æquale, si essent sibi eędem, sed nequeunt consequi æquale parametrum. Ergo eędem esse non possunt.

Probatur minor de Parabola. Quoniam ex pr. 41. Cor. Tract. 24. si componatur rectangulum ex cruribus BA, & AC, id habebit eam proportionem ad quadratum BC, quam AG, vel AF portio cruris à verticibus sectionum, & coni intercepta ad parametrum contiguam; Sed portio AF est maior, quam AG; ergo etiam maior Parameter parabolæ IFV quã parab. KGH. Quare nõ sunt eędẽ.



Sit deinde data sectio Hyperbola, vel Ellipsis in conis ARB æquidistantes. Dico non esse easdem inter se.

Probatur. Nam ex 38. Tract. 24. conse. diametri transuersæ essent inter se æquales; sed CN, & DQ tales non sunt. Ergo neque sectiones sunt eędem inter se; Assumptum verò ostenditur. Nam AC maior est, quàm AD. Ergo etiam transuersa diameter CN maior est, quàm DQ in ACN; ADQ triangulis ęquiangulis. Vnde Ellipses, aut Hyperbolę non erunt inuicem æquales, si sint parallelæ.

EXPENSIO II.

De Coni sectionibus in lineam desinentis.

SPecies est coni, qui cum basim rotundam obtineat, non desinit tamen in punctum, sed in lineam, vt conus representat ABCF, de hoc etiam aliqua dicere necessarium videtur.

THEOR. I. PROP. VIII.

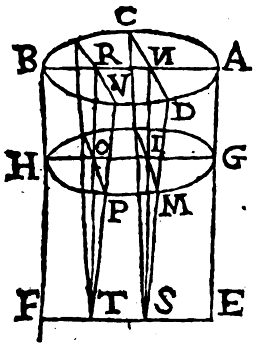
* *In Cono, qui desinit in lineam rectam habente pro basi circulum, vel Ellipsim reliquæ omnes parallelæ sectiones, seu intra seu vltra basim, si producatur illius coni superficies, sunt Ellipses.*

SIt Conus, cuius basis circulus ACBD, vel ellipsis desinatq; in lineam EF. Dico, quod si in eo fiat aliqua sectio, vt GMPH parallela basi illa sectio exhibebit Ellipsim.

* Probatur ex ea proprietate Ellipsis, quòd consequatur diametros inæquales, & quòd omnia applicatarum quadrata inuicem, ita se in proportione gerant, vt rectangula sub interceptis diametri portionibus comprehensa. Sint ergo applicatæ IM, & OP. Dico, quòd ita est quadratum IM ad quadratum OP, vt rectangulum ex GI, & IH ad rectangulum ex GO, & OH.

Probatur. Nam ita est MI ad ON, vt est SI ad SN, & ita est PO ad VR, vt TO ad RT. Lineę verò TO, & SI sunt æquales, sicut, & SN, & TR: Vnde possunt computari pro eadem: Quamobrem etiam erit

erit MI ad DN, vt PO ad VR, eo quòd sint eædem proportiones vni tertiæ ex 16. lib. 5. nempe SI ad SN, vel TO ad TR. Cum ergo sit MI ad DN, vt PO ad VR erit permutãdo MI ad PO, vt DN ad VR. Quare etiã quadrata ex 26. l. 6. ex illis lineis effecta.



Sed vt se habet quadratum ex DN ad quadratum ex VR, ita est rectãgulum ex AN, & NB partibus diametri interceptis ab applicata DN, vt rectangulum ex AR, & RB partibus diametri interceptis ab applicata VR ex 35. lib. 3. Elem. vel ex 6. Tr. 24. cum sit basis circulus, vel Ellipsis. Ergo etiam ita erit quadratum ex MI ad quadratum ex OP, vt rectangulum ex AN, & NB ad rectangulum ex AR, & RB: Sed rectangulum ex AN, & NB est æquale rectangulo ex GI, & IH ob parallelas EA, & FB, ob quas æqualia sunt segmenta diametrorum equalium GI, & AN, sicut, & IH, & NB. Et ita quoque rectangulum ex AR, & RB ex æquale rectangulo GO, & OH ob eandem rationem segmentorum æqualium. Ergo quadratum ex MI ad quadratum PO, est vt rectangulum ex GI, & IH ad rectangulum ex GO, & OH. Quaderè erit Ellipsis figura GMPH, cum circulus esse nequeat ob diametros inæquales, quia equidẽ est maior DN semidiameter, quàm MI; sicut, & maior est SN, quam SI, cum quibus ij diametri eandem proportionem dicunt.

EXPENSIO III.

De sectione sphæroidis per planas superficies.

AD inuestigandum superficies corporis sphæroidis, & soliditatẽ, vtile est scire sectiones, quæ in ipso exhiberi possunt; ad quam expensionem ineundam operæ pretium est definitiones agnoscere.

DEFINITIO I.

Semiellipsis in orbẽ circa suum diametrum voluta, donec redeat ad idem punctum, à quo discessit sphæroidem circumscribit.

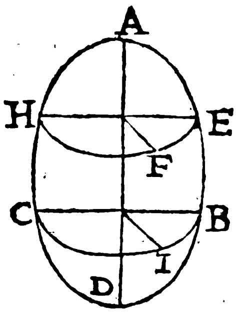
DEFINITIO II.

Axis eius est idem axis, circa quem Ellipsis efformatrix circumuoluta est, & punctum huius medium centrum ipsius est.

THEOR. I. PROP. IX.

Omnis sectio recta ad axem sphæroidis circulus est.

PRobatur id faciliter ab efformatione sphæroidis, cũ enim Ellipsis ABCD se circũgyrando fecerit speroidem, omne punctum eius circulum efficit. Quare punctum E se gyrando per F in H



circulum delineauit, sed hic est parallelus basi BIC, acte normaliter ad axem AD sphæroidis eo, quòd se girando punctum E non mutet distãtiam à puncto B: Ergo axi circulus EFH erit normalis, alterique circulo BIC parallelus.

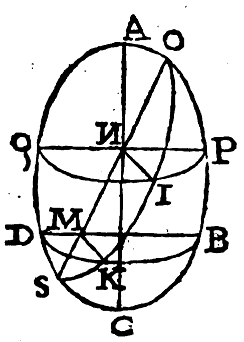
THEOR. II. PROPOS.

Omnis sectio sphæroidis axi obliqua Ellipsis est.

SIt secta sphæroides ABCD piano obliquo OIKS ad axem. Dico *illam esse veram Ellipsim.*

Sectio ABCD primigenia sphæroidem constituens, sit plano OIKS recta, nempe transeat per aliquam illi plano perpendicularem; patet enim hoc fieri posse absque alia probatione; Et eidem plano primigenio ABDC perpendiculare quoque planum PIQ, & BKD secet obliquum OIKS in N puncto: quo obliquum secat axem, & in M aliquo alio puncto; Sintque hæc duo plana recta ad axem AC. Sectiones itaque IN, & KM erunt perpendiculares ex propos. 16. Tract. 22. plano primigenio BADC, & eius sectionibus lineis PQ, & BD, & plana PIQ, & BKD erunt circuli, & parallela, vt axi orthogonalia; quibus positis, ita.

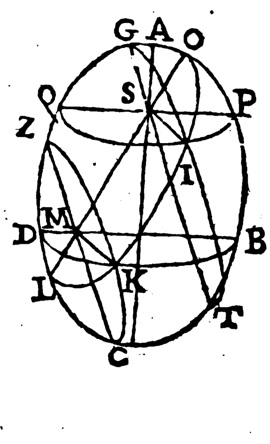
Probatur. Quod PIQ, & BKD plana circuli sint, & KM, & IN perpendiculares diametris PQ, & BD erit rectangulum PN, & NQ equale quadrato IN. Sicut etiam rectangulum BM, DM erit æquale quadrato MK: Ideo rectangulum erit ad rectangulum, vt quadratum ad quadratum: Sed vt rectangulum ex PN, & NQ ad rectangulum ex BM, & MD. Sic



est rectangulum ex ON, & NS ex prop. 48. Tr. 24. ad rectangulum OM, & MS, eo quod BADC sit Ellipsis. Ergo, vt quadratum IN ad quadratum MK, ita est rectangulum ex ON, & NS ad rectangulum ex OM, & MS. Ergo ex 6. Tr. 24. DIS est Ellipsis.

THEOR. III. PROPOS. XI.

Omnes Ellipses in sphæroide sunt similes, si sint parallelæ.



SIt constructio, vt præcedens. Sectioq; primigenia sphæroidis ABCD, & plana circulorum perpendicularia eidem sectioni primigenię sint PQ, BKD, & eidem quoque duæ Ellipses parallelæ perpendiculares TIG, & CKZ erũt, & intersectiones IS, & KM perpendiculares ex prop. 15.

16. Tract. 22. per quas agatur planum OIKL.

Prob. Sectiones GIT, & ZKC esse similes rectangulũ ex OS, SL ad rectãgulũ ax OM, & ML ex pr.68. præc. Tr. vt rectãgulũ GS, & ST ad rectãgulũ ex ZM, & MC: sed vt rectangulum ex OS, & SL ad rectangulum OM, & ML, ita est quadratum IS ad quadratũ MK ex prec. Ergo etiam rectangulũ ex TS, & SG ad rectangulum ex ZM, & MC, vt quadratum IS ad quadratum MK. Quare etiam ex 26. lib.6 SG, & ST lineæ erunt ad MZ, & MC, vt IS ad KM; quare ex def.16. Tr.24. sectionum similium, erunt similes sectiones GIT, & CKZ parallelæ.

EXPENSIO IV.

De sectionibus Conoidis parabolici.

QVoniam egimus de præcipuorum corporum sectionibus, parabolicum Conoides inter corpora mathematica non infimum locum obtinens præterire non licet. Tres autem sectiones in ipso fieri possunt præter primigeniam, ex qua generatur, Circulus, Parabola, & Ellipsis.

DEFINITIO.

Conoides Parabolicum Parabola circa suum axem voluntata formatur, & axis eius est axis etiam parabolæ genitricis.

THEOR. I. PROPOS. XII.

Sit sit Conoides parabolicum, cuius basis circularis, & sectum sit plano basi parallelo, sectio circulus erit.

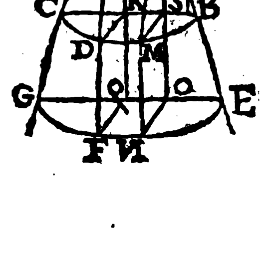
SIt EAG corpus Conoidale Parabolicũ, in fig. pr. seq. & planũ BDC intelligatur æquidistans basi, quæ sit circulus EFG. Dico *hoc planum esse circulũ.*

Probatur. Nam eius ambitus formabitur à puncto C per motum parabolæ circa axem AQ. Et cum illud punctum semper æquidistanter basi moueatur, cumque perimetrum parabolæ maneat semper inuariatum punctum illud C per D, M, B sẽper in æquali distãtia, à cẽtro R, & circulo GFNB pmouebitur, vt patet. Quare CDMB circulus erit.

THEOR. II. PROPOS. XIII.

Omnis sectio Parabolici Conoidis æquidistans axi Parabola est.

SIt Conoides Parabolicum EAG Axis AQ; sintq; parallelæ sectiones OPMN, & altera QADF per axem AQ. Sintque circuli paralleli BMDC, & ENFG, & perpendiculares Parabolę primigenię EACG. Dico OPMN *sectionem axi QA parallelam esse parabolam.*



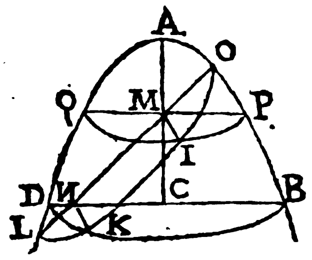
Probatur OP est diameter coniugata in parabola primigenia EAG. Ideoque BS, & SC rectangulum est ad EO, & OG rectangulum, vt PS est ad OP ex propos. 50. Tract. 24. sed ex BS, & SC rectangulum est æquale quadrato SM, & rectangulum ex EO, & OG quadrato ON. Ergo quadratum SM ad quadratũ OM erit, vt SP ad OP, quę est ex prop. 5. Tract. 24. proprietas parabolæ.

PRÓBL. III. PROPOS. XIV.

Omnis sectio Conoidis parabolici ad axem obliqua Ellipsim efformat.

DVcantur paralleli basi circuli BKD, & PIQ, qui secent OIKL planum sectioni primigeniæ BAD normale. Eruntq; MI, & KN intersectiones planorum perpendiculares intersectionibus BD, & PQ, & OL ex prop.16. Tract.22.

Dico *itaque* OIKL *obliquum planum axi* AC *esse Ellipsim.*

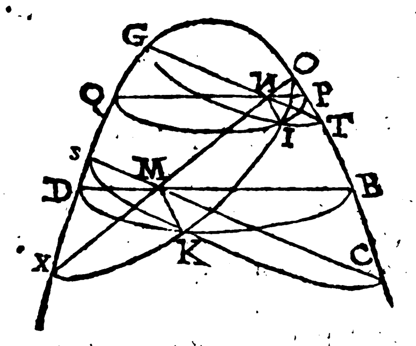


Probatur. Cum PM, & MQ rectangulum quadrato MI, & BN, & ND rectãgulum quadrato NK sit ęquale eo, quòd sint circuli vt ex pr.35. El. l.3. erit rectangulũ PM, & MQ ad rectangulum BN, & ND vt quadratum IM ad quadratum NK ex propos.7. lib.5. Vt autem rectangulum PMQ ad rectangulum BND, ita ex propos.48. Tract.24. est rectangulum OML ad rectangulum ONL. Quaderè rectangulum OML erit ad rectangulum ONL, vt quadratum MI ad quadratum NK, hæc autem ex propos.6. Tract. 24. est proprietas Ellipsi prima, & essentialis.

THEOR. IV. PROPOS. XV.

Ellipses in Conoide Parabolico parallelæ sunt similes.

SInt duæ, GIT, & SMC parallelæ Ellipses. Dico *eas esse similes.*



Prob. Supposita eadẽ prorsus costructione, quę propos.11. cum, & fit iisdẽ verbis eadẽ demonstratio. Rectangulũ ON, & NX est ad rectãgulum OM, & MX ex prop.48. Tract.24. vt rectãgulũ GN, & NT ad rectangulum ex SM, & MC; Sed vt rectangulum ON, & NX ad rectangulum OM, & MX, ita est quadratũ IN ad quadratũ MK ex 14.h. Ergo etiã rectangulum ex TN, & NG ad rectangulum ex SM, & MC, vt quadratum IN ad quadratum MK. Quare etiam

etiam ex propos. 26. lib. 6. Elem. ita erit NG, & NT lineæ ita erunt ad SM, & MC, vt IN ad KM: quare ex def. Ellipses GIT, & SKD erunt similes.

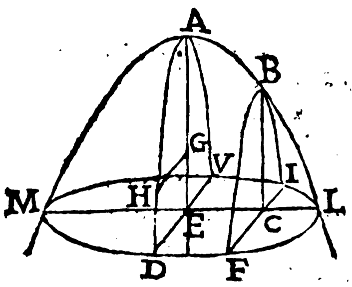
THEOR. IV. PROPOS. XVI.

In Conoide Parabolico Parabolæ axi æquidistantes similes, & æquales sunt.

PArabola IBF detur parallela axi AE, & parabolæ per axem VAD. Dico *eam esse similem, & æqualem ipsi* VAD.

Detruncetur AG ex axe æqualis BC diametro, & ducatur applicata GH, quæ erit parallela ED.

Probatur. Quia vt AG ad AE, ita est quadratum GH ad DE, & quia LAM parabola est; erit LCM rectangulum ex Cor. 1. prop. 50. Tr. 24. de Conicis ad LEM rectangulum, idest ex 35. lib. 3. illi CL, CM æquale FC quadratum ad quadratum DE æquale LE, EM rectangulo, vt CB ad AE: sed GH quadratum est ad quadratum ED, vt AG ad A, idest BC ad BA. Ergo cum CF quadratum ad ED quadratũ eâdem proportione alludat, vt GH quadratum ad idem ED quadratum erunt æqualia GH, & CF quadrata. Ergo, & lineæ GH, & CF. Quare cũ diametri sint æquales, æqualesque applicatæ, parametri quoque, vtpote æqualium applicatarum quadratis rectangulorum cum diametro latera erunt æqualia. Vndæ parabolæ erunt similes, & æquales, vt ex definitione.



EXPENSIO V.

De sectione Conoidis Hyperbolici per planas superficies.

COnoides Hyperbolicum recipit omnes sectiones planis diuersimodè illud secantibus; nempe circulum, Ellipsim, Parabolam, & Hyperbolam; de Circulo nihil dicemus, cùm pateat ex antecedentibus ostensionibus Circulum exhibere si planum secet Conoidem, Hyperbolicum parallelũ basi, & eâdem prorsùs demonstratio est, quam adhibuimus in Parabola. Vnde ad alias sectiones ostendendas accedimus.

DEFINITIO.

COnoides Hyperbolicum ab Hyperbola circa suum axem voluta formatur, & axis eius est idem, ac generantis Hyperbolæ.

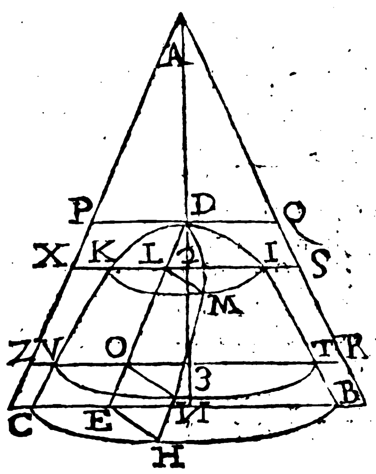
THEOR. I. PROPOS. XVII.

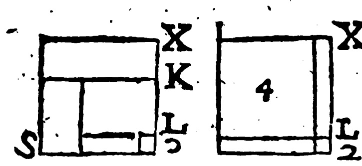
Si planum secet Conoidem Hyperbolicum parallelè ad asymptotum figuræ ex generatione; illa sectio est parabola.

SIt Conoides Hyperbolicum TDV, & figuræ ex generatione eidem TDV Asymptoti sint BA, & AC; sitque DE parallela Asymptoto AC; per quam agatur planũ DHE. Dico *figuram* DHE *esse Parabolã.*

Ad quod ostendendum constituantur ordinatim applicatæ parallelæ basi 2 K, & 3 V hinc inde, & extendantur vsque ad Asymptotos in X, & Z, R, S, & quia sunt parallelæ basi plana IMK, & TNV circuli erunt, sitque QP tangens sectionem parallela ipsi XS. Quibus perfectis erunt omnes æquales, atpote inter parallelas lineæ DP, LX, OZ.

Probatur igitur. Quoniam 2 X est secta, vtcumq; in L ex propos. 6. lib. 2. El. erit quadratum totius 2 X æquale duobus rectangulis ex segmentis 2 L, & LX, & quadratis ex ijsdẽ 2 L, & LX, vt in quad. 4. vides. Quadratum verò maius ex LX, quod sit æquale DP æquatur rectangulo ex KX, & KS, ex pr. 46. Tr. 24. quod facit gnomonem circa 2 K; siquidẽ 2S & KX integrat vnâ portione 2 X alteram sub altero latere KX, vt eodem modo rectangulũ ex LX, & LI faciet gnomonẽ conclusum prædicto gnomone ambiens quadratum ex 2L, vt in quadrato XS est videre. Quare quadratum X 2 æquabitur quoq; duobus rectãgulis vni ex SK, & KX, & alteri IL, & KL, vnâ cum quadrato 2 L, siquidem hæc omnia ambit quadratũ, cuius latus 2 S, vel 2 X. Si ergo auferatur quadratum paruum 2 L commune vtrisque, & gnomon, idest rectangulum XK, KS, & quadratum maius ex LX, quæ inuicem æquantur remanebit gnomon intermedius, nempe rectangulum ex LK, & LI æquale duobus rectangulis LX, & L2. Sed rectangulum IL, & LK æquat quadratum ML ex 35. lib. 3. Ergo etiam duo rectangula ex LX, & L2 æquabunt quadratum ML.





Idem dicas de rectãgulis duobus O 3, & OZ, quę æquabunt quadratũ ON. Et ideo erunt rectangula duo ex 2L, & LX ad rectangula duo ex 3 O, & OZ, vt LM quadratũ ad quadratũ NO. Ideoq; etiã erit medietas, nempe vnicum rectangulum ex 2 L, & LX ad medietatem rectangulum vnicum 3 O, & OZ, vt quadratum ML ad quadratum NO. Sed rectangulum ex 2 L, & LX ad aliud ex 3 O, & OZ est, vt basis 2 L ad 3 O basim ob eandem altitudinem æqualium LX, & OZ: basis verò 2 L ad basim 3 O est, vt DL ad DO. Ergo quadratum ML erit ad quadratum NO, vt DL ad DO, quę ex prop. 5. Tract. 24. est proprietas parabolæ.

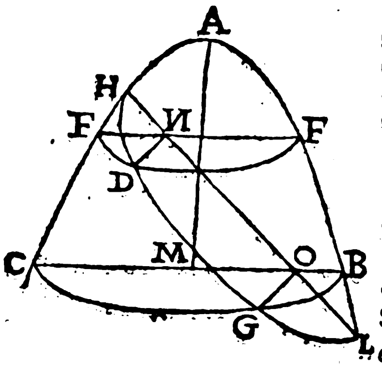
 THEOR.

THEOR. II. PROPOS. XVIII.

Omnis sectio conoidis Hyperbolici ad axem obliqua Ellipsim exhibet si secet vtrumq; latus sectionis per axem.

SIt sectum Conoides Hyperbolicum BAC duobus planis parallelis ad basim. Hyperboleque primitiuæ BAC normalibus FDN, & BGC, quæ secent planum aliud obliquum axi AM, & eidem sectioni primitiuæ normale HDGL. Dico hoc planum Ellipsim exhibere.

Probatur. Nam cum plana normalia sint ad hyperbolem primitiuam BAC sectiones DN, & GO erunt quoque normales propos. 16. Tr.22. quare rectangulum ex FN, & NE erit æquale quadrato DN, & rectangulum ex BO, & OC quadrato OG; Sed rectangulum ex FN, & NE est ad



rectangulum BO, & OC, veluti rectangulum ex HN, & NL est ad rectangulum ex OH, & OL ex prop. 48. Tr.24. Conic. Ergo rectangulum ex HN, & NL est ad rectangulum ex HO, & OL, vt quadratum DN ad quadratum OG: quæ est proprietas Ellipsium ex 5. Tract.24. Conic.

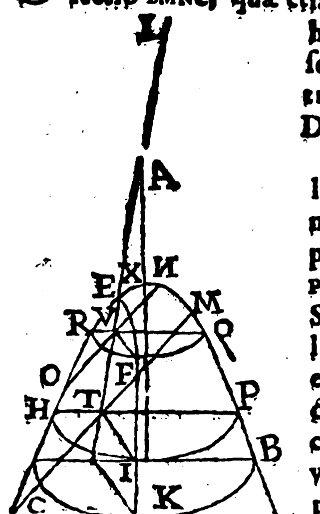
COROLLARIVM.

ELlipses parallelas in Conoide Hyperbolico esse quoque similes eadem autem figura est, quæ in parabolico Conoide, & eadem ostensio.

THEOR. III. PROPOS. XIX.

Omnis sectio Conoideos, quæ transeat per centrum hyperbolæ primitiuæ Hyperbolam format.

SIt centrum hyperbolę primitiuæ A, & ipsa sectio BMNC, quæ etiam exprimat Conoidem hyperbolicum, sitque sectio TEFI, quę producta transeat per centrum A. Dico *hanc esse hyperbolā.*



Sint plano Hyperbolæ primitiuę BNC normalia, & basi circulari parallela plana QFR, & PIH, ipsaque sectio TEI, Sit quoq; ei BNC normalis, & FV, & TI sectiones erunt normales intersectionibus QR, & PH. Ducantur postea applicatę VN, & TM diametro TA ad puncta V, & T.

Prob. Rectangulū ex VQ, & RV est equale quadrato V: Sic rectāgulū ex PT, & TH est ęquale quadrato TI. Ergo, vt quadratū ad quadratū, ita rectāgulum ad rectangulum. Sed rectangulum ex QV, & VR est ad rectangulum NV, & VO, ideft quadratum sunt enim ęquales, vtpote applicatę, veluti rectangulum ex PT, & TH ad rectangulum ex MT, & TC, ideft quadratū ex 49. Tr.24. Quadratū verò NV ad quadratū MT est, vt rectāgulū ex diametro transuersa LV, & VE ad rectāgulū ex TE, & LT ex pr.6. Tract.24. Ergo etiam ex 16. lib.5. quadratum VF ad quadratum TI, vt rectangulum LV, & VE ad rectangulum ex LT & TE, quę est proprietas Hyperbolarum ex prop.6. Tract.24. Conic.

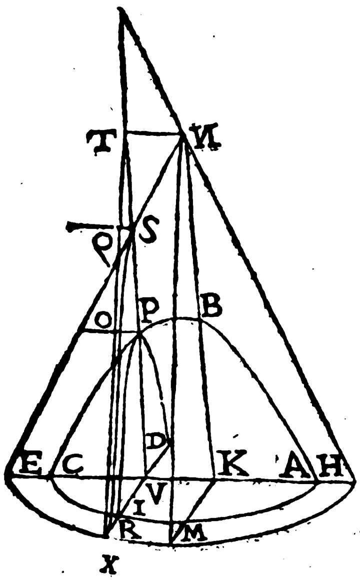
THEOR. IV. PROPOS. XX.

Asymptoti hyperbolæ in hyperbolico Conoide sunt ijdem, ac hyperbolæ in eodem plano existentis, & coni asymptotici sectione effectæ.

SIt Conoides hyperbolicum, atque adeo eius sectio per axem, & ex generatione ABC, cuius Asymptoti NE, NH; qui, & conū Asymptoticū forment NERH, sitque sectus tum conus HNE, tum conoides ABC plano VSR, in quo formentur duę ellipses, altera quidem SR sectione coni HNER effecta, altera DPI sectione Conoidis hyperbolici ABC producta. Asymptotus verò Hyperbolę conicę SR, sit TX.

Dico itaque TX asymptotum hyperbolę conicæ SR *esse quoque asymptotum hyperbolæ conoidalis* DPI.

Probatur. Nam superficies conoidis ABC semper quidem accedet ad superficiem coni



HNE, numquam tamen illam assequetur, eò quòd formetur à circumgiratione trianguli ex HNE asymptotis cōstituti, quibus hyperbola semper accedit, licet numquā assequatur ex prop. 44. tract.24. Quamobrem Hyperbola conoidalis DPI, vtpote in superficie conoidis existens cum ipsa superficie conoidis sęper quidem accedet, numquam tamen assequetur Hyperbolam SR conicam, & à superficie coni effectam, sed & SR semper accedit ad asymptotum suum TX, & numquam assequitur; Ergo etiam Hyperbola DPI accedet ad TX asymptotum, sed illum non assequetur. Quare etiam XT hyperbolæ conoidalis DPI erit Asymptotus, quod accedendo quidem ad SR accedentem ad TX accedat quoque ad TX; quam consequi non potest, cùm nec hyperbolam SR, quæ nec ipsa acquirere potest XT numquam obtinere queat.

COROLLARIVM.

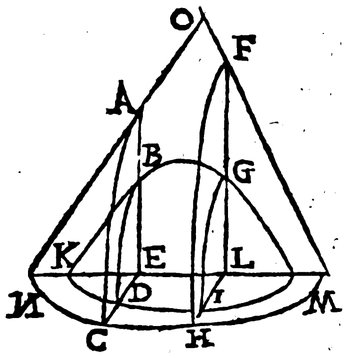
HInc est hyperbolas SR coni, & DPVI conoidis esse similes; quia cum habeant eosdem asymptotos ductis SQ, & PO erunt diametri rectę applicatę sub angulo recto ipsi axi VT; quare erit vt TS ad QS, sic TP ad PO. Vnde sectiones ex prop. 54. tract.24. similes erunt DPI conoidis, & SR coni asymptotici.

THEOR.

THEOR. V. PROPOS. XXI.

In Conoide omnes Hyperbolæ parallelæ sunt similes.

Sit conus asymptoticus MON hyperbolę primigeniæ KBC conoidis, & hyperbolæ in conoide LGI, & BDE, in cono autem FHL, & CAE. Dico DEB, & IGL *esse similes Hyperbolas*.



Probatur. Nam ex Coroll. prop. 20 huius DBE Hyperbola Conoidis est similis Hyperbolę CEA coni ex prop. autem 6. h. CAE est similis HFL hyperbolæ, & hæc ex Coroll citato hyperbolæ LGI: Ergo Hyperbolę ILG, & DBE sunt similes.

EXPENSIO VI.

De sectionibus Cylindrorum per planas superficies.

Cylindri quoque sectiones considerandę sunt, & quidem si Cylindrus basim circulum possideat, patet, sectiones basi parallelas esse circulos basi ęquales, sic si sit Ellipsis, patet quoque, omnes sectiones basi parallelas æquales esse Ellipses, quod ne in apertis immoremur per se manifestum præsupponimus, sicut, & omnem sectionem axi parallelā esse Quadratū, vel Rectāgulū, vel Rhombum, vel Rhomboidem in manifestis est. Igitur ea solummodo de Cylindri sectione afferemus, quæ minus clara sunt.

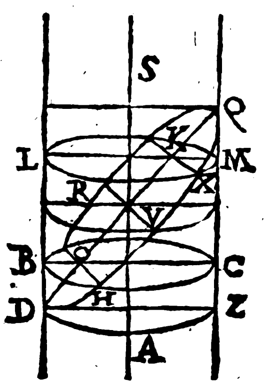
THEOR. I. PROPOS. XXII.

Si sectio fiat in Cylindro, cuius bases sint circuli ab aliquo plano obliquo axi, sectio hæc Ellipsim representabit.

Probatur. Nam illam proprietatem Ellipsium consequitur, quod habeat diametros inæquales, quos circulus non obtinet, & tamen, quod quadrata applicatarum ad diametrum sint inuicem in proportione illa, qua rectangula sub contiguis diametri portionibus comprehensa.

Nam quod sint duo inæquales diametri, patet: Quod VR sit diameter idem, qui basis Cylindri DZ, qui est circulus: at verò diameter QD longior erit, vtpote basis in rectangulo QDZ diametro circuli ZD.

Quod autem quadrata applicatarum ad diametrum QD quales sunt XK, & OH, se habeant ad inuicem, vt interceptarum diametri QD portionū rectangula, nempe ex QK, & KD ad rectangulum ex QO, & OD. Prob. Nam ex prop. 35. lib. 3. quadratum XK est æquale rectangulo ex MK, & KL; cùm in circulo sint ductæ; & idem dicas de quadrato OH, quod erit æquale rectangulo ex CO, & OB eò quòd sint quoque in circulo. At rectangula habent inuicem eam proportionem, quę ex lateribus componitur ex prop. 23. lib. 6. quare proportio rectanguli ex CO, & OB ad rectangulum MK, & KL componetur ex proportione CO ad MK, & OB ad KL. At proportio CO ad MK est eadem, quę QO ad QK ob parallelas MK, & CO in triangulo CQO: Et proportio OB ad KL est eadem, ac proportio OD ad KD. Eadem ergo erit proportio ex CO, & OB rectangulum ad MK, & KL rectangulum: quæ est rectanguli OD, & OQ ad rectangulum KQ, & KD, vtpote, quia hæc rectangula ex lineis dicentibus inuicem eandem proportionem sint composita: Sed illa rectangula nempe ex CO, & OB ad rectangulum MK, & KL dicunt eam proportionem, quam quadratum HO ad quadratum XK, cùm istis rectangulis ostensa sint ęqualia. Ergo etiam rectangulum ex OD, & OQ ad rectangulum ex QK, & KD, erit vt quadratum OH ad quadratum XK: quæ est proprietas Ellipsium ex propos. 6. tract. 24.



COROLLARIVM.

Omnes Ellipses parallelas in Cylindro esse æquales, patet; quoniam habent æquales axes ob earum parallelismum.

Vnde etiam patet, quòd, & si bases cylindri sint ellipses, esse quoque sectionem obliquam axi Ellipsim, eò, quòd ex 6. Tract. 24. sit Ellipsium æqualiū, vtpote: quod prò eadem computari possint BO, & OC rectangulum ad KM, & KL rectangulum, vt quadratum HO ad quadratum KX; quare etiam rectangulum ex OD, & OQ prædict ratione erit ad rectangulum DK, & KQ, vt quadratum OH ad quadratum XX. Vnde ex 6. Tract. 24. DHXQ Ellipsis erit.

TRACTATVS XXVI.

DE PROIECTVRIS PARS PRIMA.

De Orthographia.

PRoiectionum vsus amplissimus; tum horologijs, tum instrumentis mathematicis, V.g. Astrolabio, & Quadrantibus; tum Cosmographiæ in planum ad circulos longitudinis, & latitudinis proiciendos, & tandem, & maximè Architecturæ ad proicienda corporum, singularumque planicierum delineamenta perutilis. Et hinc prospectiuæ, cùm priùs illud, quòd iuxta diminutionem ocularis prospectus representatur in planum extendere oporteat, & ipsa quoque corpora, superficiesque in planum proicere.

EXPENSIO I.

Quid, & quotuplex sit proiectio?

PRoiectionis nomen diuerso sensu vsurpatur. Nā apud Vitruuiū, quidquid extra soliditatē, vel columnarum, vel parietum profertur; vt cornices Cymacia Coronides, basiumque crepidines proiectura appellatur, quòd extra soliditatem promineat, & quasi proiectum fuerit. At hic proiectionem dicimus figuram quandam in plano descriptam, quę rem, siue planam, siue solidam imitatur à plano, vel omnino, vel sut aliqua parte eleuatam. Aliqui verò, vt Aguilon lib. 6. Optices existimāt proiectionem pertinere ad Opticam, & esse Opticę partem: quod minimè concedimus: quare hęc quęstio instituta est, vtpote huius per necessarię operationis naturam perspectam habeamus.

DEFINITIO.

P*Roiectio est superficiei aliam ambientis in planum impressio.*

Solet definiri proiectio, quod sit *rei solidæ in planum transcriptio*. Verùm si hæc definitio, pro vt verba sonant, intelligatur, omnino impossibilitatem inuoluit: siquidem res solida nunquam potest in planum transcribi; sed solùm illius singulæ superficies: quibus super plannm descriptis; deinde res ipsa solida representatur; & licet hoc sensu intellecta, vera euadat; aptiùs tamen videtur definienda. *Impressio, aut vestigium alicuius superficiei in plano impressum, quæ aliam superficiem ambit, & ita illam aliquo modo representet*; Nam quòd propriè transcriptio non sit patet, quia circulus à plano eleuatus in planū proiectus per perpendiculares fit Ellipsis. Non potest autē dici per descriptionē Ellipsis trāscriptus circulus; qa alterius speciei figura est, quis enim affirmabit transcriptum hominem in figura, aut in effigie alicuius bruti?

CONCLVSIO I. PROPOS. I.

Duplex est proiectio, alia vocatur Orthographia. Alia Stereographia.

PRobat. auctoritate Mathematicorum, qui ita sufficienter diuisisse proiectionem arbitrati sunt, tum quia superficies, quę aliam ambit duplex solùm esse potest, nempe sibi, suisque partibus parallela, vt prisma, & Cylindrus. Aut non parallela, sed in vnum punctum contendens ad instar coni, aut Pyramidis; Si superficies illa sit parallela sibi, suisque partibus, dicitur eius impressio facta in plano orthographia: si verò sit ad modum pyramidis, vel coni in punctūque conueniat, dicitur Stereographia, Et hinc vtraque definietur.

DEFINITIO.

*O*Rthographia est superficiei in aliam incidentis in planum orthogonalis impressiō.*

Per hoc enim dicitur orthographia, à verbo gręco ὀρθὸς; quod est recta, quod scilicet illa superficies directè in planum incidat, & in eam imprimatur.

CONCLVSIO II. PROPOS. II.

Orthographia non nascitur à distantia oculi infinita, quæ lineas visuales rem visam lambentes orthogonaliter in planum imprimat: Est con Franciscū Aguilon lib. 6. opticor. in præfat. ad prop. 16.

PRobatur. Nam lineæ visuales numquam sunt paral-

parallelæ, sed in oculum tandem coniunguntur. Dices. Quod data infinita distantia fierent parallelæ. Respond. negando. nam primò non est hæc distantia possibilis,& ideo frustratoria est suppositio, & absurda; secundò etiam si daretur nulla fieret visio, quę determinatos limites habet; quia si infinitè distaret oculus, etiam infinita rei visæ fieret diminutio; sed infinita diminutio in nihil terminat; Ergo nihil videretur. Tandem neque ea distantia data lineæ essent parallelę; quia semper essent lineę visuales; quę essentialiter in oculo conueniunt. Neque dicas esse parallelas putatiuè,& iuxta ęstimationem; Quia licet id esset verum quoad praxim, non tamen abstractè, & spectata linearum visualium naturâ: Mathematici verò de abstractis loquuntur, vt dictum est tract. 3. expens. 2.

DEFIITNIO III.

Stereographia est superficiei in punctum terminantis, & aliquam aliam superficiem ambientis impressio in plano.

CONCLVSIO III. PROPOS. III.

Stereographia non nascitur ab intuitu oculi, cuius lineæ visuales transeuntes pèr corpus aliquod in subiecto aliquid describant. Est contra Aguil. lib. 6 Optic. passim Stereographiam oculo tribuentem.

PRobatur primò. Quia, vt ostendemus, si Deus dederit, cùm de prospectiua agemus, Oculus debet esse remotus à rebus, quas videt, cum ex Arist. sensus super sensibile non faciat sensũ. At verò Centrum Stereographum admittitur super ipsam spęram: vnde illud punctum non potest pręsupponi pro pupilla, cum pupilla super sphęram nihil omnino videret.

Probatur secundò. Quia alio modo planum stereographum se habet, ac planum; quo res visę describuntur, nam hoc interponitur inter centrum concursus linearum coni, & rem describendam: illud verò in planum collocatur post rem describendam, vt sit priùs centrum, deinde res describenda, & tandem planum, in quo describenda est.

Probatur tertiò. Manente re visa, & oculo in eadem distantia, si planum mutetur res eodem modo oculis apparet,& tamen in ipso plano lineæ à puncto, in quo est oculus, ductę aliam descriptionem faciunt priori, quæ cum res erat immota, imprimebatur dissimilem. Ergo descriptio hæc non pendet ab oculo: sed à subiecto,& à puncto, quod siue sit oculi, seu sit quodcumque aliud punctum, à quo proiectrices proueniant, & perstringentes corpus describendum in subiectum, in quo facienda est descriptio, se conferant.

Probatur quartò. Quia Stereographia repręsentat omnes superficies corporis,tum superiores, tum inferiores, & quascumque alias; quod non facit oculus. Nam solum extrinsecum ambitum rei,quem lineę visuales lambunt in subiecto retrò rem visam manente intuetur descriptum.

CONCLVSIO IV. PROPOS. IV.

Tria Proiectionem immutant, situs rei, situs plani, & eorum distantia.

PRobatur de situ, tum rei, tum plani. Quia,vt patebit, diuersimodè res situata, vel planum collocatum descriptionem variat superficierum;ita vt transferat, etiam, & in alteram speciem lineas superficies, angulosque commutet. Distantia quoq totius subiecti, licet in Orthographia nihil immutet; in Stereographia tamen valdè figuras alterat, & in diuersam magnitudinem diducit.

DEFINITIO IV.

Linea, vel planum primigenium est illud: quod repræsentandum proponitur.

DEFINITIO V.

Lineæ proiectrices, vel superficies sunt à terminis lineæ, vel plani primigenij discedentes,& in subiectum planum, in quod proiectura cadit; terminantes.

DEFINITIO VI.

Planum proiectorium, & illud: quod proiectionem recipit.

EXPENSIO II.

De Orthographia Partium superficiei.

PRiùs agemus de orthographia, quam de stereographia,cùm sit facilior, & vt eius sternamus fundamenta,in primis de partibus superficiei agemus; nempe de puncto, lineis, & angulis.

Præassumptum. Licet orthographia, etiam lineis plano non perpendicularibus: sed cum eo certum,& semper æqualem angulum facientibus V.g. 30. Grad. posset operi demandari. Sic enim omnes lineę sub eodem angulo incidentes in planum essent parallelę posset colligi ex Tr.22.de sectionibus planorum.

Veruntamen hoc sensu orthographia non sumitur: nisi aliquando necessitas postulet. Sed sẽper intelligitur fieri p perpendiculares ipsi plano; tum quia certiores sunt, tùm quia finis orthographię est loca corporum, situationesque reperire,quę videntur esse illę,ad quæ corpora suo ipso pondere feruntur; pondus verò orthogonaliter in subiectum planum incidit.

THEOR. I. PROP. V.

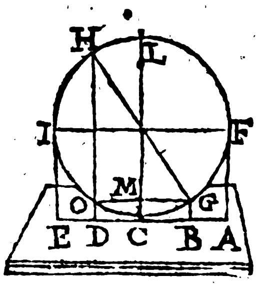
Linea parallela plano subiecto in lineam æqualem proicitur, non parallela, seu curua in lineam breuiorem; perpendicularis in punctum.

PArs 1. Probatur. Lineę proiectoriæ EI, & AF proicientes lineam AF incidunt in planum

AB

AE ex hypotheſi orthogonaliter; Ergo etiam ipſi lineę AB, & conſequenter lineę plano parallelæ proiciendę FI; cùm linea proicienda parallela in prima parte propoſ. ponatur plano, & ideo lineę AE. Ideoq; angulos rectos efficiet ad F,& I. Vnde AI FE erit parallelogrammū ex def. 25. tr. 3. ſiquidē in eodem plano lineę erunt ex propoſ.2. tract.22. Ergo ex propoſ.33. lib.1. Elem. lineę FI, & AE erunt æquales.

Probatur ſecunda pars. Et ſit linea proicienda GH obliqua plano EA.



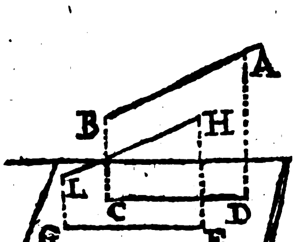
Cum GH, & GO, & OH, & BD ſe ſecent ex propoſ. 2. cit. erunt in eodem plano. Itaque ponatur; quòd GO faciat angulum rectum cùm Orthographicis V.g. OH; erit itaque GHO triangulum, cuius angulus O rectus, & ideo maior alijs; ideoque baſis ſubtenſa maiori angulo recto maior cruribus ex propoſ.19.lib.1.Elem. Perinde GH proicienda linea obliqua erit maior crure GO, quod eſt æquale lineę proiectæ BD.

Tertia pars quoque patet. Quod proiciatur linea plano perpendicularis in punctum. Quia LM orthogonalis, ſed etiam orthographica LC tranſiens per ipſam orthogonalis eſt. Ergo cum ipſa eadem eſt: ſed omnis linea in planum incidens imprimit punctum: Ergo etiam LM in planum proiecta imprimet punctum C.

THEOR. II. PROPOS. VI.

Lineæ parallelæ, aut in eodem, aut in diuerſo plano, licet obliquæ ſint plano orthographo, in lineas parallelas proiectæ tranſeunt.

Sint lineæ AB, & HL, aut in eodem, aut diuerſo plano. Dico eas in parallelas, proiectas profundi CD, & EG. Nam proiectrices AD, & HE, ſicut, & CB & LG ex prop.7. Tract. 22. ſunt parallelę, & AB, & HL ex hypotheſi. Ideoque ex propoſ.13. eiuſdem Tract. etiam ſuperficies per eas ductæ AC, & HG erunt parallelæ: Ideoque ex propoſ.14. eiuſdem Tract. ſectiones CD, & EG, vt à ſuperficiebus æquidiſtantibus factæ erunt parallelæ.

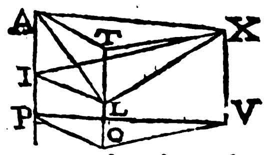


THEOR. III. PROP. VII.

* *Omnis angulus in triangulo omnibus cruribus parallelis plano orthographo proicitur in angulum æqualem: At cruribus non parallelis, & baſi parallela obtuſior proiectus erit.*

Ac cruribus non parallelis angulus proiectus erit acutior, qui lateri magis obliquo opponitur.

Sit AXT angulus proiciendus, & ſint crura omnia AX, & TX, & TA parallela plano POV. Dico angulum OVP proiectū eſſe æqualem angulo AXT. Patet, quia cum ſint ſuperficies proiectrices VOXT, & XVAP ex Theſi perpendiculares plano orthographo POV, ideoq; etiā erunt plano parallelo AXT proiciēdi anguli, ideoque angulus AXT, & PVO ex propoſ. 4. Cor. 2. tract. 22. erunt anguli inclinationis, qui ex 18. Tr. 22. vbique ſunt æquales quocumque loco inter plana inclinata accipiantur.



Probatur 2. pars, quia triangulum IXL habens baſim IL parallelā plano VOP magis accedet ad ſectionem XV ſuperficierum proiectricum, ergo maiorē angulū cauſabit, quam ſi non accederet, ſed rectangulè ſe haberet, vt AXT ex prop.22.tract.22. ſed rectangulè ſe habens cum ſectione VX ex parte prima propoſ. h. angulum proiectum eundem effecit. Ergo IXL angulus baſi parallela, & cruribus obliquis maiorem angulum OVP efficiet.

Probatur 3. pars. Quia quò minus obliquè incidit angulus AXL eo maiorem angulum inclinationis cauſat ex prop.22. tract.22. Ergo quò magis obliquè intercipietur, ideſt quantò magis inclinabit ad proiectrices ſuperficies, eò erit angulus inclinationis planorum PVO acutior; ſed angulus inclinationis planorum eſt angulus proiectus, vt p. 1. h. pr. Ergo quò magis inclinabit eò faciet angulum proiectum acutiorem.

COROLLARIVM.

Elicies tamen, quod ſi alterum crus anguli recti ſit parallelum plano etiam ſi obliquo altero crure; ſemper in angulum rectum proici. Eo quia ſi XAT parallelo plano exiſtens ponatur angulus rectus linea XA incidet, ne dum in lineam TA normaliter. Verùm defin. 2. Tract. 22. in omnes ab A procedentes in ſuperficie TAOP exiſtentes, vt in AL: quare XAL angulus rectus ſicut XAT, ſed XAT facit angulū rectū proiectū ex pr.7. h. vtpote in plano parallelo ipſi plano orthographico, ergo, & XAL obliquuo crure proiectus fiet angulus rectus.

EXPENSIO III.

De proiectione ſuperficierum in genere.

Viſis partibus ſuperficierum, nempe lateribus, & lineis; modo ipſarum figurarum proiectiones ſunt inſpiciendæ.

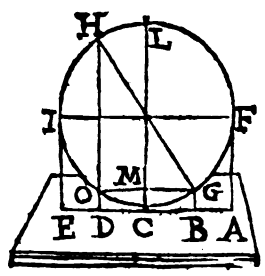
THEOR.

THEOR. I. PROPOS. VIII.

Omnis superficies plano perpendicularis in planum proiecta transformatur in lineam æqualem lineæ parallelæ plano, quæ inter lineas proiectorias intercipiatur.

SIt V. g. superficies circulus LFMI, lineęque extremæ proiectrices, quę lambant extremos margines superficiei sint, FA, & IE, interque eas intercipiatur linea FI. Dico, quod AE æqualis ipsi FI est proiectio circuli.

Probatur primò, quod proiectio superficiei perpendicularis, sit linea; Omnis superficiei sectio linea est, propos. 3. tract. 22. Quamobrem superficies proiectrix in plano Orthographico lineã imprimet. Sed cũ superficie perpendiculari proicienda LFMI est eadem superficies proiectrix. Ergo lineã tantùm imprimet. Quòd verò sit eadem cum superficie proicienda proiectrix superficies,



patet; quia cum ambæ sint perpendiculares, & per eius extrema FI transeat necessariò vna superficies sit; quòd si non esset vna superficies; super superficiem posita superficies faceret grassitudinem, quod contrà conceptum superficiei est.

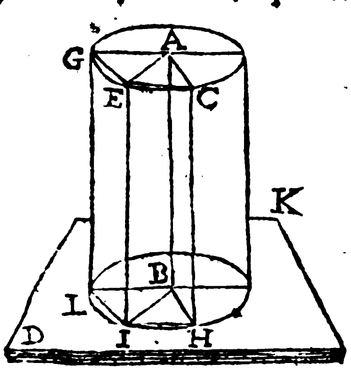
Probatur secunda pars. Nam illa erit longitudo lineę proiectæ AE, quæ latitudo superficiei rectangula. Neque enim potest esse longior, quia excederet superficiem proicientem; Ergo erit æqualis lineæ FI, quę inter proiectrices lineas AF, & EI orthogonaliter intercipitur.

THEOR. II. PROPOS. IX.

Superficies parallela plano in æqualem, & eandem specie superficiem proicitur.

PRobatur, & exemplum sit circulus, ex quo licebit argumentari ad quamcumque aliam figuram.

Sit itaque circulus CEG, cuius centrum A, perque eius circumferentiam CEG transeat superficies proiectrix, quæ circa illum curuabitur, vt superficies cylindrica, eique erit orthogonalis, cùm sit perpendicularis plano KD, cui circulus ponitur parallelus, & ideo EI, GL, CH, & axis BA plano KD ex hypothesi perpẽdiculares, erũt parallelæ ex 7. Tr. 22. & æquales. Ergo lineæ coniungẽtes AB, & EI ex propos. 33. lib. 1. æquales erunt; sic CA, & BH, sic AG, BL, & sic quælibet aliæ: sed AG, AE, & AC suis extremis sunt in circumferentia circuli; ergo etiam BH, BI, & BL.



Et idem erit de qualibet alia figura, v. g. si in circulo descriptũ sit octangulum, aut triangulũ, aut etiam sine circulo; vt patet in figura ACEO, & ei æquali BHIL, proiectæ in planum KD.

THEOR. III. PROPOS. X.

Partes cuiuscumque superficiei, vel laterum eius, quæ in lineam proiectæ fuerint, in ipsa linea proiectionis distinguere.

SIt proicienda pars FG V. g. circuli FLMI fig. pr. 5. vel 8. in planum; ducantur, à punctis terminantibus perpendiculares FA, & GB, eritque factum, quod desideratur.

Patet, quia omnis linea, seu curua, seu recta orthogonalibus plano in lineam proicitur. Ergo etiam pars FG in lineam AB proiecta erit, cum FA, & GB proicientes sint perpendiculares.

De partibus verò lineæ orthographo plano parallelę non est difficultas vlla, cùm ex propos. 9. demonstrauerimus OM, & CD esse æquales, vnde figura proiecta diuidenda erit iuxta æqualitatem partium figuræ primigeniæ.

EXPENSIO IV.

De superficiebus rectilineis proyciendis.

VSque huc facilia tradidimus, & quasi principia exhibuimus; nunc autem ipsam artem tractamus; & de proiectione superficierum rectilinearum agimus; non quidem cum omnium eorum latera sunt parallela plano, neque, cum ipsa superficies est ei perpendicularis; satis enim de hoc vniuersaliter egimus antecedenti expens. sed modo, aut cum tantùm vnicum, aut alterum latus superficiei est plano parallelum, aut nullum, sed omninò à parallelismo discrepat.

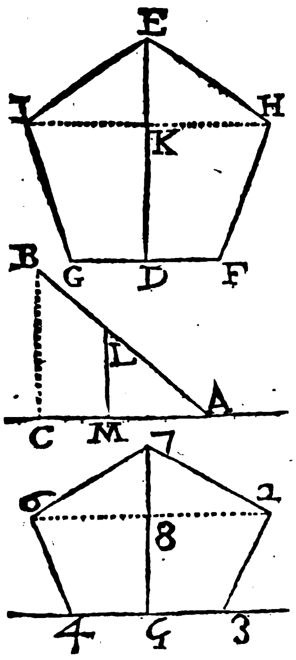
THEOR. I. PROPOS. XI.

* *Superficiem rectilineam, cuius vnum, vel alterum latus sit parallelum plano orthographo, in planum proicere dato angulo inclinationis.*

IAm notum est, quinam sit hic angulus inclinationis ex def. 4. tract. 22. nempe linearũ, quæ cùm sectione, quam imprimit in plano superficies ei inclinans, angulos rectos faciũt, & licet multoties planum proiciendum planum orthographum non secet; adhuc tamen si extenderetur, cum ad illud inclinet, tandem secaret, eique sectioni latus plano parallelum, parallelè se haberet ex Cor. 3. propos. 4. Tract. 22. Vel planum orthographicum accedere posset ad figuram proiciendam, & tangere secundùm latus parallelum. Huic ergo contactui, quem faceret, lineę perpendiculares

altera

altera in vno, alia verò in altero plano existentes, angulum inclinationis constituunt, quem angulum notum præsupponimus; Et sit angulus A, cuius latus AB insistat perpendiculariter lateri GF figuræ proiciendę EHFGI nimirum lateri plano orthographo, ex hypothesi parallelo, & propterea sectioni, vt ex Cor. 3. prop. 4. tr. 22. de intersect. diximus. Ideoque perpendicularis DE in fig erit eadem, ac AB in angulo inclinationis. Transferantur itaque anguli pentagoni proiciendi I, & H, in lineam DE anguli inclinationis ope HK, & KI.



Deinde interualla DK, & ED transferantur in latus AB inclinationis; nimirum DK, in AL, & DE in AB, & à punctis L, & B deducantur perpendiculares ad AC existenti in plano orthographo, quæ incident in M, & C. Quia itaque FG ponitur parallela plano ex prop. 5. huius in plano delineata, & proiecta erit eiusdem mensuræ, nempe linea 34. & quia est quoq; 34. parallela lateri FG, ipsi linea AC anguli inclinationis erit perpendicularis, & omni lineę, quę sit parallela ipsi sectioni ex Coroll. 3. prop. 4. tract. 22. Linea verò 34. talis est, cùm sit, vt dixi parallela FG lateri proiciendo sectioni parallelo, & prop. 9. Ideoque linea 57. erit eadem, ac AC. Puncta itaque M & C in eam transferantur eodem interuallo ab A, & fint 8. & 7 & per 8. parallela agatur lateri 3 4 & fit 2.6. Et quia HK, & KI cùm fit paralla lateri FG, est etiã parallela plano ideo in figura proiecta, & genita erit ei ęqualis 2 8, & 8 6. Coniungantur itaque puncta 2 7. 6. 3. 4. rectis, & iam erit pentagonum proiectum.

Quod patet ex ipsa operatione; simul enim operando ipsam operationem ostendimus. Nam puncta H, & I à media DE non sunt immutata, quo ad distantiam, quia distantia eorum mensuratur per parallelam KI sectioni DB, & plano, ideoque ex propos. 5. huius manet eadem. At verò distantia à sectione FG, cum per DE mensuretur, quæ non est parallela plano, decurtata est iuxta prop. 5. eo decremento, quod à perpendicularibus LM, & BC exhibitum est in linea AC plano orthographo ducta & pũcta 2 3 4, & 6 sunt illa ipsa, quę lineę orthographicè LM, & BC imprimerent, cùm tum quoad latitudinem, tum quoad longitudinem, ac puncta M, & C distent à lineis, & 3 4. & 7 5.

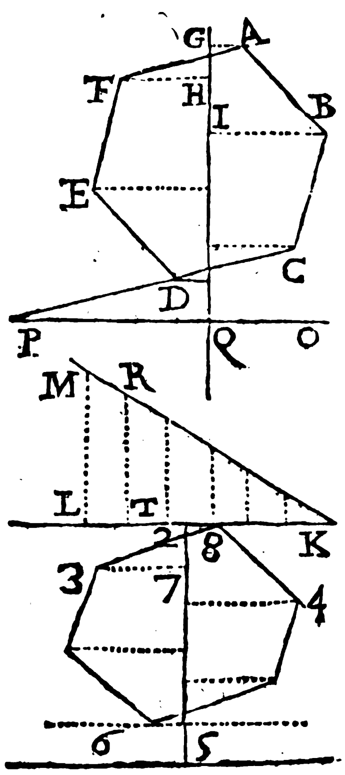
THEOR. II. PROPOS. XII.

* *Superficiem rectilineam, cuius nullum latus sit parallelum plano orthographo; dato angulo lateris figuræ cum sectione, & inclinationis plani proicere.*

* SIt Sexagonum ABCD, & cęt. & angulus inclinationis datus K, & sectionis PO cum latere DC angulus, quòd enim nullum latus sexagoni sit plano parallelum, neque erit ipsi sectioni. Quoniam, si esset aliquod latus sectioni, esset etiam parallelum plano, vt ex Coroll. 2. prop. 4. de intersect.

Ducatur GQ perpendicularis sectioni, eique à singulis angulis ducantur perpendiculares AG, & FH, & BI, & cęt. quę cum sint perpendiculares GQ, erunt parallelæ sectioni, quæ quoque illi orthogonalis est; ideoque eorum longitudines erunt æquales longitudinibus linearum proiectarum ipsas exprimentium ex prop. 5. h.

Distantiæ verò angulorum normales in linea QG à sectione PO notentur punctis G, H, I, & cęt. Quia igitur QG, vtpote perpendicularis, sect est linea anguli inclinationis ex def. 4. tr. 22. Ideo stabit loco lineæ KM, & ideo in linea KM à K transferenda sunt omnia interualla QG & QH, & QI, & cęt. quæ erunt KM, & KR, & cęt. Ductis itaque perpendicularibus ML, & RT, & cęt. habebimus omnes prędictas distantias angulorum à sectione; sed in linea KL, quę est in plano orthographo, nimirum KL, & KT, & reliquas perpendicularibus translatas. Ideoque ducta rursùs sectione 5 6 perpẽdicularem ei faciemus lineam 5 2, quæ exprimet alterum latus anguli sectionis KL, transferemusq; decurtatas angulorum distantias KL in 5 2, KT in 5 7, &c.



perque puncta 2, 7, & alia ducemus punctatas 2 8, & 7 3, & similes: quæ exprimunt in figura transferenda lineas AG, & HF, & reliquas, quæ vt diximus sunt eiusdem longitudinis, cum sit parallelę plano orthographo, ac ipsę in plano proiectæ ipsarum vicarię; ideoque linea vicaria 2 8 erit æqualis lineę AG, & linea 7 3 lineę HF, & sic de reliquis: Igitur per omnia puncta terminantia ducantur rectæ, & illæ latera sexagoni proiecti efficient.

Probatumque id est in ipsa serie proiectionis; dum singularum operationum ratio reddita est.

COROLLARIVM.

IN omnibus figuris proiectis plano non parallelis angulos, lateraque variari, obliquioraque latera magis decurtari, vt ex propos. 5. huius potest colligi. Et angulos, quorum latera opposita magis obliqua sunt minores fieri; Quorum verò aliquod latus parallelum plano orthographico fieri maiores iuxta ostensa propos. 7.

EX.

EXPENSIO V.

De proiectione superficierum circularium.

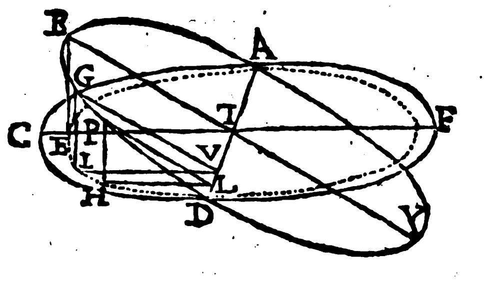
NVnc de curuilinearum superficierum proiectione sermo est, quæ immensos vsus habet, tum in Gnomonica, tum in Architectura, tum in Prospectiua. Ideoque sicut digna studio, sic non difficilis euadet, illis, qui precedentia legerint de sectionibus corporum, & maximè conorum.

THEOR. I. PROPOS. XIII.

Proiectus circulus obliquus plano orthographo Ellipsis est.

SIt circulus ABD inclinatus ad alium, seu circulum, seu quodcumque aliud planum ACD orthographum, & superficies proiectrix perpendicularis plano, quæ rectis BE, & GI, & PH exprimatur *hac signabit in plano* ACD *Ellipsim* AED.

Trahantur ex punctis G, P perpendiculares diametro GV, & PL. Rursusque VI, & HL coniungentes puncta incidentiæ, tum proicientium, tum perpendicularium sectioni AD.



Probatur itaque propos. . Linearum VI, ad LH applicatarum quadrata dicunt ad inuicem eam proportionem, quam ex AV, & VD rectangulum ad rectangulum ex AL, & LD.

Quoniam VG est applicata ad diametrum. Vnde ex propos. 35. Elem. lib. 3. erit eius quadratum æquale rectangulo ex AV, & VD; Et tale erit ob eandem rationem quadratum LP æquale rectangulo ex LA, & LD ex eadem propos. 35. lib. 3. Elem. Sed cum triangula VGI, & LHP sint æquiangula ob latera parallela, quibus ambiuntur ex propos. 15. Tract. 22. & propos. 18. ita erit VG ad LP, vt VI ad LH, & ita quadratum ex VG ad quadratum ex PL, vt quadratū ex VI ad quadratū ex LH ex 20. l. 6. Ergo quadratum ex VI ad quadratū LH habebit eam proportionem, quam rectangulum ex AV, & VD ad AL, & LD rectang. quæ est proprietas, tum Ellipsium, tum circulorum ex pr. 6. Tr. 34. sed circulus esse nequit, cum semidiam. ET sit minor; quam semidiameter circuli TD; Ergo erit Ellipsis circumferentia, quæ per puncta H, & I transit, & sic dicas de quibuscumque alijs punctis.

THEOR. II. PROPOS. XIV.

* *Proiectura Ellipsis, aut circulus est, aut Ellipsis, si sit obliqua plano orthographo.*

SIt ABD Ellipsis in fig. prec. & supficies pIectrix ab ipsius ambitu decidat in planū subiectum; quæ exprimatur rectis GI, & PH, & quibuscumque similibus plano ACD perpendicularibus, ab eiusque incidentia formetur circumferentia AEID. Dico *hanc aut esse circulum, aut esse Ellipsim*.

* Probatur. Ductis, vt supra rectis VG, & LP, & perpendicularibus ad sectionem AD, quæ erunt parallelę, & VI, & LH coniungentes puncta incidentiæ V, I, & L, H simul, ob parallelismum triangulorum VGI, & LHP, quod in anteced. prop. ostensum est, VG est ad LP, vt VI ad LH. Sed quadratum ex VG ad quadratum ex LP, est vt rectangulum ex interceptis diametri portionibus AV, & VD ad rectangulum AL, & LD. Ergo etiam erit quadratum ex VI ad quadratum ex LH, vt rectangulum ex AV, & VD ad rectangulum ex AL, & LD: Ergo *permutando*, quoque erit quadratum ex VI ad rectangulum AV, & VD, vt quadratum LH ad rectangulum AL, & LD. Vel igitur quadratum ex VI dicit proportionem ęqualitatis ad rectangulum ex AV, & VD, vel nō. Si dicit proportionē ęqualitatis. Ergo etiā quadratū LH dicet proportionē ęqualitatis ad rectāgulū ex AL, & LD ex 12. l. 5. Quare AED erit circulus ex propos. 35. lib. 3. Elem. Vel non dicunt, & sic erit Ellipsis, cùm vt Ellipsis in se se redeat, & cō sequantur eius diametro AD applicatarū quadrata eā proportionem, vt rectangula ex interceptis diametri portionibus, quam requirit propos. 6. Tract. 34 Si enim est VI quadratum ad rectangulum AV, & VD, vt quadratum LH ad rectangulum ex AL, & LD: Ergo *permutando* erit VI quadratum ad LH quadratum, vt rectangulum AV, & VD ad rectangulum AL, & LD: quæ est conditio ad Ellipses requisita.

Intellige verò propos. etiam si sectio, quam facit cum plano non sit diameter, nec maximus, nec minimus, sed aliquis intermedius.

THEOR. III. PROPOS. XV.

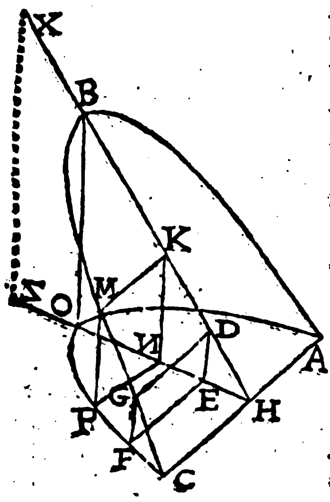
* *Situs, seu proiectio parabolæ parabola est.*

DEtur ABC parabola, & eius proiectio AOC. Dico *hanc proiectā figurā esse quoq; parabolā.*

Ducatur diameter BN orthogonalis sectioni AB, eiusq; pIectio ON facta à pIectrice superficie BON, & ab eo applicatę DG, KM, & à punctis D, & G, & K & M earum extremis proiectrices descendant DE, & GF, sicut, & KN, & MP, connectanturque puncta incidentiæ E, F, sicut P, N proicientium, rectis, quę sint FE, & PN, & rursus per puncta E, & O recta BO.

Probatur progr. I. Nam applicatę EF, & DG, vtpote quòd DG sit parallela plano ęquales sunt ex propos. 5. huius. Sic etiam applicatæ KM, & PN ob eandem rationem: Sed vt est DB ad KB diametri portiones, ita ex 5. pr. tr. 24. est quadratū applicatarum DG ad quadratum KM, ergo etiam erit portio DB ad portionem KB, vt quadratum EF ad quadratum NP. Quo supposito.

Progr. 2. vt est HB ad HO, ita est HD ad HE, quare etiam erit residuum DB ad EO, vt totum HB ad totum HO ad 22. l. 5. Et pariter, vt HB ad HO, ita est HK ad HN, vnde erit etiam ex prop. 22. lib. 5. Elem. residuum KB ad residuum NO, vt totum HB ad totũ HO. Ergò ex 16. lib. 5. ita erit DB ad EO, vt KB ad NO, cùm eidem rationi, quę est inter HB, & HO sint eędem rationes. Quare *permutando* erit DB ad KB, vt EO ad NO: Sed vt DB ad KB, ita est quadratum ex DG ad quadratum ad KM, & quadratum ex EF ad quadratum ex NP ex progr. 1. Ergo vt EO ad NO interceptæ portiones, ita est quadratum EF ad quadratum NP, quæ est proprietas Parabolæ ex prop. 5. Tract. 24.



THEOR. IV. PROPOS. XVI.

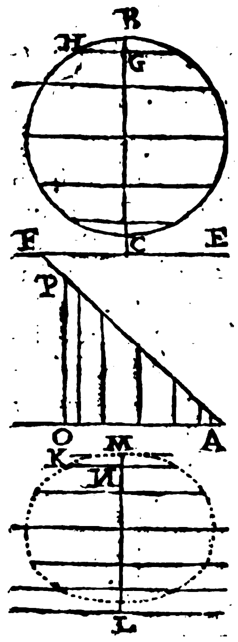
* *Proiectio Hyperbolæ Hyperbola est.*

SIt Hyperbola ABC in fig. superiori, cuius proiectura AOC. Diameter HB perpendicularis sectioni AC, transuersaq; XB. Applicatę verò DG, & KM. Deducanturque DE, & KN, & BO, nec non & MP, & GF proiectrices, & item XZ quæ extremum transuersæ diametri X proiciat in Z, ducaturque ZH, quę transibit per puncta O, N, E, vt ex propos. 10. huius constare potest, cum diameter tota, sit proiecta in HZ, eiusque partes sint in E, N, & O, connectantur tandem puncta FE, & PN. Cùm itaq; lineæ GD, & KM applicatæ sint parallelæ sectioni, erunt etiam parallelæ plano orthographo ex Coroll. prop. 4. Tract. 22. Ideoque ex propos. 5. h. EF, & NP erunt eis æquales.

Probatur. vt est rectangulum ex XD, & DB ad rectangulum ex XK, & KB, ita est quadratum DG ad quadratum KM; Sed superiori propos. argumentati sumus, vt est XH, ad HZ, ita est DH, ad HE, & HB ad HO, ablatis ergo proportionalibus HD, & HE; residua remanebunt proportionalia, ex prop. 22. lib. 5. Elem. ideoque erit DX ad EZ, ita DB ad EO, nempe in ea proportione, ac sua tota XH ad HZ, ideoque *permutando* erit DX ad DB, vt EZ ad EO, & eadem ratione, vt XK ad KB, sic ZN ad ON. Ergo etiam rectangula ex lateribus proportionalibus istis composita ex propos. 26. lib. 6. erunt proportionalia. Ideoque erit rectangulum XD, & DB ad rectangulum ZE, & OE, vt rectangulum XK, & KB ad rectangulum ZN, & NO: Quare *permutando*, vt rectangulum XD, & DB ad rectangulum XK, & KB. Ita rectangulum ZE, & OE ad rectangulum ZN, & NO. Sed, vt est rectangulum XD, & DB ad rectangulum XK, & KB, ita quadratum in Hyperbola ex applicatis DG ad quadratum KM, & ideo, vt quadratum ex EF æqualis, vt supra dictum est ipsi DG ad quadratum ex NP æquali ipsi KM. Igitur ex 16. lib. 5. erit, vt rectangulum ZE, & EO ad rectangulum ex ZN, & NO, tale quadratum EF ad quadratum PN, quæ est proprietas Hyperbolarum, vt ex propos. 6. Tract. 24.

COROLLARIVM I.

HInc efficies modum proiciendi omnes figuras flexas regulares: nempe Circulos, Ellipses, Parabolas, Hyperbolas. Sufficit enim proicere diametrum sectioni perpendicularem, & basim parallelam sectioni, seu ipsam sectionem V. g. in fig. pr. 13. h. AD, & XB, vel in fig. pr. 14. si sit parabola AC, & HB: Si sit hyperbola AC, & HB, & BX. Data enim basi, & angulo, & diametro iam pr. 55. Tract. 24. docuimus describere, quamlibet ex istis figuris. Sicut etiam propos. 57 data gemina diametro intercepta in Ellipsi sectionis describemus proiecturam, & poterimus quoque vti alijs modis prædictis, tum ex Tractat. 24. tum in ijs, quibus functi sumus in describendo figuras rectilineas dummodò plura puncta inueniãtur, & per extrema flexa æquali manu ducatur; vt potes videre in figura hic apposita, in quà dato angulo inclinationis OAP, & diametro CB perpendiculari sectioni FE ductis à partibus circumferentiæ, vtlibet V. g. 5. parallelis sectioni, & ideo plano orthographo, & eorum distantijs in AP translatis, & deinde proijcietibus lineis in AO deductis, quæ est in plano orthographo, & distantis OA, & cęt. in ML, & LN translatis ductisque perpendicularibus ipsi LN, vt NK, & cęt. & tandẽ longitudinibus GH in NK, & aliarũ applicatarum translatis in alias parallelas ipsi NK dabunt puncta, perque æquabili manu flexa linea deducta exhibebit Ellipsim, in quam transfunditur circulus, eo situ, quam exhibet angulus A, & planũ AP, in quo est circulus super planum OA pendulus; plura verò de is agemus, cum de superficiebus corporum proiciendis, & in planitiem redigendis sermo erit.



COROLLARIVM II.

*ELlicere hinc potes Cylindros parabolicos, & Hyperbolicos, qui superficie plana constant, & altera parabolica, seu Hyperbolica, vt figura ABCO pr. 15. h. satis representat sectiones esse hyperbolas, seu parabolas: quod euidens est ex præced. nam superficies proiectrix est eadem, quæ Cylindri Parabolici, seu Hyperbolici.

COROLLARIVM III.

HInc deducitur, quod quocumque situ planum Horthographum secet parabolicum, seu Hyperbolicum primigenium semper figura eiusdem speciei describetur; quia illa sectio planorum poterit esse applicata in aliquo diametro secundaria: vnde semper omnes aliæ applicatæ ei erunt parallelæ, & eædem demonstrationes valebunt.

EXPEN-

EXPENSIO VI.

De speciali proiectura circuli in ordine ad sphæram proiciendam.

IN proiectione circulorum sphæræ scimus principalem aliquando diametrum proiciendi circuli, & punctum contactus alicuius paralleli cum illo, & Ellipsim illius circuli repræsentatiuam volumus exarare. Quapropter hanc Expens. specialiter ordinamus ad id rectè peragendum.

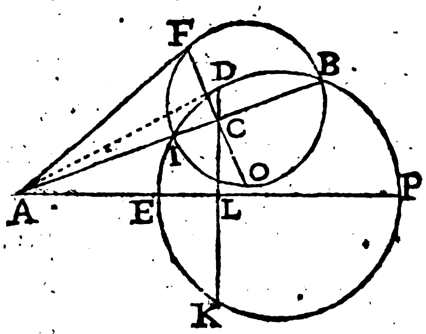
LEMMA PROPOS. XVII.

Si aliqua in circulo sit secta, vt pars maior sit ad minorem, vt tota cum adiecta aliqua ad adiectam extra circulum, etiam alia ab eius extremo in circulum cadens talis erit, si à puncto sectionis illius perpendicularis in hanc demitatur. Nam ita segmentum maius ab hac perpendiculari factum erit ad minus, vt tota cum adiuncta est ad adiunctam extra circulum remanentem.

SIt secans AB ita diuisa in C, vt BC ad CI pars maior ad minorem intra circulum existentes; sic tota BA ad partem exteriorem IA: Quod fiet ex tract. 15. propos. 23. si super BI fiat circulus, & ducatur AF tangens, & à contactu ducatur perpendicularis CF. Nam vt ibi demonstratur BC erit ad CI, vt BA ad IA. Si itaque secans BA talis sit, & ducatur AP per centrum, & à puncto C perpendicularis cadat in L. Dico, quod erit quoque PL maior ad LE minorem internæ partes, vt tota PA ad segmentum exterius EA.

Progress. 1. Probatur. Nam producta LC in D, & à D ducta punctata DA, hæc erit, vt ostēdam contingens. Vnde ex cit. Lemmate ita erit PL ad LE, vt PA ad EA.

Quod verò DA tangens sit ita probatur.



Quadratum ex CF, & CO æquale est rectangulo ex BC. & CI: Ideoque rectangulo sibi æquali ex 35. lib. 3. Eucl. DC, & CK. Huic ergo rectangulo ex CD, & CK comite ei quadrato CL æquatur CF, & CO quadratum cum eodem quadrato CL.

Progress. 2. Rectangulo verò ex CD, & CK addito quadrato CL æquatur quadratum LD ex 7. lib. 2. Elem. Ideoque CF, & CO quadratum cum quadrato CL erit æquale quadrato LD.

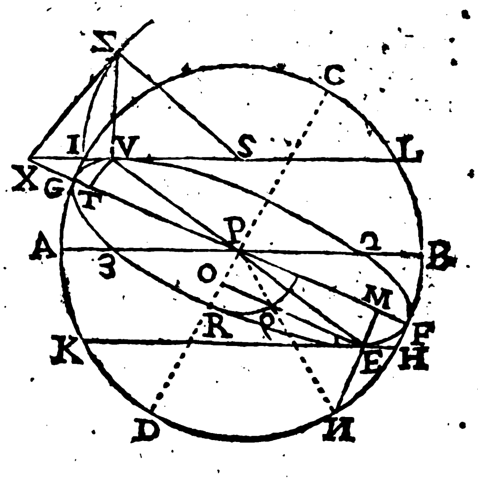
Progress. 3. Quadrata LA cum CL sunt æqualia quadrato CA ex 11. lib. 2. Elem. & hoc CA cum CF quadrato sunt æqualia quadrato AF. Ergo quadratum CF, & CO cum quadrato CL, & quadrato LA sunt æqualia quadrato FA.

Progress. 4. Pone loco duorum quadrati LC, & quadrati CF, & CO quadratū LD ex prog. 2. eis æquale, eritq; quadratum FA æquale quadratis LD, & LA. Sed ex 11. lib. 2. Elem. istis eisdem est æquale quadratum DA. Ergo hæc duo quadrata inuicem erunt æqualia: Sed quadratum FA est æquale ex 36. lib. 3. Elem. rectangulo ex BA, & IA. Ergo erit etiam æquale quadratum DA: Quare ex prop. 37. lib. 3. DA tangens erit.

PROBL. I. PROPOS. XVIII.

Dato situ diametri, & puncto circumferentiæ proiecto in aliqua proiectione sphæræ proiectionem circuli, qui per illud incedit inuenire.

DEtur proiectio alicuius sphæræ, vel circulorum in ea V. g. BCAD paralleli plano orthographo, BA perpendiculari maximo, LI, & FK perpendicularibus parallelis, & cet. In hac autem proiectione sit notus diameter circuli maximi FG, & punctum E, in quo tangit parallelum HK, & huius circuli proiecturam inuenire oporteat.



Ab E dato puncto descendat ad diametrum FG perpendicularis EM, & prolungetur in N circuli punctum, & à puncto N linea NP ad centrum tendat: Rursusque à puncto E parallela diametro FG ducatur EO, segabitque primo ductam in Q. Itaq; linea PQ erit æqualis semidiametro minori Ellipsis repræsentantis circulum per punctum E incedentem.

Probatur. Nam Tr. 24. Conic Probl. 2. Prog. 2. propos. 71. Ita est in Ellipsi alicuius circuli diameter maior DP ad minorem RP, vt applicata circulo NM ad applicatam Ellipsis EM, sed vt NM ad NE: Ita ex 2. lib. 6. Eucl. NP ad QP, ideoque ablatis NE, & NQ ex 19. lib. 5. Eu. vel ex 2. lib. 6. erit NM ad EM, vt NP vel æqualis DP ad QP, vel æqualem RD. Cum itaque obtineamus DP diametrum maiorem, & RP minorem, Ellipsim poterimus describere, trāseuntem per E applicatæ ME extremum ex dictis de Ellipsibus Exp. 19. Tract. 24. Conic. quæ per G, R, F quoque transeat.

PROBL. II. PROPOS. XIX.

Datis duobus diametris Ellipsim in plano circuli repraesentatiuam exhibere.

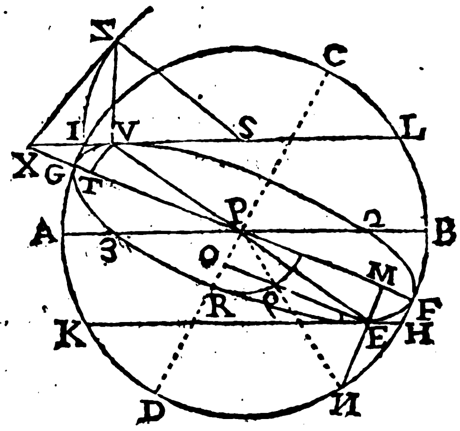
SInt dati duo diametri proiecti FG, & 23. Dico per illos duos diametros decurtatos Ellipsim nos posse describere, & hoc docuimus propos. 55. Tract. 24. Nam hic datur basis 23 diameter GF, & angulus ab istis factus 2 PM. Vnde Ellipsim iuxta doctrinam illius Problem. delineabimus.

PROBL. III. PROPOS. XX.

Dato puncto tantùm in aliqua sphaerae proiectura, per quod alicuius circuli transeat circumferentia, ipsam Ellipsim circuli expressiuam in plano consignare.

SIt datum punctum V in parallelo proiecto LI, oporteatque reperire diametri maioris situm, ex quo deinde cetera conficiantur, vt priùs.

Fiat, vt LV ad VI ita tota LX ad IX adiunctam, quod fiet ex tract. 15. prop. 22. si erigatur perpendicularis VZ; quae secet semicirculũ LZI, & ductâ ZS à Z, tangens ZX ei rectãgula ducatur, & LI producatur in X: Nam ex prop. 22. citati tractatus 15. ita erit LX ad IX, vt LV ad VI. A puncto deinde X ducatur per centrum P recta FX. Nam FG erit axis maior Ellipsis.



Probatur ex prop. 13. Tract. 24. Nam ducta VT applicata habebit eam conditionem, quę requiritur ad diametrum, & ad tangentem VX, erit enim FX ad GX, vt FT ad TG. Vnde FG erit diameter VX tangens; & VT applicata: Quod autem tota XF sit ad partem exteriorem GX, vt pars interna maior FT est ad minorem TG interiorem.

Patet ex Lemmate 1. huius. Quòd si LV ad VI, sic vt LX tota ad adiunctam IX; quod etiam talis erit FT intercepta ad TG, vt FX tota diameter cum adiuncta ad GX adiunctam, quod TV cadat ab V vbi perpẽdicularis ZV cadit, & FX ab extremo X ducta, quod est lineae diuisae, vt LV sit ad VI, vt LX ad XI.

TRACTATVS XXVI.

PARS SECVNDA.

De Stereographia.

QVamuis Stereographia possit in opus redigi puncto concursus linearum proicientium à re proiecta distante, sicut, & supra Orthographia per lineas plano non rectangulas exerceri, nihilominùs, quia Stereographia specialiter sphaerae circulis proiciendis instituta est, & in hunc scopum praecipuum ante omnia collimat; ideo concursus linearum proicientium in superficie ipsius sphaerae in primis sumitur. Quamuis etiam remotum ab ipsa re proiecta sumatur, cum de alijs rebus proiciendis, & etiam de ipsa sphaera, non tamen in ordine ad cęlestes motus, agitur.

EXPENSIO I.

De proiectura lineae.

HIc itaque lineas in circulo praecipuè considerabimus, vtpote, quod Stereographia sit ad proiectionem corporis sphaerici in ordine ad cęlestem sphaeram destinata, & quia corpus cęleste luminosum circa sphaerã se voluens, eiusq; circulos radijs incurrens tali modo vmbras eorũ in planum profunderet; hinc Stereographia inuenta, & ad id destinata; vt caelestes corporum opacorum proiectiones à luce effectas imitetur, cuius hic prima principia iactamus.

PRIN-

PRINCIPIVM.

IBi vniuscuiusque rei proiectio est, vbi lineæ proiectrices à puncto proiectionis obuenientes, & margines rei lambentes in planum incidunt.

Sic CD est proiectio lineę AB, quia lineę CI, & DI proiectrices extrema B, & A lambentes in planum CD incidunt, & ibi eius situm determinant respectu puncti A, & B in fig. pr. 1. seq.

DEFINITIO I.

PVnctum proiectionis dicitur, ad quod omnes lineæ extremæ rei proijciendæ lambentes concurrunt.

DEFINITIO II.

LIneæ verò proiectrices dicuntur illæ, quæ ab hoc puncto discedentes, extremaque rei proijciendæ lambentes in planum cadunt.

Talesque sunt IC, & ID.

DEFINITIO III.

PLanum Stereographum est illud, quod diuidens sphæram bifariam omnes lineas proiectrices terminat.

Poterat quidem planum Stereographum supponi sphæræ, sed cum stereographia instituta sit ad nobis exhibendas celestium circulorum vmbras, & nos simus in centro, planaque, quæ apud nos sunt, aut per centrum transeunt, aut ei proxima sunt insensibiliter respectu immensitatis sphærarum, hinc est, quòd planum stereographum per centrum agatur, & in eo circulus maximus sphæræ reperiatur.

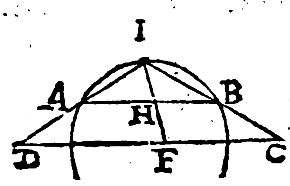
THEOR. I. PROP. I.

Linea plano Stereographo parallela in lineam maiorem proicitur, sed partibus proportionalibus correspondentem.

SIt linea in sphæra AB, & à puncto I descendant lineæ proiectrices CI, & ID, quæ intercipiant lineam proiectam CFD in plano Stereographo existentem.

Dico I hanc esse maiorem primigenia AB.

Patet. Quia est AB ad CD ob parallelismum linearum, vt BI ad CI. Sed CI est longior quam BI: Ergo etiam CD erit maior, quàm AB ex propos. 12. lib. 5. Elem.

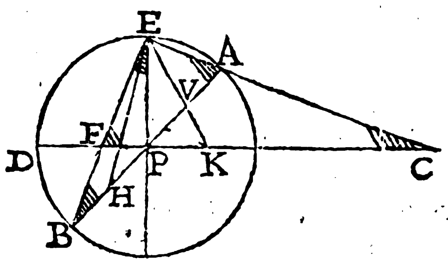


Probatur secunda pars. Nam ducta IF. Dico, quòd vt partes lineæ primigeniæ AH ad HB, ita se habebit, DF ad FC, quod probauimus propos. 4. Elem. in Coroll. 2.

THEOR. II. PROP. II.

Linea obliquata plano Stereographo in lineam proicitur maiorem.

*PRobatur. Nam Triangula CEF, & AEB sunt æquangula: siquidem in triangulis FPE, & EBA nigri apud E, & B anguli ęquantur ob radios subtensos ęquales, angulus totus AEB apud E, & FPE apud P recti, & ideo æquales, quamobrem etiam reliqui A, & F. In triangulo ergo FEC habemus angulum F nigrum æqualem angulo A nigro trianguli BEA, angulus verò AEB rectus cōmunis, reliquus ergo C æquatur angulo B ex 17. l. 1. El. Cùm ergo triāgula sint æquiangula erunt similia, & latus EF trianguli FEC sit maius latere EA trianguli BEA erit etiam basis FC linea proiecta maior quam primigenia BA.



COROLLARIVM.

HInc dignoscitur, quo pacto, ne dum diameter, sed etiam singulæ eius partes in planum stereographum proiciantur: sufficit enim dato angulo inclinationis APC deducere lineas proiectrices à centro E radioso per partes A, V, P, ipsius in ipsum planum. Nam ipsę suis extremitatibus notabunt partes C, K, P, in CF plano proiectas.

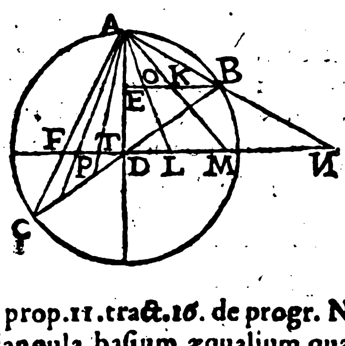
Sic, si dentur proiectæ partes ad partes primitiuas reuocare poteris lineas proiectrices deducendo ad centrum ipsarum.

THEOR. III. PROPOS. III.

* *Omnes Stereographicæ lineæ cuiuscumque partes augentur musicâ proportione.*

LOquimur de lineis. Ne dum ab aliquo puncto circuli per æquales partes diametri ductis: sed quibuscumque in qualibet distantia, & qualibet lineâ ductis; dummodo per illius partes æquales à puncto dato trahantur.

* Sit A punctum datum, & in lineâ BC: partes ęquales quęcunque, & per eas ductæ AP, & AT, & cæt. Dico eas esse in proportione musicâ, & DF esse ad DT, vt differentia PF ad differentiam TP.



* Probatur ex prop. 11. tract. 16. de progr. Nam DF incidit in triangula basium æqualium quæ, sunt partes in linea CD. Ergo incidentes FD partes FD, PD, & TD decrescent in proportione musicâ. Sic dicas de partibus ND, & DM, & LD. Nam BE parallela

ND

ND incidit in triangula basium æqualium lineę DB. Ergo in proportione Harmonicâ BE erit ad OE, vt differentia BK ad KO differentiam. Sed ob parallelas EB, & DN ex 4. lib. 6. vt est ND ad LD, sic EB ad EO, & vt EB ad EO, sic est BK ad KO, vt autem BK ad KO, sic MN ad ML: Ergo ex 16. lib 5. Elem. vt ND ad LD; sic differentia NM ad differentiam ML.

EXPENSIO II.

De proiectura circuli.

POtest duobus modis proici circulus, vel in ordine ad sphæram proiciendam, de qua re multa apud Aguilonium reperies, vel in ordine ad quemcumque circulum proiciendum; de proiectione prima hic agemus de alia expens. sequenti.

THEOR. I. PROPOS. IV.

Circulus perpendicularis in rectam proicitur lineam indefinitam.

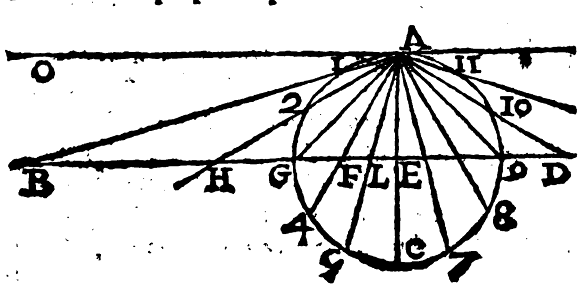
PRobatur. Nam, quòd sit linea, iam id demonstrauimus de omni proiectura perpendiculari. Sed quod sit linea nullis conclusa terminis ita ostenditur vtendo schemate prop. seq.

Sit centrum proiectionis A, & debeat deduci à puncto A linea proiectrix, & tangat extremum marginem circuli AGC 9, ad hoc, vt totum circulũ exprimat, aut cum proiectrice AC faciet angulum rectum, aut minus recto. Si faciet minus recto, vt AB ex prop. 18. lib. 3. secabit ipsum circulum, & pars circuli AI, vel AII extra remanebit: Debebit itaque ipsi AC esse perpendicularem, & contingere circulum in A, vt AO; Ergo erit parallela plano orthographo. Quare numquam illud secabit. Ergo linea expressiua circuli in plano orthographo numquam à linea proiectrice terminabitur, cum ei parallela sit. Erit ergo indefinita.

PROBL. I. PROPOS. V.

Perpendicularem proiecturam circuli, & partium eius in plano transcribere.

DVcto plano DG transeũte per cẽtrum E circuli proiciendi AGC 9, & situato puncto proiectionis A, vtlibet: sed consuetè ad extremum lineæ CA plano orthographo DB perpendicularis, diuidatur in 12. partes V. g. transeantque per singulas lineę proiectrices à puncto A. V. g. AB per partis primæ extremum 1; sic AH per extremam partis 2. & sic de cæteris. Partes namque HB, & GH, & GF, & cæt. erunt in plano partes circuli perpendicularis ipsi plano proiectæ.



Probatur. Nam quoad ipsius circuli proiecturam iam ex præced. propos. visum est esse lineam indefinitam EB.

Quoad verò partes proiectas; ostenditur. Quoniam lineis rem proiciendam extrema stringentibus decernitur: Tales autem sunt partes proiectæ HB, & HG, & cæt. Siquidem lineæ proiectrices eas determinantes transeunt per extrema partium circuli 1. 2. AI, & 2. G, & cęt. in quas dispescitur.

THEOR. II. PROPOS. VI.

Circuli partes æquales in partes inæquales proiciuntur, quarum illæ maiores, quæ ad perpendicularem magis accedunt.

DIco in partibus proiectis EL, & LF esse maiorem LF; quàm EL; quia magis à perpendiculari EA abscedat.

Probatur; Quia anguli, vtpote æqualibus peripherijs insistentes CA 5. & 5 A 4. sunt equales, erit angulus CA 4 diuisus in duas partes; Quaderè ex propos. 3. Eucl. vt est AF ad EA, ita erit LF ad LE: Sed AF est maior, quam AE, vtpote basis angulo recto subtensa: Ergo etiam FL maior erit, quàm LE, & ita de cæteris.

THEOR. III. PROP. VII.

* *Tres partes proiectæ circuli in lineam, quæ æquali numero partium interpositarum distant à quadrante proiecto dicunt proportionem Geometricam continuam, & diameter semper est media proportionalis.*

SIt quadrans proiectum in EB linea. Dico AG EF ad EG, ita esse vt EG ad EH.

* Probatur ex prop. 7. de angulis Tr. 19. Nam EG æquatur EA; anguli verò FAG, & CAH sunt equales cum æqualibus peripherijs innitantur. Ergo ita erit EF ad EG, vt EG ad EH, & eadem ratione EL erit ed EG, vt EG ad EB, Quare diameter EG erit semper media proportionalis.

COROLLARIVM.

HInc patet omnia rectangula EL, & EB, sicut, & EF, & EH, & sic de alijs esse æqualia; quoniam æquantur quadrato EG, quod EG sit ex propos. 19. lib. 6. Elem. intereas semper eadem media proportionalis.

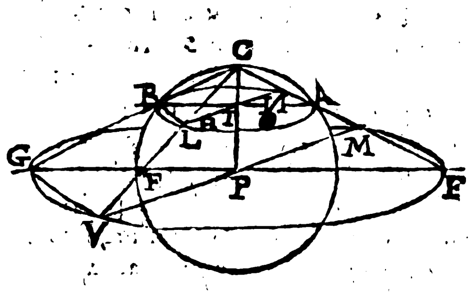
THEOR. IV. PROPOS. VIII.

Circulus parallelus plano Stereographo proiectus est circulus maior: centrumq; in eadem proiectrice linea, cùm vero centro est; Partes quoque maiores quidem; sed proportionales.

SIt in sphæra ACB, circulus ALB parallelus Stereographo plano EG. Dico hunc circulum in circu-

circulum maiorem PVG profundi.

Quod patet ex dictis in Conicis, cum enim omnes lineæ à puncto proiectionis lambentes circuli circumferentiam conum constituant ex ijsdem, clarum est, quòd, si producta alio plano parallelo, vt est Stereographum secentur in eo circulum descripturas. Coni enim, cuius basis circulus ex propos.2. Tract.24. omnis sectio parallela basi circulus est.



Dico 2. Centrum circuli proiecti P cum centro circuli proiciendi I in eandem lineam PC proiectricem incidere. Quod patet ex prop.2.tract.25.

Cor. Nã solus conus scalenus habet duos axes hic verò conus rectus est, vnde habebit vnicum axem: axis autem ex def. per centra transit basium.

Probatur tertia pars, quod partes circuli proiecti sint quoque proportionales primitiuo.

Cum planum stereographum ponatur parallelum, plano circuli primitiui, si GCV planum illa secet sectiones BL, & GV erunt parallelæ ex prop.16. tract.22. Quare erit, vt CL ad LB; ita CV ad VG in triangulo CVG. Proptereaque *permutando* erit, vt CL ad CV, sic LB ad VG. Sed CL ad CV, sic est IL ad PV: Ergo vt diameter IL ad diametrum PV, sic LB subtensa ad VG subtensam: quare etiam arcus eas subtendes toti circumferentiæ erunt proportionales ex propos.39 lib.6. Elem.

Patet verò esse maiores, quia CL est ad BL. vt CV ad VG, sed maior est CV, quam VG: ergo ex 12.lib.5. etiam GV subtensa, quàm BL: Quare etiam maior erit ex propos.6.lib.36 peripheria GV, quam BL.

COROLLARIVM.

Hinc facilè patebit modus, quò circulus parallelus plano stereographo imprimatur.

Nam ex prædictis Theor. 1. expens.6. sufficiet inuenisse diametri ipsius longitudinem, & inde centrum patebit, si diuidatur bifariam.

Partes quoque singulæ proicientur, si circulus proiectus in tot partes æquales diuidatur, in quot primigenius diuisus est. Aut eodem centro descripto circulo primitiuo, per singulas eius partes ad ambitum proiecti radij transeant; qui in circulo proiecto notent primigenij singulas partes.

THEOR. V. PROPOS. IX.

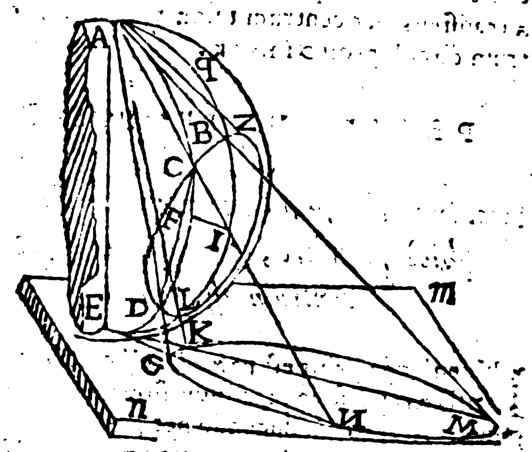
Circulus plano Stereographo obliquus proicitur in circulum maiorem; sed cuius centrum cum centro primitiui in eadem linea proiectrice non sit.

Iam supra dictum est Tract. præc. propos.2. quòd si planum secet subcontrariè conum; cuius basis circulus sit; etiam sectio ipsa circulus erit.

Sit itaque circulus in sphæra quicumque ZBCNL & lineæ proiectrices eius peripheriam vndique lambentes, vt est BA, & CA, & LA, & DA, & cętera conueniant in A centro proiectionis. Dico, quòd si continuentur vsque ad planum Stereographum m n, cui EA perpendicularis est; quod planum secabit superficiem conicam, quam integrant, subcontrariè, & ideò quod peripheria MNGK erit circuli ex propos.2. tract.25.

Probatur. Illa enim est sectio subcontraria, cum planum secans cum superficie coni facit angulos æquales angulis, quos facit cùm eadem superficie, basis primitiua coni: sed planum MN facit cum superficie protensa coni eosdem angulos, quos facit circulus planus ZBDL basis, cuius vertex A, ergo secat subcontrariè.

Ad id autem probandum eligantur duo puncta quæcumque. Erit enim par ratio de istis, & de omnibus alijs V. g. C, & D in circulo sphæræ, & à vertice A per D agatur linea vsque ad planum in G, & sit AG descripta super planum circuli ACDE, ideoque fiat de puncto C ab A vertice agendo lineam AC descriptam super semicirculum ACDE, & productum vsque dum tangat planum m n in N. Ita quod concipiatur superficies plana semicirculi ACDE prolungata, & peruenire vsque ad N, & imprimere suæ sectionis vestigium in plano lineam NG. Transibitque per G, cum sit ADG recta in eodem semicirculi extensi ACDE plano. Ducesque in eodem plano CD rectam communis sectio plani circuli ZCL minoris basis coni, & semicirculi ACDE.

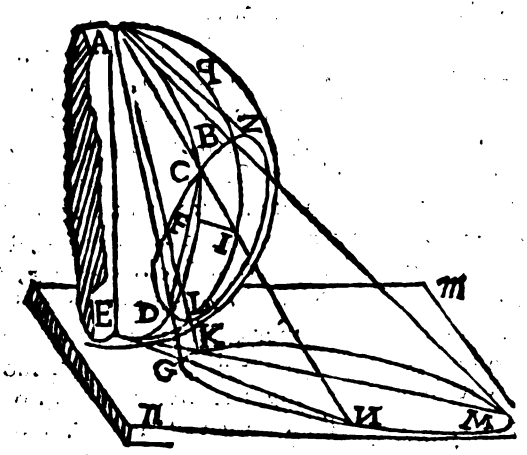


Probandum est itaque DC plano basis extensam eosdem angulos facere cum lineis coni NCA, & ADG, ac cum ijsdem facit NG linea plani stereographi.

Angulus itaque CAE apud A cum sit angulus ad circumferentiam insistit arcui CEDE: sic angulus apud D nimirum CDA pariter ad circumferentiam in D substernitur reliquo arcui CA. Quapropter erit anguli apud A complementum vsque ad semicirculum ECA, cumque anguli ad circumferentiam sint subdupli angulorum ad centrum, ideo semicirculus ECA. vt eorum mensura centralis quadrans erit: nam dimidium arcus EDC esset mensura anguli ęqualis ad centrum, & dimidium arcus CA esset anguli ad centrum mensura æqualis reliquo angulo apud D. Ideoque simul angulus CAE, & CDA æquant angulum quadrantis. Nempe rectum, & CDA est complementum alterius CAE. Sed huius quoque anguli CAE est complementum angulus N rectilineus. Quoniam angulus NEA rectus est ex hypothesi in triangulo NAE.

Ergo

Ergo reliqui anguli erunt æquales vni recto, cùm omnes trianguli anguli ex propof.17. lib.1. Elem. tantùm duobus rectis æquales fint: Quare eiuſdem anguli CAB erit angulus N complementum, vt CDA. Ergo erit æqualis angulo CDA. Quoniã verò angulus CAD in triangulo CAD deſeruit etiam triangulo NAG, & angulus N oſtenſus eſt æqualis angulo GDA; reliquus quoque AGD erit æqualis reliquo NGA ex 17. lib.1. Cor.



Idem autem argumentum contexes de quibuſcumque alijs angulis. Quare ſectio plani ſtereographi erit ſubcontraria; vnde MNGK circulus erit.

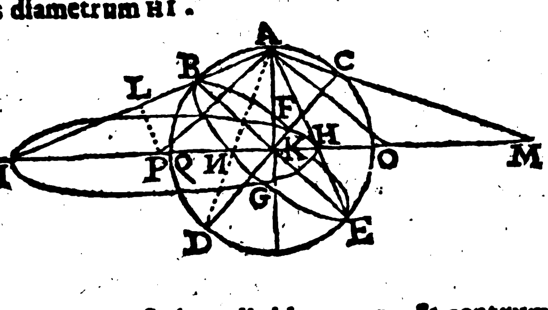
Probatur ſecunda pars. Quoniam ſubcontrariæ ſectione circuli non ſe interſecant per centra ex Coroll. propoſ.2. Tract.25. nempe eorum ſectio per centra vtriuſque non tranſit. Vnde linea ab A tranſiens per centrum I non tranſibit per centrum circuli proiecti NMGK.

PROBL. II. PROPOS. X.

Circulum obliquum in planum ſtereographicè proijcere, poloſque eius, & centrum aſſignare.

INuenienda priùs eſt pars circuli centro A remotiſſima, parſque propinquiſſima, ſi non ſit cognita. Id verò fiet ducendo per puncta C, & D polos circuli dati circulum maximum CABDE. Namq; ex prop.22. 3. partis ſphær. is circulus arcum BA habebit, qui inter omnes, qui ad circumferentiam obliqui circuli FBGD duci poſſunt breuiſſimus erit, & ACE,qui erit maximus, & deſſignabit diſtantiam maximam in E, & minimam in B à centro proiectionis A.

Tranſeant itaque per inuenta puncta E, & B lineæ proiectrices AE, & AB, & dabunt H, & I puncta, per quæ circulus proiectus debet incedere, & eius diametrum HI.



Secundo. Biſariam diuidatur HI, & centrum in P circuli proiecti obtinebimus.

Tertio. Tranſeant proiectrices per polos C, & D,& polos in plano proiectos cõſequemur M,& N. Itaq; ſeorſim circulus OQ ipſius ſphæræ deſcribatur; ſẽper enim in omni proiectione hic circulus præſupponitur; cùm ſit ſectio ipſius ſphæræ, cùm plano ſtereographo, eo quia planum ſtereographum ex definitione ſecet ſphæram bifariam. Sitque I in 2 m; aſſumaturq; diſtãtia O H & ſit 13. deinde diſtantiá PH, & ſit 3 2, centro itaque 2 interuallo 2 3 deſcribatur circulus 3 5; eritque circulus proiectus. Deinde OM ab 1 in 7,& diſtantia NH,& transferatur ab 3. in 6. eruntque poli 7. & 6. circuli proiecti 3 2. vt vides in fig.pr.12.h.

* Poteſt etiam reperiri centrum circuli independenter à lineis AH, & AI circuli proiectricibus ſi fiat angulus trianguli EAK ad A alteri angulo trianguli LAP ducendo AP ad A, æqualis. Nam P erit centrum circuli: Quia enim angulus E trianguli AEK æqualis eſt angulo ad A eiuſdem trianguli ob æqualitatem laterum EK, & KA, & eſt etiam æqualis angulo I,quòd ſit ſectio ſubalterna, vt pr. 8. & 9. h. ſi fiat alius angulus IAP ad A, erunt duo anguli quoque æquales I, & A in triangulo API: Quare etiam latera ſubtenſa erunt æqualia AP, & PI.

Sed ob ſimilitudinem triangulorum ſubcontrariorum etiam triangulum AKB eſt ſimile triangulo AHP. Siquidem angulus apud B,trianguli EAB eſt æqualis angulo apud H, trianguli ſubalterni HAI, ex 8. vel 9.h. angulus verò KAB addito communi PAK vtriſque æqualibus HAK. & PAI angulis eſt æqualis angulo HAP: ſed triangulum AKB eſt Iſoſcellium ob radios æquales; ergo etiam tale erit triangulum APH. Vnde crus AP erit æquale cruri PH, & cruri PI, vt ſupra oſtenſum eſt, hæ itaque portiones erunt, æquales HP, & IP, ideoque P centrum erit.

* Idem quoque conſequi poteris, ſi diuiſa bifariam AI in L ducas perpendicularem LP, quę ſecet planum ſtereographum in P, vt patet ob API ęquicrurum triangulum.

PROBL. III. PROPOS. XI.

Partes circuli obliqui in planum Stereographum proijcere.

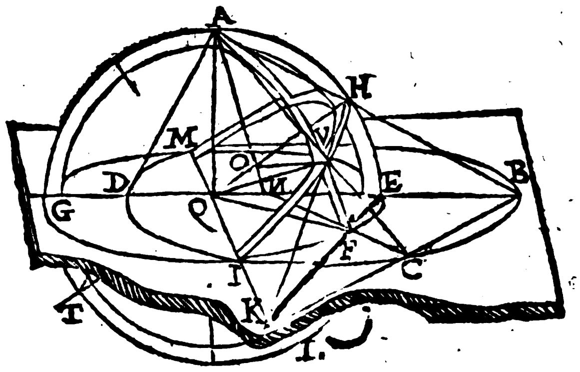
MVltis modis hoc Problema poteſt in opus deduci nos quatuor ſceligemus,ad quos alij ferè reducuntur: Primus ope polorum; Secundus ope ſecantium: Tertius ope chordarum: Quartus ope ſinuum.

THEOR. VI. PROPOS. XII.

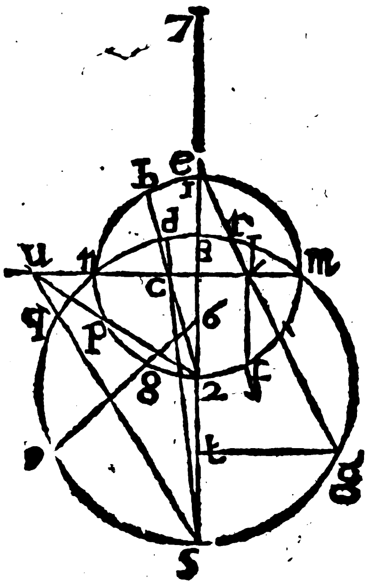
Quæ à centro poli circuli proiecti diſcedit, & per partem aliquam circuli ſectionis ſphæræ tranſit, ea in partem proiectam circuli proiecti incidit.

SIt ſectio ſphęrę EIGM,& circulus proiectus BCID. Poluſque in eo proiectus N. Dico quod CN tranſiens per EF partem circuli ſectionis ſphęrę ęqualẽ parti HV circuli obliqui HVI proiciendi cadit in idem punctum C,ac linea proiectrix AC.

Iam oſtẽſum eſt tr.23.pr.16.p.3. circulũ minorem



rem AVP transeuntem per polum superum circuli sectionis sphęrę A, & alium polũ L circuli obliqui, HVI, & sectione AL proicientem polum A in N, detruncare ab vtroque circumferẽtias ęquales HV, & EF: si ergo superficies huius circuli extendantur vsque ad C, & sit ANC superq; eã à puncto A centro proiectionis simul, polusque circuli sectionis BIG extendatur linea proiectrix recta transiens per V perueniet in C, & secabit NC, quæ est sectio eiusdem superficiei extensę circuli AVL cũ plano BD proiecto; pars ergo BC, quę à linea proiectrice transeunte per V decernitur, illa etiam determinatur per CN, quæ transit per F, & truncat partem EF, à circulo sectionis æqualem parti HV circuli obliqui proiciendi.



Dato itaque circulo sectionis 21, & circulo proiecto 3 5, & cognita parte circuli, quæ V. g. sit duodecima circuli proiciendi, dato quoque polo 6. Ducatur à polo 6. per 8. sextam partem recta 6. 8. Et hæc terminabit 5 9 partem duodecimam circuli primitiui exprimentem.

THEOR VII. PROP. XIII.

Linea in circulo sectionis à diametri extremo perpendiculari sectionis ducta ad sectionem per datam partem dat in sectionẽ punctum, per quod, & extremum diametri eiusdem proiecti alia ducta partem à prima abscissam exprimit.

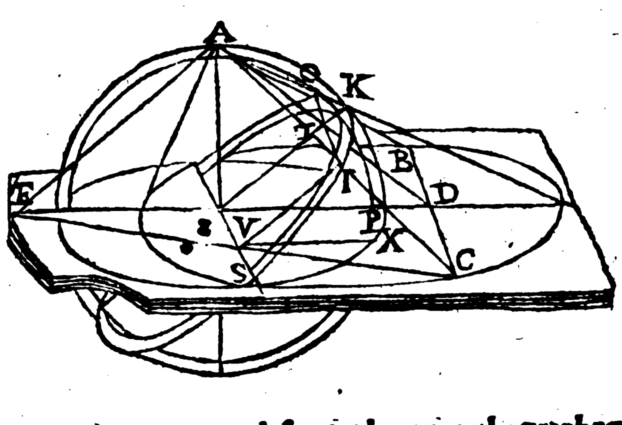
Secundi modi fundamentum hoc est in eadem fig. quę superiori modo. Sit superficies BAC, quæ secet circulum obliquum in HV, & extendatur in BC; hęc imprimet sectionem BC, quæ erit chorda subtendens arcum exprimẽtem arcum HV, vtpote, quòd proiectricibus BA, & AC per extrema arcus primitiui H, & V transeuntibus determinetur, itaque planum circuli obliqui HVI, & HV. sectio eius extendatur, donec occurrat cũ plano ABC plano orthographo. Sectioque MK eius cum plano primitiui circuli MVI occurret tandem, cum angulus OHV nõ sit rectus sectioni HK sicubi V. g. in K. Et etiam sectio CB ob angulum acutum HBC cõcurret cum HK; cùm ergo concursus iste sit plani BAC, & etiã plani primitiui HVI; atq; insuper plani orthographi BKG, ergo erit aliquod punctum sectionis KM; quæ erat plani orthographi, & primitiui. Sed etiam est plani proiectoris BAK; erit igitur punctum K in quod orthographum, & primitiuum, & proiectorium concurrent. Verùm etiam EF subtensa arcui EF æquali arcui HV concurret in K. Ergo æquo pacto, ac linea secans HV monstrabit punctum K. Quod autẽ EF in punctum K concurrat; patet; quia angulus ad Q tum trianguli HQK, tum trianguli EQK, recti sunt: anguli autem ad E, & H sunt æquales; quia insunt peripherijs circulorum æqualibus FIO, & VIT. Ergo triangula ęqualia, & crus KQ eiusdem longitudinis, & ideo EF basis concurret ad punctum K. Vnde, cùm BF secans circulum sphæræ, & abscindens arcum æqualem arcui HV obliqui HVI, indicet idem punctum K, in quo debet concurrere BC subtendens eiusdem HV proiecturam, poterimus eius vice vti ad inueniendum punctum K.

Sit itaque circulus sphæræ 1, 2, & pars in eo 2 P comprehendens ex 24. partibus, in quibus diuisus est earum 5, Ducatur 2 P per P vsque ad intersectionem m n productam in u: Si igitur 5 u ducatur; hęc subtendet arcum 5 9 q, qui rapresentat arcum 2 P ęqualem circuli inclinati ex pręc. arcui fundamento. Sic ducta 2 b signabit punctum c, per quod 5 d ducta determinabit arcum 3 d proiectũ.

THEOR. VIII. PROPOS. XIV.

A puncto, in quod parallela plano proijciendo à puncto proiectionis cadit recta per sinus extremum circuli sectionis ducta, dat in proiecto circulo partes proiectas.

Fundamentum tertij modi est, si in obliquo circulo ducto sinu IV, & proiectrice AC, quæ transeat per I, per has duas lineas agatur pla-



num CIVBA, quod secet planum orthographum

 in linea

a linea CVE, nam quę hoc planum incidet in planum AB linea expressum, parallelum plano circuli proiciendi KIS, & consequenter incidet in punctum E. Siquidem si planum AE ponatur parallelum plano circuli primitiui KIS, etiam sectiones plani CAE erunt parallelæ ex prop.15.Tract.22.de intersect. cumque IV sit parallela XZ etiam eidem erit parallela AB.

Si autem sit arcus PX æqualis arcui KI, etiam sinus XV,& TV ęqualiũ residuorũ IS,XS erunt ęquales,& ideo idem sinus versus VS erit: quare sinus versus SV circuli sectionis PXS exhibebit punctum idem V, per quod transit BC.

Sit ergo,vt priùs, circulus sectionis I 2,& profectus 3 5, & e punctum O, quod parallela plano proiciendo OA,vt in fig. prop.10 h. à centro proiectionis A deducta in planũ imprimit, & ducatur à parte f; circuli sectionis ad diametrũ m n normalis,quę cadet in l. Ab e itaq: puncto per l ducatur e g,& hęc determinabit arcũ 5 g, & representantę arcũ f 2,& arcũ 3 r represẽtãtę eũdẽ f 2 ad eã partem, qua partes sunt minores in circulo proiecto.

THEOR. IX. PROPOS. XV.

Si per puncta proiecta primigenij circuli, quibus chordæ diametrum secant perpendiculares ducantur, hæ à circulo proiecto partes abscindent proiectas, eruntque chordæ proiectæ.

QVarti modi fundamentum est. In figura pr.14. Ducatur in circulo proiciendo chorda IO perpendicularis diametro; hæc secabit diametrum in T. Transeat ergo superficies, seu lineæ BA, & CA,& eam proiciant in CB; Sectio CB terminabit in puncta C, & B, in qua lineæ proiectrices arcuũ KI,& XO terminant,ideo CB eosdem arcus in circulo proiecto dessignabit, transibitque per punctum D, quod cum superficies BAC transeat per T erit punctum T proiectũ,eritque orthogonalis diametro DZ, sicut IO orthogonalis est ipsi diametro XZ circuli primitiui, cùm tota superficies CBA sit ei diametro, & plano circuli PKA orthogonalis.

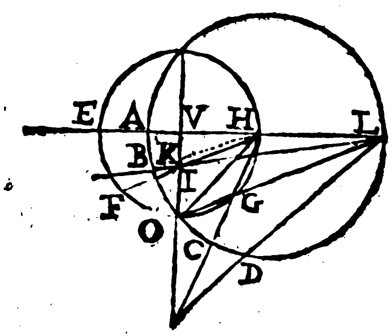
Si itaque ex propos.2.h. puncta quibus chordæ diametrum primitiui circuli secant, proiciantur, cum ipso circulo, & sit illorum aliquod punctum t, ducaturque t g; hęc signabit arcum 5 g circuli proiecti exprimentem arcũ circuli primitiui.

THEOR. X. PROPOS. XVI.

Partes proiecti circuli, quo propinquiores perpendiculari à centro proiectionis prouenienti, eò minores sunt.

SInt iuxta secundum modum partes in circulo proiectæ ABOD, quæ in circulo originario, seu etiam sectionis, cum in vtroque, vt ostensum est, æqualitate consentiant, sint EF, FO, GO, HG omnes inuicem ęquales. Dico, quod istæ partes inuicem æquales proiectæ, efficiuntur inuicem inęquales,& quod minor est illa,quæ puncto V,quod imprimit perpendicularis V propiùs accedit.

Probatur, Ducta punctata HK parallela ipsi LO, maior est proportio OH ad HV, quam KH ad HV (vt dicam) quare etiam est maior,quàm OL ad LV,cum puncta sit parallela, ipsi LO, & ideo eadem sit proportio HK ad HV,quę LO ad LV: sed proportio OH ad HV est eadem, quæ OI, ad IV ob angulos æquales ad H ex prop.3. lib.6. Elem. Ergo maior erit proportio OI ad IV; quàm OL ad LV. Vnde, & ex propos.6. Tract.19 maior erit angulus OLI,quàm ILV, & sic ostendes de alijs.



Quod autem HO habeat maiorem rationem ad HV, quàm HK ad HV ipsam patet ex 8. lib.5. Nam est maior HO ob angulum maiorem externum HIO, quem subtendit, quàm HK, quæ subtendit angulum internum minorem HVK minor est autem angulus internus externo ex pr.17. Cor.1. l.1.Elem.

COROLLARIVM I.

HInc est manifestum partes circuli, quæ in maxima medietate sunt LDC esse maiores partibus primitiui circuli: sicut totus arcus est maior, at verò, quæ sunt in altera medietate minores illis, quæ in circulo primitiuo sunt; quia etiam totus ille arcus est minor, & cum tot sint partes in medietate proiecta, quæ minor est medietate primitiua, quot sunt in ipsa,hac medietate necessariò erunt omnes minores,& hoc sufficiat ad rem per se clarum confirmandam, licet alioquin non prorsùs ratio conuincat.

COROLLARIVM II.

ELicies quoque,illum esse maiorem radium in circulo proiecto, qui per vtraque centra transit, tum circuli primitiui, tum circuli proiecti,reliquos verò esse maiores qui propinquiores sunt centro circuli proiecti. Ratio est, quia radij ducuntur à centro proiecto, qui non coincidit cum centro circuli proiecti, vt docuimus. Vnde cum hoc punctum sit extra centrum,euenit, vt docet Euc. lib.3. Elem. propos.15. maximum esse, qui per centrum transit, reliquos verò eò esse maiores, quò centro propinquiores.

EXPENSIO III.

De proiectura superficiei cuiuslibet independenter à sphæra.

PArtes alicuius lineæ proiectæ eam proportionem musicam dicunt, quam ostendimus propos.3. & ita proiciuntur, vt prop. 2. Coroll. h. Possunt autem lineæ proiectæ esse maiores primigenijs, seu minores prout intercipitur planum,in quo sunt inter punctum proiectionis, & planum, proiectionem recipiens V. g. in fig. prop. 3. TF est minor, quam FC, quia linea TF proiecta inter primigeniam TF, & punctum A interponitur, at ND proiecta maior, quam BE primigenia, quia

hæc

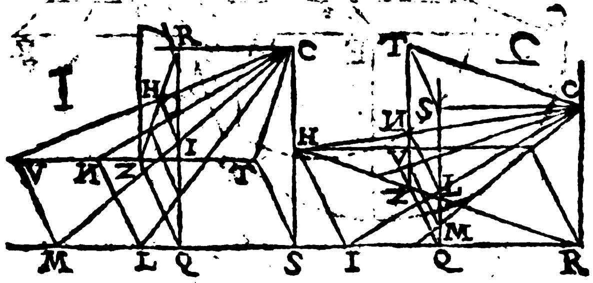
hæc interponitur inter ND, & A, & quæ dicuntur de lineis eadem intelligenda sunt quoque de superficiebus, vnde duplex genus proiectionis potest deduci alterum dicetur rectum, cum interponitur planū, in quod fit proiectio inter planum originarium, & proiectionis centrum, alterum inuersum, cum planum originarium interponitur inter centrum proiectionis, & planum proiectionem recipiens.

THEOR. I. PROP. XVI.

Omnes lineæ, quæ sunt perpendiculares plano Stereographo, seu in proiectione recta, seu inuersa proiecta in punctum collimant à plano originario æquè remotum, ac centrum proiectionis, lineæ verò parallelæ plano Stereographo in parallelas originario transeunt.

PRæsupponendum est planum Stereographum, idest, proiectionem recipiens esse plano originario ex instituto hominum rectangulum, ideoque etiam id præsupponimus.

Itaque sit punctum, seu centrum proiectionis C, sit planum originarium STVM, in quo scilicet est figura proicienda LMNV. Planum recipiens proiectionem sit QHR, cui perpendicularis linea proicienda VN. Dico primò, quòd ista linea NV proiecta imprimit lineam ZH, quæ in punctum R producta terminat, quod punctum æquè remotum est à stereographo plano HRQ, in quod fit proiectio eadem distantia perpendiculari, qua remouetur punctum C centrum proiectionis.



Probatur. Nam quia NV ex thesi est normalis plano stereographo HRQ; erit etiam normalis eius sectioni QZ: & si plano stereographo HRQ ducatur planum CST parallelum per centrum C; erit quoque NV perpendicularis eius sectioni TS. Quare si intelligatur superficies proiciens NVC extensa vsque ad T; ita vt sint eius sectiones CT, & RZ, erit quoque prædicta TNV sectio superficiei proiectricis perpendicularis sectionibus RZ, & CT, vtpote in planis CTS, & RZQ iisdem existentibus, ex def. 2. tract. 22. Quare CTS, & ZRQ erunt anguli inclinationis planorum ex prop. 4. Cor. 2. tract. 22. & ideo anguli æquales ex prop. 18. tract. 22.

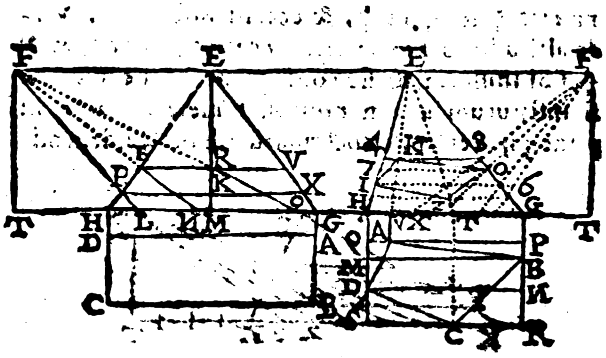
Transeat ergo per C planū CSM normale vtrique plano CTS, & STVM; Sectiones itaque CS, & ST rectum angulū continebunt. Quoniā ex 16. tract. 22. sectio ST duorum planorum CTS, & TVMS erit ad rectos āgulos, plano CSM, & ideo sectioni CS, & SQ ex def. 2. tr. 22. in plano CSM existenti. Sed QZ est parallela lineę ST ex effect. ergo etiam perpendicularis plano CSM ex 8. tract. 22. & ideo sectioni SQ, & RQ ex def. 2. tract. 22. Sunt ergo equiangula triangula CTS, & QRZ, vtpote, quòd sint rectangula, & angulos CTS & RZQ æquales obtineant. Sed etiam crura TS, & ZQ sunt æqualia: Siquidem lineæ TZ, & SQ parallelæ sunt, vtpote ostensæ normales sectioni QZ, ideoque ex 33. lib. 1. Elem. æquabuntur inuicem crura parallela QZ, & ST. Cum ergo in triangulis æquiangulis ex 4. lib. 6. sit ST ad SC, vt QZ ad QR, & TS & QZ sint equales, SC, & QR æquabuntur ex 14. l. 5. Quamobrem sectio RZ plani proicientis CNV terminabit in R, quod habet eandem eleuationem à plano primigenio SV, ac punctum C mensuratam per rectas CS, & RQ æquales, & normales: hoc autem punctum R vocabitur centrum proiectum.

Probatur secunda pars, quæ est, quòd lineæ parallelæ plano stereographo, vt est LN in parallelas plano primigenio STVM transeant. Quoniā enim linea proicienda LN, vel MV est parallela plano HRQ erit etiam parallela cōmuni planorū sectioni ex 4. tract. 22. Coroll. 3. quæ est QZ, cùmque QZ sit perpendicularis plano SCQR perpendiculari planis CTS, & QRH, etiam ipsa eidem plano normalis erit: ideo planū HIC per illam ductū ex 19. tract. 22. plano CSRQ erit ad rectos angulos; quare, & eorum communis sectio IH eidem plano ex 16. tr. 22. ad rectos angulos erit: Propterea que HI, & QZ ex 7. tract. 22. erunt parallelæ; ideoque, & plano STVM parallela erit.

PROBL. I. PROPOS. XVII.

Superficiem rectangulam proijcere.

POtest hæc superficies proicienda obtinere aliquod latus parallelum plano, in quo facienda est proiectio; vel nullum parallelum.



[illegible] proiciendum. [illegible] centrum proiectionis [illegible] centrum proiectum ab H, & G extremis lineę GH, quæ intercipitur inter latera proicienda AB, & CD ducantur rectæ. Assumpta autem distantia HD transferatur ab H in L, & ducatur FL, quæ secabit [illegible]. [illegible] Rursùs assumpta distantia [illegible] transferatur ab H in N, & ducatur FN, quæ secabit HE in I. Itaque si per I ducatur parallela [illegible] sectioni [illegible] dabit rectangulum PIVX iam proiectum.

[illegible] ostenderetur, cum positio, quæ HG [illegible] sectio planorū primigenij, & orthographi, qualis in fig. 1 praeced. est ZQ. Ducentur perpendiculares [illegible], & MT erit distantia duorū planorū, quæ in fig. præced. propos. sunt QZ, & SCZ V. g. [illegible] lineæ CS, & RQ à centris primigenio C, & proiecto R descendentes. Igitur MO erit interuallum distantiæ, quâ linea proicienda distat à linea sectionis V. g. in præced. fig. 1. interuallum QM, Vnde sicuti ibi I est punctum M proiectum, sic hîc

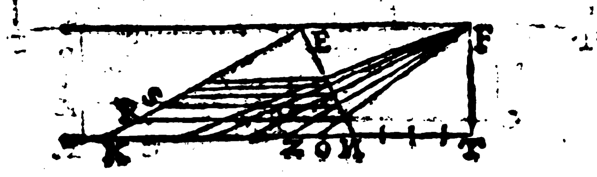
 R erit

R erit punctū proiectum. Sed I punctū ex pr.19. par.2.tract.16. distat eodem interuallo, ac R à linea HO: quia triangula RIN, & MRO ob bases æquales HN, MO eandem altitudinem possident. Ergo ducta parallela per I habebit eandem distantiam, ac per R ab HO, linea sectionis planorum primigenij, & orthographi. Ergo IV erit CB linea proiecta, cum vt ostendimus debeat esse parallela lineæ sectionis HO. Sic dicas de linea PX, quę erit linea DA proiecta. Latera verò DC, & AB exprimentur per lineas PI, & XV: quia tendunt ad centrum R proiectum, vt ostensum est precedenti propos. part.I.

Si verò sit data superficies ABCD irregularis; vel nullum latus habens sectioni CH parallelum per A ducatur latus parallelum PQ, & per A latus AY, & normale TC per C. Item sectioni perpendicularia latera PR, per R, & SQ per D, & parallelas MB, & DN ab vno quoque angulo, quas omnes parallelas & normales proicies; normales quidem in OE, & TE, & cęt. tendentes ad centrū; parallelas verò in 34, & 70 & 16, & cæt. & puncta K, Z, & I, O, & cęt, representabunt intersectiones D, A, B, C, in quibus etiam anguli figuræ BACD terminant in suis decussationibus. Igitur per puncta KOZI rectæ ductæ facient KOIZ planum proiectum, cuius primigenium est ABCD.

COROLLARIVM.

EX supradictis adisces propos.I. tract.16 p. 2. quod si NO, & OZ sint æquales, & sic successiuè, etiam distantię, & interualla proiecta futura esse harmonicè proportionalia; nempe AK esse ad RS, vt KR ad RS differentię, & ex propos 3. eiusdem si NO erit pars aliqua V.g. $\frac{1}{2}$ lineę NT linea KR erit $\frac{1}{2}$ RE $\frac{1}{3}$ ES $\frac{1}{4}$, & cęt. in infinitum. Vnde altitudines superficierū erunt RK ad RS, vt $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ sibi inuicem, & sic consequenter. Et quidem institutum meum non esset me continere in principijs rerum, & doctrinarum; hanc quidem mi-



rabilem progressionem prospectiuæ praxibus subigerem, & quàm benè scenicis deseruiat ostenderem: sed id est alius voluminis, si Deus dederit.

THEOR. II. PROPOS. XVIII.

Omnis circulus, seu Ellipsis proiecta in planum, nec parallelum, nec basi subcontrarium in Ellipsim transformatur.

PRobatur. Est sectio coni à stereographo plano ad angulos rectos basi coni insistenti, seu etiam ad quemcumque angulum. Sed omnis sectio coni Ellipsis est, si planum non sit parallelum basi, vel subcontrarium, vt supra ostendimus, ergo etiam hæc sectio stereographa Ellipsis erit; Quod autem circulus proiectus, vel Ellipsis sit sectio coni, idest fiat in plano conum secante. Patet ex definitione stereographiæ factæ à superficie coni ea planum primigenium ambiente.

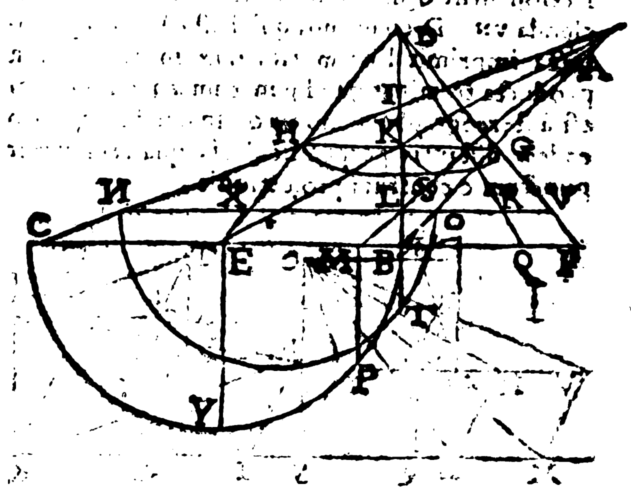
COROLLARIVM.

HInc patet centrum Ellipsis proiectæ non habere idem centrum cum centro circuli, vel Ellipsis primigeniæ; nisi accidat, quod sit parallelum planum stereographum plano proiciendo, vt constat ex Coroll.I. propos.2. tract. preced. Nec vnquam circulum representare, etiam si circulus sit primigenius, nisi sit, aut planum proiectionis parallelum ipsi, aut subcontrarium.

PROBL. II. PROPOS. XIX.

Quemcumque seu Circulum, seu Ellipsim plano Stereographo transcribere, eiusq; partes repræsentare.

CVm circulus, seu Ellipsis proiecta, Ellipsis sit, potest eodem modo describi quo supra diximus Ellipses describi posse in tract.24. Conic. Expens.13. & propos. 8. & 9. & 10. huius, quæ verò reposcuntur ad descriptionem ex cognitione coni stereographi, & conus ipse à distantia data à plano, in qua fig. primigenia reperitur, facilè obtinetur, & à dato, aut axe, aut diametro aliquo ipsius primigeniæ figuræ. Sed libet hic modum ordinarium ostendere, quo vtuntur artifices.



* Sit conus ABC, & sectio eius quęcumque BI, quę producatur vsque ad eandem altitudinem coni ABC in D: Sit verò semibasis coni semicirculus BYC, in quo applicatæ EY, & MP, quarum puncta extrema sunt exprimenda in Ellipsi sectionis BI. Ducatur ab E, & M applicationum punctis ad verticem A lineę AE, & AM, & per L, & K, quibus punctis diametrum BI secant, ducantur parallelæ ON, & GH vsque ad crura trianguli conici per axem AC, & AB: mensuretur verò BE semidiametro in F, & per F, & D ducatur FD, quę transibit per G, & ED, quæ transibit per H ob triangula FBG, & BEH, & hæc equalis altitudinis ex propos. 10. tract. 16. part 2. Nam conueniunt in H, & G, per quæ transit GH. Postea mensurata QB æquali PM alteri applicatæ, ducatur ad D linea QD, quæ in a secet ON productam in V. Et dico KL, & OK esse applicatæ in Ellipsi, cuius diameter, seu axis IB.

Probatur in triangulo GKB, ita est OK ad LO, vt KB ad LB. In triangulo autem ACB ita est KM ad ML, vt KI ad LI; quare poterimus componere proportiones, & rectangula constituere proportionalia, vt vides in hoc specimine.

HK

HK vt KI	&	KG vt KB	
ad ad		ad ad	
LN IL		LO LB	

Ergo compositum, vt compositum.

HK	&	KG	KI	&	BK
ad		ad	ad		ad
LN	&	LO	IL	&	BL

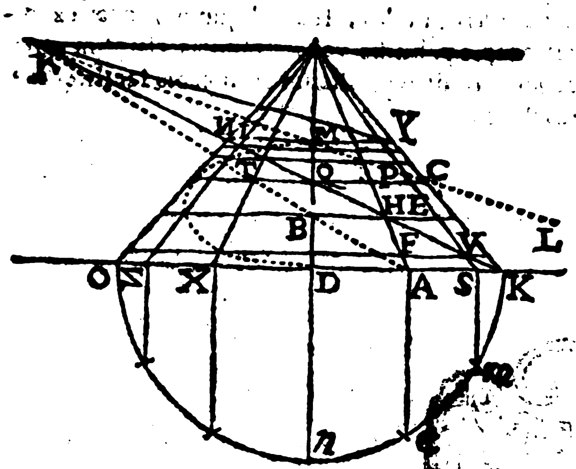
Sed GK, & KH rectangulum est æquale quadrato applicatæ diametro à puncto K scilicet KS sicut OL, & LN rectangulũ applicatę diametro NO ad angulos rectos, quæ est LT; ergo, vt BK, & IK rectangulum ad rectangulum IL, & LB. Sic quadratum KS ad quadratum LT: Sed KG æquatur rectæ KS, & LR rectæ LT. Ergo KG, & LR erunt applicatæ, vtpote quod sit GK quadratum ad quadratum ex RL, vt IK, & KB rectangulum ad IL, & LB rectangulum ex 6. tr. 24. Quare remanet ostendendum, quod OH sit ęqualis KS, & LR æquetur ipsi TL.

Id verò ostenditur. Nam, vt ON diameter ad BC diametrum, ex prop. 44. lib. 6. Elem. ita est sinus LT ad sinum similis arcus MP. Est enim ex Coroll 2. prop. 4. lib. 6. OL ad LN, vt BM ad MC, ideo OL erit quoque ad mediam proportionalem LT, vt BM ad suam mediam proportionalem MP. Ideoque etiam *permutando* OL erit ad BM, vt LT ad MP: quare etiam ON erit ad BC, vt RL ad MP, sed etiam RL se habet ex 2. Coroll. prop. 4. lib. 6. ad QB æqualem ipsi MP, vt VX æqualis ON ad æqualem PE ipsi BC ex constructione. Ergo LT, & LR æquales erunt ex 7. l. 5. quia æqualibus QB, & MP eandem dicunt proportionem OR, ad BC.

Eodem modo probabis de linea SK, quod sit æqualis lineæ KG, quadere KG, & LR erunt applicatæ.

COROLLARIVM I.

Hinc elices quomodo alia, & alia puncta possimus reperire, donec tot sint, quæ sufficiant ad rectè trahendam Ellipsim vt vides ib fig. hic apposita.



Imo ex prop. 10. Tract. 16. de progr. armonicis part. 2. cum omnia triangula sint eiusdem altitudinis V. g. KHA, & ABD loco trianguli ABD deseruiet triangulum KHA, & loco trianguli LMD poterit deseruire triangulum KNO: Vnde vna diagonalis KN sufficiet ad omnium triangulorum altitudinem exhibendam; quę sit eadem, ac ea, quæ in DM successiuè inueniretur, itaq; puncta D, F, B, C, P, & cęt. vsque ad M erunt in Ellipsi præbentibus successiuis altitudinibus triangulis KVS, KHA, & KQD. KTX, KIZ, & tandem KNO, quæ altitudines deberent reperiri in perpendiculari DM. Et idem fiat super YZ, ducta YI; si placeat aliam Ellipsim delineare.

COROLLARIVM II.

Hinc etiam facilè aliquis quamlibet figuram circulo inscriptam delineabit, vt patet si puncta e, applicatarum A e V. g. intelligantur pro angulis alicuius figuræ circulo inscriptæ, siquidem etiam applicata RR suo extremo R in Ellipsi angulum figuræ rectilineæ exprimet, & sic de alijs.

COROLLARIVM III.

Hinc etiam patet; quomodo qualibet figura, etiam si non possit circulo inscribi, proijciatur, quia saltem poterunt pluribus circulis illius anguli circumscribi, quorum puncta extrema si proiciantur, erunt quidem in plurium Ellipsium ambitu; sed tamen coniuncta figuram irregularem proiectam referent.

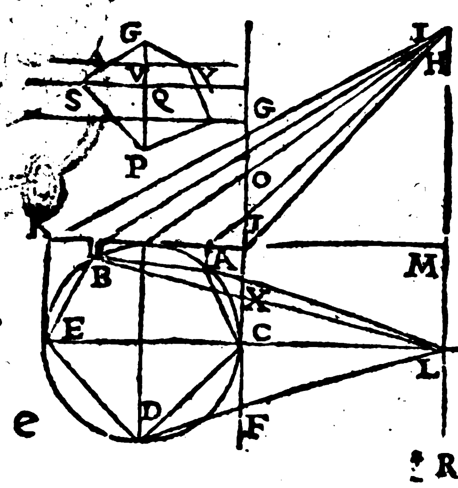
COROLLARIVM IV.

Hinc quoque patet quomodo partes alicuius circuli proiciantur. Nam in fig Coroll FD, & FB, & EC, & cęt. exprimunt partes circuli n e, & e m, & m k, & patet etiam quomodo partes circuli primigenij ęquales, in Ellipsi tamen proiecta eius vicaria non sint æquales.

PROBL. III. PROPOS. XX.

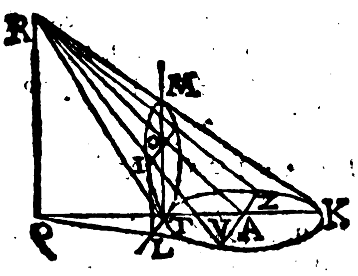
Circulum, seu figuram rectilineam in Ellipsim proiectam transfundere Stereographicè.

Sit que iste circulus, seu figura proiciendo orthographicè. Detur verò altitudo centri proiectionis HM, & sectio plani stereographici sit FG; & distantia à perpendiculari HM, quę sit CL, & L sit punctum si proiectum, idest in quod ab H demissa perpendicularis caderet; & singulis punctis in periphæria signatis C, A, B, E, D. perpendiculares ducantur, ad FG ab ijsque rectæ in centrum H connectantur, rursusque à punctis C, A, B, E, D, rectæ in L conspirent, deinde ducta seorsim PG, in Q à puncto P singula interualla ex linea IG desumpta trasferantur, vt IO translatum est in PQ, & OG in QG, perque singula puncta perpendiculares ad PG, ducantur, vt QS, & VY; quarum longitudines à C sumantur in vtramque partem ex FI sectione, quę scilicet correspondent in ijsdem punctis V. g. CF applicabitur QS, quia à puncto D, tum DL, tum OH tandem deriuant, & postremò per extrema puncta ORS, & cęt. ducemus flexam, & erit Ellipsis, vel rectas, & erit figura rectilinea proiecta in Ellipsi inscripta.



Ratio

* Ratio huius operationis est, quia PG est diameter, at VY, & SQ sunt applicatæ. Ergo per extrema earum puncta transibit Ellipsis. Quod vt capias inspice fig. hic appositam, in qua circulus basis coni stereographici KTR est KZTV, trianguli autem per axem KRT ducatur planum normale stereographum MILT: item triangulo per axem KRT ducatur planum normale ZVR, itaque TK erit diameter circuli, sicut TM erit Ellipsis; quia cùm plana MZTV, & ZRV sint normalia triangulo per axem KRT, etiã cõmunes illorũ sectiones AV, & OI ad rectos angulos erunt ex prop.16. tract.22. & ideo ex def.2. tr.22. sectionibus TK, & MT; vnde istæ sectiones diametri erunt, & OI,

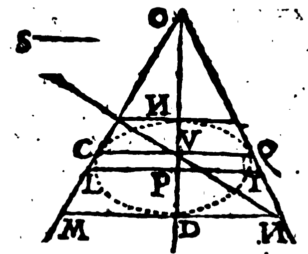


AV applicatæ, hæc quidem applicatã primigenia, & OI applicata proiecta & punctum O erit illud, cui applicatio facienda est. Itaque sectio AR plani ZVR, & trianguli per axem KRT erit illa, quæ decernet altitudinem TO, idest in præc. fig. OI. Hoc itaque triangulum AVR proijciatur orthographicè, planumque VRQ normale plano KTV imprimet sectionẽ VQ discedentẽ ab V puncto, & terminantẽ in punctum Q, quod imprimit RQ sectio planorũ plano KTV normaliũ proiectoris VRQ, & triãguli per axem KTR producti in Q. Quare si IO applicata proiicitur quoq; ipsa proiicietur in sibi parallelam LT. Siquidem superficies proiectrix eadem ex prop.8. h.p.1. ac superficies MILT, quod sit normalis plano KVLQ recipientis proiectionem, faciet sectionem TL ex 15. Tract.22. plano KTR normalem, vtpote à planis normalibus effectã KVQ, & MILT plano RKQ. Vnde ex 7. tr.22. parallelæ erunt, & ideo ex pr.8. h. par.1. æquales. Itaque cum in triangulo per axem KTR in sectione TM obtineamus punctum O applicationum ad axem TM, vt in orthographia AVQ longitudines applicatarum, nempe TL, vel in præc fig. 10, & CF poterimus Ellipsim proiectam delineare.

PROBL. IV. PROPOS. XIX.

Dato diametro Ellipsis proiectæ, & diametro proiecto circuli, vel Ellipsis primigeniæ reperire diametrum alterum coniugatum.

Sit ductus diameter Ellipsis proiectæ ND, & diameter proiectus QC, & oporteat reperire diametrũ ellipsis alterũ cõiugatũ IL. Rectangulo NVD fiat æquale quadratum S ex 14. lib.2. Deinde fiat, vt latus quadrati S ad latus PN dimidij diametri; ita applicata VC ad aliud, & prodibit PL ex propos.12. lib.6. & dico IPL duplam LP alterum esse diametrum ellipsis coniugatam.



Probatur. Illa est diameter coniugata, quæ cum possit deseruire pro applicata per centrũ quoque transit, vt colligitur ex propos.32. tract.24. Sed PL talis conditionis est. Ergo erit diameter coniugata.

Probatur. Nam vt latus quadrati S ad latus quadrati NP semidiametri, ita fecimus VC ad PL, & ideo ex 26. lib.6. vt quadratũ S, idest rectangulum æquale NV, & VD ad quadratum, seu rectangulum NP, & PD, ita quadratum VC ad quadratum PL. Ergo PL erit applicata, sicut PI æqualis. Sed etiam transit per centrum P, cum sit ND datus diameter diuisus bifariam. Ergo erit diameter Ellipsis, quo habito poterimus duobus diametris datis omnibus modis tract.24. assignatis Ellipsim proiectam describere. Vnde si habeas tantùm diametrum ellipsis proiectæ, seu parallelum, vt hic plano stereographo, seu obliquum, quæ ex dictis prop.19. huius venari poteris ellipsim proiectam circuli expressiuam delineabis faciliter his datis.

TRACTATVS XXVII.

TRIGONOMETRIÆ PARS PRIMA.

De Trianguli plani cruribus dimetiendis.

TRigonometria pars est Mathematicæ adeo necessaria, vt sine illa vix alterum pedem in huius scientiæ progressu mouere quis possit. Duplex est autem; altera, quæ in mensuratione triangulorum planorum rectilineorum occupatur: altera, quæ sphærica triangula etiam mensuris subigere conatur: in hac 1. parte de triangulis rectilineis agemus.

EXPENSIO I.

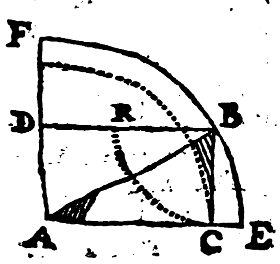
De triangulorum rectorum mensuratione per sinus, vel tangentes.

IN eo consistit trigonometria, vt exhibitis duobus angulis, vel lateribus, vel angulo, & latere, ceterorum, tum angulorum, tum laterum cognoscamus mensuras; & quidem si agitur de lateribus tantùm; id independenter à Tabulis potest operi demandari ex ijs, quæ secundo libr. Elem. dicta sunt prop. 11. at cum latus datur, & angulus ex quibus, vel angulus, vel latus aliquod perquiritur; vsus tabularum est necessarius. Hic autem omnimodam solutionem triangulorum docere animus fert, illā verò, quę solummodò laterum est, planimetriæ reseruabimus.

THEOR. I. PROPOS. I.

In omni triangulo rectangulo, si basis est radius; etiam duo crura sunt sinus arcus, & sinus complementi illius arcus.

SIt triangulum rectangulum ABC. Statuamusque basim AB esse radium alicuius circuli. Dico, quòd duo crura AC, & CB sint, vel sinus CB, vel complementum DB.



Probatur. Quoniam basis AB ponitur radius alicuius circuli, ille circulus, vt FBE circumscribatur cētro A, & ab A. parallela AF ducatur cruri CB. Etenim quia CB est parallela radio AF, sinus erit: Quapropter DB erit sinus conplementi: Sed AC, vtpote, quòd sit inter parallelas est ei æqualis; Ergo AC crus est quoque complementum. Quòd autem FBE arcus sit quadrans patet; quia angulus ACB ponitur rectus: Ergo & angulus CAD rectus erit ob parallelismum linearum CB, & AD ex propos. 30. lib. 1. Elem.

Potest etiā ostendi pr. 17. l. 1. Cor. ex eo, quod in rectāgulo triangulo anguli reliqui nigri sint equales vni recto, vnde alter alterius complementum erit, & ideo crura subtendentia sinus arcuum inuicem erunt arcus, & complementum.

THEOR. II. PROPOS. II.

In omni triangulo, rectangulo si crus quodcumque, vt radius sumatur; crus quidem alterum erit tangens; basis verò secans.

PRobatur. Nam ducto arcu punctato altero crurum pro radio deseruiente V. g. AC, crus CB tangens erit circuli punctati, & AB secans ex prop. 20. lib. 3. Sic sumpto arcu CB pro radio ducto quadrante punctato CR. crus AC tangens erit, & AB secans. Ergo si crus pro radio assumatur alterum crurum vices tangentis obit, & basis pro secante deseruiet.

COROLLARIVM.

HInc colligas, quod vt radius diuisus in 10000000. est ad sinum in partes æquales illis diuisum in tabulis repertū in pportione, sic basis in qualibet alias partes diuisa erit ad crus in easdem partes distributum, quia partes sinuum explicant proportionem sinus totius ad quemlibet sinum: Quare possumus datis duobus tabularum numeris, & altero numero, cui quæratur eiusdem

eiusdem rationis quartus, id per regulam proportionum excerpere, & sic dicas de tangentibus respectu sinus totius. Vnde sequentiæ problemata prodeunt ad solutionem rectangulorum deseruientia.

PROBL. I. PROPOS. III.

Data basi, & angulo adiacente, latus oppositum angulo dato reperire.

SIt data basis AB 30. pedum, angulus verò adiacens niger A sit notus Gr. 15. & eius sinus primis tantùm notis ad sinistram expressus (id enim in istis sufficit) sit 258. & sinus totus 1000. Quia ergo habemus proportionẽ expressã basis ad sinum CB anguli; ideo dices si 1000. basis partes dant 30. partes in ipsa, quid 258. partes cruris dabunt ex ijs 30. basis. Multiplicatus itaque vltimus cum medio, & genitus per primum diuisus exhibebit pedes $7.\frac{740}{1000}$ pro latere quæsito BC. Et aduerte, quòd non assumimus totum sinum, tùm quia in Trigonometria practica id non est necessarium, tum ob maiorem perspicuitatem exempli, cum minor numerus à Tyronibus faciliùs capi possit. Relinqui autem semper possunt quatuor figuræ ad dextram.

PROBL. II. PROPOS. IV.

Data basi, & angulo adiacente quærere latus adiacens angulo dato.

SIt data basis AB 30. pedum, & angulus A G.15. niger, & quæratur latus adiacens AC. Accipiatur eius complementum Arcus G.75. cuius sinus 965. Postea vteris regula dicendo. Si 1000. basis partes dant 30. quid 965? & exhibebunt pedes 28 $\frac{950}{1000}$, idest $\frac{19}{20}$.

PROBL. III. PROPOS. V.

Dato angulo adiacente basi, vel opposito cruri alicui reperire angulum dato oppositum.

OFferatur angulus A 25. Grad. Quia duo anguli in rectangulo æquiualent vni recto ex Coroll.9.prop.17. lib.1. si subducatur angulus A ab angulo recto basi opposito 90. G. remanet angulus B niger 65. G.

PROBL IV. PROPOS. VI.

Data basi, & crure: quærere angulum, cui crus opponitur.

SIt data basis pedum 30. AB, & latus alterum BC pedum 25. volo agnoscere angulum A. Dices itaque.

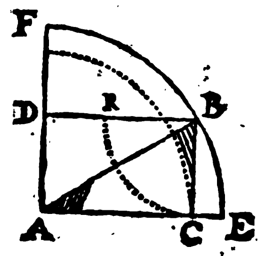
Si 30. dant 10000000. vtendo toto sinu si placet, quid 25?

Dabuntque partes 8333333. Quære itaque in tabulis sinum hunc, quem non inuenies quidem. Sed proximè minorem 8332431. Gr.56. m.26. qui assumetur pro angulo quæsito, in mensuris rerum materialium tractandis.

PROBL. V. PROPOS. VII.

Data basi, ac crure inuenire angulum, cui illud crus adhæret.

SIt data basis AB 42. pedum, & crus adiacens AC 39. & volo agnoscere angulum adiacentem nigrum A. Hoc itaque efficiam, quęrendo priùs sinum anguli B, vt in præced. dicendo.



Si 42. dant 10000000. quid 39? Et dabit sinum 9285714. quem requires in tabulis, & proximè minorem sinum consequeris 9284859. qui est sinus Gr.68. m.12. Cum ergo angulus B sit G.68. m.12. ex probl.5. inuenies alterum adiacentem expetitum subtrahendo Gr.68. m.12. à Gr.90. vt efficiatur angulus adiacens requisitus A Gr.21. m.48.

PROBL. VI. PROPOS. VIII.

Data basi, & crure reperire crus alterum.

SIt data basis AB 53. pedum, crus CB 43. & reposcat quis crus AC.

Primo inuestigabis sinum anguli A cruri dato oppositi ex prop.3. h. dicendo.

Si basis 53. dat sinum totum 10000000. quid crus pedum 43. & reperies proximum sinum 8113207. nempe Gr.54. m.13. & sinus eius complementi Gr.36. m.47. erit 5987907.

Dices itaque rursus si 8113207. sinus dat pedes 43. quid sinus complementi 5987907? Et regula proportionum offert pedes 31. & $\frac{1}{3}$ ferè pro crure quæsito.

PROBL. VII. PROPOS. IX.

Dato crure, & angulo adiacente, quærere basim.

SIt datum crus 59. AC, & angulus ei adiacens A niger 27. Gr. exquiraturque basis AB.

Primo inueniendus est angulus oppositus B ex 6. prop. huius, qui est 63. Gr. & eius complementum; assumendusque est sinus ipsius p.8910065.

Itaque regula proportionis exquires; si 8910065. dant pedes 59; quid 10000000. sinus totus? & exhibebit pedes 66 $\frac{1}{5}$ ferè, quę erit basis.

PROBL.

PROBL. VIII. PROPOS. X.

Dato crure, & angulo cruri opposito reperire basim.

SIt angulus datus A Gr.30. & crus oppositum BC pedum 15. & sit inuenienda basis AB.

Sinus Gr.30. est 5000000. Dices itaque adhibendo proportionis regulam. Si 5000000. dant pedes 15. quid sinus totus 10000000? & prouenient pedes 30. pro basi.

PROBL. IX. PROPOS. XI.

Dato crure, & angulo cruri opposito quærere latus alterum.

SIt datus angulus A G.32. cuius sinus 5299142. & cuius complementum est Gr.58. & sinus 8480481. Crus verò oppositum angulo dato sit pedum 20. Dices itaque adhibendo regulam auream. Si sinus 5299142. dat pedes 20. quid 8480481? exhibebitque operatio pedes 32. & aliquid ampliùs pro crure altero.

At per tangentes id efficies faciliùs ob sinum totum, qui primo loco venit, & ita erit regula proportionum ordinanda, si sinus totus 10000000. dat pedes 20. quid tangens complementi Gr.58. dati, quæ est 16003347? & exerent pedes 32. & $\frac{1}{\ldots}$. Quòd si detur angulus adiacens, potes tamen accipere angulum oppositum, cùm alter alterius sit complementum ex Cor.9. propos.18. lib.1.

PROBL. X. PROPOS. XII.

Datis cruribus duobus angulos reperire oppositos.

SIt datum crus AC 32. pedum, quod statues loco sinus totius, & aliud CB erit tangens oppositi anguli A, quod sit pedum 25. Dices ergo regula aurea, si crus pedum 32. dat 10000000. quid 25? & dabit tangentem 7812500. quæ proximè est tangens Gr.38. Subduces itaque hunc angulum inuentum à Gr.90. & residuum erit alter angulus B Gr.52. oppositus cruri AC, nam ex Coroll.9. propos.17. lib.1. Elem. alter angulus est complementum alterius.

PROBL. XI. PROP. XIII.

Datis duobus cruribus quærere basim.

HÆc propositio executioni demandatur dependenter ab antecedenti, nam datis cruribus prius inueniemus angulum ex quo iuxta prop.9. & 10. reperiemus basim dato crure, & angulo acquisito, vel opposito cruri, vel adiacente.

Hæc autem omnia problemata à duobus propositionibus primis euidentiam desumunt. Omne enim crus in triangulo rectangulo potest esse, aut tangens, sinus, aut secans, hinc est quod possit diuidi, aut cogitari, vt diuisum in eas partes, in quas quilibet sinus diuisus est, seu tangens, seu secans, quæ sunt æquales illis, in quas sinus totus diuisus animaduertitur. Quare si habeam diuisum crus aliquod in alias partes V. g. in pedes possum deuenire in cognitionem alterius cruris, in pedes diuisi.

Cum enim partes sinus AB sint æquales partibus sinus BC, & pedes item cruris AB sint æquales pedibus cruris BC; fit, vt partes sinus AB ad partes sinus BD sint in eadē ꝓportione, ac partes cruris eiusdē AB ad partes cruris BC. Quapropter permutando ita erunt partes sinus AB ad pedes cruris eiusdem AB, vt partes sinus BC ad pedes eiusdem cruris BC; vnde datis tribus partibus AB, & eiusdem pedibus, & partibus BC deueniemus in cognitionem pedum BC eiusdem.

PROBL. XII. PROPOS. XIV.

Sinus in tabulis non repertos emendare.

QVoniam aliquando, imo ferè semper sinus, qui ex calculo exeunt, non sunt iidem præcisè, qui in tabulis reperiuntur; hinc oportet regulam assignare, ob quam, quis in cognitionem proximioris sinus, quàm fieri possit, deueniat.

Sit datus sinus 8333333. qui non reperitur in tabulis; sed proximè minor 8332431. Gr.56.m.26. & maior proximè 8334039. Gr.56.m.27. Subducatur minor à dato 8333333. & residuum erit 902. Item idem minor subducatur à maiori reperto 8334039. residuum erit 1608. Dices itaque regula proportionum, si 1608. dant 60. quot secunda dabunt partes 902? & exeret numerus secundorum 33. Itaque sinus ille datus 8333333. erit Gr.56. m.26. sec.33.

Ratio petitur ex Cor.1. prius tr. 20. defin. Vbi sinum vnius Grad. vix à linea recta differre ostendimus, & tantò minùs arcus vnius minuti: vnde assumimus vnicum minutum, vt lineam rectam, & ideo datum arcum, vt lineā rectam vnius secundi, nempe prō ipsa portione sinus subtensa vsurpamus, tanquam notam in partibus arcuum, & in partibus sinus totius ex ratione propos.13. huius & minorem subtēsam perquirimus, vt innotescat in partibus arcus, à quo sensibiliter non differt.

PROBL. XIII. PROPOS. XV.

Arcuum in tabulis non repertorum sinus cognitos proximè exhibere.

QVia sinus in tabulis, vt plurimùm vsq; ad minuta tantū calculata sunt, & aliquādo distinctior calculus exposcit, vt etiam secundorum sinus obtineatur. Inde est, quòd ex antec. prop. ratione possimus etiam sinum reperire. Nam sit datus arcus Gr.56. m.26. sec.33. Et differentia inter sinum Gr.56. m.27. & m.26. Dices itaque regula proportionis, si secūda quibus differt arcus minor à maiore dant par. 1608. quid m.33.? & exhibebit operatio partes 884. quæ additæ sinui minori 8332431. facient sinum 8333315. parùm differentem à superiori.

EXPENSIO II.

De triangulorum rectangulorum mensuratione adhibitis logarithmis.

OPortet priùs noscere, quomodo ipsi logarithmi cuiuslibet dati numeri ex tabulis logarithmicis eruantur, antequam ipsorum logarithmorum sinubus annexorum calculum doceamus.

Si quis commodè vult vti logarithmis oportet numeros exibitos esse maiores, vel tribus saltem, vel quatuor notis expressos. Alioquin, si duabus tantùm notis exprimantur, superfluum erit ad logarithmos recurrere, cùm facilis se se offerat calculus sine ipsis, & minùs præcisè inuenti logarithmi, minùs quoque calculum præcisum dabunt.

Si verò numerus sit maior 7. figuris sc. quàm quòd ij, qui in tabulis, sinus exarati sunt illi per 10. aut 100. Sunt diuidendi abiectis duabus figuris ad dextram, vel tribus; vt ad eundem numerum redigantur, & tandem illo numero quærendus est sinus in tabulis, vel tangens, qui illi prorsùs conueniat, vel saltem ab eo parum differat, & illius sinus logarithmus erit, etiam logarithmus numeri dati.

Sit datus numerus 394. augeatur quatuor zifris & sit 3940000. & reperiemus simillimum sinum 3941093. cuius logarithmus est 9308731. qui quæritur. Item sit datus numerus 4397652(94. maior, quàm, qui in tabulis reperiri solet, abijciētur duæ figuræ extremæ 94. & quæratur reliquo 4397652 sinus simillimus 4396780, cuius logarithmus est, qui quæritur 8217124.

Regulæ quidem traduntur à Nepero, & alijs, quibus logarithmi non præcisi ad præcisos rediguntur, sed istæ, iam ob additiones plures laboriosæ esse incipiunt; Vnde iam logarithmi instituti ad leuamen laboris, effecti grauioris operis, vsu suo non minuere laborem, sed augere videntur, & propterea à nobis prætermittuntur, maximè quia ad Geodesias ordinarias precisio adeo exquisita, scrupulosaque superflua sit.

THEOR. I. PROPOS. XVI.

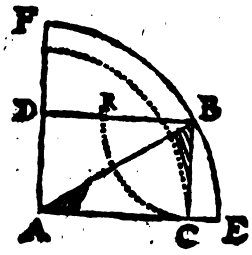
In rectangulo logarithmus cruris æquatur logarithmo anguli oppositi, & logarithmo Hypotenusæ.

PRobatur, Nam basis AB rectanguli ABC deseruit pro radio, & crus BC pro sinu anguli oppositi, ex prop. I. huius. Vnde radius 1000000. partes se habebunt ad quascumque mensuras basis V. g. pedes, vt BC sinus anguli oppositi in ijsdem partibus sinus totius expressus ad pedes BC cruris ex prop. 13. ostensione: Sed in quatuor proportionalibus logarithmus mediorum æquatur logarithmo extremorum. Quare logarith. sinus totius erit logarith. primi proportionalis, secundi erit logarith. sinus totius, vt pedibus constantis tertij verò logarith. sinus A anguli oppositi, quartus ignotus; itaque aggregatum mediorum logarithmorum secundi, & tertij proportionalis æquabitur logarithmo quarti, & primi s. sinus totius, sed primi logarithmus ponitur in tabulis 0. Ergo proportionalis quarti logarithmus. Cum additio zifræ illum non augeat, æquabitur logarithmorum mediorum proportionalium sc. sinus anguli, & pedum datorum basis, seu sinus totius, vt in pedibus cogniti: vnde ille logarith. erit logarith. cruris BC in pedibus noti.

THEOR. II. PROPOS. XVII.

In rectangulo logarithmus cruris est æqualis aggregato ex logarithmo tangentis oppositæ, & logarithmo reliqui cruris.

QVoniam si crus BC statuatur pro radio alterum crus AC est tangens, ideo crus, vt radius ad se, vt notum in alijs partibus, quæ sint V. g. pedes est, vt crus velut tangens ad se, vt notum quoad easdem partes s. pedes ex ostens. propos. 13.



Cumque in quatuor proportionalibus aggregatum mediorum æquetur aggregato extremorum logarithmus tangentis AC, & logarithmus pedum cruris alterius CB aggregati erunt æquales aggregato logarithmico sinus totius CB, & pedum cruris AC. Sed logarithmus sinus totius est 0. Ergo logarithmus pedum cruris AC erit aggregatum logarithmorum cruris AC, vt tangentis, & CB, vt pedibus mensurati cruris.

PROBL. I. PROPOS. XVIII.

Hypothenusa cruris, & angulo, quem crus subtendit, duobus quibuslibet datis tertium reperire.

DEtur basis AB pedum 30. idest vnciarum 360. & additis quatuor zifris 3600000. & angulus A Gr. 15. & quæratur crus. Sinus 2588190 G. 15. cuius logarithmus est 13516255. Sinus verò simillimus basi 3600000. est 3602682. logarithmusque 10209063. Vniantur simul isti duo logarithmi, vt vides.

$$
\begin{array}{r}
13516255 \\
10209063 \\
\hline
23725318
\end{array}
$$

Quæraturque hic logarithmus 23725318. & ei simillimus 23725832 inuenietur, qui dabit sinum 932395. aufer itaque quatuor figuras iuxta quatuor zifras, quas basi addidisti ab ipso sinu, & erunt vnciæ 93. idest pedes 7. & $\frac{2}{12}$, vel $\frac{1}{6}$, vt proximè inuenimus propos. 8. Pro crure quæsito.

Alind quoque exemplum erit. Si detur basis AB vnciarum 360. Angulus verò A Gr. 15. & quæratur crus adiacens AC. Accipe sinus complementi tangentis logarithmum, nempe Gr.75. cuius logarithmus est 301544. Addeque logarithmo finus basis quatuor zifris adauctæ supra inuentæ 10209063. & fiet logarithmus 10510607. qui quæsitus in tabulis non inuenitur quidem; sed ei simillimus 10519069, qui dat sinum 3493899. abiectis itaque quatuor figuris, quia quatuor zifras addidimus basis sinui, prodibunt 34. & 9. vnciæ, idest 29. pedes $\frac{1}{2}$, vt proximè inuenimus propos.4.pro crure.

Tertio pro casu, quo sinus totus venit tertio loco. Sit data basis 360 vnciarum, crusq; 300.vnciarum sc. 25.pedum. Auge vtrumque 4.zifris, vt sint basis quidem 3600000. at cruris 3000000. & deinde reperi ei simillimos sinus basis quidem, vt supra, cuius logarithmus est 10209063. at verò cruris sinus 3001510. cuius logarit. est 12034696. Auferatur itaque ab hoc logarithmo logarithmus basis, & remanebit 1825633, qui quæsitus in tabulis inuenietur ei simillimus 1824299 qui est Gr. 56. m. 26. vt reperimus pr.6.pro angulo quæsito.

Patet autem ex prob. præced. Nam sinus totus, crus sinus anguli oppositi, & basis sunt quatuor proportionalia, quorum quodlibet 4. loco potest venire, sed de sinu toto numquam quæritur, tria ergo reliqua duo dantur, & tertium semper quæritur: Si ergo sinus totus veniat primo loco tunc aggregandi logarithmi sunt, vt fiat logarit. exoptatus, vt primo, & secundo exemplo; si verò secundo loco veniat; tunc logarithmus minor subducendus est à maiore, & residuum est logarithmus, qui desiderabatur, vt tertio exemplo. Quoniam tunc cùm alter mediorum proportionalium sit logarith. o nempe sinus totus, alter erit æqualis se solum extremorum logarithmo, quare si ab eo auferatur logarithmus primus relinquetur logarithmus quartus quæsiti proportionalis.

PROBL. II. PROPOS. XIX.

Datis crure quocumque, & angulo alteri eorum opposito duobus quibuscumque tertium reperire.

DEtur crus BC pedum 25. idest vnciarum 300. & crus aliud AC pedum 32. idest vnciarum 384. & quæratur angulus A oppositus primo cruri BC. Itaque sinui 3000000. quatuor zifris aucto, reperiatur sinus propinquissimus in tabulis 3001510. & assumatur eius logarithmus 1203,696. deinde sinus aucti quatuor zifris 3840000. sinus propinquissimus inuentus sit 3840267. cuius logarithmus 9570427. & quia in regula proportionum sinus totus caderet secundo loco, subducatur minor à maiore, & residuabitur logarithmus 2464269 tangentis. Quære ergo in tabulis hunc tangentis logarithmum, & inuenies 24682434. tangentis Gr.38. esse ei simillimum. Quare arcum Gr.38. assumes pro mensura anguli quæsiti, vt prop.12.

Alterum exemplum erit. Detur crus BC oppositum pedum 20. & angulus A ei oppositus A G.32. & quæratur crus adiacens, cuius complementum est Gr.58. Reijcies itaque 20. pedes in vncias 240. & additis quatuor zifris, vt sit 2400000. inuenies sinum ei simillimum 2402280. cuius logarithmus est 14261662. Deinde inuenies tangentem differentialem anguli 58. defectiuam 4702126. eo quod sit complementi ex Cor. prop.26. Tract.21 quā subduces à sinus illius logarithmo 14261662. & residuum erit logarithmus 9559536. cui logarithmus simillimus quæsitus in tabulis est 9556451. cuius sinus est 3845638. abiectis itaque quatuor figuris iuxta 4. zifras adiectas erit crus alterum vnciarum 384. nimirum pedum 32. vt supra propos.11. Vbi debes notare, quod tangentis logarithmus licet iuxta regulam esset addendus iuxta tam Coroll. prop.26. Tract.21. subducendus est, eò quòd consideratus, vt complementi maioris, quam Gr.45. sit defectiuus.

At si quæratur crus oppositum, & detur BC pedum 32. idest vnciarum 384. & B angulus Gr.58. oppositus, cuius complementum est angulus 32. cuius sinus 2599192. differentialisque 4702126: at verò cruris BC vnciarum cum additis zifris 3840000. est simillimus sinus 3840267. cuius logarithmus 9570427. Addantur itaque simul hic logarithmus, & differentialis ex Coroll. prop.26. tract.21. de logarith. eritque summa 14272553. qui quæsitus in tabulis non inuenietur: sed ei omninò similis 14261662. qui dat sinum 2402280. cruris quæsiti, idest vncias 240 reiectis quatuor figuris ob quatuor zifras additas; quæ sunt pedes 20. vt propos. 11. h.

EXPENSIO III.

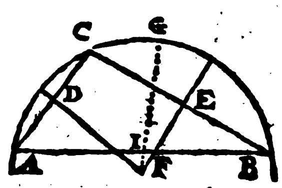
De triangulorum obliquangulorum resolutione.

OBliquangulorum resolutio, & mensuratio parum difficilior; Vocamus autem crura duo latera angulum maiorem stipantia, & illum angulum verticalem, sicut latus, quod ei opponitur à nobis dicitur basis.

THEOR. I. PROPOS. XX.

In omni triangulo crura inter se eam rationem possident, quam sinus oppositorum angulorum.

SIt triangulum quodcumque, sed vt nobis videtur obliquangulum ACB, circùm quod ex doc. prop.5 lib.4. Elem. circumscribatur circulus ACGB: Ducanturque rectæ à centro F ad medietates crurum I, E, D; & Dico, quod crura eam proportionem possident ad inuicem, quam sinus oppositorum angulorum.



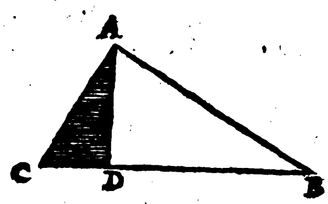
Probatur. Nam latera, vt vides sunt Chordæ, quarum medietates sinus sunt; sed vt totum se habet ad totum ita medietas ad medietatem ex prop.18.lib.5. Ergo si crus est, respectu alterius vt chorda AC ad chordam CB, erit etiam, vt sinus CD ad sinum CE.

THEOR. II. PROPOS. XXI.

In omni triangulo sicut medietas summæ sinuum duorum laterum ad differentiæ eorum medietatem; sic & tangens medietatis summæ angulorum oppositorum ad medietatis eorum differentiæ tangentem.

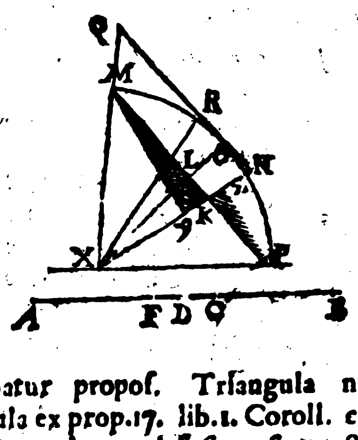
SIt triangulum ACB, cuius duo anguli A, & B scilicet arcus eos mensurantes super arcum PNM in altera figura mensurentur, ita quod arcus QP sit mensura anguli A, & arcus OM sit mensura anguli B, & arcus O 2 sit semidifferentia eorum, cuius tangens est ON, sicut medietatis summæ tangens est QO.

Rursus latera AC, & AB in vnā summā redigatur mensurando ea super rectam AB, cuius medietas AD maiusque crus sit AC, & minus CB semidifferentiaq; inter ea sit DC cum tota sit FC. Dico itaque, quòd sicut est dimidia summa AD crurum ad dimidiam differentiam eorum DC, vel FD; Sic est tangens OQ dimidiatæ summæ angulorum ad dimidiatę eorum differentię tangentem OM.



Primò itaque sciendum ducta ad basim in quocumque triangulo perpendiculari segmenta esse tangentes ex prop. 20. lib.3. Elem. vt patet in triangulo XQN, in quo centrum X diameter XO, cuius 2 O,& O M arcus N tangentes sunt, vtpote ei orthogonales ON, & OQ.

Secundò ex anteced. latera triangulorum esse, vt sinus ad sinum, & ideo AC crus in linea AB esse ad crus CB, vt sinus MK anguli MXK, cui ex hypothesi opponitur crus AC ad sinum P 2 anguli PXK, cui opponitur crus CB ducta itaque MP.



Probatur propos. Triangula nigra sunt equiangula ex prop.17. lib.1. Coroll. cum anguli apud Y, & apud 2. ex def. sinus sint recti, & anguli apud K ad verticem æquales: Vnde MK est ad KP bases, vt crura YM ad 2 P, & ideo ex dictis, vt AC ad CB: Ergo *componendo* MK cum KP erit ad KP, vt AC cum CB ad CB, & ex prop.18. lib.5. Elem. medietas ML priorū erit ad KP, vt medietas AD posteriorem ad CB: Quare *diuidendo* ML erit ad residuum LK ex KP, vt AD ad residuum DF, vel DC ex CB. Quamobrem medietas AD erit ad semidifferentiam DC, seu DF, vt LM ad XL; sed ML ad KL est vt QO ad ON, ob parallelismum linearum QN, & MK in triangulo QXN. Ergo, vt AD semiaggregatum crurum ad eorum semidifferentiam FD. Sic tangens OQ semiaggregati angulorum ad tangentem OM semidifferentiæ eorum.

COROLLARIVM.

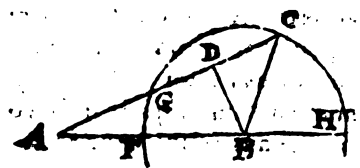
HInc est, quod vtiam vt totum aggregatum ad totam differentiam crurum, sic ex prop.18. tangens semiaggregati crurum ad tangentem semidifferentiæ eorum.

THEOR. III. PROPOS. XXII.

In omnibus triangulis inæqualium laterum, si facto centro in angulo verticali ducatur circulus ad interuallum minimi cruris. Segmentum cruris ad segmentum basis extra circulum remanentis est, vt basis ipsa ad aggregatum crurum.

SIt triangulum scalenum ACB, cuius basis AC angulusque verticalis B, & in B fiat centrum, interualloque BE minimo crure circulus describatur FCH. Dico, quod AF segmentum cruris erit ad AG segmentum basis; vt AC ad aggregatum AB, & & BC, scilicet AH.

Probatur. Nam prop 36. lib.3 Elem. rectangula, quæ fiunt ex segmentis extra circulum remanentibus, & totis secantibus ab vno puncto demissis omnia sunt æqualia, & ideo AC, & AG rectangulum æquabitur rectangulo AF, & AH. At ex propos. 10. lib.6. rectangula æqualia habent latera reciprocè proportionalia. Ergo ita erit latus AF rectanguli ex AF, & AH ad latus AG rectanguli ex AC, & AG, vt latus AC ipsius rectanguli ad latus AH rectāguli prioris, quod est aggregatum cruris AB, & BC, cum BH, vtpote radius sit ei BC equalis.



PROBL. I. PROPOS. XXIII.

Datis angulis, & crure inuenire aliud, aut basim.

IStud prob. fundatur in 20. propos. Quoniam enim sunt latera inuicem, vt sinus oppositorum angulorum, si primo loco ponatur sinus anguli oppositi, secundo crus cognitum, tertio sinus anguli oppositi lateri quæsito, inueniemus crus, vel basim quæsitam.

Pro exemplo detur angulus A in fig.p.20.cognitus 25.G.cuius sinus est 4226183. & crus oppositū CB 35.pedū,angulus quoq; alter acutus B cognitus sit 20. Gr.cuius sinus est 3420201. Dices itaq; si sinus CE anguli A 4226183. dat pedes 35. quid dabit 3420201. sinus DC anguli B, & adhibita regula proportionum exhibebit 28. & $\frac{1}{3}$ ferè.

Quod si velis reperire basim, idem prorsus efficies, sed si sit angulus obtusus, cùm sit maior quadrante habebit pro arcu arcum ipsum reliquorum angulorum simul aggregatorum scilicet ACB, & eorum sinus AI, vel LB pro sumendus est.

PROBL.

PROBL. II. PROPOS. XXIV.

Duobus lateribus, & angulo datis vni eorum opposito inuenire angulum cruri cognito oppositum, & etiam angulum reliquum.

HÆc propositio ab eadem propos. 20 nascitur, vnde exemplo solo patebit. In fig. prop. 20. Sint data duo latera BC 40. pedum, & AC 25. & angulus huic oppositus B Gr. 18. Sicut itaque crus 25. pedum se habet ad sinum BC anguli B, par. 3090170. ita pedes 40. ad sinum CB anguli A & dabit 4944272. quem non reperies, sed propinquissimum 4944476. Gr. 29. m. 22. quem vel pro vero recipies angulo A, vel rectificabis ex dictis prop. 14. huius.

PROB. III. PROPOS. XXV.

Duobus lateribus, & angulo verticali contento datis angulos alios reperire.

ISta propos. fundatur in prop. 21. Detur itaque angulus Gr. 27. crusque 40. AB, & aliud 34. pedum, quæ illum claudant; quorum summa est 74. medietas 37. differentia verò 6. Cumque habemus angulum Gr. 27. & omnes cuiuscumque trianguli anguli duobus rectis sint æquales ex Coroll. prop. 32. lib. 1. nempe Gr. 180. hinc ablatis Gr. 27. à 180 habebimus aggregatum cæterorum Gr. 153. quæritur itaque differentia.

Medietas summæ angulorum est Gr. 76. m. 30. cuius tangens est par. 41652974. medietas laterum 37. medietas differentię laterum est 3. Dices itaque regula proportionali si 37. pedes medietas crurum exhibet semidifferentiam laterum 3. quid medietatis angulorum tangens 41652974? & offeret tangentem 3377268. repeciesque tangentem proximam 3378331. Gr. 18. m. 40. qui arcus deducendus est à semisumma angulorum Gr. 76. m. 30. & habebimus angulum minorem Gr. 57. m. 50. Addendusque iterum, & obtinebimus angulum maiorem Gr. 95. m. 10.

Poteris etiam accipere differentiam totam laterum, & totā summā ipsorū ex Cor. pr. 21. quia ita est totum ad totum, vt dimidium ad dimidium.

PROBL. IV. PROPOS. XXVI.

Triangulum scalenum ad duo triangula rectangula reducere datis cruribus, & basi.

SI reducendum triangulum ACB ad duo rectangula ADB, & DCB datis cruribus, hoc fit ope prop. 26. huius adhibita eius prop. fig.

Primo reperienda est portio CE per regulam auream, quæ diuisa bifariam, vtpote chorda dabit semissem CD, cui incidit perpendiculariter DB ex def. 2. & ex prop. 3. lib. 3. Elem. sic autem fit, detur basis AC 9. Aggregatur prius BC 4. & AB 7. & erit 11. pedum linea AEC. Auferatur, deinde 4. à 7. nempe BC, vel AE ab AB, & erit residuum AF pedum 3. Dices itaque si 9. dat 11. quid 3? &
enascetur segmentum basis AG pedum 3 $\frac{6}{9}$, idest 3. & $\frac{2}{3}$. Quadrere reliquum erit GC 5 $\frac{1}{3}$, cuius medietas DG, vel DC erit 2 $\frac{2}{3}$, & addito DG ipsi AG prodibit crus AD 6 $\frac{1}{3}$, eruntque duo triangula rectangula in cruribus duobus nota ABD, & DBC.

PROBL. V. PROP. XXVII.

Trianguli scaleni datis cruribus angulos reperire.

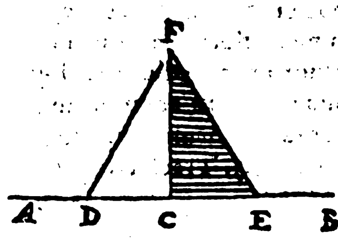
QVoniam iam nouimus ex antec. in duo triangula rectangula scalenum commutare, de quibus cognoscimus crus AD, & 6 $\frac{1}{3}$, & DC pedum 2 $\frac{2}{3}$, sicut basim BA 7. pedum, & BC 4. & agentes de rectangulis diximus, ita esse basim ad crus, vt sinus totus ad sinum anguli oppositi.

Si fiat per auream regulam, vt 7. ad 6 $\frac{1}{3}$, vel vt 21. ad 19. ita radius 10000000 ad aliud? dabit 9047857. sinum, cui proximus est sinus 9044068. Gr. 64. & m. 43. proximè anguli ABD, quem subtrahes à 90. & habebis angulum DAB Gr. 25. m. 17. Ita ages in triangulo DBC, consequeris enim basim BC pedum 3. & DC pedum 2 $\frac{2}{3}$, idest obtines proportionem, quæ est 18. ad 16. Dices itaque si 18. dant 16. quid 10000000? & ab operatione resultabit 8888880. cui reperies proximū sinum 8888830. Gr. 62. m. 44. anguli DBC, quem subduces à 90 & residuus angulus erit DCB Gr. 64. m. 43. si verò vnias angulos ad B repertos Gr. 64 m. 43. & 62. m. 44. obtinebis angulum totum Gr. 127. m. 27.

PROBL. VI. PROPOS. XXVIII.

Data basi, & crure in isoscelibus triangulis angulos reperire.

QVoniam ex propos. 19. lib. 1. Elem perpendicularis CF in triangulo isoscele DFE facit angulos ad C rectos, & æquales, & totum triangulum album toti nigro æquatur, si detur crus, & dimidiata basis, poterimus ex præcedenti cognoscere angulum oppositum nigrum F, & ideo lucrabimur



quoque angulum E nigrum, qui æquantur angulis albo F, & albo D. Quare, si coniungantur anguli albus, & niger ad F habebimus totum angulum seminigrum F. Vnde omnes anguli trianguli equicruris in palàm prodentur.

EXPENSIO IV.

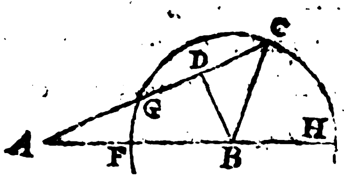
De obliquangulorum dimensione per logarithmos.

NOn minus euadit facilis logarithmica operatio in obliquangulis triangulis, quàm in rectangulis, initiumque tota in præcedentibus tribus obliquangulorum Theorematibus.

THEOR.

THEOR. I. PROPOS. XXIX.

In omni triangulo aggregatum ex logarithmis anguli cuiusuis, & cruris eum ambientis æquatur aggregato crurum, & angulorum eis oppositorum.



QVoniam ex 20. propos. omnium crurum ad sinus oppositorum angulorum eadem est ratio, & hinc genitus ex crure opposito, & sinu ambiente æquatur producto per multiplicationem alterius sinus oppositi, & cruris ambientis, & ideo productum diuisum per sinum alterum, vel per crus dat alterum crus, seu angulum ignotum; Ita etiam ex pr. 5. tract. 21. aggregatum logarithmorũ cruris, & sinus aggregato alterius sinus, & cruris logarithmico æquatur. Vnde subducto alterum ab altero, logarithmus eius, quod quæritur prodire necesse est; sic in triãgulo ACB in fig. p. 20 logarit. AC cruris oppositi, & logarithmus CB sinus ambientis æquatur logarithmico aggregato sinus DC, & cruris CB. Vnde si ab aggregato logarithmico AC, & CB auferatur logarithmus, vel DC sinus prodibit crus CB logarithmicum, vel CB cruris logarithmus, & proferetur logarithmus sinus DC.

THEOR. II. PROPOS. XXX.

In obliquangulis logarithmus aggregati crurum subductus à summa logarithmi differentiæ crurum, & differentialis semiaggregati suorum oppositorum angulorum relinquit differentialem semidifferentiæ eorumdem angulorum.

HÆc propos. fundatur in propos. 21. Coroll. Nam quia ita est summa crurum ad differentiam eorum, vt tangens semiaggregati angulorum ad tangentem semidifferentiæ eorum. Etiam logarithmus tangentis semiaggregati angulorum, & logarithmus differentiæ crurum, nempe mediorum terminorum æquabuntur logarithmo tangentis semidifferentiæ angulorum, & aggregato logarithmi crurum nempe terminorum extremorum iuxta propos. 5. Tract. 21.

THEOR. III. PROP. XXXI.

In obliquangulis summa logarithmorum aggregati crurum, & differentiæ eorum est æqualis summæ logarithmorum basium veræ, & alternæ.

HÆc propos. innititur propos. 22. huius, appellamus autem basim alternam segmentum basis veræ, quod extra circulum remanet, vt AG: Quoniam verò est AF differentia crurum ad AC basim alternam, vt AC basis vera ad AH aggregatum crurum, ideo logarithmi quoque mediorum AC basis alternæ, & AC basis veræ æquabuntur logarithmo differentiæ AF, & aggregati AH ex 5. prop. tract. 21. Vnde si ab aggregato AF, & AH logarithmico auferatur logarithmus basis AC, eueniet logarithmus alternæ basis AG.

PROBL. I. PROPOS. XXXII.

Ex duobus angulis, quibuscumque datæ speciei, & suis cruribus, si tria dantur quartum quodcumque reperiemus.

DEtur angulus A Gr. 25. & logarithmus eius 8612856. & crus oppositum CB 35. pedum, idest vnciarũ 420. additis 4. zifris erunt 4200000. cuius proximus logarithmus est 8669192. Angulus autem alter B Gr. 20. cuius logarithmus 10728852. Qui iunctus logarithmo cruris CB dabit aggregatum 19398044. à quo deductus logarithmus alterius anguli A Gr. 25. remanebit logarithmus 10785188. cui in tabulis valdè similis est 10784974. cuius sinus est 3401060. nempe abiectis 4. figuris dexteris vnciarum 340. vel pedum 28 $\frac{4}{12}$.

Quod si datis duobus cruribus, & angulo velis alium angulum reperire eodem modo rem perficies.

Patet autem operatio ex prop. 28.

PROBL. II. PROPOS. XXXIII.

Datis cruribus, & angulo comprehenso alios angulos patefacere.

DEtur angulus comprehensus Gr. 27. crus AD pedum 40. idest vnciarum 480. & aliud pedum 34. idest vnciarum 408. Summa crurum erit 888. differentia 72. vnciæ, medietas verò summæ 153. reliquorum angulorum est 76. m. 30.

Aggregati crurum 888. additis quatuor zifris, vt sit sinus 8880000. logarithmus proximus est 1188406. idest sinus proximi minoris 8979492. Differentiæ eorumdem 720000. quatuor item zifris auctæ, idest sinus similis 720777. logarithmus proximus est 26300094. At differentialis, seu logarithmus tangentis semiaggregati angulorum Gr. 76. m. 30. logarithmus est 14267876. Deme itaque hunc logarithmum à logarithmo differentiæ crurum; quia differentialis est defectiua, cùm eius arcus excedat Gr. 45. vnde vice additionis subductione vtendum est ex propos. 26. tract. 21. & remanebit 10843812. idest differentialis, & logarithmus tangentis Gr. 18. m. 40. quasi m. 41. Itaque si addas Gr. 18. m. 40. semiaggregato crurum erit maior angulus 95. m. 10. Si demas consequeris angulum minorem Gr. 57. m. 50.

Patet propos. ex propos. 29. ibi enim probatur aggregatum logarithmorum differentiæ crurum, &

& tangentis semiaggregati angulorum equari summæ logarithmi aggregati crurum, & logarithmi tangentis semidifferentiæ angulorum.

PROBL. IV. PROPOS. XXXIV.

Obliquangulum datorum crurum ad duo rectangula reducere.

Sit basis 49. pedum, & latus 4. & aliud latus 7. Addatur logarithmus aggregati crurum pedum 11. vel vnciarum 132. differentiæ eorumdem pedum 3. vel vnciarum 36. additis quatuor zifris vt sit 1320000. Itaque huius num. in tabulis sinus proximus est 1319681. cuius logarithmus est 2012-0110. & ideo substituendus pro ipso summæ crurũ logarith. hic differentiæ 360000. sinus proximus est in tabulis 360623. & ideo etiã logarith. eiusdem differentiæ 33225056. Coniunges igitur istos duos logarithmos simul, & erunt 53455176: Postea basis pedum 9. idest vnciarum 108 quatuor zifris auctæ, vt sit 1080000. reperies sinum simillimum in tabulis 1079994. cuius logarithmus est 2225-6290. Hunc itaque logarithmum à summa 5345-5176. subducito, & erit logarithmus 3118886. qui dabit sinum 442006. à quo abiectis quatuor zifris restabunt vnciæ 44. idest pedes 3, & $\frac{8}{12}$, pro segmento basis alternæ. Cętera autem exequeris, vt propos. 26.

Patet hæc praxis ex propos. 30. cùm ibi probatum sit aggregatis crurum logarithmum, & differentiæ eorumdem in vnam summam redactum æquari summam logarithmorum basis veræ, & alternæ. Quare subducto logarithmo basis veræ remanebit logarithmus basis alternæ.

Habitis autem duobus rectangulis, anguli eorum reperientur per logarithmos, vt Expens. 2. docuimus.

TRACTATVS XXVII.

TRIGONOMETRICI PARS II.

De Triangulis Sphæricis soluendis.

Triangulorum sphæricorum doctrina astronomiæ & astrologiæ basis est, nullusq; sine ipsa in illis proficere, aut aliquid ritè cognoscere potest: sed sicut præcipuæ vtilitatis referta est, sic non minima difficultas in demonstrationibus penitùs percipiendis dignoscitur: vnde multi de hac cognitione haurienda diffisi solis praxibus potiùs incubuere. Nos, vt tam præcipua Mathematicæ pars etiam imaginationibus minùs viuacibus pateret clariùs, quàm fieri potuit; tum verbis, tum figuris cum difficultate decertauimus.

EXPENSIO I.

De rectangulis sphæricis soluendis.

Soluere triangula sphærica est ex datis aliquibus partibus alias manifestare, in quo negotio ritè peragendo videnda sunt ea, quæ diximus prop. 14. & 28. & Coroll. tract. 23. part. 2. vbi euitare fallacias, & amphibologias docemus; ne pro latere, aut angulo quæsito, alium inueniamus, & loco quæsiti adhibeamus, & vt securiùs id fiat, faciliùs erit vti semper triangulo, cuius duo anguli ad basim sint quadrante minores, & tales erunt ex eit. Coroll. si, & arcus, cruraque subtensa sint quadrante minora, non verò si vnus sit acutus, alter obtusus angulus, aut crus vnum quadrante minus, alterum verò maius. Quomodo verò possimus semper vti triangulo duos angulos acutos habente, infrà docebimus, cum de substitutione. Adhærere autem, basis in istis triangulis sibi nomen vsurpare crus angulo recto oppositum, crurum verò arcus, qui obliquis subtenduntur, angulus verò adiacens vocatur, qui adhæret cruri, quod efficitur à basi, & altero crure.

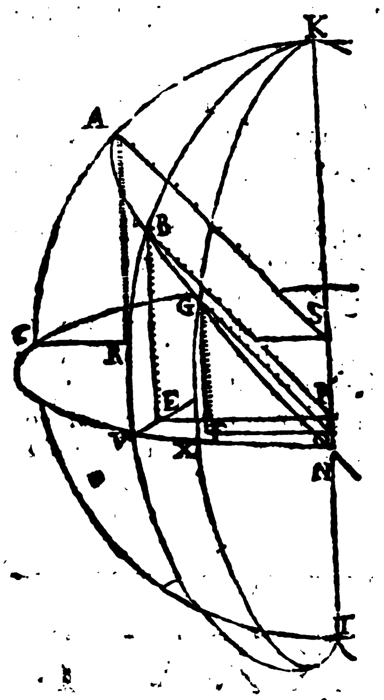
THEOR. I. PROP. I.

Triangula sphærica duobus circulis inclinatis effecta, & tertio quocumque alteri ipsorum perpendiculari habent sinum cruris ad sinum basis in eadem proportione.

Sint duo circuli inuicem inclinati ABN, & CVN, & alij circuli perpendiculares, vt KCT, KBVZ, & KGXT, alteri ipsorum, vt circulo CVN descendant, & expleant triãgula sphærica rectãgula ACN, VBN, & XGN. Dico, quod ita est ad sinum FG cruris GX sinus GO basis GN, vt ad sinum BE cruris BV sinus BP basis BN, & ad sinum RA radius AS.

Pro-

Probatur. Sinus totus SA, & BP, & GO sunt paralleli, ita sinus RA, EB, & FG sunt paralleli. Ergo triangula RAS, & EBP, & FOD sunt æquiangula, cum parallelis claudătur. Quare ex propos. 4. lib. 6. Elem. ita est AS ad AR, vt BP ad EB, & OG ad GF.



Quod autẽ sinus EB, & FG, & RA sit paralleli patet (& deseruiat pro vniuersali ostensione in alijs) nã debet esse ex def. sinus perpẽdiculares radijs V. g. AR sinus radio CS, vel sinus EB ei, qui transiret ab V per E in S, & cæt. quibus, omnibus, vtpote in eodem plano positis perpendicularis est SK sectio planorum circulorum perpendicularium communis ex propos. 16. tract. 21. de intersect. Cum ergo singuli sinus AR, & EB, & GF sint perpendiculares radijs: quibus, & perpendicularis est SK, & in eodem plano, vt SK singuli sint; Ergo ipsi SK sunt paralleli: quare ex prop. 9. tract. 22. etiam inter se.

Idem ostendetur de sinubus basium AS, & BP, & GO cum ex def. sinus sint omnes perpendiculares sinui toti NS, & in eodem plano sint circuli ABN, quare omnes erunt paralleli.

COROLLARIVM.

OBserua autem, quod AR mensurat angulum ANC. Quoniam KAT ductus est polo N; vnde circuli inclinati inuicem ABN, & CVN transeunt per polum N, quadere etiam circulus KAT per polos illorum transibit ex 15. tract. 21. part. 1. & hac ratione ex prop. 14. eiusdem tract. erit KAT vtrique perpendicularis, ideoque arcus AC ex def. 6. tract 21. part. 1. angulum ANC mensurabit, & AR erit sinus illius anguli sc. arcus AC. Quamobrem erit sinus totus AS ad sinum anguli AR, vt sinus basis BP ad sinum cruris BE illi oppositi.

THEOR. II. PROPOS. II.

Triangula sphærica duobus circulis inuicem inclinatis effecta, & tertio quocunque alteri ipsorum perpendiculari habent sinum anguli recti, idest sinum totum ad sinum basis, vt sinus anguli obliqui ad sinum cruris.

QVoniam eadem figura vtendo AS sinus totus est ad AR sinum anguli, vt basis BP ad sinum EB cruris; erit etiam *permutando* sinus totus AS ad sinum basis BP, vt sinus anguli AR ad sinum cruris EB.

PROBL. I. PROPOS. III.

Dato radio, sinu anguli, & sinu basis latus oppositum angulo dato inuenire in rectangulis triangulis.

QVoniam ex anteced. 1. & 2. propos. AS est ad AR, vt PB ad BE, ideo si detur AS sinus totus AR sinus anguli PB sinus basis per regulam auream episcabitur sinus BE cruris BV, qui debebit esse specie cõformis dato angulo. Exẽplũ erit. Sit basis data Gr. 50 cuius sinus 7660445 angulus Gr. 30. m. 30. Sinus verò 5075384. & sinus totus. Dicaturque, si sinus totus dat sinum anguli Gr. 30. m. 30. par. 5075384. quid sinus basis 7660445. & prodibit sinus cruris angulo dato oppositi par. 3887969. Gr. 22. m. 52. & paulò magis. Debet autem hoc crus conformari specie angulo opposito dato ex prop. 28. tract. 23. Cor. 5.

COROLLARIVM.

HInc educes posse alias comparationes fieri, sed paulò in opere laboriosiores, quæ sunt.

Dato sinu basis BP, & sinu cruris BE, & sinu toto AS reperire sinum AR anguli oppositi N cruri dato EB.

Sic etiam, dato vna anguli sinu RA, & sinu toto AS, & sinu cruris EB reperies basim BP: sed hæ operationes ob diuisionem, quæ debet fieri cum sinus totus a loco inueniatur, sunt paulò operosiores, & in his debet aliqua reliquarum partium cognosci quadrante minor V. g. quod crus sit minus quadrante, vel angulus vtri sit acutus.

THEOR. III. PROPOS. IV.

In omni triangulo sphærico rectangulo, proportio sinus anguli recti ad sinum anguli non recti, est vt sinus complementi cruris reliquum angulum subtendentis ad sinum complementi ipsius anguli reliqui.

SIt triangulum GBA factum ex duobus circulis inclinatis HOQZ, & LBAK, claudatque alterum latus arcus descendens circuli VGBX perpendicularis super circulum LBAK.

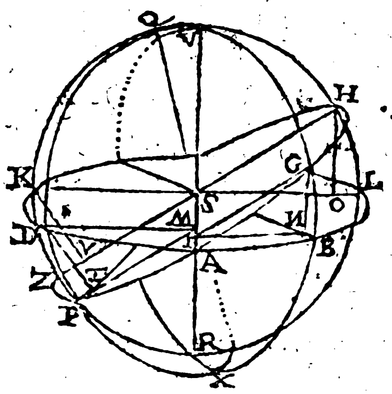
Sitque GN sinus cruris GB, & GI sinus basis GA, sicut HO sinus arcus LH mensurantis angulum A. Numeratis autem à puncto G 90. Gr. & in eo facto polo ducatur arcus QPX perpendicularis circulo HAZ, & circulo VGX ex Coroll. 1. propos. 13. Tr. 19. cum polus sit in communi puncto. Quare GBX, & GAP sunt quadrantes ex prop. 13. eiusdem Coroll. 2. Illud autem, quod in primis est ostendendum BAD, & XPD esse quoque quadrantes.

Probatur autem. Nam VGX circulus secat XPQ circulum orthogonaliter, vt diximus, & bifariam cum sint maximi; Ergo ex prop. 13. tract. 23. etiam per polos eius circulus QPX transibit. Pariter quoque LBAK circulus eundem VGX secat orthogonaliter ex dictis, & bifariam, cùm sint maximi. Ergo ex prop. 13. cit. per polos eius circulus BAD transibit. Quapropter in eodem polo circuli VGX duo circuli BAD, & XPQ conuenient in D. Sed poli

ex

ex Coroll. 3. prop. cit distant quadrante, à circulo, cuius sunt poli. Ergo BAD, & XPD quadrantes sunt cùm debeant distare ab X, & G punctis circuli VGX quadrante. Propterea AD erit complementum arcus BA, eiusque PD erit complementum arcus crurisque BA, & PD erit complementum arcus XP, qui mensurat angulum G cum circulis XBG & GAP ex effectione sit perpendicularis. Quadere MD erit sinus arcus AD complementi cruris BA, & DT sinus arcus DP complementi anguli G.

Dico itaque sinum totum HS ad sinum HO anguli obliqui A dicere eam proportionem, quam sinus DM complementi cruris adiacentis AB dicit ad sinum TD complementi reliqui anguli G.



Probatur autem ex præhabitis. Nam propos. 1. ostendimus, quod sit, vt SK ad KY, sic MD ad TD quod descendat super alterum inclinatorum HGAP perpendicularis circulus XPQ. Sed SK æquatur SH, cùm sit sinus totus, & KY æquatur sinui HO, cùm sint sinus angulorum æqualiū ex prop. 3. par. 2. tract. 23. cum sint ad verticem A, & ideo arcus HL, & XK eos mensurantes erunt æquales: quare etiam sinus HO, & KY subtensi erunt æquales. Quadere ex 7. lib. 5. erit SH ad HO sinus totus ad sinum anguli HAL non recti, vt MD sinus complementi AD cruris BA ad TD sinum complementi anguli reliqui G.

PROBL. II. PROPOS. V.

Dato radio sinu anguli, & sinu complementi cruris angulo dato adiacentis inuenire angulum reliquum.

QVoniam radius est ad sinum anguli OH, vt ad sinum TD complemēti anguli reliqui G sinus MD complementi cruris, ideoque. Si statuatur 1. loco radius, 2. sinus anguli A, sc. HL arcus 3. sinus complementi cruris adiacentis BA inuenietur sinus DT complementi anguli reliqui, nempe arcus PD, qui ablatus à Gr. 90. relinquet arcum exoptatum PX mensuram anguli G.

Exemplum. Sit arcus Gr. 39. m. 25. anguli A, cuius sinus 6349553. Crus AB Gr. 47. m. 30. cuius complementum sit arcus Gr. 42. m. 30. & eius sinus 6755902. qui multiplicabitur cum sinu anguli A, & proferet diuisus per sinum totum. Sinum 4289695. DT Gr. 25. m. 24. & paulò magis, qui arcus deductus à Gr. 90. exibebit arcum XP Gr. 64. m. 36. Debent verò isti arcus dati anguli, & cruris esse quadrante minores ad hoc, vt cruris, accipiatur complementum ex prop. 28. tract. 22.

Quod, & obseruandum est in reliquis praxibus, quando complementa interueniunt pro arcubus accipienda.

COROLLARIVM.

HInc quoque inuenies dato primò cruris BA complementi sinu MD, secundò anguli G complemento, cuius sinus DT, & radio, inuenies inquam sinum anguli A dato cruri adiacentis.

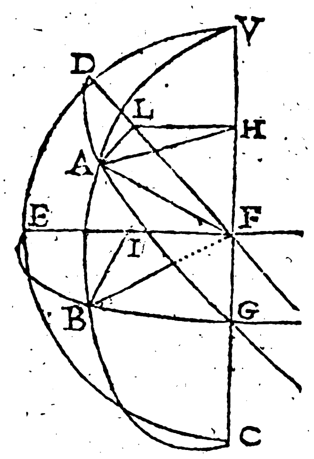
Sicut dato 1. sinu HO anguli adiacentis cruri BA, & 2. Radio, & 3. anguli reliqui G cruri dato oppositi complementi sinu DT, inuenies complementi AD cruris BA sinum MD; sed paulò maiori labore ob Radium, qui 2. loco incidit, & hic etiam aduertere oportet ad speciem, nam crus, quòd expromitur debet specie respondere angulo dato, vt sint ambo quadrante minores.

THEOR. IV. PROPOS. VI.

In omni triangulo sphærico rectangulo sinus quadrantis ad sinum complementi cruris eam obtinet proportionem, quam sinus complementi reliqui cruris ad sinum complementi basis.

SIt sphæra, in qua sit triangulum ABC ex circulis inclinatis inuicem DAG, & EBG, claudatque alterum latus arcus perpendicularis VABC. Eritque FB sinus totus, & BAV quadrans, & VA arcus complens crus BA vsque ad quadrantem VB, & sinus eius AH parallelus sinui toti BF in superficie circuli VABC descriptus. Arcus verò EB complentis crus BG sinus BI in plano circuli EBG. Sicut etiam arcus DA basim AG complentis sinus AL in planitie circuli DAG descriptus.

Dico itaque, quòd sicut se habet sinus totus FB ad sinum BI complementi cruris, ita in proportione assimilatur sinus AH complementi reliqui cruris ad sinum AL complementi basis.



Probatur ex 1. propos. h. Nam VABC, VDEC sūt circuli inclinati inuicem; & arcus EB circuli EBG mensurat angulum inclinationis ad V cùm polus eius sit in V. Vnde EV, & VE sunt quadrantes. Alius autem circulus DAG perpendiculariter super alterum ipsorum, nempe super VEC descendit à puncto G, quòd eius polus in circuli VEC circumferentia existat. Quare ea prop. 1. hic verificatur, eritque FB ad BI, vt AH ad LA, eo quòd sint parallelæ lineæ AL, & BI, vtpote sinus perpendiculares semidiametris DF, & EF, & etiam BF, & AH eo quòd sint perpendiculares, vtpote sinus radio FV. Cùm ergo lineę sint parallelæ erunt triangula æquiangula ALH, & IBF, & ideo latera erunt proportionalia, & erit FB ad BI, vt AH ad AL.

Ooo THEOR.

PROBL. III. PROPOS. VII.

Dato radio, & sinu complementi cruris, & complementi cruris alterius basim inuenire.

QVoniam est radius BF ad BI sinum complementi cruris BG, vt AH sinus complementi alterius cruris BA ad sinũ AL complementi basis: adhibendo regulam proportionum ex radio, & ex ijs sinubus datis complementorum crurum prodibit sinus complementi basis.

Exemplum. Sit datum crus Gr.42.cuius complementum G.48. & sinus 7431448. complementi huius, & alterum crus Gr.33.m.15. cuius complementum Gr.56. m.45. & eius sinus 8457278. Multiplicentur simul, & productum per radium diuidatur, prodibitque sinus complementi basis 6284982. Gr.38. m.56. & paulò magis, erit autem minor quadrante basis, si crura specie concordauerint; si verò dissentiant specie, maior quadrante ex prop.18. Tract.23. Cor.4.

COROLLARIVM.

HInc etiam enascitur; quòd dato, sinu BI complementi cruris BG, & sinu toto, & sinu AL complementi basis, inueniatur sinus AH complementi cruris reliqui AB; Vel etiam dato AH sinu cõplementi cruris BA, & sinu compleméti basis AL, & radio BF, inueniatur sinus BI complementi alterius cruris; Verùm cùm radius non veniat primo loco paulò operosior est calculus.

EXPENSIO II.

De tangentibus.

QVoniam per solos sinus trigonometria non est perfecta, cùm non omnes possint inquiri rectangulorum partes secundùm omnia data, per quæ inquisitio placeat ordiri, & etiam quędam per solos sinus laboriosiùs acquirantur, ideo, vt illorum defectibus succurrant, tangentes adinuētæ sunt, & secantes. Sed priùs de tangentibus in hac expensione tractabimus, cum ipsæ cum sinubus adsoluendos omnes casus trigonometriæ sufficere possint. Sed præter ea, quæ diximus prop. 24. & 25. Tract.20. hic etiam aliæ preuię propositiones statuendæ sunt.

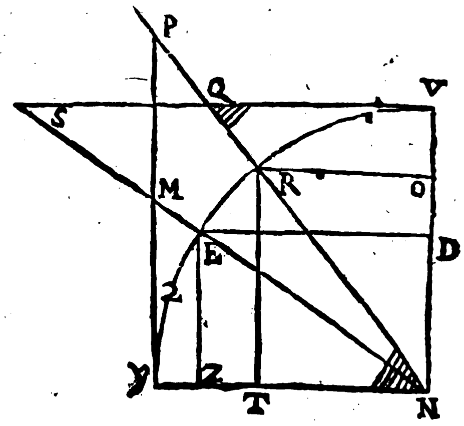
THEOR. I. PROPOS. VIII.

Si sint duo arcus, ita erit tangens primi ad tangentem complementi posterioris, vt tangens posterioris ad tangentem complementi prioris.

SInt duo arcus primus RV, & EY secundus. Dico quòd sicut tangens prioris QV est ad tangentem complementi posterioris VS, sic tangens postremi YM ad tangentem complementi prioris YP.

Probatur. Tangens QV est ad radium, vt radius ad tangentem YP complementi ex prop.25. Tract.20. Et tangens YM arcus posterioris refertur quoque ad radium, vt radius ad SV tangentem sui complementi: vnde etiam erit *inuertendo* Radius ad YM, vt SV ad radium; quamobrem dispositis ritè terminis est proportio perturbata.

VT QV ad Rad. Et vt Rad. ad YM,
Ita SV ad Rad. sic Rad. ad YP.



Quare ex *æquo* ex def.18. Tr.9. erit quoq; VQ ad YM tangentes arcuum, vt SV ad YP tangentes complementorum, sc. prioris, & posterioris, & *permutando* VQ ad SV, vt YM ad YP, nempe tangens primi QV ad tangentem complementi secundi SV, vt YM tangens huius ad YP tangentem complementi prioris.

THEOR. II. PROPOS. IX.

Si sit arcus, cuius radius referatur ad sinum suum, sicut tangens alicuius secundi refertur ad tangentem alterius tertij. Sic quoque refertur tangens complementi huius tertij ad tangentem complementi illius secundi, vt radius primi ad suum sinum se habebat.

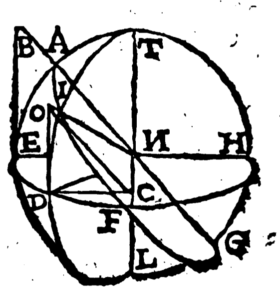
PRobatur ex propos.16. lib.5. Nam eidem proportioni tertiæ arcuum tangentis VQ ad YM sunt duæ proportiones eædem radij RN V.g. ad sinum OR arcus alicuius ex Thesi, & ex præc. contextu YP ad VS, quare erit etiam eadem proportio RN ad RO, quam YP ad SV.

THEOR. III. PROPOS. X.

In triangulo sphærico rectangulo sinus cruris est ad tangentem alterius cruris reliqui, vt radius est ad tangentem anguli reliquo cruri oppositi.

SInt duo circuli inclinati AFG, & EFH, & huic circulus normalis TDL descendat, claudatque triangulum IDF. Dico quòd DC sinus cruris DF est ad DO tangentem alterius cruris DI secundi, vt EN radius est ad EB sinum anguli IFD.

Probatur. Nam tangentes EB, & OD, vtpote perpédiculares ex 20. lib.3. Elem. radijs DN, & EN, & ideo parallelæ radio NT erunt perpendiculares EFH plano, cui radius NT perpendicularis est, quare inuicem quoque erunt paral-



parallela, & insuper DO, quia perpendicularis, sunt parallela radio EN. Quapropter triangula ENB, & DOC erunt æquiangula, tanquam parallelis constituta ex 4. lib. 6. Elem. & ideo DC erit ad DO, vt radius EN ad EB tangentem anguli IFD.

PROBL. I. PROPOS. XI.

Dato radio, & sinu cruris adiacentis angulo, & tangente ipsius anguli; cruris oppositi tangentem reperire dato angulo specie conformem.

Quoniam diximus DC sinum cruris esse ad DO tangentem cruris alterius, vt radius ad tangentē EB anguli F erit etiam *permutādo* DC sinus ad EN radium, vt DO tangens cruris ad EB tangentem anguli, & *inuertendo* radius EN erit ad DC sinum, vt tangens EB anguli F ad tangentem DO cruris oppositi DI. Quare dato radio primo loco, deinde sinu cruris, postea tangente anguli adiacentis, prodibit tangens cruris oppositi conformis specie dato angulo ex Cor. 5. prop. 28. Tract. 23.

Exemplum. Sit crus Gr. 29. m. 20. cuius sinus 4898897. Anguli adiacentis tangens Gr. 21. m. 45. quæ est 3989596. Multiplicentur simul, & numerus genitus diuisus per radium proferet tangentem 1954461; quæ est Gr. 11. m. 3. & paulò magis, anguli oppositi.

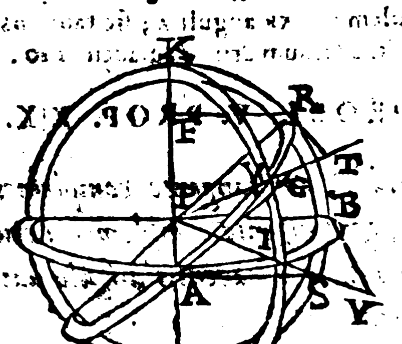
COROLLARIVM.

Hinc etiam. Dato primò tangente EB anguli F, secundò radio EN, tertiò tangente cruris oppositi angulo dato poterit inueniri crus adiacēs, vt præced. patet. Sicut etiam dato sinu DC cruris, & data tangente alterius cruris DO, & radio angulus F oppositus alteri crurum extrahi poterit; sed paulò laboriosius, quæ tamen inuenta datis debent esse specie conformia ex prop. 28. Tr. 23. Cor. 5.

THEOR. IV. PROPOS. XII.

In triangulo sphærico rectangulo radius est in proportione ad sinum complementi anguli non recti, vt tangens basis ad tangentem cruris dicto angulo adhærentis.

Sit sinus BF complementi arcus BR anguli A; Tangens autem cruris AI sit AS, & basis AV tangens sit AG. Ex præced. radius PB ad sinum FB



adiacentis cruris, angulo K dicit eam proportionem, quam tangens RT anguli K ad tangentem RT oppositi cruris. Verùm ex 8. huius, sicut est RT ad RT; ita est complementi posterioris arcus tangens AG ad tangentem SA complementi arcus prioris: Ergo etiam ex prop. 16. lib. 5. Elem. Radius BP erit ad sinum BF complementi BR arcus BR anguli A, vt AG tangens basis VA ad SA tangentem cruris IA angulo A adhærentis triang. AIV.

PROBL. II. PROPOS. XIII.

Dato radio, & sinu complementi anguli, & tangente basis inuenire crus adiacens angulo dato.

Faciliter id fit ex præced. per regulam auream. Nam cum sit radius ad sinum complementi anguli, vt tangens basis ad tangentem cruris. Sinus complementi āguli multiplicetur cum tāgente basis, & diuidatur per radium, prodibit tangens cruris quæsiti adiacentis.

Exemplū. Sit arcus āguli G. 33. m. 20. cuius cōplementū G. 56. m. 40. & eius sinus 8354878. Sit verò basis Gr. 42 cuius tangens 9004040. Multiplicentur simul, & genitus numerus per radium diuisus dabit tāgentem 7522765. Gr. 36. m. 57. & paulò magis. Hoc autem crus debet esse speciei conforme angulo dato ad vitandas fallacias prop. 28. Coroll. 5. Tract. 23. p. 2.

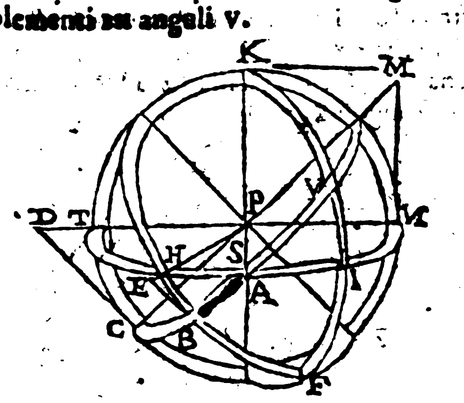
COROLLARIVM.

Hinc etiam posset data tangente anguli AS, & radio, & tangente AG basis extrudi sinus BF complementi anguli A cruri dato adiacentis. Verùm operosiùs.

THEOR. V. PROP. XIV.

In rectangulo sphærico radius est ad tangentem anguli in eadem proportione, quam obtinet sinus complementi basis ad tangentem complementi alterius anguli.

Sit triangulum IAV, & basis VA complementum sit AE; mensura verò anguli V sit arcus PB descriptus polo V, cuius complementum, vt ostendi prop. 5. huius est arcus BH. Dico, quod radius PC est ad tangentem NM anguli A, quam sinus SB complementi basis possidet ad tangentem BH complementi BH anguli V.



Pr. Ex pr. 10. h. ita est PC radius ad CD tāgentē anguli HAD, vt sinus cruris adiacentis SB ad tangentē BH cruris oppositi BH; Sed hoc crus BH est cōplemētū anguli V, & CD æquatur tangenti MN, cū sint tangētes æqualiū angulorū ad verticē A ex 3. tr. 23. p. 2. Ergo radius erit ad tangentē NM anguli A trianguli

IVA, vt sinus IB complementi basis ad tangentem AB complementi alterius anguli V.

PROBL. III. PROPOS. XV.

Dato radio, & tangente anguli, & sinu complementi basis, tangentem compl. alterius anguli reperire.

QVoniam ex præced. radius est ad tangentem anguli, vt sinus complementi basis ad complementi reliqui anguli tangētem, adhibita regula proportionum postulatam exhibebit tangentem.

Exemplū. Detur radius, & anguli G 45. m. 19. tāgēs 1011153. & basis G. 62. m. 55. cōpl. G. 27. m. 5. sinus sit 5113589. qui numeri inuicem multiplicati exhibebūt 5170428 pro tāgēte quęsita cōpl. anguli alterius G. 27. m. 20. Vnde āgulus erit G. 62. m. 40. qui debet esse minor quadrāte, quòd data anguli & basis esse debeant quadrante minora; at si basis sit maior quadrante angulus esset obtusus ex cit. propos. 28. Tr. 23. Cor. 2. p. 2.

COROLLARIVM.

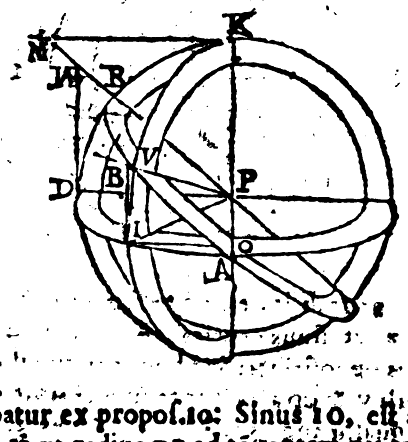
POssent etiam alio pacto ordinari termini statuto primo loco CD, vel MN tāgente anguli oppositi, 2. loco radio, 3. loco anguli alterius complemēti tāgente, & prodiret sinus IS compl. basis.

Vel 1 sinus IS cōplementi, 2. tangens complementi anguli, 3. radius, generaret anguli tang. CD vel NM. Sed faciliùs hæc quæsita alio pacto venabimur. Debent autem data esse quadrante minora ob vsum complementorum ex propos. 4. Tract. 27. huius.

THEOR. VI. PROPOS. XVI.

Trianguli sphærici rectanguli radius ad tangentem cruris eadem proportione potitur, quâ tangens complementi basis ad sinum complementi anguli adiacentis.

IN triangulo KRV, cuius angulus rectus R; basis verò VK, tangens verò IB eius complementi IV, & crus sit KR, cuius tangens KM, & tangens eius complementi MN. Arcus, qui angulum K mensurat sit DI, cuius complementum sit IA, & eius sinus IO. Dico, quod Radius KP est ad tangentem cruris KM in proportione illa, quam habet tangens complementi basis IB ad sinum IO complementi anguli K.



Probatur ex propos. 10. Sinus IO, est ad tangentem IB, vt radius DP ad tangentem DN anguli A. Quare inuertendo DN tangens erit ad radium, vel IB tangens ad IO sinum ex prop. autem 25. Tr. 20. vt DN refertur ad DP, ita DP radius ad MK tangentem complementi eiusdem arcus. Quapropter vt DP ad MK, sic proportione correspondebit IV ad IO tangentem. Radius itaque est ad KM cruris RK in rectangulo RKV, vt tangens IB complementi IV basis VK, ad sinum IO arcus IA complementis arcum DI mensuram anguli K.

PROBL. IV. PROPOS. XVII.

Dato Radio, & tangente cruris adiacentis, & tangente complementi basis sinum complementi anguli dato cruri adiacentis inuenire.

QVoniam tangens MK radius est proportione refertur, quâ tangens complementi basis IB ad sinum complementi anguli IO; adhibita regula proportionum ex tribus primis datis desideratum sinum IO exhibebit, vt exemplum docet.

Exemplum. Sit crus G. 37. m. 32. cuius tangens est 7689067. Basis verò compl. sit G. 49. m. 10. cuius tangens 1157494. Multiplicentur que numeri & productum per radium diuidatur, abiectis 7. siguris ad dextram, vt moris est, & prodibit sinus 6032797. qui est Gr. 37. m. 6. & paulò magis, qui subductus à Gr. 90. efficietur angulus interceptus Gr. 42. m. 54. Obseruaque quòd ea, quæ dantur sint specie cognita quadrante minora ob vsum complementorum; vnde, & angulus, qui quæritur debet esse acutus ex propos. 28. tract. 23. Cons.

THEOR. VII. PROPOS. XVIII.

Radius est ad tangentem complementi anguli, vt tangens cruris dicto angulo oppositi ad sinum cruris adiacentis.

SIt triangulum AVI in præced. fig. Detur que angulus A, cuius tangens est DN; complementi verò eius anguli tangens est MK, crus item oppositum est IV, cujus tangens IB; sinus verò lateris adiacentis AI est IO. Dico itaque, quòd radius PK est ad MK, vt IB ad IO.

Probatur DN est ad DP, vt IB ad IO inuertendo propos. 10. huius; sed vt tangens DN ad radium DP, ita ex propos. 25. tract. 20. est radius PK ad tangentem MK compl. Ergo vt radius PK ad tangentem MK complementi KR anguli A; sic tangens IB cruris oppositi ad sinum cruris adiacentis IO.

PROBL. V. PROP. XIX.

Dato radio, & tangente complementi anguli, & tangente complementi cruris, sinum cruris adiacentis angulo dato inuestigare.

QVoniam hęc quatuor sunt proportionalia radius ad tangentem complementi anguli. Sicut tangens cruris oppositi ad sinum cruris adiacentis, ideo regula proportionum quæsitum complebit.

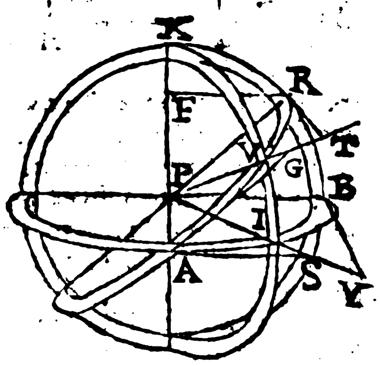
Exemp.

Exemplum. Sit datus angulus Gr.62. m.28. cuius complementum est Gr.27. m.32. Tangensque eius 5215057. crus verò Gr.18. m.26. cuius tangens est 3333020. multiplicati itaque isti numeri simul, & diuisi per radium dabunt sinum [illegible] exoptatum; qui est Gr.10. & paulò amplius; Oportet autem erit obseruare, vt specie sit crus, quòd eruitur, & conforme datis, ex prop 18. tract.23.p.2.coroll. 5. & 6. quæ sumenda erunt quadrante minora.

THEOR. VIII. PROP. XX.

Radius est ad sinum complementi anguli, vt tangens complementi cruris adiacentis ei ad tangentem complementi basis in sphærico rectangulo.

IN præced. fig. prop. 12. huius detur triangulum sphæricum rectangulum AIV, & angulus RAB, cuius complementum RK, & sinus eius RF. Basis sit AV, cuius complementum VR, & eius tangens TR, crus sit AI, cuius complementum IB, & tangens ipsius BY. Dico, *quòd PB radius est ad RF sinum complementi anguli*, vt tangens BY complementi cruris est ad tangentem TR complementi basis.



Probatur. Nam, vt ostendi propos. 10. huius, vt BP ad BY, sic FR est ad TR; Ergo *permutando* radius BP erit ad FR sinum, vt BY tangens ad TR tangentem; sed FR est sinus complementi RK arcus BR anguli A, at BY complementi BI cruris IA tangens, & TR complementi AV basis AV tangens. Ergo patet propositum.

PROBL. VI. PROPOS. XXI.

Dato Radio, & sinu complementi anguli, & tangente complementi cruris, & spetie cruris, aut anguli reliqui inuenire tangentem complementi basis, & inde basim.

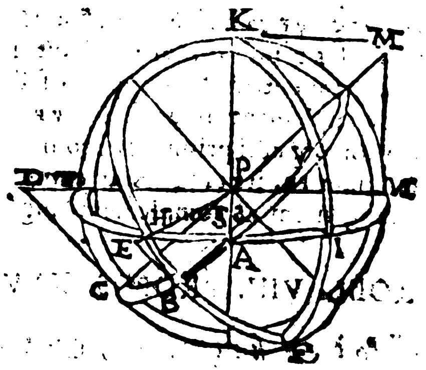
IVxta præced. propos. cum hæc proposita sint proportionalia regula proportionum ex postulata largietur.

Exemplum. Sit datus angulus 23. Gr. cuius complementum est Gr.77. & eius sinus 9743700. & crus 37. Gr. cuius complementum est Gr.53. eiusque tangens 13270448. qui numeri simul ducti, & per sinum totum diuisi dabunt tangentem 12930326. Gr.52. m.17. qui Gr. subducti à 90. exhibebunt arcum exoptatum basis Gr.37. m. 43. Si autem data cognita quantitate spetie consonent basis erit quadrante minor, si dissonent maior ex Cor.4. prop.28. tract.25.

THEOR. VIII. PROPOS. XXII.

Radius est ad tangentem complementi anguli obliqui in rectangulo sphærico, vt tangens complementi reliqui obliqui ad sinum complementi basis.

TRiangulum datum sit AVI in fig. prop. 14. huius, tangens verò complementi anguli A, seu arcus eum mensurantis, sit KM: Complementi verò basis sit AE, & sinus SB, & alterius anguli V, quē arcus PB mensurat sit complementum BH, tangens NB. Dico igitur, quòd radius PK ad proportione refertur ad MK, quā NB ad BS.



Probatur. Nam ex 10. h. ita est SB ad BE, vt PC ad CD: Ergo *inuertendo*, vt BE ad SB sic dicent CD ad CP, sed ob radii nec non, & tangentis æqualitatem, vt CD ad CP radium, ita est NM ad NP: At vt NM ad NP, sic ex propos. 25. tract. 20. est radius PK ad MK. Ergo vt est radius PK ad MK tangentem complementi anguli A, sic est BE tangens complementi anguli reliqui ad BS sinum complementi basis.

PROBL. VII. PROPOS. XXIII.

Dato sinu toto, & tangente complementi anguli, & tangente complementi alterius anguli inuenire tangentem complementi basis.

PAtet operatio ex præced. quia cum data, & quæsita tangens basis sint proportionalia, inuenietur per regulam proportionum.

Exemplum. Sit datus angulus Gr.36. cuius complementum est Gr.49. & tangens 9656888. Alterius verò anguli Gr.48. sit complementum 32. & tangens sit 6248693. qui numeri multiplicati simul exhibebunt pro tangente complementi basis numerum, qui diuisus per sinum totum erit 6034292. Gr.31. m.6. ferè, qui subducti à 90. Gr. erunt Gr.58. m 54. basis: Debent autem sui anguli quadrante minores ob vsum complementorum: vnde, & basis erit quadrante minor ex prop.28. par.2. tract.25. Cor.4.

THEOR.

THEOR. X. PROP. XXIV.

Radius est ad sinum cruris, vt tangens complementi alterius cruris ad tangentem complementi anguli oppositi.

Detur triangulum XRV in fig. propos. 22. & duo eius crura XR, & RV, quæ ambiant angulum rectum R, sinus autem cruris XR sit FR; tangens verò RV cruris sit RT, & eius cõplemẽti ... AC, at arcus angulum X mensurantis tangens sit BY, & complementi sit AS: Dico igitur, quod sicuti PB radius est ad FR sinum cruris, ita AC tangens complementi cruris est ad AS tang. complementi anguli X oppositi.

Probatur. Nam ex prop. 10. huius, ita est sinus FR ad RT tangentem, vt PB radius ad tangentem BY; Ideoque *permutando* FR erit ad PB, vt RT ad BY, & *inuertendo* PB radius erit ad FR sinum, vt BY tangens ad RT tangentem: sed vt BY tangens ad RT tangentem sic ex propos. 8 huius tangens AC complementi arcus secũdi VR est ad SA tangentem complemẽti primi BI: Ergo sicut est radius PB ad sinum FR, ita tangens AC complementi cruris ad tangentem AS complementi anguli X.

PROBL. VIII. PROPOS. XXV.

Radio dato, & sinu cruris, & tangente complementi cruris alterius tangentem complementi anguli obliqui inuenire.

Iam ex præc. patet, quòd cum hæc sint quatuor proportionalia datis tribus vltimum regula aurea inuenire possimus, vnde.

Exemplum erit. Sit arcus Gr. 37 m. 15. cuius sinus sit 6052040. & arcus alter, qui crura rectanguli conficiant Gr. 23. m. 47. cuius complementi Gr. 66. m. 13. tangens est 22690909. Multiplicentur simul, & radio genitum diuidatur, & generabunt 13734671. qui numerus erit tangens Gr. 53. m. 56. ferè complementi anguli quæsiti. Vnde arcus Gr. 36. m 4. erit angulus quæsitus.

Porrò in omnibus istis obseruanda est regula generalis, vt si quando dantur crura quadrante maiora, vel basis, aut angulus assumatur vicarium eius triangulum residuum, vt infra docebimus. Et cum vtimur triangulo vicario: simul corollaria prop. 28. tract. 23. part. 2. vbi docemus quænam crura quosnam requirant angulos, vel quinam anguli crura sibi conuenientia reposcant, sunt obseruanda.

EXPENSIO III.

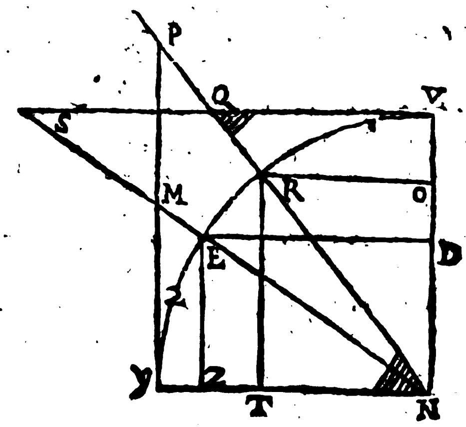
De secantibus.

Qvamuis per solos sinus, & tangentes omnis trigonometria rectangulorum absoluta esset, quia tamen in tribus casibus, qui prop. 6. solui possunt. Sinus totus primo loco non venit, ideo tum ad abundantiam doctrinæ, tum etiam, vt in eis facilior calculus eueniat, etiam secantium tabulæ conditæ ... antequam ad problemata, quę rectangulorũ docent solutionẽ, deueniamus; quædam secantium inter se, vel ad sinus exponendę sunt habitudines.

THEOR. I. PROPOS. XXVI.

Duorum arcuum, sinus complementi primi ad secantem secundi est, vt sinus complementi posterioris ad secantem arcus prioris.

Sint duo arcus, primus VR, & EY secundus in fig. pr. 8. & eorum sinus complementorum RT, & ED, secantesque NQ, & NM, Dico, quòd ita est TR sinus complementi primi ad secantem secundi NM, veluti proportione respondet sinus complementi secundi ED ad secantem primi NQ.



Probatur. Ita est TR sinus, seu ON ad radium NR, vt radius NV, siue idem NR est secantem NQ, & vt est ED, seu NZ sinus complementi ad radium EN, ita radius NY ad secantem NM ex pr. 26. tr. 20. & ideo NM erit *inuertendo* ad radium, vt rad. ad ED. Quare est proportio perturbata, vt in dispositis terminis potes videre.

vt RT est ad R. At vt R. ad ED.
Ita NM est ad R. sic R. ad QN.

Vnde ex *æquo* arguere poterimus ita esse RT ad ED, vt NM ad NQ. & ideo *permutando* ita erit RT sinus complementi prioris arcus ad NM secantem arcus posterioris, vt ED sinus complementi arcus posterioris ad NQ secantem, arcus prioris.

COROLLARIVM I.

Hinc deducitur esse quoque *inuertendo* secantem prioris arcus NQ ad complementi sinũ secundi ED, vt secans arcus posterioris MN ad sinum complementi arcus prioris RT.

Rursusque quòd vt sinus TR primi arcus YR ad secantẽ NM cõplementi secundi EV, sic sinus ED arcus EY huius ad secantẽ NQ complementi arcus prioris RY mutatis tantùm arcuũ denominationibus, vt sinus dicatur arcus, qui erat complementi, & secans complementi, quæ arcus secans erat.

COROLLARIVM II.

Ideoque erit etiam *permutando* sinus primi ad sinum postremi, vt secans complementi posterioris ad secantem prioris complementi, vel etiam sinus complementi prioris ad sinum complementi posterioris, vt secans posterioris arcus ad secantem prioris.

THEOR. II. PROPOS. XXVII.

Si sit arcus, cuius sinus ea ad radium proportione feratur, quâ sinus complementi alius secundi ad sinum complementi alterius tertij; secans quoque tertij ad secantem secundi eam habebit proportionem, quam sinus primi arcus ad radium consequitur.

PRobatur. Quoniam ex prop.16. lib.5. Elem. quæ eidem rationi sunt eędem rationes,& inter se tales sunt. Ponitur verò id in ipsa propos. nam ex thesi sinus primi arcus ponitur ad radium & secans posterioris alius tertij ad secãtem secundi, vt sinus complementi secundi ad sinum complementi tertij. Quapropter etiam inter se simili proportione gaudebunt secans tertij ad secantem secundi, quæ Sinus primi ad Radium.

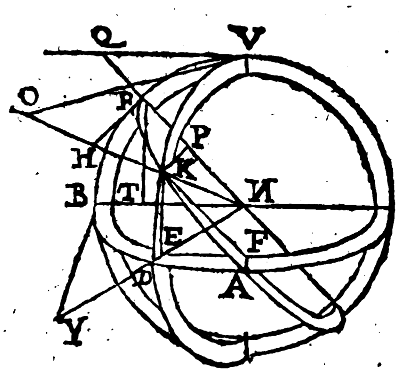
COROLLARIVM.

IDem quoque erit si sinus sint arcuum,& secantes complementorum, vt per se patet.

THEOR. III. PROPOS. XXVIII.

Vt Radius refertur ad sinum basis, sic se habet secans complementi cruris oppositi ad secantem anguli.

SIt triangulum sphæricum rectangulum AKD, cuius basis AK, & eius sinus FK, ad quem ex dictis de sinubus prop.1. h. eandem proportionem gerit sinus totus NR, quam sinus RT anguli A ad sinum cruris KE, secans verò complementi KV arcus, nempe cruris DK est NO. Secans verò complementi VR arcus RB mensuræ anguli A est NQ. Dico itaque, quòd sicut est sinus totus NR ad sinum basis FK, ita se habet secans NO ad NQ secantem complem. anguli.



Probatur. Nam sinus TR tamquam primi arcus est ad sinum cruris EK tamquam secundi arcus,vt radius NR est ad sinum basis FK: sed ex propos.26. huius, vt sinus primi arcus ad sinum secundi arcus, nempe RT ad KE, sic assimilatur in proportione secans NO cõplementi VK secundi arcus KD secanti NQ complementi primi arcus BR; Ergo ex 16. vt radius NR ad FK sinum basis, ita secans NO cruris complementi KV ad secantem NQ anguli A complementi RV.

PROBL. I. PROPOS. XXIX.

Dato Radio, sinu basis, & secante complementi cruris inuenire secantem complementi anguli oppositi.

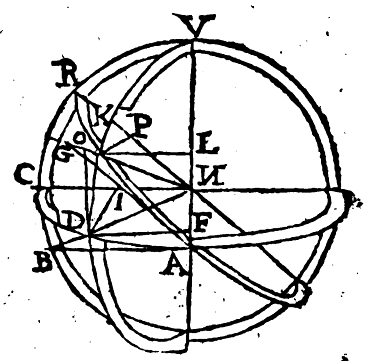
QVoniam data, & quæsitum sunt ex præced. quatuor proportionalia poterit ad quærendum quartum adhiberi regula proportionum,vnde stabit.

Exemplum. Sit datum triangulum rectangulum, cuius basis Gr.43. & sinus eius 6819984. crus verò sit Gr.37.& complementum Gr.53. cuius secans est 16616401. Ducantur simul, & productus diuisus per sinum totum erit secans 11332358. Gr.28. m.4 paulo auctior complementi anguli, qui gr. subducti à 90. dant Gr.61. m.56. Debet verò angulus conformari spetie dato cruri ex prop.28. tract.23. Coroll.5.

THEOR. IV. PROPOS. XXX.

Radius est ad sinum complementi cruris, vt secans basis ad secantem reliqui cruris.

IN triangulo rectangulo AKD sit sinus LK complementi KV cruris DK,& PK sinus complementi KR basis AK, cuius secans est GN, & sinus ID complementi DC reliqui cruris DA, cuius secans est NB: Dico, quòd radius D est ad sinum ID,vt secans NG basis ad secantem reliqui cruris NB.



Dictum est supra prop.5. huius, vt ND rad. ad DI, sic LK esse ad KP: Ergo *permutando* ND radius erit ad sinum LK complementi cruris, vt ID sinus arcus DC prioris ad PK arcus KR posterioris. Sed ex prop.26. huius, vt ID ad PK, ita est NG secans arcus AK complementis KR posterioris ad NB secantem arcus AD complementi arcus prioris DC: Ergo ex 16. lib.5. vt radius ND est ad sinum LK complementi cruris, sic secans NG basis, ad secantem NB reliqui cruris.

PROBL. II. PROPOS. XXXI.

Dato Radio, & sinus cruris, & secante basis inuenire secantem reliqui cruris.

PAtet prob. ex præc. qua ostendimus quatuor proposita esse proportionalia,vnde per regulam auream quęsiti cruris sinum cognoscemus.

Exemplum. Sit crus Gr.39. m.18. cuius complementum Gr.50. m.42. & sinus 7738402. Sit quoque

quoque basis Gr.44.m.36.cuius secans 14044431. quam cum numero sinus multiplicabis, & diuides per radium, & exhibebit secantem 10868145. Gr. 23. m.4. sed paulò minus reliqui cruris: obserua verò Cor.2. & 3. prop.28. tract.23.

THEOR. V. PROPOS. XXXII.

Radius est ad secantem cruris, vt secans alterius ad secantem basis.

TRiangulum in præc. fig. sit AKD, secans basis NG, secans cruris NO, secans alterius cruris NB. Dico itaque, quòd ea proportio militat radij ND ad secantem ON, quæ secantis NB ad secantem GN.

Probatur LK sinus complementi cruris est ad radium ND, vt radius ND ad secantem NO ex prop. 26. Tract.20. qui sunt in eadem superficie circuli VKD: Sed vt est sinus LK ad radium ND, ita est sinus PK arcus KR. primi complementi ad ID sinum DC postremi complementi, & ideo ex præc. prop. 26.h. vt NB secans postremi arcus ad NG secantem primi arcus. Ergo, vt radius ND ad secantem NO, ita est secans NB ad secantem NG.

PROBL. III. PROPOS. XXXIII.

Dato radio, & secante cruris, & secante alterius cruris inuenire secantem basis.

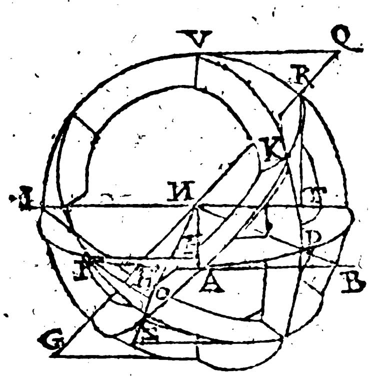
HOc regula aurea operi committitur, vt ex præc. patet ob proportionem quatuor terminorum in thesi propositorum.

Exemplum. Sit crus Gr.28. m.7. cuius secans 11337999. crusque aliud G.87. m.18. cuius secans sit 212294614. quę multiplicata per exhibitam secantem alterius cruris, & postea diuisa per radium expromet secantem 240699612. Gr.87. m.37. & paulò minùs, erit itaque basis minor quadrante: quia crura in hoc casu spetie concordant, at si spetie dissonent, basis erit maior quadrante ex Cor. 4. prop.28. tract.23.

THEOR. VI. PROPOS. XXXIV.

Radius est ad sinum anguli obliqui, vt secans alterius ad secantem cruris oppositi.

SIt angulus A obliquus trianguli AKD, cuius sinus RT, sinus verò totus RN, secans NZ anguli K reliqui; secans verò cruris oppositi NB.



Dico, quòd radius RN, ita proportione correspondet ad sinum TR anguli A, vt secans NZ anguli K reliqui ad secantem NB cruris oppositi angulo K.

Probatur. Dictum est de sinubus propos.4.h. sinum FI complementi lateris AD, ita esse in proportione ad cõplementi sinũ IO, sicut radius NL, seu NR ad sinũ LH, seu æqualẽ RT anguli A: sed vt sinus complementorum sunt inuicem, sic secantes arcuum inuersè in eadem proportione sunt: quare secans NZ anguli K ita erit ad secantem NB cruris oppositi AD, vt sinus FI cõplementi cruris ad sinum IO complementi anguli ex 26 prop. h. 6. Cor. 2. & ideo erit ex 16. lib.5. vt radius NR ad sinum TR, sic secans NZ ad secantem NB.

PROBL. IV. PROPOS. XXXV.

Dato radio, & sinu anguli, & secante alterius anguli, secantem cruris inuenire huius alterius anguli oppositi.

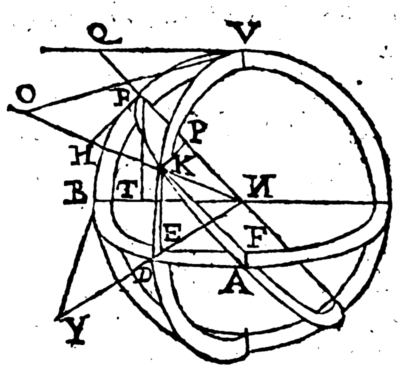
PAtet id regula aurea posse operi demandari, cum habeamus ex præced. quatuor proportionalia, quorum tria dantur, quartum inquiritur.

Detur angulus 37. Gr. & alter angulus Gr.58. sinus primi sit 6018150. secans secundi sit 18870800. qui numeri simul multiplicati, abiectisque ob diuisionem sinus totius 7. figuris dextris proferet secantem 11356730, quæ est G.28. m.17. proximè cruris oppositi, quod debet esse concors in spetie angulo opposito ex Coroll.2. propos.28. tract.23.

THEOR. VII. PROPOS. XXXVI.

Radius est ad sinum anguli, vt secans complementi cruris ei oppositi ad secantem complementi basis.

TOtus sinus sit NR; sinus autem anguli A sit RT, & secans complementi KR basis KA sit NH, at secans NO tandem complementi VK cruris DK. Dico, quòd ea proportione refertur sinus totus NR ad sinum RT anguli A: quà secans NO complementi cruris ad secantem NH complementi basis.



Probatur. Nam similem proportionem dicit sinus NR totus ad sinum RT anguli, quam sinus FK basis ad sinum EK cruris anguli A oppositi, ex pr.1. Cor. de sinubus; sed hanc quoque proportionem dicunt secantes complementorum, & vt est sinus primus basis KF ad sinum secundum cruris KE ita est secans NO complementi VK huius ad secantem NH complementi RK primi arcus AK. Quapropter ex 16. lib.5. ita quoque radius NR erit ad ad sinum RT anguli A, vt secans complementi cruris NO ad secantem complementi basis NH; quòd tertiæ proportioni FK ad EK consentiant.

PROBL.

PROBL. V. PROPOS. XXXVII.

Dato Radio, & sinu anguli, & secante complementi cruris ei oppositi, basis complementi secantem inuenire, si tamen reliquum crus, seu reliquus angulus spetie notus sit.

QVoniam ex anteced. exhibita sunt quatuor proportionalia, ideo regula aurea ad inquirendum quartum est adhibenda, & sic erit.

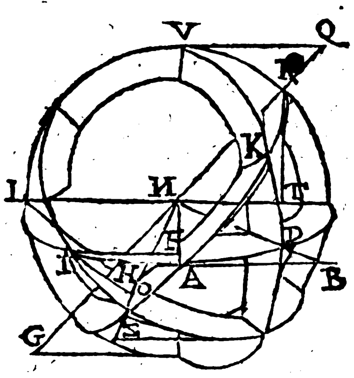
Exemplum. Sit angulus Gr. 50. cuius sinus 7660445. Arcus cruris 41. m.48. cuius complementum Gr.48. m.12. & secans 15003020. qui numeri multiplicati inuicem, & per radium diuisi dant 114980. Gr.29. m.31. proximè, qui subducti à Gr.90. dant Gr.60. & m.29. pro basi.

Aduerte autem, quod si anguli, vel crura vnum quidem notum quantitate alterum spetie concordauerint, basis erit quadrante minor, si non concordauerint maior ex Coroll. 3. & 4. propos. 28. tract. 23.

THEOR. VIII. PROPOS. XXXVIII.

Radius est ad secantem cruris, vt secans complementi anguli adiacentis ad secantem anguli oppositi.

IN Schemate prop. 34. sit triangulum KAD, & ei sinus totus NR, secans NQ complementi anguli A erit, at secans cruris angulo A adiacentis sit NB; secans verò anguli K sit NZ. Dico itaque, quòd NR radius est ad secantem NB, vt secans NQ est ad secantem NZ.



Probatur ex 4. huius, vt NL radius est ad sinum LH æqualem sinui RT anguli A; sic IF complementi cruris sinus est ad IO sinum complementi alterius anguli K: Ergo *permutando*, vt LN ad IF, sic LH ad IO; & *inuertendo*, vt IF ad LN, sic IO ad HL: sed vt IF sinus complementi ad LN radium, sic est radius ad illius arcus secantem; quæ est NB cruris ex Tract. 20. propos. 26. Ergo, vt est radius NL ad secantem NB cruris, sic est sinus IO complementi vnius anguli K ad sinū HL, vel RT alterius A: sed vt sinus IO ad HL, sic est secans NQ cōplementi huius HL, vel æqualem RT ad secantem complementi prioris NZ, qui est arcus anguli K ex Cor. 2. prop. 26. Ergo ex 16. lib. 5. vt radius NR ad secantem NB cruris, sic secans NQ complementi A anguli ad secantem NZ anguli K.

PROBL. VI. PROPOS. XXXIX.

Dato radio, & secante cruris, & secante complementi anguli adiacentis secantem anguli oppositi reperire.

QVoniam proposita sunt quatuor proportionalia ex prędict. propos. regula proportionum, quartum, quòd exposcitur, inuenietur.

Exemplum detur crus Gr.25. cuius secans sit 11033783. & angulus Gr.32. m.55. cuius complementum est Gr.57. m.5. & secans 18402017. multiplicentur simul, prodibitque numerus, qui per radium diuisus restabit 20304386. quæ est proximè secans Gr.60. m.29. angulus ipse, qui desideratur, qui debet esse spetie conformis dato cruri ex propos. 28. Cor. 6. Tr. 33.

THEOR IX. PROP. XL.

Radius est ad sinum complementi cruris, vt secans anguli obliqui oppositi ad secantem complementi anguli obliqui alterius, qui cruri adiacet.

RAdius NL in prec. fig. sinus cōplementi cruris AD trianguli KAD rectanguli est IF secans anguli K est NZ; & secans NQ cōplementi VR anguli obliqui alterius A. Dico itaque, quòd radius NL est ad IF sinum complementi cruris, vt secans NZ anguli oppositi ad secantem NQ anguli adiacentis.

Probatur. Nam iam dictum est prop. 4. sinum NL esse ad LH, seu RT sinum anguli A, vt IF sinus complementi cruris AD ad sinum IO complementi anguli K. Ideo *permutando* NL erit ad IF, vt LH ad IO: sed vt sinus LH anguli A ad IO sinum; sic secans huius complementi NZ, qui est arcus anguli K ad secantem prioris complementi NQ, seu æqualem NQ. Ergo, vt est radius NL ad IF sinum complementi cruris; sic est NZ secans arcus anguli oppositi ad secantem NQ complementi alterius anguli adhęrentis cruri AD.

PROBL. VII. PROPOS. XLI.

Dato radio sinu complementi cruris, & secante anguli obliqui oppositi secantem complementi anguli cruri adiacentis reperire.

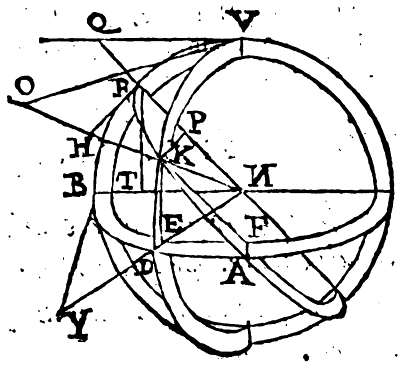
REgula proportionum habet in hac operatione locum, cum in antecedenti propos. ostensa sint tria data, & quartum quæsitum proportionalia.

Exemplum. Sit crus 19. Grad. cuius complementum Gr.71. & sinus eius 9455186. Anguli Gr.32. m.4. verò secans sit 11800371. qui numeri simul multiplicati, & per radium diuisi dabunt numerum 11157470. Gr.26. m.20. ferè, qui, vtpote complementum subductus à Gr.90. relinquit Gr. 63. m.40. anguli. Debet autem cognosci spetie crus alterum ex dictis prop.28. tract.23. Cor.4. vt angulus inuentus ei conformetur.

THEOR. X. PROPOS. XLII.

Radius est ad secantem complementi basis, vt secans complementi anguli oppositi ad secantem complementi cruris angulo oppositi.

RAdius est NR, basis AK in triangulo AKD, cuius cõplementi sinus KP, secans verò eius cõplementi NH; compl. anguli A est VR, cuius secans est NQ: crus verò DK, cuius compl. KV secans est NO. Dico itaq; quòd ita refertur radius ad NH secantẽ complementi basis, vt NQ secans complementi anguli A ad secantem NO complementi VR cruris DK.



Probatur. Quoniam ex dictis propos.6. huius Ita est basis FK ad sinum EK, vt NR radius ad RT sinum A anguli, & ideo *permutando:* Ita erit FK ad radium NR, vt sinus EK ad sinum TR, sed vt FK sinus basis refertur ad radium, ita radius ipse refertur ad secantem NH complementi basis ex pr.26. tract.20. cum sint in eodem plano RKA: Similiter vt BK sinus cruris refertur ad TR sinum anguli; sic NQ secans complementi huius posterioris ad secantem NO complementi illius prioris ex Coroll. prop. 26. h. Ergo ex prop.16. lib.5; vt NR radius est ad secantem complementi basis NH, sic NQ secans complementi anguli ad NO secantem complementi cruris.

PROBL. VIII. PROPOS. XLIII.

Dato radio, & secante complementi basis, & secante complementi anguli reperire secantem complementi cruris oppositi.

ID operi demãdatur regula aurea cum tria exhibeantur proportionalia, & quartus quæratur, debet autem angulus repertus conformari speciei angulo opposito, vt ex prop. 18. tract.23. Cor.5. patet.

COROLLARIVM.

AB istis omnibus propositionibus eruitur modus, quò semper primo locò radium ponas, vt infra declarabimus.

EXPENSIO IV.

Regulæ facillimæ, & breuissimæ pro rectangulis adhibendæ præcipuè in logarithmis.

REgulæ, quædam breues, & vniuersales remanent tradendæ; licet non adeo faciles in geometricis operationibus, eo quod sinus primo loco, non semper veniat; sed æquè faciles in logarithmicis, ideoqoe pro logarithmis à Nepero specialiter inuentæ, quarum fundamenta quatuor propos. exponemus quamuis ipse non explicet.

THEOR. I. PROPOS. XLIV.

In triangulis sphæricis rectangulis habentibus crura, seu cruribus oppositos angulos sigillatim quadrante minores, vt sinus totus ad sinum complementi oppositæ extremæ remotæ, sic sinus complementi alterius remotæ extremæ oppositæ ad sinum intermediæ.

NOn vsurpamus hic complementa in propria significatione, sed eo modo, quò declarabimus. Sciendum est itaque, quòd præciso angulo recto, & posthabito in triangulo sunt quinque partes, quæ ad modum pentagoni sunt disponendæ, nempe basis duo anguli, & duo crura angulos subtendentia, quas numeris prænotauimus 1. 2. 3. 4. 5. tamquam alicuius pentagoni lateribus, vt possimus intelligere quænam partes oppositæ extremæ, quænam adhęrentes, vel circumpositæ, quęque intermediæ partes appellentur. Pro angulis verò, & basi eorum complementa debent vsurpari.

In hac ergo figura tribus complementis duorum angulorum, & basis, & duobus cruibus constante. Partes adhærentes sunt, quæ datæ intermediæ immediatè succedunt V. g. in triangulo ABC. Posito basis AC complemento pro parte media adherentes sunt partes complementa angulorum A, & C. sic posito crure 4. partes adhęrentes sunt, posthabito angulo B recto, crus 3, & complementum anguli 5. At verò remotę complementi 1 basis essent crura 3. & 4. & lateris pro parte intermedia vsurpati partes remotæ essent AC basis complementa, & anguli A. Complementa verò horum complementorum sunt sinus ipsi arcuum. Ita, quod complementa de angulis, & basi dicta intelligantur pro arcubus angulorum, & basis; at quando dicitur sinus basis, vel angulorum intelligatur de cõplementis. Verũ de cruribus, sicut ipsa in propria significatione sumuntur, sic, & complementa.

Dicit itaque propositio sinum totum ad sinum complementi alterius extremæ oppositæ, sic sinus complementi alterius extremę oppositæ ad sinum intermediæ. Hoc verò Theor. probatur inductione numerando omnes casus, qui possunt accidere, qui ex dictis de sinibus ostenduntur: Sunt autem expressi,

Rad.

xtre Rad. E	3 mæ datæ	Media	quæsita.	
o		4	1	Casus primus.
o	4	3	1	
o	5	4	2	Casus secundus.
o	4	5	2	
o	2	3	5	
o	3	2	5	
o	1	5	3	Casus tertius.
o	5	1	3	
o	1	2	4	
o	2	1	4	

Casus primus. Cum itaque duo latera dantur 3. & 4. & quæritur basis. Dico, quod sinus totus ad partes extremas, nempe ad complementa crurum V. g. ex 6. oropos. ~~huius tract. se habet~~, vt alterum eorum V. g. complementum 4. se habet ad sinum basis, nempe ad sinum eius complementi, quod pro basi vsurpatur, ~~quia~~ in ea fig. ita est BF ad AH, vt BI ad AL, nimirum o. ad 3. vt 4. ad 1. & *permutando* o. ad 4. vt 3. ad 1. Vnde duo primi casus sunt ostensi.

Casus secundus. Cum crus, & angulus datur, & quæritur angulus alter. Dico eodem modo sinum totum esse ad sinum complementi extremæ remotæ V. g. 5. vt sinus complementi alterius extremæ remotæ V. g. 4. ad sinum intermediæ alterius anguli 2. nempe ad eius complementi sinum pro angulo vsurpati. Nam ex propos. 4. vt in illa figura, ita est sinus totus SH ad sinum anguli OH, nempe complementum complementi HY pro angulo ipso vsurpatum, vt sinus complementi lateris AB, quod est MD ad sinum DT, qui sinus est complementi pro angulo ipso vsurpati, nimirum o ad 5. vt 4. ad 2. & sic quatuor casus secundi generis remanent soluti, nam etiam *permutando* erit SH ad MD, nempe o. ad 4. vt HO ad DT, nimirum 5. ad 2. Et sic dicas de altero angulo dato 2. latere altero dato 3. & angulo quæsito 5. quòd ita sit o. ad 2. vt 3. ad 5. & *permutando*, quòd sit o. ad 3. vt 2. ad 5.

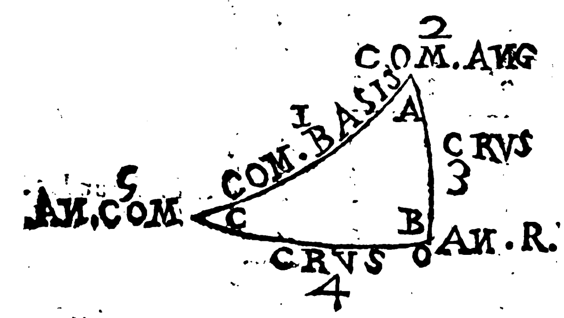
Casus tertius. Cum basis, & angulus datur, & crus quæritur. Dico rursus, quòd sit sinus totus o. ad sinum complementi extremæ remotæ V. g. 1. vt sinus alterius extremæ remotæ 5. complementi ad sinum intermediæ 3.

Quod probatur ex 1. prop. Nam vt in illa figura sinus totus SA est ad sinum basis BP, nempe complementum sui complementi pro ipsa basi vsurpati, vt sinus AR anguli N, nimirum complementi arcus AK pro arcu ipsius anguli sumpti ad sinum EB ipsius lateris, nempe erit, vt o. ad 1. sic 5. ad 3. vel *permutando*, sic erit o. ad 5. vt 1. ad 3. Et pro alio angulo, si detur, idem argumentum valebit, & erit o. ad 1. vt 2. ad 4. & *permutando* o. ad 2. vt 1. ad 4. Propterea quatuor casus vltimi remanent ostensi. Vnde propositio tota remanet ostensa secundum omnes casus.

THEOR. II. PROPOS. XLV.

In triangulis sphæricis rectangulis habentibus crura, seu cruribus oppositos angulos sigillatim quadrante minores, vt sinus complementi cuiuslibet extremæ remotæ ad sinum intermediæ, sic radius est ad sinum complementi reliquæ extremæ remotæ.

HÆc propositio eodem modo intelligitur, & præcedens, & eodem modo ostenditur ex dictis singulis casibus enumeratis.



Data Extr.	Media	R.	quæsita extrema.	
3	1	o	4	Casus primus.
4	2	o	5	Casus secundus.
3	5	o	4	
5	3	o	1	Casus tertius.
2	4	o	1	

Prob. primus casus ex prop. 6. sinuum. Nam cum ex ea sit proportio, vt citauimus o. ad 3. vt 4 ad 1. Erit etiam, *permutando* o. ad 4. vt 3. ad 1. & etiam 3. ad 1. vt o. ad 4. debet autem intermedia occupare secundum locum iuxta tenorem propositionis; vnde non dabitur casus, quod sit 1. ad 3. vt o. ad 4.

Probatur quoque secundus casus ex propos. 4. supra citata; quia enim est o. ad 4. vt 5. ad 2. erit etiam *permutando* o. ad 5. vt 4. ad 2. Vnde etiam erit 4. ad 2. vt o. ad 5. Quod & intelligitur de altera simili partium combinatione 3. ad 5. vt o. ad 2. Porrò non poterit esse, vt in præcedenti casu dictum est 2. ad 4. neque 5. ad 3. quòd intermediæ 2. & 5. debeant esse secundo loco.

Probatur quoque tertius casus. Quia enim ex 1. prop. h. iuxta dicta in pr. præc. 3. casu o. ad 1. vt 5. ad 3. erit etiam 5. ad 3. vt o. ad 1. & similiter 2. ad 4. vt o. ad 1.

Intelliguntur autem sinus arcuum esse complementorum, vbi ipsa complementa in figura vsurpatur, & esse vera complementa, vbi arcus ipsi sumuntur: Sic erit sinus complementi anguli 5. ipse sinus anguli 5. quia complementum pro ipso anguli arcu in figura vsurpatur; at sinus cruris 3. erit sinus propriè dictus ipsius cruris; quia non complementum; sed ipsum crus in figura sumitur, & sic dicas de alijs.

THEOR. III. PROP. XLVI.

In triangulis sphæricis rectangulis habentibus crura, seu cruribus oppositos angulos sigillatim quadrante minores, vt radius ad tangentem extremæ proximæ; sic tangens reliquæ extremæ proximæ ad sinum intermediæ.

HÆc propositio probatur per enumerationem casuum, vt præcedens; sed ex principijs positis Expens. 2. de tangentibus.

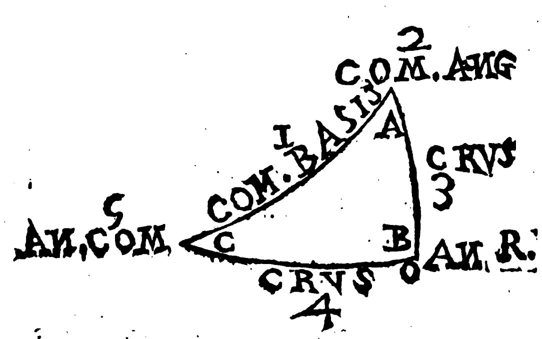
R. Extremæ datæ intermedia quæsita.

o	2	4	3	Casus primus.
o	4	2	3	
o	5	3	4	
o	3	5	4	
o	4	1	5	Casus secundus.
o	1	4	5	
o	3	1	2	
o	1	3	2	
o	5	2	1	Casus tertius.
o	2	5	1	

Probatur autē primus casus ex prop. ID tangentium, cùm angulus, & crus datur, & quæritur aliud crus. Nam vt illius propos. schemate apparet. Ita est radius EN ad tangentem EB, vt CD sinus ad OD tangentem: nimirum, vt o ad tang. complementi anguli 2. sic tangens cruris 4. ad sinum cruris 3. Vnde etiam *permutando*, ita erit Radius o. ad 4. sic 2. ad 3. Et si detur alius angulus 5. & crus 3. eadem ratio erit, & respondebit proportione o. ad 5. vt 3. ad 4. & *permutando* o. ad 3. vt 5. ad 4.

Secundus casus cum datur basis, & crus, & quæritur angulus. Probatur quoque ex propos. 16. vt est radius PK ad tangentem KM cruris KM in triangulo RKY, Ita est tangens IB complementi arcus VI basis VK ad OI sinum complementi arcus ID anguli K. Itaque est vt PK ad KM, nempe o. ad 4. ita est IB ad OI, nempe 1. ad 5. Quare *permutando* quoque erit o. ab 1. vt 4. ad 5. & si detur latus 3. erit quoque o. ad 3. vt 1. ad 2. & *permutando* o. ad 1. vt 3. ad 2.

Tertius casus. Probatur quoque ex propos. 22. cum dantur duo anguli, & quæritur basis. Nam radius est ad tangentem complementi anguli V. g. in eo schemate KP radius ad KM tangentem, vt BR tang. ad sinum BS, idest complementi anguli V tangens ad sinum complementi basis AV, ideo o. erit ad 5. vt 2. ad 1. & *permutando* o. erit ad 2. vt 5. ad 1.



THEOR. IV. PROPOS. XLVII.

In triangulis sphæricis rectangulis habentibus crura, seu cruribus oppositos angulos sigillatim quadrante minores, vt tangens extremæ proximæ ad sinum intermediæ, ita radius ad tangentem reliquæ extremæ proximæ.

PRobatur ex dictis priùs enumeratis casibus prop. præced.

Extremæ datæ. R. Intermedia quæsita.

1	5	o	4	Casus primus.
3	2	o	1	
1	2	o	3	Casus secundus.
4	5	o	1	
2	3	o	4	Casus tertius.
5	4	o	3	
3	4	o	2	Casus quartus.
3	4	o	5	
5	1	o	2	Casus quintus.
2	1	o	5	

Probantur autem singuli casus, & Primus cùm datur basis, & angulus, & quæritur latus. Quia ex secundo casu propos. anteced. est o. ad 4. ita est 1. ad 5. Ergo erit, vt 1. ad 5. ita o. ad 4. Et quia est o. ad 3. vt 1. ad 2. erit etiam *permutando* o. ad 1. vt 3. ad 2. Ideoque etiam 3. ad 2. vt o. ad 1.

Secundus verò casus est cum datur angulus, & latus, & quæritur basis. Quòd ex eodem secundo casu præced. propos. ostenditur. Siquidem ibi est o. ad 3. vt 1. ad 2. Quare erit etiam 1. ad 2. vt o. ad 3. Eademque ratione ostendetur; quia est o. ad 4. vt 1. ad 5. quod *permutando* fit o. ad 1. vt 4. ad 5. & ideo 4. ad 5. vt o. ad 1.

Tertius casus est ex primo casu præced. propos. ostenditur. Nam ibi dictum est ita esse o. ad 4. vt 2. ad 3. Quare etiam erit 2. ad 3. vt o. ad 4. Et quia ibi est o. ad 3. vt 5. ad 4. Ergo 5. ad 4. vt o. ad 3. nempe crure, & angulo crus aliud habetur.

Quartus casus. Et quia ex eadem propos. præc. casu est o. ad 2. vt 4. ad 3. Erit etiam 3. ad 4. vt o. ad 2. Et eadem ratione 3. ad 4. vt o. ad 5. quòd in præced. primo casu ostensum sit esse o. ad 5. vt 3. ad 4. idest duobus cruribus obtinetur angulus.

Quintus probatur ex 3. casu præced. propos. quia enim est o. ad 5. vt 2. ad 1. Erit etiam 2. ad 1. vt o. ad 5. Et quia est è contra o. ad 2. vt 5. ad 1. erit etiam 5. ad 1. vt o. ad 2. nempe dato angulo, & basi crus inuenietur. Vnde omnes casus remanent ostensi.

COROLLARIVM.

EX præcedentibus itaque propositionibus colliguntur istæ quatuor praxes, quibus omnes casus soluuntur, tum Geometricè, tum Logarithmicè.

1. Arithmeticè.

AD inueniendam partem intermediam datis partibus oppositis, & remotis. Multiplica inuicem

inuicem complementorum sinus remotarum extremarum partium, & diuide per sinum totum, & prodibit sinus intermediæ.

Sed aduertendum est, quod vbi ponitur *latus* ibi complementum intelligitur propriè sumptum, vbi verò complementũ ponitur in fig. impropriè sumitur in prop. pro complemento ipsius cõplementi; nempe pro sinu ipso basis, seu anguli.

Logarithmicè.

ADditi inuicem complementorum eodem sensu sumptorum logarithmi faciunt logarithmum intermediæ subducto O, vel I. pro diuersitate tabularum,

2. Arithmeticè.

AD inueniendam extremam aliquam remotam data altera parte extrema remota, & intermedia. Multiplica sinum intermedium cum sinu toto, & diuide per extremum remotum sinum complementi, & prodibit sinus complementi reliquæ extremæ, quæ complementa debent intelligi, vt explicatum est.

Logarithmicè.

SVbducito logarithmum complementi extremæ remotæ partis eodem sensu intellecti à logarithmo arcus intermediæ, & prodibit alterius extremæ remotæ logarithmus complementi, & hoc iuxta logarithmos Neperi: iuxta vero alios addendus est prius logarithmus sinus totius logarithmo intermediæ, & deinde subductio instituenda, vt prius.

3. Arithmeticè.

AD inueniendam intermediam partem datis extremis partibus proximis Tangentes proximarum partium, si in schemate sint notata *compl.* complementorum ipsorum, si sint notata *latera*, ipsorum laterum inuicem multiplicentur, & diuidantur per sinum totum, & prodibit sinus intermediæ: nempe sinus illius partis, prout in schemate notata est sinus lateris, vel sinus complementi anguli, vel basis.

Logarithmicè.

LOgarithmi tangentium simul addantur partium vicinarum, & subducatur O. secundùm tabulas Neperi; at I. secundùm alias, & prodibit logarithmus intermediæ, & qui debet intelligi sensu supra explicato.

4. Arithmeticè.

AD inueniendum extremam partem vicinam data altera vicina, & intermedia. Multiplicetur simul sinus intermediæ, vt supra intellectæ cum sinum toto, & diuidatur per tangentem alterius extremæ vicinæ datæ, & prodibit tangens extremæ proximæ quæsitæ.

Logarithmicè.

A Sinus logarithmo intermediæ datæ eodem modo intellecto addito priùs o, seu logarithmo sinus totius secundùm diuersitatem tabularum subducatur logarithmus tangentis vicinæ partis cognitæ, & prodibit logarithmus tangentis alterius partis vicinæ.

Aduerte, quod Cauallerius istas regulas affert propos. 33. sed mutillatas, nec plenè explicatas.

EXPENSIO VI.

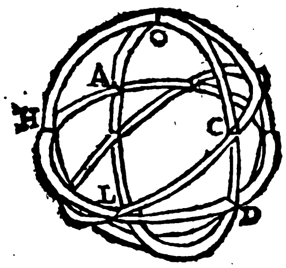
De substitutione figurarum, & laterum.

QVia Cum præcipit propos. vsum complementorum, si detur triangulum, cuius partes, pro quibus complementa sumenda sunt, sint quadrante maiores ad calculum ineundum substituere aliquando triangulum alteri, latusque alteri, prout res postulabit, oportet, & etiam commodiùs est, si calculus sit obscurus aliquando ob angulorum magnitudinem, vel parum securus ob exilitatem; ideoque cognoscere opus est tali casu, & quomodo substitutio ineunda sit.

PROBL. I. PROPOS. XLVIII.

Dato triangulo obtuso pro illo acutum assumere.

VT securiùs, & intelligibiliùs opus trigonometricum exequatur, operæ pretium est dato triangulo omnibus angulis obtusis, aut etiam duobus constante, illud in triangulum saltem duos acutos habens conuertere, quòd enim sinus quadrantis sint; hinc est quòd si latera sint longiora quadrante, vt talia sinus non habeant, nec tangentes, & per consequens, nec secantes, nec complementa, & ideo reddatur calculus obscurus, dùm debent assumi sinus alterius quadrantis pro dati trianguli, cuius latera omnia quadrantẽ superant, calculatione: Ideo satiùs erit datorum laterum complementa in obliquangulis, quæ claudunt angulum adiacentem, seu verticalem sumere; illius enim trianguli lateribus inuentis, vel angulis statim triãgulum datum secundùm omnes suas partes dignoscitur.



Prob. Nam sit triangulum scalenum, vel Isosceles, AOCHL, anguliq; omnes obtusi apud A apud L, & apud C. Si assumas complementa lateris ad semicirculũ AOC V.g. & AHL, quæ sunt LD, & DC habebis angulos ad L, & C acutos eadem basi manente LC. Si ergo datis lateribus LHA, & AOC, & ideo complementis, & angulo eodem A æquali angulo D verticali quæratur basis LC: soluto triangulo LDC inuenta erit, cùm sit eadem. Si quærãtur anguli ad basim inuenientur acuti LCD, & CLD, vnde ablati à duobus rectis restituent obtusos.

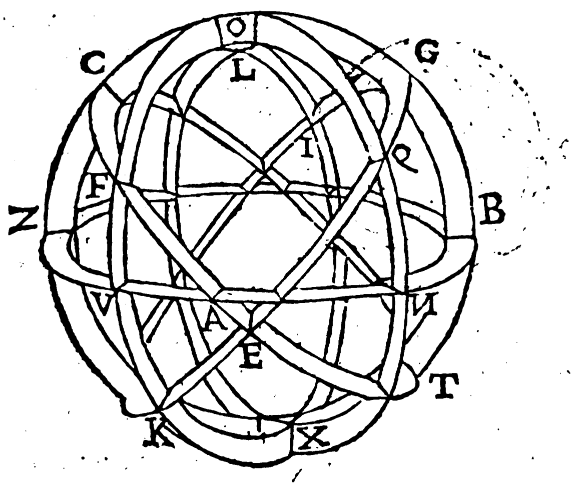
Quod si angulus verticalis A notus non sit, sed angulus CLH adiacens lateri AHL, & notum sit latus oppositum COA auferatur arcus AHL adiacens à semicirculo, sicut & OAC, & remanebit CD, & LD, cum quo, & anguli CLH residuo CLD perficies operationẽ, & reperies V.g. angulũ DCL, cuius cõplementũ ad semicirculũ notum erit, OCL obtusus trianguli dati. Poteris etiã reperire basim, quæ erit crus adiacens angulo CLD in triangulo CLD, & adiacens quoque in triangulo CLA. Poteris quoque quo inuenire angulum D verticalem qui æquabitur angulo A trianguli ACL, & eodem modo ages crure V.g. AHL, & duobus angulis HLC, & OCL datis.

Si dentur tria crura maioribus à semicirculo deductis AHL, & COA habebis DL, & DC complementa cum basi LC iam nota. Quod si dentur tres anguli maioribus V. g. L, & C in triangulo ALC à duobus rectis detractis habebis DLC, & DCL cōplemēta ad duos rectos acuta, cū opposito apud D in triāgulo CLD. Vnde opposita latera DL, & DC prædictis angulis DLC, & LCD perquires, & erunt complementa laterum LHA, & COA ad semicirculū.

THEOR. I. PROPOS. XLIX.

Trianguli anguli in latera, & in angulos latera permutari possunt complemento, maioris anguli pro latere sumpto.

SIt triangulum GOQ, & anguli O mensura sit arcus BN descriptus polo O; mensura anguli G sit arcus CFAE; mensura verò anguli Q sit arcus IL. Dico, *quod isti arcus BN, & IL constituunt triangulū, quòd pro tertio latere obtinet* cōplementū arcus CE ad semicirculum mensurantis angulum maiorem G, quod complementum est TE. Hoc autem triangulum est AFV; quod habet latus AV æquale arcui BN, VF æquale arcui LI, & AF æquale arcui ET complemento arcus EC, quod sic probatur.



Prog. I. Ex prop. 14. Cor. ex 1. sphæric. intersectio circulorum, qui habent polos in aliquo alio maximo circulo, quadrante distat à circulo, quo polos habent: igitur BNA, & TEA quadrans erit, quod poli horum circulorum sint in circulo TBGO in O, & G, & intersectio eorum in A existet; sic quia suos polos habent in Q, & G circuli ILFV, & CFAT; eorum intersectio F à circulo prædicto GQ BK quadrante distabit: vnde ILF erit quadrans, & EAF quadrans erit.

Pr. 2. Item quia in circulo OQ polos habet CFET in Q, & BNAV in O eorum intersectio V distabit quadrante, & NAV quadrans erit, & LFV quadrans.

Pr. 3. Aufer itaq; NA cōmunis, à BNA, & NAV quadrantibus, & ideo æqualibus remanebunt BN mensura āguli O, & AV æquales; sic aufer à quadrātibus ILF, & LFV cōponentes arcum ILFV erit LF æqualis IL mensuræ anguli Q. Tandem quia arcus CFAE subtendit angulum maiorem G ostendam iuxta tenorem propositionis ET complemento esse æquale AF tertium crus trianguli AFV: Siquidem TA quadrans, & EAF ostēsus est quadrans pr. I. aufer itaq; EA communis, & remanebit AF æqualis ipsi TE complemento, cui ET adde CF; & EA, & erunt tres arcus æquales toti CFAE mensuræ anguli G.

Probatur secunda pars, quòd anguli in latera queant commutari.

Progress. I. Circulus CAT in G ex prop. I polos habet, ergo circuli ZOB, GEK in ipso CAT polos habebunt ex prop. 15. tract. 21. sphæric. I. p. vnde ex ipsius Cor. COG, & GQE quadrans erit: Sic quia ZAB in O polos habet, etiam ONX, & ZOB in eius circulo in communi puncto A circulorum ZOB, & CAT polos habebit. Vnde ZCO, & OQN ex Cor. citat. quadrantes erunt, & CZ mensura anguli A. Quia ergo ZCO, & COG ostensi sunt quadrantes, ablato cōmuni arcu CO arcus ZC mensura anguli A æquabitur lateri OG.

Progress. 2. Circulus quoque OFK polo Q. ductus est, ergo in ipso ONX circuli, & GEK polos habebunt. Quare intersectio Q à circulo OFK distabit quadrante, & KEQ, & XNQ, & LOQ quadrantes erunt, sed iam GQE ostensus est quadrans, & nunc KEQ quadrans demostratur; ablato ergo communi arcu EQ remanent arcus KE, & GQ æquales, & quia GEK ostensus est in circulo CET, & OFK polos obtinere, ideo habebit in communi eorum puncto F, vnde, vtpote ductus polo F arcus KE mensurabit angulum F, qui æquatur lateri GQ ex I. p. par.

Progr. 3. Circulus quoque ONX in circulo OFK, & circulo ZVAB ostensus est habere polos, ergo obtinebit eos in communi eorum puncto V, ideoque anguli V arcus LOQN mensura erit. Verùm OQN p. I. ostensus est quadrās, talis quoq; est arcus XNQ, vt progr. 2. ablato ergo communi arcu QN remanebunt æquales OQ, & NX, est autem NX vsque ad semicirculum LONX mensuræ anguli V arcus LOQN complementum: quare arcus angulorum F, & A in latera OG, & GQ sunt mutata, sicut angulus FVA in latus æquale complemento NX.

PROBL. III. PROPOS. L.

Datis loteribus reperire angulos, & datis angulis latera inuenire.

QVoniam laboriosa est operatio illa, qua datis lateribus anguli reperiuntur, multisque praxibus impedita; ideo hæc fortè erit facilior; hoc autem fit angulos in latera cōmutando. Nam ex I. par. pr. antec. dato triangulo GQO, cuius latus QO, sit G. 80. QR G. 70. & QG G. 60. Igitur ex prec. trianguli AFV angulus F erit, cuius mensura EK, erit 70. angulus A cuius mensura CZ erit 60. & mensura anguli V; nempe arcus NOL erit 100. ex notis itaque angulis trianguli AFV reperiemus latera, quæ erunt anguli prioris propositi trianguli GQO, nempe AV erit æquale O anguli mensuræ NB, & VF anguli Q mensuræ IL, & tandem complementum CFAE lateris FA, vel æqualis ET erit mensura anguli G.

Sic ex secunda parte præced. propos. Si dentur anguli GQO, nempe arcus BN, at anguli OQG arcus IL, & complementum ad duos rectos anguli G constituetur triangulum AFV; cuius reperies angulos EK, & erit latus prioris GQ, & CZ, & erit latus GO, & complementum anguli V ad duos rectos, nempe NX, & erit OQ.

PROBL.

PROBL. IV. PROPOS. LI.

Sinus loco primam sedem occupante substituere radium, qui secundoloco reperiatur in regula proportionum.

ADmodum facilis est diuisio, cum debemus diuidere numerum per radium; quia tot numeri ad dexteram abicienti, quot zifræ in radio inueniuntur. V. g. si diuidamus 646789 per 100. diuisus erit numerus, si excludantur duo numeri extremi dextri 89. & 6467. erit quotiens, fractioque erit $\frac{89}{100}$. Ideo prouidendum semper est, vt facilitatis gratia sinus totus, seu radius primum locum sibi assumat.

Loco igitur sinus pone radium primo loco, sed secundum occupet secans complementi arcus.

Probatur. Quia vt sinus alicuius arcus respicit proportione radium; sic radius respicit secantem complementi arcus, vt dictum est propos. 26. tract. 20.

Quod si sit sinus complementi arcus, seu anguli in primo loco, & radius in secundo Vice complementi radius in primo loco existat, sed loco secundo secans dicti arcus existat; Ratio est, quia ita est sinus complementi arcus ad sinum totum; vt sinus totus est ad secantem ipsius arcus ex propos. 26. tract. 20.

PROBL. V. PROP. LII.

Loco secantis alicuius arcus, seu complementi primum locum occupantis ponere radium.

LOco secantis primo loco radius collocetur secundo sinus complementi ipsius arcus, seu si secans sit complementi alicuius arcus; primo loco ponatur radius, secundo sinus ipsius arcus, & cætera fiant, vt regula aurea præcipit. Ratio est fundata in citatis propos. 26. tract. 20.

PROB. VI. PROPOS. LIII.

Si tangens alicuius arcus, seu complementi primo loco reperiatur radium vice eius ponere.

POnatur radius primo loco, secundo tangens complementi ipsius arcus; Quod si sit tangens complementi primo loco, ponatur radius; secundo verò tangens ipsius arcus.

Probatur ex propos. 24. tract. 20. Nam vt est tangens ad radium, ita radius ad complementi illius arcus tangentem, & viceuersa, vt tangens complementi ad radium, ita radius ad tangentem alicuius arcus. Vnde cum sit eadem proportio, [illegible] loco alterius substitui potest.

COROLLARIVM.

NE, dum ob facilitatem anguli acuti aliquando obtusis substituendi; sed etiam ob securitatem, & anguli semper illi spernendi, nec adhibendi, quantùm fieri potest, qui sinus extremorum arcuum V. g. 1. aut m. 30. & cæt. exhibent; nam ob angulorum, & laterum exilitatem, & breuitatem veram deinde quantitatem quęsiti lateris, & anguli non tribuunt, sic si adhibenda sint complementa nimis breuia V. g. complementi arcus 89. m. 30. aut simile, & possit alia regula vti non adhibito complemento m. 30. illius arcus 89. m. 30. debes non vti, & cùm datur electio adhibenda sunt latera mediocra, quàm fieri possit, & anguli mediocres, & per illos exquirere, quod placet reliquorum.

EXPENSIO V.

De triangulis obliquangulis ad rectangula reducendis per tres operationes.

MOdus, quo triangula sphærica obliquangula soluuntur transfundendo illa in duo rectangula operosior, quidem; at captu facilior, nullaque præuia demostratione indiget: quare post rectangula soluta, cùm in illis propositionibus fundetur, subnectendus est.

PROBL. I. PROPOS. LIV.

Cognitis duobus trianguli obliquanguli cruribus, & angulo opposito, & altero specie noto; angulum reliquum reliquo cruri cognito oppositum reperire.

SIt triangulum obliquangulum GAB, in quo sit cognitũ crus AB, & crus AG, & angulus cruri AB oppositus G: docet propositio angulum B reliquo cruri oppositum reperire.

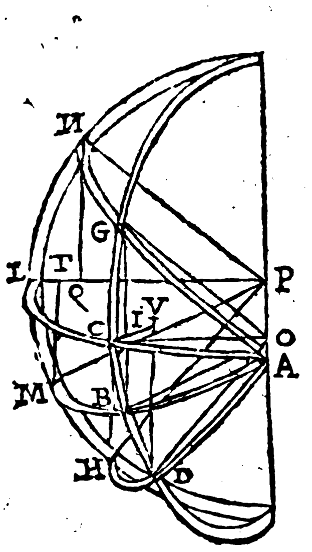
Quia ab angulo A super latus GB potest cadere arcus perpendicularis AC, seu cadat intra, cum anguli specie conueniunt, vt in proposito triangulo BAG, seu extra, cum dissentiunt, vt triangulo DAB, hæc inueniatur: Datis itaque angulis specie concordibus sinum CO arcus normalis AC primò inuenies.

Datur enim basis AG, & angulus adiacens G: quare ex prop. 3. h. crus oppositum normale AC angulo dato G inuenire poteris, quo obtento.

Dato crure AC, & basi AB deinde ex 18. huius poteris inuenire angulùm oppositum dato cruri AC, & ideo arcui AC: qui est B quęsitus. Quod si anguli specie dissonent, & cognitus sit obtusus V. g. ABD, assumatur eius complementum ABC, & inueniatur AC, quo obtento.

Data basi AD, & arcu AC inuenies angulũ oppositũ apud D, & deinde reliqua si placuerit reperies V. g. ex 17. h. data AB basi, & CA reperies angulum BAC, scilicet sinum MT, & arcum ML, & dato AG, & AC reperies angulum CAG, scilicet sinum QN, & hinc arcum NL, quæ inuenta copulabis, si anguli cogniti fuere ambò acuti, vel obtusi, vt in triangulo GAB. Deduces minorem à maiori, si fuere specie diuersi, vt in triangulo DAB. Et idem ages si quæras basim; nam inuenies duos sinus GI in triangulo GAC, & BI in triangulo BAC, cuius duo anguli specie conformes, & arcus eorum vnies, & fiet basis BG. At in triangulo DAB, in quo anguli

specie



specie difformes inuertis sinubus DY, & BI arcus eorum BC minorem à DBC maiori subduces, & restabit DB, & ita totum triangulum notum erit: Cur autem in concordibus angulis vniendi arcus in discordibus subducēdi ratio est, quia perpendicularis in concordibus intra cadit, in discordibus extra ex propos. 30. & 31. Tract. 23.

PROBL. II. PROPOS. LV.

Duobus angulis, & crure opposito datis inuenire crus oppositum alteri eorum.

SIt datū triangulū obliquangulū GAB in præc. fig. & anguli G, & B concordes specie, & crus AC, & oporteat reperire crus AB oppositum angulo G.

Quoniam possumus deducere arcum perpendicularem intra triangulum cadentem, vt AC; is inueniatur.

Datur enim basis AG, & angulus G, vnde ex cit. propos. 3. huius inuenies crus oppositum AC perquirendo sinum eius CO. Deinde dato arcu, crureque opposito AC, & angulo B inuenies basim AB ex propos. 21. huius; habita verò basi AG, & crure AC inuenies reliqua, vt supra.

Detur deinde triangulum DAB, in quo anguli spetie dissentiant, & sit notū crus AB, & anguli, vt ADB, & ABD. Anguli complemento ABC, inueniatur arcus perpendicularis AC inueniendo sinum OC, quo obtento crure AC perpendiculari, & angulo D inuenietur basis AD ex cit. propos. 21.

PROBL. III. PROPOS. LVI.

Duobus cruribus, & angulo datis altero spetie noto, basim inuenire.

DEtur triangulum AGB, in quo anguli specie consentiant G, & B: At G angulus sit quoque notus quoad quantitatem sicut, & crura AB, & GA desidereturque basis BG.

Quoniam datur AG basis, & angulus G; inueniatur perpendicularis arcus AC demissus super incognitam basim ex 3. huius.

Deinde arcu perpendiculari AC, & basi AG ex propos. 30. inuenies crus, & arcum GC.

Postea arcu eodem inuento normali AC, & arcu dato AB inuenies arcum BC ex prop. cit. 30. & simul arcus inuentos BC, & CG copulabis, & fiet tota basis, arcusque BG.

Si verò anguli specie dissonent, vt in triangulo ADB pro obtuso angulo ABD angulum complemēti CBA accipies, & inuenies arcum normalem AC, quo & basi BA reperies ex cit. propos. BC, & rursùs arcu AC, & basi AD arcum DBC, à quo subduces basim priùs inuentam BC, & habebis DB pro arcu residuo, & basi quæsita.

PROBL. IV. PROPOS. LVII.

Duobus angulis, & crure datis vni eorum opposito basin interpositam angulis reperire.

DAto arcu GA, & anguli G, & BA noto specie inueniatur, vt supra normalis arcus CA, vt propos. 3. h. & deinde si anguli specie consentiant, vt in triangulo GAB. Dato crure AC, & angulo opposito G, inueniatur crus alterum GC adiacens angulo dato G ex 19. huius.

Sic dato crure normali AC, & angulo B, ex eadē inuenietur arcus BC, & simul vniātur CB, & GA. At si specie discordēt vtendum est angulo vicario, & complemento ex eadem propos. V. g. in triangulo ADB dato crure AC, & angulo ABC inueniendus arcus BC; rursúsque eodem crure normali dato, & angulo D inueniendus est arcus DBC, alterque minor ab altero subducendus, vt remaneat arcus, & basis DB quęsita.

PROBL. V. PROPOS. LVIII.

Duobus cruribus, & angulo opposito vni eorum datis, & altero specie noto angulum verticalem inuenire.

DEtur triangulum obliquangulum GAB, & angulus G, duoque crura quantitate nota AG, AB, angulusq; B notus specie, nempe alteri cōsonus Angulo G, & Crure GA crus normale AC reperiemus, vt supra. Deinde angulū CAB apud A ex pr. 15. huius scilicet arcum NL. Deinde dato crure normali AC, & basi BA inueniatur angulus BAC apud A scilicet arcus LM ex 17. huius, & anguli reperti BAG, & GAC, ideſt arcus NL, & LM simul vniantur, & fiet totus angulus BAG.

Quod, si anguli specie dissonent, vt in triangulo DAB; tunc reperiatur ex 15. huius angulus BAC scilicet arcus ML vtendo complemento ABC pro dato angulo obtuso ABD, & rursùs crure AC, & basi AD, quæratur angulus DAC, scilicet arcus HML ex 17. huius, subducaturque alter ab altero, & fiet angulus quæsitus DAB, videlicet arcus HM. Quod si notus quantitate sit acutus angulus eodem modo efficies, ac supra, & angulo D, & crure AD reperies normale crus AC. Deinde crure AC, & angulo D angulum DAC, ideſt arcum HML ex 15. h. & hinc crure normali AC, & basi AB angulū CAB, ideſt arcū ML extrahes, atq; angulum BAC minorem subduces à maiori, prodibitque arcus HM exoptatus.

PRORL. VI. PROPOS. LIX.

Duobus angulis, & crure opposito datis angulum verticalem conquirere.

IN triangulo obliquangulo GAB, in quo anguli dati G, & B specie conueniunt, & quantitate innotescunt, detur crus AG.

Itaque ex 3. huius dato crure AG, & angulo G inuenies crus normale oppositum AC. Postea ex propos. 15. inuenies angulum CAG, ideſt arcum NL apud

apud A data basi AG, & angulo G.

Deinde dato angulo B, & crure opposito AC inuenies angulum alterum ex propos. 41. BAC hoc est arcum ML, quos simul copulabis, nempe angulum GAC, & CAB, & efficies totum angulum GAB hoc est arcum NLM.

Quod si anguli specie sint absoni, dati anguli B obtusi cōplemento vtere, & crure BA dato, anguloque complente ABC inuenies AC ex 15. huius.

Rursusque crure AC normali, & angulo D in triangulo DAC inuenies angulum DAC hoc est arcum HML maiorem, à quo subduces angulum BAC, idest arcum ML, & residuus erit exoptatus angulus DAB. Inuenies autem angulum CAB sc. arcum ML dato anguli ABD complemento ABC, & crure opposito AC ex prop. 48. huius,

THEOR. VII. PROPOS. LX.

Dato angulo verticali, & duobus cruribus comprehendentibus basim, & angulos inuenire altero angulo specie cognito.

COgnitus detur angulus B quantitate, & duo crura BA, & BG comprehendentia sint quoq; nota, & alter angulus G notus specie, nempe quòd sit quoque, vt B acutus.

Dato itaque angulo B, & basi AB inueniatur crus normale CA ex 3. prop. h. & ex 15. h. angulus BAC.

Deinde crure, & basi AB, & angulo eodem B inueniatur arcus BC ex propos. 13. huius, quem subduces à noto crure BG, & habebis crus CG.

Hoc itaque crure CG, & AC normalibus inuenies basim AG ex prop. 7. h. & angulū G, & CAG ex 25. h.

Quod si anguli specie differant; Ex dato angulo DBA, & crure AD, quòd datus angulus sit obtusus DBA, vtere complemento ABC, & basi AB, inuenies crus AC normale, quod extra cadit.

Deinde angulo B obtuso & crure, seu basi AB si detur obtusus angulus inueniatur crus BC ex pr. 13. h. quod addes noto cruri BD, & efficies arcū DBC.

Quo arcu DBC, & AC normalibus inuenies basim quæsitam AD ex 7. h. & angulum D.

Quod si angulus sit D acutus angulo D, & basi DA inuenietur arcus DBC, à quo subduces crus notum DB, & obtinebis crus BC.

Hoc itaque crure BC, & crure AC normalibus inuenies AB quæsitam basim ex 7. h. & angulū BAC, quem subduces ab angulo recto, & fiet ang. ABD.

PROBL. VIII. PROPOS. LXI.

Dato crure interiacente, seu basi, & duobus angulis ad basim angulum verticalem reperire.

IN triangulo obliquangulo ABC detur basis AG, & anguli noti sint G, & A. & perquiratur angulus B, cùm anguli specie concordant. Itaque data basi AG, & angulo G perquiremus crus normale AC. Deinde ijsdem datis angulum GAC ex prop. 15. h. quem subducemus à toto angulo dato GAB, & restabit angulus BAC.

Hoc itaque angulo CAB, & crure AC perquiremus reliquum angulum ABC ex propos. 5. huius, qui erit angulus verticalis quæsitus B oppositus basi AG.

Quod si detur triangulum BAD, in quo anguli B, & A specie dissonant, & basis detur BA. Complemēto anguli CBA, & basi BA inueniatur crus normale AC ex 3. h. & ijsdē datis āgulū BAC ex 15. h. quē addes angulo acuto noto DAB, & efficies ang. DAC.

Hoc itaque angulo acuto DAC, & crure AC perquires alium angulum verticalem apud D ex prop. 5. huius.

PROBL. XI. PROP. LXII.

Dato crure interposito, & angulis adnexis reliqua crura perquirere.

EXponatur triangulum obliquangulum GAB, cuius nota basis AG, & anguli ad basim A, & G, & perquiratur aliquod crurum AB, vel BG.

Dato itaque angulo G, & basi AG ex 3. huius perquiretur crus normale AC.

Deinde basi AG, & angulo G crus normale GC adhærens angulo G ex prop 13. huius.

Postmodum angulum GAC ex propos. 15. huius, quem subduces à toto noto GAB, & restabit angulus CAB, quo CAB, & crure inuento AC perquires reliquum crus oppositum BC ex 3. h. & crus adiacens AB ex 13. huius. Iunges tandem duo crura GC, & BC, & obtinebis GB, idem ages, si anguli dati sint specie dissoni, sed adhibita cautella subductionis vnius ab alio.

Itaq; omnes casus obliquangulorum soluuntur per reductionem ad duo rectangula exceptis solùm duobus, nempe cùm dantur tres anguli, vel tres arcus. Nam per doctrinam præcedentem isti duo casus solui nequeunt, cùm in rectangulo non detur, nisi vnica res, nempe vnicū crus, vel vnicus angulus, reliqua enim, quæ dantur non sunt rectanguli, sed obliquanguli cum in rectangulo reliqui anguli vnus sit rectus, alter sit semper aut maior, aut minor eo, qui datur in obliquangulo, & idem dices de cruribus V. g. in triangulo ABG crus BG, & AB est maius crure AC, vel crure GC, vel BC rectanguli. Sicut angulus CAB est maior angulo CAB, vel CAG, angulus verò B, vel G minor, quam rectus ad C. Vnde cum non nisi vnica pars rectanguli, tunc detur ex præcedentibus doctrinis, in quibus duæ semper partes rectangulorum ad ea soluenda requiruntur, mensuris subijci nullo modo queunt.

EXPENSIO VI.

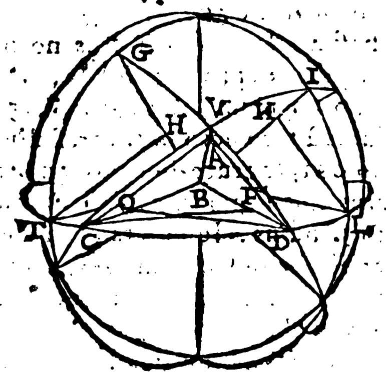
De obliquangulorum sphæricorum solutione deducendo perpendicularem, sed per duas operationes operi consignata.

MOdi quos hic trademus ex parte quidem prædictis faciliores; Nam non nisi duas operationes adhibent; ex parte verò difficiliores, quòd in secunda operatione sinus totus non adhibeatur; quare ne dum multiplicatione, sed etiam diuisione opus sit; præcepta tamen omnes casus soluunt, & totam trigonometriam obliquangulorum sphæricorum amplectuntur.

THEOR. I. PROPOS. LXIII.

In omni triangulo sphærico rectangulo sinus angulorum eandem proportionem seruant ad sinus crurum oppositorum.

Sit triangulum rectangulum VDC, & rectus angulus V, in quo anguli, siue æquales, seu inæquales D, & C sinus toti LB, & BT, & BI, & BG, sinus cruris VD sit DA, sinus verò cruris VC sit AC, sinus cruris DC; sint CF, & DO. Sinus verò angulorum sint TH, & LN, quòd distent ab angulis C, & D quadrante ob sinus BT, & BL totos cum duo arcus DG, & DT ex defin. anguli præsupponantur quadrantes; sicut etiam CL, & CI; vt enim arcus LI, & GT sit angulorum mensura vtrique arcui perpendicularis esse debet. Vnde, & eorum poli debent esse in D, & C ex prop. 15. tract. 21. Coroll.



Probatur propos. arcus DT, & CL sunt equales, vtpote quadrantes, & DC arcus idē, vnde æquales erunt sinus toti BL, & BT; necnon, & DO, & CF, vt eiusdem arcus; Propertereaque erit FC ad BT, & OD ad BI, vtpote æqualium eadem proportio: Verùm vt CF ad BT, ita est CA ad TH ex 1. huius Cor. & vt DO ad BL, sic est DA ad LN. Quare ex 16. l. 5. vt est CA ad HT sic erit DA ad LN.

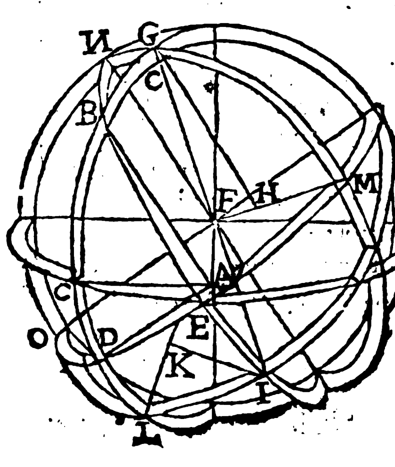
COROLLARIVM.

Vnde colligitur quoque *permutando* ita esse sinus CA ad sinum AD crurum, vt angulorum sinus HT ad LN.

THEOR. II. PROPOS. LXIV.

In omni triangulo obliquangulo quoque sinus arcuum ad sinus angulorum sunt in eadem proportione.

Sit triangulum obliquangulum EBD, & ducatur perpendicularis arcus EC. Itaque sinus anguli B in rectangulo triangulo ECB erit IK, & cruris normalis sinus AC; sinus verò basis AB. Sic in triangulo rectangulo BCD sinus anguli erit GH sinus cruris oppositi normalis idem AC; sinus verò basis AD.



Igitur ex præced. vt est AB sinus basis ad FN sinum totum, sic AC sinus cruris ad IK sinum anguli B. Et pariter, vt DA sinus basis ad FO, seu FN sinum totum, sic AC cruris sinus ad GH sinum anguli D. Quare *inuertendo* FN erit ad DA, vt GH ad AC; Proportio itaque erit *perturbata*, vt vides.

Basis AB ad FN Rad. & FN ad AD,
vt
vt GH ad crus AC ad IK angulum.

Vnde ex *æquo* AB erit ad AD, vt GH ad IK: & *permutando* AB erit ad GH, vt AD ad IK. Et idem sequetur, etiam si perpendicularis extra cadat, vt potes considerare si cogites BD arcum esse ad eandem partem, quâ reperitur arcus EB.

PROBL. I. PROPOS. LXV.

Datis duobus cruribus, & angulo in obliquangulo sphærico angulum reliquum oppositum reperire.

Cum ex præced. hæc tria data, & quartum quæsitum sint proportionalia, datis tribus quartum regula trium reperire possumus, ponemusque primo loco sinum cruris dati AD, secundo anguli dati IK sinum, tertio cruris alius dati sinum AB, & prodibit sinus GH anguli quæsiti D oppositi.

PROBL. II. PROPOS. LXVI.

Datis duobus angulis, & vno crure reliquum crus oppositum reperire.

Ex 64. propos. huius data, & quæsitum sunt quatuor proportionalia; Quamobrem Positis primo loco sinu anguli dati GH; secundo cruris dati sinu AE, tertio anguli dati sinu IK regula aurea exprimet quartum quæsitum sinum AD cruris oppositi ED.

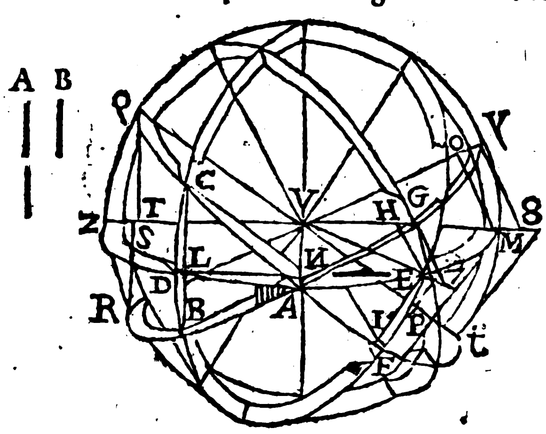
THEOR. III. PROPOS. LXVII.

Si in triangulo obliquangulo sphærico perpendicularis intus cadit, sinus complementi anguli maioris apud basim ad sinum complementi alterius anguli minoris ad basim est, vt sinus anguli minoris ad sinum maioris, in quos verticalis angulus diuiditur ab arcu normali.

Triangulo ACB obliquangulo super latus CB cadat perpendicularis arcus AD, & diuidat in duos arcus inæquales BD, & DC. Arcus verò EF. Sic complementum anguli C. At EG complementum anguli B; qui ponuntur ducti polo B, & C, vt ostendimus propos. 4. Tract. h.

Dico itaque, quod EG complementi sinus EH anguli B est ad sinum EI complementi FB anguli C, vt sinus RS anguli RAZ apud A ad sinum QT alterius anguli ZAQ apud A, quos perpendicularis intus latus cadens facit, dum angulum verticalem apud A in duo diuidit.

Probatur. Iam ex dictis propos. 1. h. EN sinus complementi EA arcus normalis AD est ad radium MV, vt sinus EH cumplementi anguli B est ad MO



sinum anguli GAE, & ideo ZAR apud A, qui vtpote ad verticem æquantur, & ideo sinui RS: Sic idem EN sinus complementi arcus normalis AD, est ad sinum totum VM, vt sinus EI complementi anguli C ad sinum MP anguli apud A æquali angulo ad verticem ZAQ, & ideo sinui QT. Cum ergo sint in eadem proportione, quæ est EN ad MV radium, tum EH ad RS tum EI ad TQ ex prop. 16. lib. 5. erit eadem proportio EH complementi anguli B ad RS sinum anguli ZAR, vt EI minoris C complementi sinus ad sinum TQ anguli maioris ZAQ apud A. Quare *permutando* EH erit ad EI, vt RS ad TQ.

Idem quoque sequitur etiam si perpendicularis extra cadat, vt quilibet cogitare poterit si imaginetur QAT arcum ad alteram partē esse arcus RAY.

THEOR. III. PROPOS. LXVIII.

Data summa duorum angulorum, & eorum proportione reperire casū arcus normalis.

HVius problem. fundamentum latiùs supra explicauimus pr. 21. h. in triangulis planis obliquangulis, vbi probauimus. Quod sic se habet summa duorum sinuum ad eorum differentiā, sicut tangens medietatis arcuum ad tangentem semidifferētię eorū. Quare etiā si adsit quęlibet alia proportio V. g. lineę A ad lineam B; quæ sit, vt summa duorum laterum ad eorum differentiam ex 16. l. 5. erit etiam linea A ad lineam B, sicut tāgens medietatis arcuum ad tangentem semidifferentię eorum.

Detur itaque qualibet linea V. g. EI in præsenti fig. quę sit ad quamlibet aliam EH, vt QT ad RS sinus. Erit itaque *diuidendo* EI ad differentiam quā differt ab EH, vt QT ad differentiam suam ab RS, & *inuertendo* quoque differentia EI ab EH ad EI, vt differentia QT ab RS ad ipsam QT.

Et quia ponitur EI ad EH: vt QT ad RS erit etiam *componendo* EI ad EI cum EH: vt QT ad QT cum RS. Quare ex *æquo* differentia, qua differt EI ab EH erit ad summam EI cum EH, vt differentia, qua discrepat QT ab RS ad summam QT, & RS.

Proptereaque *inuertendo* summa EI cum EH erit ad differentiam earum; vt summa sinuum arcus QT & RS ad differentiam ipsorum. Sed vt summa sinuum QT, & RS ad ipsorum differentiam, ita est tangens medietatis arcuū QZ, & RZ idest arcus RQ ad tangentē semidifferentiæ eorū QZ, & RZ arcuum. Ergo ex 16 lib. 5. vt summa sinuum EI, & EH complementorū ad semidifferentiam eorum, ita est tangens dimidij arcus QZ, & RZ, scilicet dimidiati arcus RQ ad tangentem semidifferentiæ ipsorum.

Primo itaque subducendus est sinus EI ab EH, vt habeatur differentia. Postea EI, & EH in vnam summam sunt redigendi, vt summam consequamur. Hinc arcus datus QR in duo partiendus, & medietatis tangens ex tabulis excerpenda.

Adhibita postea regula trium. Dices si summa linearum, seu sinuum proportionalium datorum dat differentiā eorū; quid dabit tangens semisummæ angulorū, & prodibit tangens semidifferentiæ eorum. Hæc itaque tangens quæsita in tabulis exhibebit arcum, qui additus medietati arcus QR dabit angulum maiorem ZAQ, subductus relinquet minorem ZAR, & punctum Z erit illud, in quod arcus normalis AZ cadit.

THEOR. IV. PROPOS. LXIX.

Obliquanguli trianguli tribus angulis datis eius latera reperire.

PRimo secundùm præc. doct. angulorum C, & B datorum complementis EI, & EH, & semisumma arcus QR anguli QAR inuenies singulos CAD, & BAD angulos, nimirum arcus QZ, & RS; siquidem ex propos. 67. ita est EH ad EI, vt SR ad TQ. Et si triangulum exhibitum habeat vnicum angulum obtusum, sumes pro angulis ad basim duos acutos, quod si obtineat duos obtusos, illos constitues pro angulis ad basim semper specie concordes. Vnde semper perpendicularis intra triangulum cadet. Quare in triangulo rectangulo CAD habentes duos angulos ad basim notos, nempe angulum C, & CAD ex propos. 23. huius inueniemus basim AC, & ex prop. 35. crus CD. Postea dato angulo B, & DAB, ex propos. 23. basim AB inuenies, & ex prop. 35. crus DB, addesque cruri CD, quoniam anguli specie concordes assumpti fuere, & obtinebis tria latera nota AC, CB, & BA.

PROBL. V. PROPOS. LXX.

Dato crure opposito, & duobus angulis, & altero specie noto, angulum verticalem manifestare.

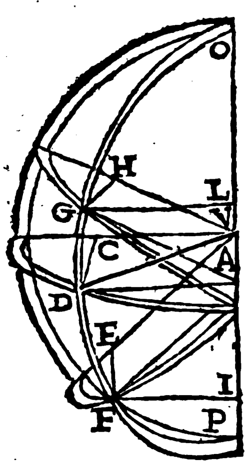
DEntur anguli B, & C, & crus oppositum CA ipsi B: Priùs itaque reperies angulum apud A in triangulo ACD dato pro basi crure AC, & angulo acuto C ex prop. 15. h. scilicet QZ arcum.

Secundo, quia ex prop. 67. ita est sinus EI complementi anguli dati C ad sinum PM, vel æqualem TQ, vt EH ad MO, vel æqualē SR ex dato EI complemento anguli C, & inuento sinus TQ, & EH complemento anguli B reperiemus MO, idest SR, & si anguli specie consentiant, simul arcus addendi, quod si specie differant, tunc pro angulo obtuso eius complementum assumendum est, & inuenti anguli, seu arcus minor à maiori est subducendus.

THEOR. IV. PROPOS. LXXI.

Sinus secundi arcuum in obliquangulo triangulo, in quos à perpendiculari diuiditur basis, sunt inuicem, vt sinus complementorum arcuum ipsis conterminalium.

SInt AG, & AF sinus arcuū conterminaliū FB, & GB & GH, & FE eorum complementorum; arcus



verò, in quos diuiditur basis FD, & DG, & sinus complemẽtorum LG, & IF. Dico, *quod ita se habet* LG ad IF, vt GH ad FE.

Probatur ex prop. 6. h. Nam, vt est HG ad GL; sic est CD ad radium VD ex propos. 6. huius; Item, vt FE ad FI; sic CD ad radium DV. Quare ex propos. 16. lib. 5. GH erit ad GL, vt FE ad FI; cum eidem proportioni CD ad DV consonent. Idem autem ostendetur si perpendicularis extra cadat, vt ex te videre potes.

PROBL. VI. PROPOS. LXXII.

Dato angulo verticali, & duobus cruribus illum claudentibus basim inuenire.

OFferatur angulus G, & crus BG, & GF, alterq; angulus F specie angulo G consentiat.

Primo dato angulo G, & basi GB reperies crus GD adiacens ex propos. 13. huius, quòd à dato crure GF subduces, & consequeris DF.

Itaque primo sinu LG complementi cruris reperti DG, secundo loco sinu FI complementi DF residui cruris dati, & tertio sinu secundo HG arcus conterminalis BG reperies sinum EF complementi basis BF quæsitæ angulo G verticali oppositæ. Hoc autem docuimus alio modo propos. 60. h. Quod si alter angulus specie diuersus sit, vteris complemento, si angulus verticalis sit obtusus, arcumque inuentum minorem à maiori dato suduces, vel si sit acutus ab arcu inuento maiori minorem datum pro inuento primo, quo, & cęt. vt priùs.

PROBL. VII. PROPOS. LXXIII.

Datis duobus cruribus, & angulo opposito, reperire basim altero angulo specie noto.

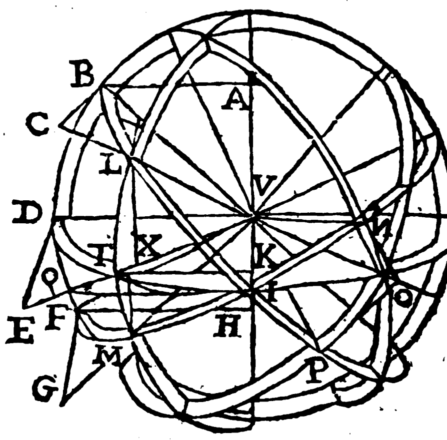
DOcuimus propos. 56. h. id alio modo. Dentur itaque duo crura BG, & BF, & angulus G, sed F sit tantùm specie notus. Primo angulo G, & crure GB reperiemus crus GD ex 13. h.

Deinde fiat, vt HG complementi cruris GD sinus ad FE sinum cõplemẽti alius cruris BF; sic sinus LG complementi arcus inuenti GD ad IF ignoti arcus complementum, & duo inuenti arcus simul addantur GD, & DF, & fiet GF basis, si anguli specie concordent: quod si dissonent alter ab altero subducatur, & residuum erit arcus quęsitus.

THEOR. V. PROP. LXXIV.

Tangentes secundæ laterum conterminalium arcui normalis sunt inuicem in proportione, vt angulorum sinus secundi, in quos triangulum à normali diuiditur.

TRiangulo LMI latera arcui ITD conterminalia sint IM, & IL; quorum complementorum tangentes sunt BC, & FG: Arcus verò angulorum sunt FD, & BD; quorum sinus secundi AB, & HF. Dico itaque, quod vt BC ad FG tangentes crurum secundæ; sic AB ad HF sinus secundi angulorum.



Probatur. Nam ex propos. 20. huius Radius, VD est ad sinum complementi anguli, nempe AB, vt tangens DE complementi cruris adiacentis IT ad tangentem BC complementi basis. Vnde, & *conuertendo* BC erit ad DE, vt AB sinus ad radiũ DV, sed ex eadem propos. 20. in altero triangulo, vt DE ad FG, sic VD radius ad sinum HF. Ergo ex *æquo* BC erit ad FG, vt AB ad HF.

PROBL. VIII. PROPOS. LXXV.

Datis duobus cruribus; & angulo verticali angulos reliquos obtinere; si alius angulus tertius specie sit cognitus.

SInt data crura MI, & LI, & angulus I verticalis. Quia est CB tangens secunda ad FG tangentem secundam, vt BA ad FH sinus complementorum angulorum datur itaque proportio BA complementi angulorum ad FH, in quos verticalis est diuisus in tangentibus CB, & FG; datur quoq; summa anguli FIB eorundem angulorum, ideoque ex 48. h. si fiat, vt CB, & FG summa tangentium 2. crurum ad ipsarum differentiam, sic semisummæ arcuũ DB, & DF tangens ad ipsorũ semidifferentiæ tãgentẽ reperies semdifferentiã arcuum DB, & FD, quam subtrahes, & consequeris minorem arcum DF addes, & obtinebis maiorem BD arcus angulos BID, & DIF mẽsurantes. Vnde dato angulo BID, & latere LI consequeris angulum L, sic dato angulo DIF, & latere MI consequeris angulum M, ex 13. h. Quosvnies angulis specie consentientibus: subduces alterum ab alio, si specie dissonent.

PROBL. IX. PROPOS. LXXV.

Datis duobus angulis, & basi exquirere angulum verticalem.

DEtur angulus L, & M, & basis LM, & in animo sit reperire angulum LIM. Ex complementorum angulorum tangentibus NO, & OP erit nota proportio MX ad XL sinus ex 77. h. vnde reperietur MX, & XL ex prop. 68. h. deinde angulo M, & sinu MX exquiretur angulus TIM ex prop. 5. h. rursusque angulo L, & LX, angulus TIL, & sic totus angulus MIL notus erit, si simul vniantur, eo quod anguli ad basim specie consonent, vel subducatur alter ab alio, si dissonent.

PROBL.

PROBL. IX. PROPOS. LXXVI.

Datis duobus cruribus, & angulo opposito angulum verticalem consequi alio tertio angulo specie noto.

Detur crus LI, & MI, & angulus L oppositus cruri MI. Primo data basi IL, & angulo L ex propos.13. huius inuenietur angulus DIB.

Deinde fiet ex pr,74. vt tangentes BC ad FG complementorum crurum, sic AB sinus complementi anguli reperti DIB ad aliud, & inuenietur FH sinus complementi anguli alterius DIF, quos iunges si concordent anguli, subduces minorem à maiori si anguli specie disconueniant. Hoc autem etiam docuimus alio modo propos.58.

THEOR. VI. PROP. LXXVII.

In obliquangulo triangulo sinus segmentorum basis à perpendiculo factorum in ea sunt proportione; in qua tangentes complementorum angulorum segmentis adiacentium.

Anguli adiacentes segmentis TM, & LT à normali factis, sint L, & M, & tangentes complementorum ipsorum PO, & NO. Dico, quòd, vt sinus LX ad sinum MX; ita sit PO ad ON in proportione in præced. schemate.

Probatur ex 24. huius. Quoniam radius LV est ad sinum LX cruris LT, vt tangens DE complementi alterius cruris IT ad tangentem OP complementi anguli ipsi cruri IT oppositi. Ergo *inuertendo* sinus LX erit ad radium, vt tangens PO ad tangentem DE. Et ex eadem propos. vt radius est ad MX, sic DE tangens ad ON tangentem: Ergo ex *æquo* vt sinus LX ad XM sinum, ita PO tangens ad NO tangentem complementorum, & ideo erit etiam PO ad LX *permutando*, vt NO ad MX.

PROBL. X. PROP. LXXVIII.

Dato crure, & angulis duobus basim interiacentem angulis expromere.

Detur angulus L, & M, & crus IL, & in animo sit reperire crus, seu basim ML.

Dato angulo L, & crure IL inuenies in primis crus LT ex propos.13. huius.

Secundò ex præced. facies, vt OP tangens complementi anguli ad sinum XL; sic tangens alterius anguli ON ad MX; habebisq; duos arcus LT, & MT; quos simul addes, si anguli dati sint speciei eiusdem; subduces si diuersi sint diuersæ speciei: Hoc autem docuimus supra propos. 61. Quòd autem sit PO ad LX, vt ON ad MX patet ex præced. Nam cum sit PO ad ON, vt LX ad XM erit etiam *permutando* OP ad LX, vt ON ad MX.

PROBL. XI. PROPOS. LXXIX.

Datis duobus angulis, & basi interiacente duo crura reperire.

Quoniam enim est ON ad OP, vt MX ad XL *inuertendo*: dentur verò basis LM, & anguli L, & M in triangulo obliquangulo LIM, & consequenter complementorum tangentes PO, & ON dabitur proportio, quam habet XL ad XM in duabus tangentibus PO, & ON, & dabitur summa arcus ML basis scilicet interiacentis.

Vnde ex dictis supra propos.68. exquires sinus XL, & XM, & arcum TL, & TM; quo obtento.

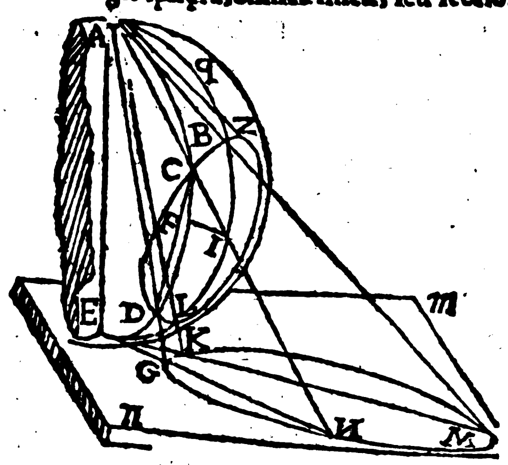
Secundo crure MT, & angulo M exquires basim IM, ex propos.21. huius, & rursus dato crure LT, & L angulo ex eadem perquires crus, seu basim IL: quod & fecimus supra propos.62.

Si verò anguli sint specie differentes pro angulo obtuso accipies eius complementum acutum ad ineundam operationem pro altero angulo, & eadem exequeris, vt priùs.

THEOR. VII. PROPOS. LXXX.

Dato in sphæra triangulo obliquangulo, si polo in angulo verticali maiori cruri opposito, interuallo minimi cruris circulus minor describatur, tangens dimidiæ basis est ad tangentem dimidij aggregati crurum, vt tangens dimidiæ differentiæ crurum refertur ad tangantem eius portionis basis, quæ extra circulum remanet.

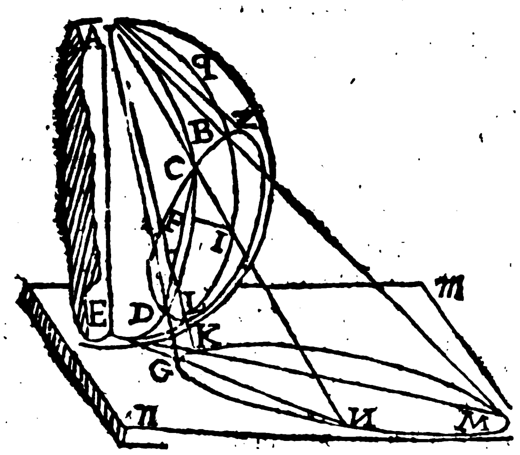
Sphæra super aliquod planum locata sit, & punctum contactus sit vertex B trianguli obliquanguli ICB sphæra descripti, & polo I. qui opponit maiori lateri EDC describatur circulus EBCD interuallo arcu CI minori. Itaque IC arcus erit æqualis arcui IB; Vnde totus arcus BILE erit aggregatum ex cruribus IC, & ILB. Quia verò planum m n tangit sphæram, omnes lineæ, seu sectiones



in eo delineatæ erunt tangentes sphæræ. Ergo si planũ AQILE circuli productũ intelligatur, & secet planũ m n faciet sectionẽ ME, & ducta per B linea AM efficietur MB tangens arcus BILE summæ duorũ crurum. Rursus, quia IC æquatur IL arcui LB erit crurum differentia, & ductâ lineâ AK per L linea KB differentiæ BL crurum erit tangens. Sic arcus CDE est basis, & pductô plano circuli, ACDEA culus portio est secabit planum m n in EN, & per C ductâ rectâ AN efficietur NB eius tangens; Quod verò basis remanet extra circulum arcus DE vocatur

tur

tur basis alterna, & ducta AE per D linea GE erit eius tangens.



Sunt autem tangentes non angulorum, sed semiangulorum, eo quod oporteret, vt essent tangentes angulorum integrorum, quod prouenirent à centro, at quia anguli MAE, & DAE sicut, & anguli KAE,& GAE sunt ad peripheriam hinc ex propos.23. el.3 sunt tang. non angulorum, sed semiangulorum.

Per ea autem, quæ diximus de proiectione circuli obliqui in sphæra prop.9. tract.26. MNHC sunt puncta in peripheria circuli proiecti existentia, quòd sit basis radiosi coni scaleni; cuius basis sub contraria est circulus ZBCDL. Et hinc est, quòd illud idem, quòd supra pr.22. de triangulis planis ostensum est, hic verificetur, & ita sit tangens EN semibasis veræ ad tangentem EM semiaggregati crurum, vt tangens semidifferentiæ crurum KE est ad tangentem GE semiportionis baseos extra circulum remanentis; Omnia autem eliguntur dimidiata, quia secantes illæ, vt AG, AN, AM, & AK, quæ terminant tangentes non proueniunt à centro sphæræ, vt dixi, vnde arcus mensurantes angulos ducti radio AE apud A sunt duplo minores, quàm ij qui in circumferentia sphæræ sunt, scilicet EDG, & ELB, & cæt.

PROBL. XII. PROPOS. LXXXI.

Datis tribus lateribus obliquanguli sphærici, illud ad duo rectangula reducere.

Dentur trianguli sphærici tria latera primùm 40. secundùm 35. tertium 60. Gr. Statuatur pro basi crus maius, cuius medietas est 30. Gr. & tangens grossioribus numeris tantum accepta est 577. reliqua verò duo latera in vnum aggregentur, & fient Gr.75. qui bifariam diuisi erunt Gr. 37. m.30. quorum tangens est 767. Rursus subducatur crus maius à minori, & Gr.5. pro differentia remanebunt, & pro semidifferentia Gr.2. m.30. cuius tangens par.43. Adhibeatur itaque regula proportionum, & ponatur primo loco tangens semibasis EN par.577. secundo tangens semiaggregati crurum EM par 767. tertio tangens differentiæ crurum EK par.43. & prodibit tangens 57. GE arcus DE Gr.3. m.16 semibasis alternæ, qui duplicati, vt sint Gr.6. m.32. & ablati à basi Gr. 60. remanebunt Gr.53. m.28. pro basi DC intra circulum remanente, cuius medietas DF erit Gr.26. m.44. in quam cadit arcus normalis IF, reliqua verò medietas addita basi alternæ DE dat reliquum arcum FDE Gr. 33. min.16.

Ratio huius rei est ex præced. Quia ita est tangens EN ad tangentem EM, vt tangens EK ad tangentem GE; Vnde datis tribus primis regula proportionum quarta inuenietur.

PROBL. XIII. PROPOS. LXXXII.

Datis tribus lateribus angulos quoslibet reperire.

EX propos. anteced. id optimè fit. Nam cum iam consequti fuerimus notitiā partiū basis, in quas arcus normalis cadit crure IAB dato pro basi, & crure EDF, iam reperto inuenies per propos.18. huius angulum E adiacentem cruri dato ILE.

Secundo inuenies ex eadem propos. dato crure IC, & FC angulum C adherentem cruri FC.

Tertio eodem dato crure IC, & CF inuenies partem anguli verticalis CIF ex prop.3. huius, & ex eadem dato crure FDE, & crure ILE pro basi inuenies partem alteram anguli apud I, quos angulos simul addes, & consequeris totum angulum CIL. Semper autem perpendicularis intus cadet, quia cum dantur tria latera possumus elligere duo, aut simul maiora quadrante, aut minora, quæ crura efficiant, vt tertium dissonum crus sit illud, in quod perpendicularis cadit.

Habes itaque in hac Expens. omnem doctrinam obliquangulorum penitùs explicatam, & omninò absolutam. Cætera verò, quæ ab alijs ad abundantiam doctrinæ traduntur omnes casus non planè adequant, sunt istis licet ingeniosissima sint. Vnde huic libro, qui necessaria complecti intendit, & sufficientia non omnia, propositiones prædictæ satis erunt.

TRAC-

TRACTATVS XXVIII.

De Progressionibus superficierum.

TRansactis tractatibus, quæ de lineis erant consideratis, vt in corporibus, vel circa corpora deductis, nunc de corporum superficiebus agendū est. Et quia supra tractauimus de progressionibus in numeris, & in lineis, ratio postulat, vt eas propositiones, quæ veræ vniuersales sunt, ostendamus similiter de superficiebus quoque verificari, & simul specialia quædam de progress. Arithmetica superficierum attingamus, quæ cubandis sphæroidibus necessaria sunt.

EXPENSIO I.

De serie proportionis Geometricæ superficierū.

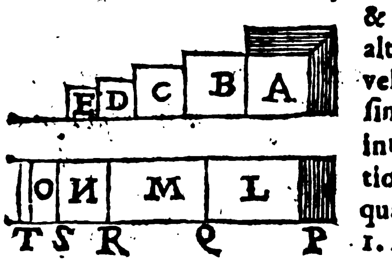
DVplex est series superficierum, quæ continuata in infinitum geometricè extendi potest; Alia est, quæ vnicam superficiem constituit; alia quę diuersas superficies inuicem similes componit, de hac pręcipuè hic propositiones tãgemus: quas exhibuit nobis Ambrosius à S. Vincentio ab ipso singulari ingenio excogitatas.

THEOR. I. PROPOS. I.

Omnes propositiones, quas supra de lineis demonstrauimus de superficiebus geometricè continua progressione procedentibus verificantur.

SInt quadrata similia, seu quodcumque aliud genus figurarum A, B, C, D, & cæt. proportione geometricâ continuâ procedentia; Dico de illis omnia illa verificari, quæ supra tract. 16. part. 1. de lineis memorauimus.

Quod, vt ostendatur fiant rectangula ęqualia illis figuris A, B, C, D, & cæt. sed eiusdem altitudinis ex pr. 43. vel 44. l. 1. elem. quę sint L, M, N, O, quæ inuicē eam proportionem obtinebūt, quam bases ex prop. 1. lib. 6. Elem. eritque L ad M, vt PQ ad QR, & sic de alijs vnde



Probatur. Ita est figura A ad figuram B, vt rectangulum ipsi A æquale ad M rectangulum æquale figuræ B; sed ex lib. 6. prop. 1. vt rectangulum L ad M, ita est basis PQ ad basim QR: Ergo ex propos. 16. lib. 5. Elem. vt A ad B ita PQ ad QR, & ita dicas de alijs C, D, quæ se referent, vt bases RS, & ST minoribus in infinitum. Cum ergo spatia successiuè minora in proportione Geometrica conseruent semper eandem proportionem, ac lineæ, seu bases successiuè minores, omnia ea, quæ de lineis dicta sunt, etiam de spatijs similibus verificari poterunt.

COROLLARIVM I.

OMnia ea, quæ dicuntur de lineis supra tract. 16. verificari nedum de spatijs similibus; sed etiam dissimilibus continuè proportionalibus, vt sunt rectangula L, M, N, O. Sicut etiam non tantùm de ijs, quæ diuersas similes figuras constituunt; sed de ijs, qui vnicam, quorum tamen singulę partes assignate decrescant continuâ proportione geometrica. Tale est totum spatium LO, culus singulæ partes L, & M, & N, & cæt. se referunt, vt bases PQ, & QR, & RS.

COROLLARIVM II.

ELicitur rursùs progressionem infinitam figurarum similium A, B, C, D, & cæt. seu dissimiliū L, M, N, O producere determinatam spatij quantitatem; si simul omnia spatia sumantur; Nam etiam lineæ PQ & QR, & RT determinatam longitudinem simul sumptæ, licet in infinitum multiplicatæ, producunt ex prop. 15. part. 1. tract. 16.

COROLLARIVM III.

DEducitur quoque omnia spatia antecedentia A, B, C, D esse ad omnia cōsequentia B, C, D, E, & cæt. vt vnū antecedens A, ad suum consequens B, & similiter antecedentia L, M, N ad consequentia M, N, O, esse, vt L ad M: Quia ex Cor. 2. pr. 16. Tract. 16. sic sunt lineæ PQ, & QR, & RS, & cæt. ad lineas QR, & RS, & ST, vt PQ ad QR.

Vnde

Vnde, & *permutando* A, B, C, D V.g. antecedentia omnia erunt ad A, vt consequentia omnia B, C, D, & erunt ad B.

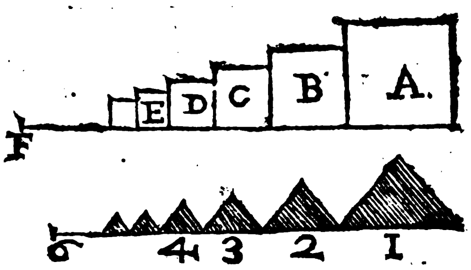
COROLLARIVM IV.

GNomonem nigrum nempe differentiam primi A à secundo termino B, & ipsum primum terminum totum A, & totam seriem terminorum infinitam esse in continua analogiâ eâdem. Sic & rectangulum nigrum differentiam primi L à secundo M, & ipsum primum L, & totam collectionem rectangulorum esse in continua proportione, quòd ex 3. Coroll. prop. 15. ita lineæ se habeant.

THEOR. II. PROPOS. II.

Si dentur duæ progressiones in eadem analogya procedentes planorum, seu qualibet figura vnius sit similis alterius figuræ correspondenti, seu dissimilis; dummodò singulæ vnius seriei inuicem similes sint, sicut, & alterius: Ita se habebit tota planorum series ad totam seriem, vt primum vnius ad primum planum alterius.

SInt ABCD, & 1, 2, 3, 4 progressiones, quarum termini inuicem similes sint; licet diuersi ab alterius seriei terminis V.g. illa sint quadrata, hæc triangula, sintque in eadem proportione V.g. A ad B, vt 1 ad 2, & B ad C, vt 2 ad 3, & sic consequenter, & termini earũ sint F, & 6. Dico, *quod tota series* ABC, & cæt. erit ad totam seriem 1 2 3, & cæt. vt primus terminus A, quadratum ad primum triangulum 1.

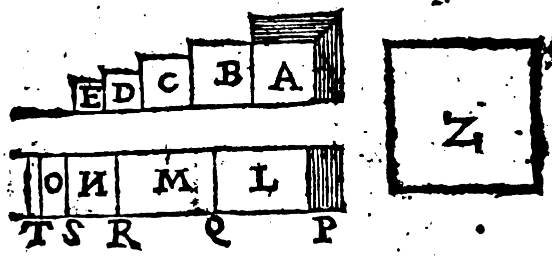


Probatur tota series antecedentium AF, & cæt. est vt consequentium seriem totã BF, sic A est ad B; sed vt A ad B ita est ex Hypothesi triangulum 1 ad 2, & sic ex Coroll. 3. huius omnia antecedentia, & series tota 16. ad consequentia 26. Ideoque ex 16. lib. 5. antecedentia AF ad consequentia FB erunt, vt antecedentia 16. & 26. consequentia. Quare *conuertendo*, vt series tota FA ad A primum terminum, ita 1.6. series tota ad 1 primum terminum. Propter eaque *permutando*, vt AF series ad 16. seriem, sic A primus terminus ad 1 primum alterius seriei terminum.

PROBL. I. PROPOS. III.

Planitiem æqualem toti seriei Geometricæ continuæ superficierum exhibere.

FIat, vt gnomon niger redactus in quadratum ex 45. lib. 1. quadrati A, quà differt à quadrato B, sic quadratum totum maius A ad Z. Dico Z planitiem toti seriei æqualem esse.



Patet ex propos. 15. part. 1. de progress. vbi id probauimus de lineis. Sed iam ostendimus eas propositiones esse vniuersales, & planitiebus conuenire. Ergo, si tertia proportionalis linea in ea proportione, quam habet differentia primæ lineæ à sequenti ad ipsam primam lineam, hæc inquam tertia proportionalis totam seriem æquat linearum sic etiã superficies tertia proportionalis gnomoni nigro, & quadrato toti A æquabit totam seriem superficierum.

Et eodem modo operaberis de rectangulo P nigro, nam si fiat, vt P ad totum L in quadratum trãsfusa, sic L in quadratũ redactum ad aliud inuenies Z æqualem progressioni LO rectangulorum.

COROLLARIVM.

HInc est, quod si sint aliæ species figurarum, quòd possis reperiri similem figuram æqualem toti seriei, si differentiam in similem figuram redigas ex prop. 45. lib. 6. & ex tertiam proportionalem inuenias, vt tract. sequent.

PROBL. II. PROPOS. IV.

Datis duobus planis similibus, cuius bases homologæ in continuum sint positæ reperire illorum planorum terminum.

IN prop. seq. fig. sint bases planorum homologæ similium AB, & BC indirectum positæ, & cupiat quis agnoscere vltimum terminum, ad quem progressio similium superficierum eis basibus insidentium data perueniat.

Inueniatur ex prop 15. Tract. 16. par. 1. basium AB, & BC progressionis vltimus terminus, qui sit F. Dico F esse etiam vltimum terminum datorum planorũ, ad quem producta in infinitum eorum progressio peruentura sit.

Probatur, quia cum bases sint tot, quot plana, & in eadem proportione duplicata. Siquidem ex prop. 27. lib. 6. plana similia duplicatam habent basium proportionem, vnde patet suis basibus ad eum terminum æquali multiplicatione peruentura.

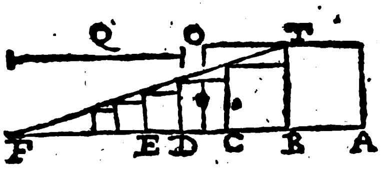
PROBL. III. PROPOS. V.

Datis duabus primis basibus reperire planorum seriei infinitæ æqualem superficiem.

DEntur bases quadratorum AB, & BC, & ex propos. 14. lib. 6. reperiatur eis tertia proportionalis CD: duarum verò AB, & CD datarum reperiatur seriei infinitæ linea æqualis Q ex propos. 16. tract. 16. par. 1. Fiatque super Q rectangulum AQ æquale altitudini BT, & illud erit, quod postulatur, æquale toti seriei quadratorum.

Proba-

Probatur. Nam linea Q ex prop. 11. tract. 16. par. 1. cùm sit æqualis toti seriei basium imparium ex effectione obtinet duplicatam rationem, ad primam basim AB eius, quam habet series basiũ AF ad primam basim eãdem AB. Proptereaque ex 1. lib. 6. etiam



rectangulum AO ex Q factum eiusdem altitudinis ad primum quadratum AT duplicatam habebit proportioné, quàd sit eadé, ac basis suæ Q ad basim AB quadrati AT, illius, quam habet series basium AF basim AB. Sed series quadratorum AF ad quadratum primum AT duplicatam obtinet proportionem seriei basium ad primam basim; siquidem singula ex prop. 21. lib. 6. duplicatam basium obtinét proportioné; quare ex 17 l. 5. & omnia. Ergo eandem obtinent ad idem quadratum AT, quam rectangulum AO ex Q altitudinis BT, ad idem quadratum AT. Quare quadratorum series infinita, & rectangulum prædictum AO ex Q erunt ęqualia ex 9. lib. 5. cum eidem eadem dicant proportionem.

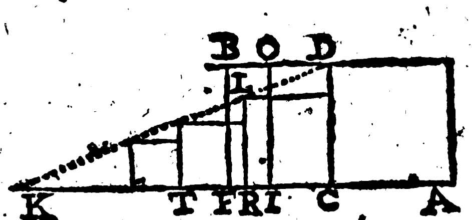
COROLLARIVM.

SI inter Q, & BT reperiatur media proportionalis quadratum ex ea erectum erit æquale rectangulo sub Q & BT cõprehenso ex 19. l. 6. Vnde erit quoq; æquale toti seriei infinitæ quadratorũ.

PROBL. IV. PROPOS. VI.

Dato quadrato, & eiusdem altitudinis rectangulo, seriem infinitam exhibere, quæ & à dato quadrato incipiat, & tota dato rectangulo sit æqualis.

FIat ex prop. 15. lib. 6. vt AF ad CF latus rectanguli, sic CA ad CI aliam inueniendam, & ex I erigatur parallela ad BA, & sit rectangulum CO: huic autem rectangulo fiat quadratum æquale CL. Dico *seriem quadratorum* AD, & CL, & *cæt. rectangulo* AB, *æquari*.



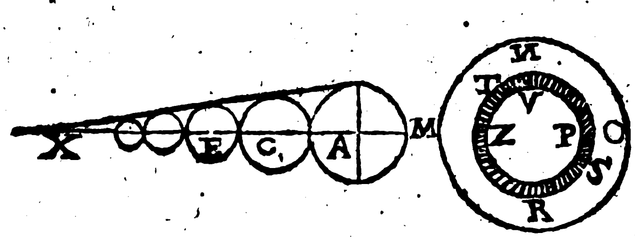
Probatur. Fecimus AF ad CF, vt CA ad CI. Ideoque cum sit CA sumptus, vt primus terminus ad CI, vt secundum velut AF totum cum primo ad CF residuum ex primo ex Coroll. 1. prop. 16. tract. 16. part. 1. AF erit æqualis toti basium infinitæ seriei in ratione AC ad CI, procedentium.

Deinde quia quadratum CL æquatur rectangulo CO habebit eandem rationé ad illa quadratũ AD: Quare cum quadratum maximum AD sit ad quadratum CL, vt AC basis ad tertiam proportionalem AT, quia sunt in duplicata proportione basium; erit etiam talis proportio. Quadrati eiusdem maximi AD ad rectangulum CO ob eandem altitudinem, vt basis AC ad CI basim; ergo bases CI, & RT sunt ęquales, quod eisdem basis AC eandé dicant proportionem quadrati AD ad quadratum CL, vel rectangulum æquale CO. Quadere cum sit, vt fecimus AC ad CI, vt AF ad CF, & ideo (vt monuimus) AF æquetur seriei basium infinitæ in ratione AC ad CI, æquabitur etiam toti seriei infinitæ basium alternarum, & interruptarum in ratione AC ad RT quod CI, & RT sint æquales. Quare ex anteced. rectangulum ex FA, & CD, nempe rectangulum AB, seriei infinitæ quadratorum AD ad CL, & cæt. erit æquale, cum sit erectum super AF æqualis seriei basium alternarum AC, & RT, & altitudinis CD, vt docet prop. 5. h. quod est promissum.

PROBL. V. PROPOS. VII.

Planorum seriem exhibere, quæ à dato segmento simili toti alicui planitiei incipiat, & ipsa series sit toti planitiei datæ æqualis.

SIt datus V. g. circulus OMN à quo auferatur portio VZP similis toti, & debeat constitui series, quæ incipiat à circulo PVZ, & tota sit æqualis planitiei toti ONM.



Si esset iam constituta series ista, & esset AX, ita esset series XA ad seriem XC, vt circulus A ad C ex propos. 15. tract. 16. part 1. Coroll 1. Fiat itaque vt circulus OMN totus ad annulum residuum ONM, VPZ: ex prop. 26 lib. 6. vel etiã ex tr. 29. sequenti, sic PVZ circulus ad aliũ RTS annulũ nigrũ. Cõstituat auté PVZ pro primo termino, & sit, A, & fiat planũ C æquale ãnulo RTS nigro simile ex 23 l. 6. circulo, & planitiei A; & ideo planitiei toti ONM, & producatur progressio vsque ad suum terminum X. Dico *seriem* AX *æqualem esse planitiei datæ* ONM.

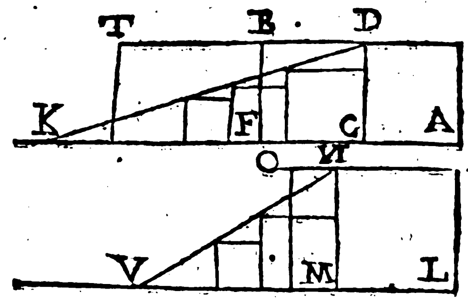
Probatur. Nam ita est ex constructione tota planities OMN ad annulum suum seminigrum NOZP, vt PVZ circulus ad RTSZP annulum nigrum, & vt A ad C æquales ex effect. sed vt A ad C; ita est AX series ad CX seriem ex Cor. 3. p. 1. h. Ergo, vt OMN planities ad ONMZP residuũ annulũ: sic series AX ad seriem CX: quare *conuertendo* erit AX tota series ad residuum, compartemque seriei A primum terminum, vt OMN planities tota ad PVZ residuum ex annulo: Vnde *permutando* erit etiam AX series ad OMN planitiem totam, vt terminus A ad PVZ residuum; sed A, & PVZ ex effectione æquantur. Ergo etiam series AX, & planities ONMR tota æquabuntur ex prop. 1. lib. 6. Elem.

Fiet autem circulus C æqualis annulo nigro ex lib. 6. vt infra docebimus Tract. 30.

PROBL. VI. PROPOS. VIII.

Seriem à dato termino incipientem; sed alteri æqualem instituere.

Fiat rectangulum AB in altitudine CD æquale toti seriei AK, ex propos.5. h. Sitque datum quadratum LN minus, quam rectangulum AB; (alioquin propositio est impossibilis) cui addatur talis pars MO, vt totum LO sit æquale prædicto rectangulo AB. Et ex propos.6. huius, fiat rectangulo LO series æqualis LV, quæ à quadrato NL incipiat, & erit factum, quod exposcitur.



Patet, quia ex constructione series LV æquatur rectangulo LO, quod est æquale rectangulo AB, quod æquatur seriei AK; quapropter series LA æquabitur seriei AK.

PROBL. VII. PROPOS. IX.

Seriem superficierum alteri datam proportionem obtinentem ordinare, quæ incipiat à dato quadrato.

Sit data proportio 7. ad 4. Fiat autem rectangulum AB adhibendo schema preced. æquale progressioni KA ex h. prop.5. Deinde fiat, vt 7. ad 4. ita rectangulum AT ad rectangulum eiusdem altitudinis AB.

Sit autem quadratum datum L minus, quàm rectangulum AT, & ei addatur tale parallelogrammum ex 35. lib.1. elem. MO, cum quo faciat planum æquale plano AT faciendo rectangulũ LO æqualis MN altitudinis æquale ipsi AT; deinde ipsi fiat ex prop.6. h. æqualis series quadratorum LV; & erit factum, quod exigitur.

Patet ex constructione. Nam series LV æquatur rectangulo LO, quòd æquale est rectangulo AT; rectangulum verò TA se habet ad rectangulum AB; & ideo ad seriem AK ei rectangulo æqualem, vt 7. ad 4. Ergo etiam series LV ad seriem AK se habebit, vt 7. ad 4.

EXPENSIO II.

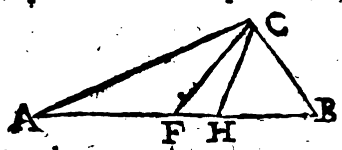
De planorum progressione Musica.

Visa progressione Geometrica restat, & Musicam planorum progressionem breuiter attingamus. Vnde sit.

PROBL. I. PROPOS. X.

Triangulum, seu parallelogrammum datum ita secare, vt partes proportionem musicam seruent.

Sit triangulum ABC; quod oporteat ita secare, vt totum ABC planum sit ad planum FCA, vt differentia plana HBC ad planam differentiam HCF.



Diuidatur latus AB ex 25.pr. tr.15. vel 1. tr.16. in partes musicæ proportionales, ita vt sit AB ad FA vt BH ad HF Geometricâ proportione respondentes, ducanturque rectæ HC, & CF, eritque factum. Nam ABC totum triangulum erit ad AFC, vt differentia BCH ad differentiam HCF, vel si sit parallelogrammum ducantur normales ab F, & H ad basim AB, & partes erunt harmonicè proportionales.

Probatur, vt refertur AB ad AF bases, sic refertur BH ad HF basium differentiæ; sed triangula, vtpote eiusdem altitudinis ex 1. lib.6. eandem habet basium rationem. Ergo eiusdem rationis BH ad HF, quæ est eadem, quæ BA ad FA. Quare erit quoque triangulum BAC ad triangulum FCA in ea proportione, vt BHC ad HCF.

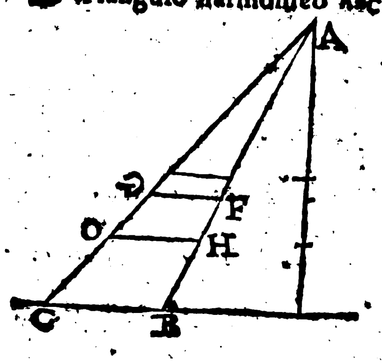
COROLLARIVM.

Hinc colligas de istis planis, omnes quoque propositiones, quas de lineis diximus verificari, cumque de istis nil ampliùs dicendum nobis sit ad ipsa spatia, quæ ab harmonicis lineis efficiuntur accedendum.

PROBL. II. PROPOS. XI.

Trapezia harmonicis lineis intercepta in harmonico triangulo habent eam proportionem, quæ trianguli ad triangulum, nempe proportionem duplicatam basis ad basim.

Sint lineæ harmonicæ BH, HF, BC, & HO, & FG in triangulo harmonico ABC, quæ faciant spatia BO, & HG. Dico *ea spatia BO ad HG habere inuicem eam proportionem, quæ trianguli ACB ad triangulum AGF, nempe proportione duplicatam BH ad HF.*



* Probatur Triangu-

angulum ACB ad triangulum simile AGF ob æquales angulos, à parallelis effectos est in duplicata ratione lateris AB ad latus AF; Trapezium quoque BO ad trapezium HG duplicatam habet lateris BH ad latus HF rationem ob similitudinem eorum cum angulis æqualibus cõstent ob parallelas; sed vt crus AB ad crus FA, ita est ob proportionem musicam ex propos. 1. tract. 16. part. 2. latus BH ad latus HF; ergo etiam ACB triangulum ad AGF triangulum erit, vt trapezium BO ad trapezium HG.

COROLLARIVM.

Hinc educitur omnes illas propositiones, quas posuimus de lineis agentes in seriem harmonicam progredientes, etiam superficiebus applicari debere, & veritatem eandem obtinere; quia earum omnium fundamentum est proportio Musica, secundùm quam in seriem continuam Musicè procedunt, vt facilè ex re ipsa poteris considerare absque noua omnium earum propositionum repetitione.

EXPENSIO. III.

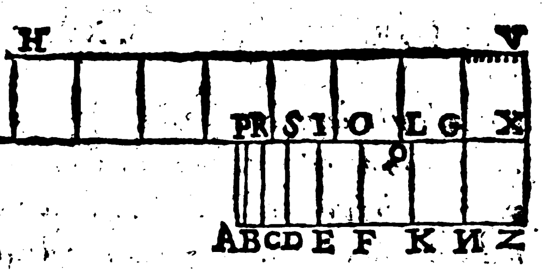
De progressione spatiorum Arithmetica.

Hæc Expensio quadrandis Ellipticis spatijs & spiralibus, & cubandis Conoidibus maximè deseruit; estque veluti fundamentum ad illas operationes præstandas.

THEOR. I. PROPOS. XII.

Rectangula Arithmeticè decrescentia, & eiusdem altitudinis æquiualent medietati rectanguli, ex eorum integrorum summa constantis vno excluso; dummodò partes secundùm quas decrescunt, tot sint quot ipsa.

Sint rectangula ZG, & cætera vsque ad A, V.g. 8. & octaua sui parte decrescant alterū respectu alterius. Dico, *quod omnia sic diminuta simul æquiualent medietati summæ, quæ ex eis integris conflatur, nimirum rectanguli* HG medietati excluso GV vnico rectangulo, vt sint 7.



Probatur. Nam primum NL remansit tantùm, quantùm ablatum est ab vltimo AP, siquidem septem partes in NL remansere ablata vna septima, ibi in AP vna septima relicta est, cæteræ septem ablatæ. Ergo æquatur, quod remanet ei, quod ablatum est. Sic dicas de residuo OK, quod æquatur defectui AR; siquidem hinc ablatæ sunt 6. partes, ibi sex remanserunt, & sic de alijs, ergo defectus hinc, & residua inde æquabuntur: sed si sumantur simul augmenta, & defectus facient totum rectangulum. Ergo cum sint septem rectangula deficientia erunt simul defectus, & residua æqualia septem rectangulis integris. Ablatis itaq; æqualibus defectibus, residua remanebunt dimidia septem rectangulorum nempe dimidio HG excluso primo GV, sunt autem septem deficientia, quia à primo nihil aufertur.

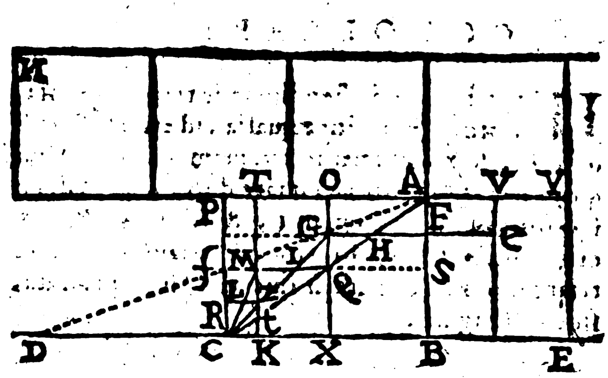
Id etiam diximus, cum ageremus de proportione Arith. summanda in Cor. prop. 9. Tr. 14. Siquidem ostendimus numeros datos continua diminutione Arithmetica deficientes in vnam summam redactos efficere dimidium numeri ipsius maximi in se ducti consurgentis, ipso tamen maximo excluso, vt videre in istis numeris. Namque maximus terminus est 10. qui multiplicatus in se facit 100. summa verò omnium est 45. nempe dimidium numeri quadrati ipso maximo 10. excluso, vt fiant 90. cuius dimidium est 45.

10	0
9	1
8	2
7	3
6	4
5	5
4	6
3	7
2	8
1	9
45	45

THEOR. II. PROPOS. XIII.

Rectangula prædicta iam arithmeticè deficientia; si adhuc secundùm aliud latus prædicto modo arithmeticè deficiant sunt maiora suis residuis.

Sint rectangula Arithmeticè iam diminuta AX vsque ad KP; quæ adhuc eodem prædicto modo diminuantur, & primo auferatur rectangulum, cuius basis sit AF partis vnius, OQ duarum, ZT trium prout supra fecimus; Dico hæc residua rectangula, seu quadrata simul sumpta excedere partes omnes à se ablatas, nempe FO, & QT, & ZP.



Præassumptum. Et in primis notandum, quod omnis vnitas est ad latus alicuius quadrati, vt latus ipsum ad quadratum suum; quod ex def. 15. tract. 8. ratione multiplicationis sui, ita vnitas metitur radicem, seu latus; vt latus, ipsum quadratum; sic 1, metitur 4. vt 4. metitur 16. Quare si à radice auferatur vnitas, & à quadrato dematur ipsa radix; ita quoque erit 1. ad 3. vt 4. ad 12. Nam si est 1. ad 4. vt 4. ad 16. erit etiam *diuidendo* 1. ad 3. vt 4. ad 12.

Quo posito insuper considerandum est, quod BC est radix, seu latus EB ex hypothesi minutum vnica vnitate, & eo duplum BC est radix ipsius in se multiplicata ex præc. sed minuta ipsa radice BE. Nam diximus, quod omnia rectangula, idest AP arithmeticè decrescentia æquant dimidium rectangulorum AN integrorum sumptorum toties, quot partes in ipso latere BA sunt, iuxta quas arithmeticè decrescunt, si tamen dematur rectangulum ipsum maximum AE; sed rectangula inuicem sunt, cum sint eiusdem altitudinis, vt bases, quare bases quoque BC arithmeticè decrescentes æquabunt dimidium BD radicem BE in 4. part. diuisam, & per 4. scilicet in se, ductam; sed diminutâ ipsa radice EB.

Quare ex præced. præass. ita erit AF vnitas ad FG latus minutum vnitate, vt AB ad BD radicem in se ductam toties, quod in ipsa sunt partes sed ablata ipsa radice EB; Vnde FA erit ad FG, vt AB ad BD: Quare, & FA vnitas erit ad dimidium radicis FH, vt AB radix ad BC dimidium ipsius AB ex 18. lib. 5.

Cum ergo FH sit dimidium radicis vnitate diminutæ, & AFH triangulum æquale triangulo HGQ, ex altera vnitate QG, & dimidio HG effecto, erit trapezium BAQX æquale quadrato primo DG.

Vnde si etiam cætera trapezia QXTK, & cæt. essent æqualia suis quadratis XM, & alijs correspondentibus, spatium occupatum à quadratis decrescentibus esset æquale triangulo BAC, ex BC latere omnium diminutorum rectangulorum, & BA radice. Vnde rectangula ablata eis essent æqualia, Verùm hoc non est, Siquidem vnitas FA est ad radicem dimidiatam, & diminutam FH, vt radix ipsa tota AB ad BC; erit etiã ex 18. l. 5. dualitas AS ad SQ radicem diminutam; vt radix tota BA ad BC. Si verò dematur dualitas à maximâ radice fit radix sequentis minoris quadrati XQ. Quare AC diagonalis transibit per Q. Vnde trapezium à diagonali efformatum in sequenti quadrato minus erit, quam ipsum quadratum; siquidem XQ vnũ latus quadrati est idẽ, ac trapezij QTXK alterũ verò latus minus sit non potest æquari, & sic dicas de reliquis, licet sufficiat probasse de vno. Quare verùm erit, quod rectangula, seu quadrata decrescentia, rursùs Arithmeticâ diminutione, vt BG, & XM, & KR, maiora euadunt, quàm medietas BAC rectanguli BACP ex summâ omnium solâ primâ diminutione deficientium conflati.

COROLLARIVM.

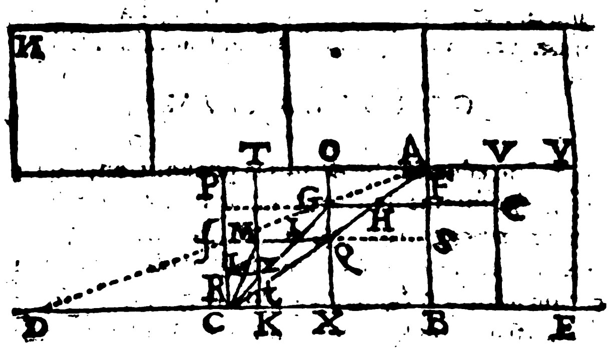
Hinc est, id quod ostendimus de triangulis FHA, & HGQ, quod sint æqualia, id etiam ostendi de alijs, si XG assumatur tanquam latus maximi quadrati, vt sumitur BA; quare ducta diagonali CQ secabit QM, dimidiam in I, & triangulum QGI erit æquale triangulo IZM, & triangulum ZML triangulo RCL; & ita si sint alia, siue quadrata, siue rectangula.

THEOR. III. PROP. XIV.

* *Summa rectangulorum, seu quadratorum duplici Arithmetico decremento minutorum est minor summâ ipsorum integrorum excluso vno; seque habet ad eam minus in proportione, quam 1. ad 3.*

Sint rectangula BG, & XM, & KR. deficientia Arithmeticè, ne dum quoad latus BX, & alia, sed etiam quoad latera eodem modo. Dico quòd eorum summa BG, & XM, & KR, dicit ad AN integra quadrata per 3. multiplicata numerum partium successiuè deffectus minorem proportionem, quàm 1. ad 3.

Probatur. Quoniam ex præced. Coroll. omnia triangula, in quibus trapezia, vt QXKZ, & cæt. excedunt quadrata sua, vt XM sunt æqualia triangulis, quibus exceduntur, nimirum QGI triangulum triangulo IMZ, & alia alijs. Posito itaque illo spatio triangulari vt IZM, & LRC, in quo quadrata excedũt triangula QGC, & ZMC pro illo QGI, & ZML, in quibus exceduntur cũ ZKIQ, & LZTC sit commu-



ne; spatium QCZ æquabitur spatio MIQ, & MCT spatio ZRCT: vnde omnia triangula QGC, MZC æqualia erũt excessibus quadratorũ extra diagonalẽ AC excedentium, & remanentium; nempe spatio QMT, & RCZT, quo superant BAC triangulum; sed hæc triangula QCG, & MZC sunt æqualia dimidio rectangulorũ FG, & LM, vtpote eiusdẽ altitudinis. Ergo etiã excessus quadratorũ QMT, & ZCR extra CAB, triangulis QGC, & MZC æqualia sunt dimidio eorũdem rectangulorum FG, & RM. Si autem etiam BG quadratum primũ inter decrescentia excluso maximo excessu eodem excederet rectangulum FP, iam excessus omnium quadratorum super medietatem BAC æquaretur dimidio rectangulorum FP, & FG, omnium in quam defectuum, & ideo si esset triangulum APC partium 3. duæ cederent FP, FG, & MR rectangulis, at vna excessui quadratorũ. Quare quadrata BG, XM, & KR posito toto rectangulo BACP partium 6. essent dimidium, & tertia pars alterius dimidij, nempe $\frac{4}{6}$, & rectangula residua FB, & FG, & RM $\frac{2}{6}$. Sed iam ostensum est quadratum GB primum deficientium nullo pacto excedere BAC. Vnde sũma quadratorũ BG, & XM, & KR deficit à $\frac{4}{6}$ dimidio rectangulo PF, siquidem si spatio æquali illi dimidio excederet BG quadratum diagonalem AC, iam æquaret $\frac{4}{6}$ totius BACP. Sed quantitas BACP est dimidium quadratorum AN ex h. propos. 12. Ergo quadratorum, (cùm BP ponatur 6.) AN rectangulum erit 12. & ideo BG, & XM, & KR summa erit ad AN 4. quadrata integra minùs quam 4 ad 12. ideſt minus, quã 1. ad 3. cum sit ad PB, vt 4. ad 6.

THEOR. IV. PROPOS. XV.

* *Si quadratis decrescentibus, & quadratis quoq; non decrescentibus addamus maximum quadratum, erit maior proportio omnium decrescentium ad omnia non decrescentia addito vtrobique maximo, quam 1. ad 3.*

SI series quadratorum, seu rectangulorum decrescens in præced. schemate addito maximo BA, & BG, & XM, & KR, iterumque quadrata integra tot numero AN addito eis quoque maximo, Dico, quòd quadratorum prædictorum decrescentium BA, & BG, & XM, & KL, Proportio ad AN quadrata

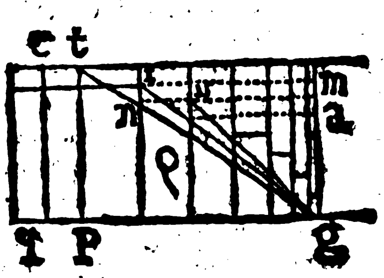
drata æqualia erit maior, quàm 1. ad 3.

Probatur. Ita est vnitas ad radicem, vt radix ipsa ad suum quadratum. Ergo æquabitur rectangulum ex vnica parte V. g. AF, & ex BD partibus tot, quot sunt in quadrato BA partes, constante quadrato ipsi AB ex 17. Elem. lib. 6. Quare etiam dimidium EP rectanguli ex BD, & AF erit æquale dimidio BV rectanguli BA. Quod autem BD constet tot partibus, quot in BA sunt quadrata parua ponetur hypothesi; quia est radix ipsa BA toties accepta, quot in ipsa BA sunt partes: Vnde si in BA sunt 4. partes in BD erunt 16. quia in AB sunt 16. partes productæ ex multiplicatione lateris BE in se quo posito. Iam BP rectangulũ est ad AN, vt 3. ad 6. ex propos. 12. huius: addito autem quadrato, vt sit YN, & quadratis decrescentibus BV dimidium ipsius; erit adhuc VC ad YN; vt 3. ad 6. Ideoque cum quadrata decrescentia BG, & XM, & XZ sint minus, quam 2. ad 6. ex præced. ad AX quadrata æqualia, si addamus eis duas tertias partes parallelogrammi BV erunt adhuc quadrata decrescentia GB, XM, & XR cum $\frac{2}{3}$ ipsius VB ad YN quadrata non decrescentia minus, quam 2. ad 6. & defectus erit ex præced. dimidium parallelogrammi PF: Si ergo addamus BV dimidium quadrati BA addimus plus, quam PF, vt in principio ostendimus nimirum PE. Ergo addito toto quadrato BA quadratis decrescentibus, cum addamus magis, quàm quod requirunt ad hoc, vt dicant proportionem 2. ad 6. vel 1. ad 3. habebunt ad quadrata non decrescentia YN maiorem proportionem, quàm 2. ad 6. vel 1. ad 3. & excedent ferè rectangulo dimidio EP, & triente ZV.

THEOR. V. PROPOS. XVI.

Quadrata decrescentia, seu rectangula duplici decremento Arithmetico supra descripto, quò iuxta minutiores partes successiuum eorum decrementum constituitur, eò magis accedunt ad proportionem 1. ad 3. respectu quadratorum non decrescentium.

MVltiplicentur GB, XM, & XR rectangula præcedentia per diuisionem subduplam, vt in fig. Q. Proportio quadratorum, seu rectangulorum semper crescet ad quadrata non decrescentia, & semper fiet magis proxima ad eam proportionem, quam habet 2. ad 3.



Probatur. Nam rectangulum m t erit minus, quàm in præced. fig. & ferè duplò minus, quam G, siquidem etiam, si secundùm longitudinem excrescat ei pars t t, ea certè non æquat longitudinem Im, vt ex dictis etiam colligi potest. Cum ergo hoc rectangulum sit minus, reliqua erunt maiora, vt patet. Nam loco sequenti G F præced. fig. succedent in hac duo rectangula nm, n a simul æqualis latitudinis, ac GQ, sed quæ magis distent ob diuisionem minutiorem, & subduplam à termino g erunt longiora, & sic de cæt. Proptereaque etiam triangula, vt n I g, dimidia rectangulorum erunt maiora triangulis QCC in præced. fig. si duo triangula illius vni huius ob basim n I subduplo minorem sumantur. Sed hæc sunt æqualia incremento rectangulorum I vsque ad g supra dimidium tgp: Ergo etiam rectangula, seu quadrata, velut I p crescunt magis vltra dimidium, quàm quadrata GB, & cæt. præced. fig. & magis ad $\frac{2}{3}$ accedunt.

Nec tamen vnquã perueniunt ad $\frac{2}{3}$, quia semper ad $\frac{2}{3}$ deficiet dimidium rectanguli t m; quare ad quadrata, seu rectangula q t septem integra erunt proximè, vt 2. ad 6. ex propos. 13. huius, cùm ea integra sint duplo maiora, quam rectangulum g t. Quod si quadratis non decrescentibus septem, & istis decrescentibus addas q t; eodem pacto, & eadem ratione erunt magis, quam $\frac{2}{6}$: sed multo magis accedent ad $\frac{2}{6}$, quadratis præced. fig. BA, & & GB, & cæt. Nam tertia pars rectanguli e p erit minor, quàm tertia pars residua BV, & dimidium é p huius, quod æquatur rectangulo e m erit minus, quàm dimidium BV illius, quo dimidio, & qua tertia parte quadrata precedentia decrescentia sunt magis, quàm $\frac{2}{6}$ respectu non decrescentium, vnde addito vtrinq; maximo q t rectãgula octo h. fig. minus discrepabunt à $\frac{2}{6}$, quam rectangula præced. fig. respectu octo rectangulorum integrorum quale vnum est t q.

THEOR. VI. PROPOS. XVII.

Series quadratorum, seu rectangulorum si infinita subdiuisione in Arithmeticam seriem, quoad ambo latera diminuatur, æquatur duabus sextis, quadratorum integrorum saltem quoad sensum.

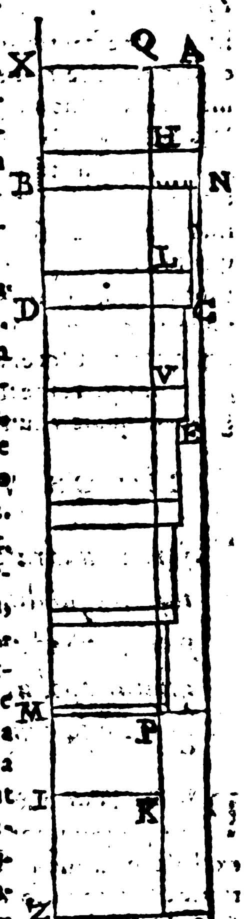
PRob. Nam quò numerosior est subdiuisio eò fit propinquior accessus ad $\frac{2}{6}$ rectanguli g t excluso maximo rectãgulorum à minori proportione; Sic incluso maximo fit accessus ad $\frac{2}{6}$ rectãguli gt à maiori ꝓportione: nec excluso maximo accedendo ad $\frac{2}{6}$ potest excedere $\frac{2}{6}$, nec incluso maximo ex præc. Ergo si diminutio fiat quoad vsque fieri potest æquabit tota simul $\frac{2}{6}$. Patet consequent. Nam non erit magis, quam $\frac{2}{6}$ alioquin posset adhuc fieri subdiuisio à maiori proportione, per quam accedimus ad $\frac{2}{6}$, sed nec erit minus, quam $\frac{2}{6}$ integrorum rectangulorum eadem de causa; quia inquam posset fieri adhuc subdiuisio, per quam accedimus ad $\frac{2}{6}$ à minori proportione: Ergo æquabit $\frac{2}{6}$ rectanguli t g. Et ideo totius rectanguli, quod componitur ex rectangulis integris eodem numero constantibus, quod est ex 12. huius duplum rectanguli ex deficientibus vnico decremento rectangulis compacti erit vt 4. ad 12. idest, vt 1. ad 3.

THEOR.

THEOR. VII. PROPOS. XVIII.

Si rectangula Arithmetico decremento sine fine deficientia vsque ad vltimum sui non deficiant; tunc rectangula defficientia ad illa minora, quæ integra perseuerant proportionem æqualitatis, ad complementa verò proportionem subduplam, ad rectangula verò circa diametrum residuum subtriplam.

Sint rectangula Arithmeticè deficientia AB, & BC, & DE: Quorum defectus perueniat vsque ad MK. Dico rectangula deficiētia omnia esse primo rectangulis XH, BL, DV, & cæt. æqualia. Dimidium verò complementorum AH, & HB quoad totam seriem: Tertiam vero partem rectangulorum HN circa residuum HN diametri XN existentium non deficientium.



Probatur. Quia rectangula XH, BL, DV integra perseuerant. Ergo series talium æqualium seriei æquè multiplicatæ erit æqualis. Complementa verò HB, & LD deficiunt pro medietate sui, sicut, & AH, & NL, & cæt. pro medietate sui deficiunt, ex 12. h. ergo simul AH, & HB, & cæt. dimidio quoque deficient. Rectangula verò circa diametrum, quod duplici Arithmetico decremento deficiant ex 17. h. extenuabuntur successiuè vsque ad ⅓ omnium. Quare omnia simul ad integra HN rectangula æquè multiplicata se habebunt vt 2. ad 3. Itaq; rectangula deficientia Arithmetico decremento secundum vtrumque latus; sed non vsque ad vltimum sui; se habebunt ad integra, ad rectangula quidem XH, BL, DV, circa diametrum, vt 1. ad 1. ad cōplemēta verò BH, HA, vt 1. ad 2. ad reliqua verò rectangula circa diametrū HN, vt 2. ad 3.

THEOR. VIII. PROP. XIX.

Rectangula duplici Arithmetico decremento se extenuantia, & non ad vltimum sui, sunt ad rectangula integra, vt rectangulum sub maximo, & minimo latere, & triente rectanguli differentiæ ad rectangulum primum.

IN præced. fig. iisdem positis. Dico rectangula Arithmetico decremento, & non vsque ad vltimum sui deficientia AB, & BC, & DE esse ad integra pari numero constantia, vt rectangulum BQ ex maximo latere XB, & minimo XQ constante, & triente rectanguli HN, quod oritur à differentiis laterum, quæ inter maximum, & minimum reperiuntur.

Probatur. Nam XH æquat ipsum rectangulum XH non deficiens, at HB est medietas complementorū MB, AH, quod cōplemēta sunt inuicem æqualia ex 43. l. 1. Quamobrem si, & assumes ⅓ quadrati vel rectanguli HN circa diametrum, erit tota series rectangulorum deficientium proportione Arithmetica ad seriem multiplicem rectangulorum non deficientium, vt rectangulum QB sub latere XB maximi, & minimi XQ vna cum tertia parte rectanguli HN ad integrum XN, quia series deficiens ad integra se habet quoque, vt 1. ad 1., & vt 1. ad 2. & tandem, vt 2. ad 3. ex 18. h.

COROLLARIUM.

HInc etiam educes: Totam seriem rectangulorum arithmeticè deficientium esse æquale rectangulo ex latere totæ seriei integræ subtēdente XZ, & latere MP minimi rectanguli, vnà cum tertia parte rectanguli differentiæ crurum PO. Nam tota series rectangulorum minorum non deficientium finiat in PM; vnde rectangulum PX erit æquale toti seriei minori rectangulorum non deficientium. Differentia itaque est inter seriem maiorum, & minorum non decrescentem rectangulum PZ; quod est dimidium omnium complementorum; siquidem PZ æquat complementum PA, & ideo est dimidium omnium complementorū hinc, & inde deficientium cum ipsa sint dimidium integrorum ex 18. h. Cum itaque XP æquet omnia rectangula minora At AP, vel PZ omnia cōplementa deficiētia dimidio sui, etiam rectangulū PO, æquabit omnia quadrata residua circa diametrum, vt HN non deficientia.

Si ergo accipiatur rectangulum XR habebimus totam seriem rectangulorum minorum in rectangulo XP, & in residuo medietatem omnium complementorum; si ergo insuper assumamus tertiam partem PO rectanguli consequemur omnia rectangula deficientia HN, LC, & VE, & cæt. Itaque tota series rectangulorum deficientium sine meta, sed ad sui vltimam diminutionem non peruenientium erit æqualis in sua planitie rectangulo sub rectanguli primi latere ZR, vel XQ & sub latere omniū rectangulorū non deficientiū XZ, & tertia parte rectanguli differentiæ OR crurum ZR, & OZ, & differentiæ MZ laterum XM, & MZ. Si verò consideres ea, vt deficientia quidem; sed non quoad omnem possibilem extenuationem singulorum nunc omnia rectāgula deficientia excluso maximo erunt æqualia rectangulo XR, & minus, quam tertiæ parti rectanguli PO; si verò includas maximum, erunt æqualia rectangulo XR, & magis, quam tertiæ parti rectanguli PO. Ratio est, quia excluso AB rectangulū PZ æquat omnia minima nō deficientia: at PZ omnia complementa prò medietate sui deficientia; cætera verò quadrata deficientia quoad vtrumque latus excluso HN sunt minus, quam tertia pars omnium quadratorum eiusdem numeri non deficientium, quam multitudinem æquat rectangulum PO, si verò addas maximum XN iam deficientia complementa in complemento AH sunt maiora rectangulo XR, & quadrato HN, quod additum rectangulis LC, VE, & cæt. faciet magis, quam ⅓ rectanguli PO.

TRACTATVS XXIX.

De Geodæsia Rectilineorum Planorum.

GEodæsia est pars Geometriæ admodum insignis, & in vsibus humanis necessaria, quam apud Clauium lib. 6. Pediasimus definit esse Partitionem areę inter diuersas personas; Verùm in suo Lexico Hyeronimus Vitali eruditissimus describit Geodęsiam esse corporum quoq; dimensionem per sensibiles mensuras. Sed quidquid sit de significatione nominis; nos eam vsurpamus pro ea parte Geometriæ, quæ superficies rectilineas considerat, siue eas transformando, siue partiendo, siue mensurando; siquidem, si altera harum considerationum alteri desit, mancha euadit, & imperfecta.

EXPENSIO I.

De figurarum planarum rectilinearum transformatione in æquales superficies.

SVperficies rectilineæ planæ facilem inuicem subeunt transformationem, & non multo labore, licet, vel angulis, vel lateribus, tum quantitate, tum numero discrepantes, seruata semper æquali capacitate in alias secedunt.

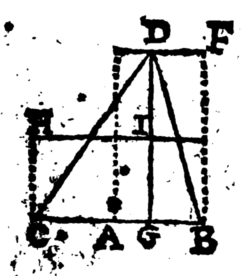
PROBL. I. PROPOS. I.

Aream cuiuslibet trianguli in parallelogrammi aream transformare.

HOc efficitur ducendo perpendicularem ad basim. Nam si ex dimidiata basi CB, quæ est AB, & tota perpendiculari AD fiat rectangulum, vt est AF, hoc erit triangulo CDB æquales.

Probatur ex 41 prop. Elem. Nam ibi hoc docetur. Vnde non debemus repetere.

Id etiam operi mandatur diuidendo perpendicularem bifariam, & constituendo rectangulum BH, ex dimidiata perpendiculari, & tota basi, hoc enim erit æquale triangulo CDB.



Probatur. Nam DGB triangulum ex 41 primi est æquale parallelogrammo IB super dimidiatam basim GD ad eandem altitudinem effectę; Sic est triangulum CGD æquale parallelogrammo GH; Ergo totum triangulum CDB toti parallelogrammo HB erit æquale.

COROLLARIVM.

HInc est aream similiter parallelogrammi posse in triangulum transfundi, si super duplam basim ad eandem altitudinem triangulum fiat.

PROBL. II. PROPOS. II.

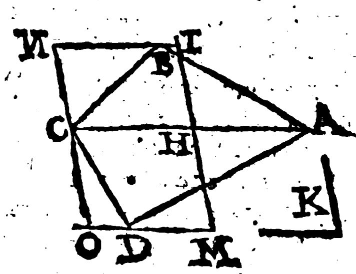
Aream cuiuslibet trianguli, vel parallelogrammi in aream alterius trianguli, seu parallelogrammi transformare, quæ habeant angulum datum, & latus datum.

VIde propos. 43. lib. I. Element.

PROBL. III. PROPOS. III.

Dato quadrilatero æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

HÆc operatio facilior est, quam ex Eucl. prop.



43. I.I. Detur ABCD quadrilaterum & ducatur diagonalis AC; detrunceturque bifariam in H, & ducatur MI faciens cum ipsa diagonali apud H angulum æqualem angulo K. & per verticem C ducatur parallela ON ipsi IM, sicut, & diagonali à vertice D, & B parallelæ IN, & MO; eritque parallelogrammum IMNO æquale quadrilatero ABCD.

Probatur. Nam parallelogrammum HO est æquale triangulo ACD ex dictis in propos. I. sic & parallelogrammum HN est æquale triangulo ABC ex eadem propos. quod sint inter easdem parallelas, & ideo ad eandem altitudinem, & super dimidiatam basim AC. Ergo & totum quadrilaterum ABCD toti parallelogrammo IMNO erit æquale.

PROBL. IV. PROPOS. IV.

Dato parallelogrammo supra datam rectam æquale parallegrammum constituere in dato angulo rectilineo.

SIt datum parallelogrammum rectãgulũ, quod cõtineatur rectis AB, & BC, dataque recta BD. Latera itaque parallelogrammi dati in vnam rectam redigantur, quæ sit AC, & à puncto B trahatur recta data DB, faciens cum AB, quemcumque angulum: Triumque punctorum ADC reperiatur centrum ex prop. II. lib. 3. Elem. & fiat circulus per ea transiens ADC: deinde prolongetur DB in F, nam dico DB, & BF æquale rectangulum constituere ipsi ex BA, & BC constituto.

Probatur ex propos. 35. lib. 3. Eucl. Nam si in circulo duæ rectæ se mutuò secuerint, vt DF, & AC rectangulum comprehensum sub segmentis vnius AB, & BC æquale est rectangulo comprehenso sub segmentis alterius qualia sunt DB, & BF.

Si verò ex propos. 3. huic rectangulo constituamus æquale parallelogrammum in angulo dato habebimus id, quod propos. desiderat.

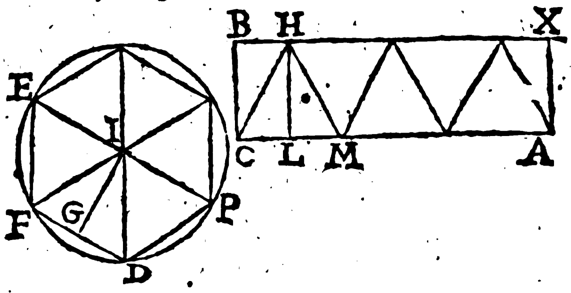
Idem quoque assequemur si tribus datis rectis ex 14. lib. 6. inueniatur quarta proportionalis, ita vt DB data sit prima. Nam ex prop. 18. erit rectangulum sub prima DB, & sub quarta inueta æquale rectangulo sub duabus medijs comprehenso.

PROBL. V. PROPOS. V.

Aream cuiuslibet figuræ regularis in æquale parallelogrammum redigere, seu etiam triangulum.

FIat parallelogrammum AB quod habeat AC æquale ambitui dimidio dati hexagoni V. g. cuius centrum I; aliud verò latus æquale perpendiculari IG in aliquod latus figuræ regularis cadente à centro I. Nam dico hoc parallelogrammum rectangulum æquale esse areæ hexagoni.

Probatur. Nam comprehendet tot triangula æqualia, quot habet figura regularis: Latus enim AC rectanguli, cum sit dimidium ambitus PDFE substernet bases tres, vt MC, vnde dimidia LC erit æqualis FG dimidiæ ED æqualis basibus tribus PD, & eæt. linea vero LH perpendicularis est æqualis perpendiculari IG; Quare ex I. h. triangulum LHC est æquale triangulo IGF: Horum verò triangulorum duodecim habet parallelogrammum, sic duodecim hexagonũ. Vnde cũ constent æqualibus numero, areaq; triangulis erunt æqualia.



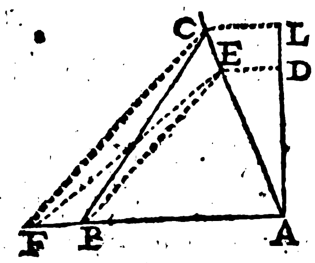
Si verò libeat habere triangulum æquale figuræ datæ dupletur basis AC, & fiat æqualis toti ambitui, & super eam fiat quodcumque triangulum contentum parallelis AC, & BX. Nam cùm hoc ex I. propos. sit æquale rectangulo AB, erit etiam æquale hexagono I.

PRORL. VI. PROPOS. VI.

Datum triangulum, vel parallelogrammum in aliud æquale, sed vel maioris, vel minoris altitudinis transformare. Sicut & in aliud maioris, vel minoris basis.

SIt triangulum ABC, & illud oporteat reducere ad minorem altitudinem AD, ducatur DE parallela AB, & ducatur EB ad angulum B, cui parallela à vertice C agatur CF, & deinde ducatur FE: Dico triangulum AEF altitudinis datæ esse æquale triangulo ACB.

Prob. autem. Quia ECB triangulum ablatum est æquale triangulo FBE, quod additur ipsi AEB, vtpote super eandem basim BE, & inter easdem parallelas EB, & CF. Vnde remanet adhuc æquale cum æquale sit, quod additur ei, quod aufertur.



Eodem modo poterit augeri in altitudinem: Nam si ponamus esse nobis exhibitum triangulum AEF, quod oporteat in altitudinem AL subleuare producatur AE, & ducatur parallela basi LC, & à puncto C, vbi secat latus AE ducatur ad F recta CF, cui à vertice dati trianguli E ducatur parallela EB, & vbi basim secat in B, ducatur BC. Nam dico hoc triangulum BCA in altitudinem AL subleuatum esse æquale triangulo exhibito AEF.

Probatur, vt antecedens praxis. Nec aliter maiori basi accommodabitur sit enim triangulum ACB, cui sit prolungãda basis vsq; ad F, coniungatur FC, & à pũcto C ducatur lineæ CF, & ei parallela EB, à puncto B, deinde ducatur EF. Nam triangulum AEF super maiorem basim AF est æquale triangulo ACB, vt supra ostensum est. Et eadem operatio erit de diminutione basis. Eadem quoq; operatio erit de parallelogrammo, vt patet, cum sit duplum trianguli.

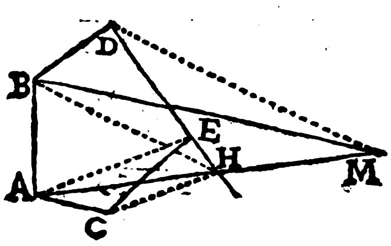
PROBL.

PROBL. VII. PROPOS. VII.

Dato rectilineo ad datum eius latus triangulum æquale constituere, seu parallelogrammum.

SIt datum rectilineum ABDEC, quod oporteat in triangulum transformare insistens super assignatum latus AB, è contra assignati lateris DE. Latus prolungetur ED in H, & ducta EA, ab angulo C, ducatur ei parallela CH. Deinde ducatur AH. Quoniam enim triangulum ECA est super eandem basim AE, & inter easdem parallelas CH, & AE erit æquale triangulo AHE, & ideo quinquāgulum erit transformatum in quadrangulum HABD necessarium ad operationem faciendam.

In quadrangulo ergo HABD ducatur diagonalis HB, & prolungato latere AH, ab angulo D ducatur DM parallela diagonali prædictæ HB & tandem ducatur MB, & erit factum triangulum AMB æquale, quinquāgulo ABCD super latus AB, quod vergit contra latus DE.



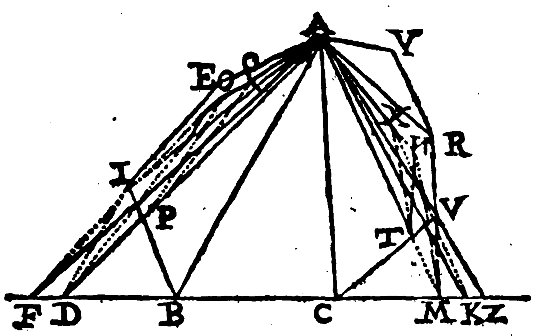
* probatur. Quia æquat quadrangulum HABD: siquidem spatium HAB est, tum triangulo, tum quadrilatero commune. Triangulum verò reliquum HMB trianguli AMB est ęquale triangulo HBD reliquo quadranguli; cùm super eandem basim HB existant, & in eandem basi parallelam MD terminent.

Sed quadrilaterum HABD est æquale quinquāgulo ECABD, vt dictum est; Ergo etiam triangulum AMB erit eidem æquale, quod triangulum ex dictis poterit conuerti in parallelogrammum habens latus AB, vt patet.

THEOR. VIII. PROPOS. VIII.

**Multilineum quodcumque in æquale triangulum, seu parallelogrammum super datum latus insistens transfundere.*

*SIt multilaterum quodcumque AEIBCVY, datūq; latus BC, super quod prolūgatum triangulū, & parallelogrāmū dato rectilineo æquale cōstituere oporteat. E regione electo angulo A ducatur AB, & AE, & lateri AB ducatur parallela ID ab angulo I: Deinde coniungatur DA. Nam triangulum ADB super eandē basim AB, & in eandē parallelā ID terminans erit æquale triangulo AIB. Transferatur triangulum IBA super rectam AD, & fit omninò ei æquale, & simile triangulum AOP. Deinde maioris basis DA fiat iuxta propos. 6. h. conseruando æqualitatem, & fit AQD, & à vertice Q ducta ad AD parallela QF, ducatur AF. Nam ob parallelismum, & eandem basim triangulum AFD erit triangulo AQD æquale, quod est triangulo FOA, & consequenter triangulo IBA, quare triangulo IBA erit æquale quoque AFD; quapropter portio multilateri AEIB est æqualis triangulo FAD, & DAB simul; idest toti FAB: Idem erit efficiendum de alia portione.



Nam ducta ad latus AC parallela VM ab angulo V, transformabitur triangulum AVC in triangulum ACM ducta AM. Deinde super AM transferetur triangulum ARV, & erit ANT, quod extendetur ad occupandam totam basim AM, & erit AXM. Deinde ab X angulo ducta XK parallela ad basim AM, vbi secat in K ducatur AK, eritque triangulum AMK æquale triangulo AXM; quod æquatur triangulo ANT, & æquali, & simili triangulo ARV. Idem fiet de triangulo AYR. transferetur enim super basim AK, faciendo ab A triangulum ei simile, & æquale. Deinde extendetur ad occupandam totam basim AK: & tandem in triangulum AKZ transformabitur. Iamque habebimus triangulum FAZ æquale multilatero AEBCVY, quod omnia triangula, quibus componitur omnibus triangulis, in quibus multilaterum distributum est, sint æqualia. Vnde iuxta regulas traditas poterit conuerti in ęquale parallelogrammum rectangulum.

PROBL. IX. PROPOS. IX.

Dato rectangulo æquale quadratum constituere.

HOc docuimus cum Euclid. propos. 14. lib. 2. cum rectilineum priùs in rectangulum. Deinde rectangulum in quadratum æquale transmutauimus.

Potest etiam fieri inueniēdo inter duo latera rectanguli mediam proportionalem ex prop. 13. lib. 6. Nam quadratum huius mediæ est æquale rectangulo ab extremis contento ex propos. 17. lib. 6.

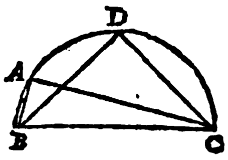
PROBL. X. PROPOS. X.

Duobus quadratis inuicem inæqualibus simul sumptis inuenire duo alia quadrata simul sumpta æqualia, quæ etiam inuicem æquentur.

COnstituatur rectangulum ex duobus lateribus quadratorum inuicem inæqualium, ita vt duo latera maioris alterum, alterum minoris angulum rectum claudant, vt AB, & AC. Deinde nectantur extrema puncta basis BC: super verò basim BC cōstituatur āgulus rectus duobus cruribus æqualibus clausus, quod fiet diuidēdo BC bifariam

fariam, & facto ibi centro ducendo semi circulum BADC,& diuidendo bifariã in D,trahendoq; latera, & crura BD, & DC. Nam cum peripherias æquales BD,& DC subtendant erunt æqualia: angulus verò, vtpote in semicirculo erit rectus ex 31. lib. 3.

Dico itaque quod quadrata laterum BD, & BC sunt æqualia duobus quadratis ex lateribus BA, & AC, nam sunt æqualia quadrato basis BC ex propos. 2. lib. 11. ergo, & inter se erunt æqualia.

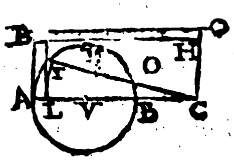


Possunt autem etiam inueniri inæqualia, vt per se patet, quod, & de rectangulis similibus valet ex 32. lib. 6.

PROBL. XI. PROPOS. XI.

Rectangulo dato alia rectangula reperire ei æqualia sub diuersa laterum quantitate.

SIt rectangulum comprehensum duobus rectis AC, & BC, velltque aliquis aliud rectangulum paulò breuioris lateris efficere iuxta mensurã datã; hæc super latus AC mẽsuretur, & sit OL, & diuiso bifariam segmento AB in V centro V ducatur circulus. Deinde centro C interuallo CI ducatur

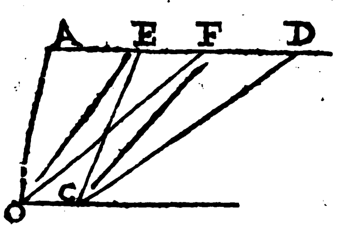


portio circuli LI, & vbi secat in L ducatur IC. Nam OC erit aliud latus, quod claudet rectangulum LO rectangulo CB æquale. Probatur ex Cor. 1. propos. 36. lib. 3. elem. hæc duo rectangula AH, ex AC, BC, & LO ex IC, co esse æqualia, sicut, & tangens circulum erit quadratum prędictis rectangulis æquale, si ex puncto C illum contingat.

THEOR. I. PROPOS. XII.

Trapezia inter easdem parallelas constituta inter se sunt æqualia, dummodo sit æqualis altera alteri correspondenti eorum basis.

SIt trapezium OACE, & trapezium OFCD quorum bases AE, FD æquales sint, & O B eadem, vel æqualis. Dico hæc trapezia esse æqualia.



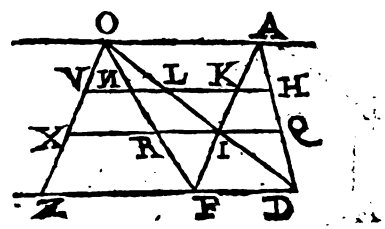
Probatur. Nam ex Cor. prop. 40. lib. 1. triangula habentia eandem basim, & inter easdem parallelas inter se sunt æqualia: quare triangula OFC, & OCE erunt ęqualia. Porrò triangula AEO, & FCD ob bases æquales AE, & FD erunt æqualia. Ergo trapezia quoque æqualibus triangulis constantia erunt æqualia.

THEOR. II. PROPOS. XIII.

Triangula inter parallelas constituta, & basi eadem, si secentur parallelis lineis segmenta sunt æqualia.

TRiangula DAF, & DOF sint inter parallelas AO, & DF constituta super eandem basim DF, & secentur parallela aliqua, vt HN. Dico *illa segmenta esse æqualia*.

Probatur. Triangula DAF, & DFO sunt æqualia ex propos. 40. lib. 1. Element. Propptereaque ablata communi parte DIF triangula DIA, & FIO remanebunt ęqualia. Quare erit OI ad ID, vt AI ad IF ex prop. 11. lib. 6. Ideoque erit quoque *componendo* IO ad OD, vt AI ad AF; sed vt AI ad AF; ita se refert QI ad DF, & vt OI ad OD, sic IR ad DF. Quare QI ad DF, & IR ad DF eandem dicent proportionem OI ad OD, vel AI ad AF. Et ideo, cùm eidem DF eandem dicant proportionem duæ QI, & IR erunt ex propos. 9. l. 5. æquales.



In triangulo autem AIO, vt LO ad OI, sic AK ad KI. Est autem LO ad OI, sic LN ad IR, & vt AK ad AI, sic HK ad QI. Quare erit eadem proportio LN ad IR, quam HK ad QI: sed QI, & IR ostensæ sunt æquales; Ergo etiam HK, & LN ex 12. l. 5. Vnde patet, quod sint super ęquales bases triangula HAK, & LON, scilicet HK, & LN: vnde erunt ęqualia, sic triangula QAI, & ROI cũ sint super æquales bases IQ, IR, & inter parallelas erunt ęqualia. Vnde etiam residua trapezia IHKQ, & ILNQ erunt æqualia. Cùm ab æqualibus triangulis sint æqualium triangulorum residua.

COROLLARIVM.

HInc obiter patet triangula æqualis altitudinis, atque trapezia: ne dum consequi bases æquales, sed & omnes basibus ductas parallelas esse inuicem æquales: dummodo ad eandem altitudinem sint deductæ, quod etiam verificatur ne dum in triangulis eandem basem habentibus, sed, & ęqualem, vt per se patet.

THEOR. III. PROPOS. XIV.

Trapezia inter lineas proportionales constituta, & eiusdem altitudinis se habent inuicem, vt bases.

SInt in præced. fig. duo triangula æqualis altitudinis DAF, & DOZ, hęc ex 1. lib. 6. se habebunt ad inuicem, vt bases DF, ad DZ. Rursus triangula QAI, & IOX se habent ad inuicem, vt bases QI ad IX: nimirum DF ad DZ: Quadere cum sit totum DAF ad totum DOZ, vt ablatum QAI ab abla-

tum

tum FOX, etiam reliquum trapezium DQIF erit ad reliquum trapezium DIXZ, vt totum DAF ad totum DOZ, scilicet, vt basis DF ad basim DZ, vel vt QI ad IX.

EXPENSIO II.

De casu perpendicularis, & ipsius quantitate.

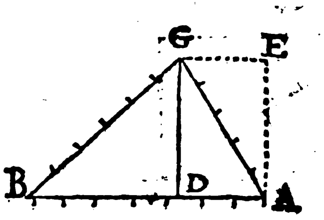
DOcuimus mediantibus tabulis quodlibet ex triangulis in duo triangula rectangula reducere in tr. 27. Trigonometrico, nunc sine tabulis idem docere oportet, & primo, in quod punctum subiectum baseos cadat perpendicularis, & deinde quantitatem ipsius perpendicularis, cùm id sit necessarium ad areas planas mensurandas per numeros, & maximè triangulorum.

PROBL. I. PROPOS. XV.

Cæsum perpendicularis ex notis lateribus cùm cadit intra triangulum inuenire.

SIt triangulum AGB, in quo angulus G sit maior vtrolibet apud A aut apud B, habeamusque crura nota AB 7. planorum AG quinque & GB palmorum 6. Multiplicando singula latera in se fiant eorum quadrata, vt docuimus def. 1. Tract. 7. lib. 8. Eucl. nimirum lateris AB 49. cruris AG 25. & cruris GB 36. Adde deinde duo quadrata simul V. g. 25. & 49. fiet 74 subduc quadratum residuum 36. erunt post subtractionem 38. partire bifariam, & erunt 19. quem numerum partieris per numerum basis 7. & dabunt 2. & $\frac{5}{7}$ nimirum distantiam AD ab A, & punctum D, in quod à vertice G cadit perpendicularis.

Probatur nam ex prop. 13. lib. 2. quadratum BG minus est quadratis rectarum AG, & AB rectangulo bis comprehenso sub BA, & AD, quod cum ita sit sunt vnita, simul quadrata cruris AG 25. & basis AB 49. partium, & summa fuit 74. & subductum est quadratum recte GB 36. & residuum fuit 38. nimirum duo rectangula singula contenta sub AB, & AD, vt ergo remaneat vnū tantum rectangulum residuum 38. diuisum est bifariam, & remansit 19. & tandem, vt habeatur crus AD diuisum est 19. per latus AB 7. partium, vnde reliquum latus remansit, & segmentum, in quod cadit perpendicularis, partium 2 & $\frac{5}{7}$.

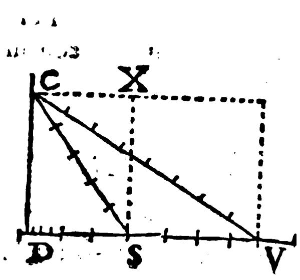


At si placeat reperire casum BD. Simul BA 49. & AG 36. quadrata vnito, vt fiat summa 85. subducto altero quadrato 25. residuum erit 60. pro duobus rectangulis sub AB, & BD contentis, diuisoque eo numero bifariam erit 30. vnum rectangulum, quod diuisum per crus AB 7. partium quotiens erit crus DB 4. partium, & $\frac{2}{7}$.

PROBL. II. PROP. XVI.

Casum perpendicularis ex notis cruribus cùm cadit extra triangulum reperire.

SI ergo sciamus perpendicularem extra triangulum cadere, eo quod in triangulo VSC angulus ad S sit obtusus, & V acutus, tunc vtemur propos. 12. lib. 2. Elem. in qua demonstratur cruris VC quadratum maius esse quadratis rectarum VS, & SC rectangulo bis comprehenso sub VS, & SC, ideo quadratum 25. cruris SC, & 16. quadratū cruris VS in vnā summam redigantur, subducaturque à quadrato cruris VC 64. & erunt residuus numerus 23. duo rectangula contenta sub VS, & SD bifarientur, vt sint vnicum tantùm rectangulum erit 11 $\frac{1}{2}$, quod diuisum per latus VS 4. dabit 2. & $\frac{7}{8}$: pro latere SD.



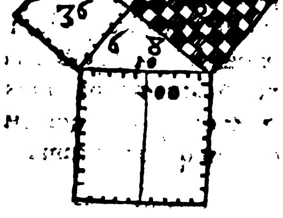
At si nesciamus, an cadat intra, vel extra, sed solùm nouerimus VC crus maximum, & latus SV, & SC; ideoque quia quadratum cruris SC, minus est quadratis rectarum VS, & VC rectangulo bis comprehenso sub VS, & segmentum ab V vsque ad illud punctum, in quod cadit perpendicularis ex 13 l. 2. Eucl. nondum notum, ideo quadratum SC 25. subduco à summa quadratorum reliquorum VS, & VC quadratorum 80. & residuum erit 55. duo nimirum rectangula: diuidatur, itaque numerus 55. per medium, vt vnicum rectangulum 27. $\frac{1}{2}$, quod diuidatur per latus VS 4. & prodibit alterum latus notum VD partium 6. $\frac{7}{8}$.

PROBL. III. PROPOS. XVII.

Ex notis cruribus duobus rectanguli alterum crus inuenire.

QVoniam per deductionem perpendicularis diuisimus triangulum quodlibet in duo rectangula, quorum habemus nota duo crura, vt in fig. anteced. VD, & VC, & possumus cognoscere tertium crus, nempe perpendicularem CD.

Quia quadratum basis subtensæ angulo recto ex 11. lib. 2. æquale est quadratis laterum: multiplicabimus palmos basis V. g. 10. palm. & fient 100. deinde lateris noti 8. palmorum, & fiet 64. quibus deductis à quadrato basis 100. erunt residua quadrata 36. à quibus extracta radix quadrata dabit 6. pro altero latere.



Sic si iam innotuerint ambo latera angulum rectum claudentia aliquo modo, & nesciamus basim; eadem ratione poterimus inuenire, nam quia quadratum basis angulo recto subtensæ æquale est quadratis duobus laterum, si 6. multiplicetur in se,

& fiat quadratũ 36. & 8. & fiat quadratum 64. iuncta simul dabunt quadratum 100. palmorum à quo educta radix quadrata dabit 10. pro longitudine basis angulo recto subtensæ, vt vides.

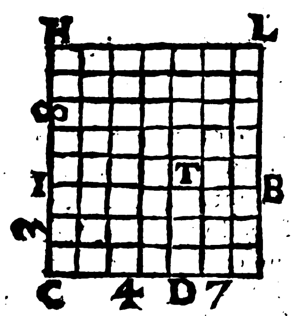
Si verò latera obtineant numeros fractos, vt in præc. latus VD est 6. $\frac{7}{8}$ omnes tũ huius, tum alterius lateris partes in easdẽ minutias proijci debet, & sic latus VC erit par. 64. & quadratũ 4096. (nam quilibet palmus diuisus supponitur in 8. partes cumque sint palmi 8. dant 64. partes,) & latus VD erit partium octauarum 48. & addita minutia $\frac{7}{8}$ erit 55. & quadratum 4025. quo à priori deducto prodibit quadratum perpendicularis CD partium 1071. à quo educta radix quadrata dabit partes 32. $\frac{1}{3}$, & paulò ampliùs pro perpendiculari DC. Perpendicularis verò DG alterius trianguli eodem computo facto erit par. 4. & $\frac{1}{7}$.

EXPENSIO III.

De areis triangulorum, omniumque aliarum figurarum rectilinearum mensurandis.

Linea recta mensuratur, cùm tot rectas lineas continet æquales. Et non alia ratione superficies mensuratur, cum continet tot minores superficies inuicem æquales: sed quia non omnes superficies spatium implent, & superficiem omninò occupant, vt circuli, ideo adhibenda fuit mensura, quę superficiem mensurandam multiplicata omninò posset occupare, & eam totam operire, ne quid extra mensuram remaneret. Hæc autem fuit rectangulum, quod multiplicatum potest omnes figuras rectangulas, rectilineas omninò tegere, & occupare. Quà de re alias figuras, vt mensurationi subijcerentur oportuit ad rectangulas reducere, quod hic agimus reducendo triangula ad rectangulas superficies, vt certę mensurationi numeris exprimibili subiaceant.

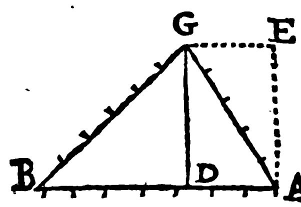
In confessis est autem rectanguli, cuius sint nota latera, etiam areã statim prodire, ex multiplicatione laterum inuicem; sic si sit notum latus HL esse 7. palmorum, & HC 8. palmorum ex multiplicatione mutua fit area 56. palmorum quadratorum, vt diximus l. 2. p. 3. Cor. & sic si area sit nota rectanguli 56. palmorum, & latus alterum 7. statim innotescet per diuisionẽ alterum latus, & sic, si 56. diuidatur per 7. fiunt 8. palmi pro latere HC. In quadratis verò idem assequemur per extractionem radicis quadratę; sic, si à numero 25. educatur radix quadrata prodibit latus palmorum 5. quod & verificatur de partibus, vt si assumantur partes CI 3. & CD 4. laterum CH & HL, fiet area CT 12. palmorum quadratorum.



PROBL. I. PROPOS. XVIII.

Aream cuiuslibet trianguli inuenire, cùm perpendicularis intra triangulum cadit.

Svpponimus hic omnia latera trianguli nota, vel quod mẽsurari potuerint, vel quod ex doctrina sinuum, secantium, atque tangentium potuerint inueniri, ideoque ex Expens. præced. notam quoque perpendicularem, & punctum, in quod cadit, & consequenter redactum triangulum, vel ad vnum, vel ad duo triangula rectangula, & ideo quoq; notã esse altitudine, eorũ quam perpendicularis dimetitur, & quia ex propos. 40. lib. 1. parallelogrammum eiusdem basis, & eiusdem altitudinis est duplum trianguli, ideo ex crure AD 2. & $\frac{5}{7}$,

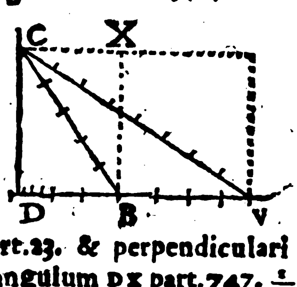


vel 19. partium, & perpendiculari DG 4. & $\frac{1}{7}$, vel 29. quæ crura angulum rectum ambiunt, fiat rectangulum AGDB 551. multiplicatione mutua quadratorum paruorum: nam medietas huius rectanguli 275 $\frac{1}{2}$ erit area AGD, idem fiat de alio rectangulo GDB; nam multiplicato latere DB part. 30. cum latere DG part. 29. prodibit rectangulum 870. cuius medietas erit 435. area trianguli DGB.

PROBL. II. PROPOS. XIX.

Aream triangulorum, cùm perpendicularis extra triangulum cadit inuenire.

Ex noto latere AD part. 6. & $\frac{7}{8}$, idest minutiarum 55. & perpendiculari CD 32 $\frac{1}{2}$ fiat rectangulum VC mutua numerorum multiplicatione quadratis paruis constans 1787 $\frac{1}{2}$, quorum medietas erit triangulum VCD 893 $\frac{3}{4}$. Rursus ex segmento BD part. 23. & perpendiculari DC part. 32. $\frac{1}{2}$, fiat rectangulum DX part. 747. $\frac{1}{2}$, & medietas 373. $\frac{3}{4}$ erit triangulum BCD, quod auferendum est à triangulo VCD part. 893. $\frac{3}{4}$, & residuum erit area trianguli BVC part. 520.

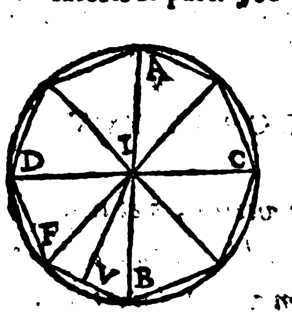


PROBL. III. PROPOS. XX.

Aream cuiuscumque figuræ regularis inuenire.

Sit octogonum CADB, cuius latus BF iam notum sit ex ijs, quæ de lineis circulo inscriptis diximus,

mus, vel ex tabulis finuum 765. radio IF 1000. partium præsupposito. Itaque poterit diuidi, & resolui tota figura in 8 triangula isoscela, & hæc in 16. triangula rectangula ducta perpendiculari VI ad mediū FV lateris FB octogoni, cumq; habeas notum casum perpendicularis, nempe ad medietatem lateris BF part. 382 $\frac{4}{5}$, & crus IF 1000. inuenies ex prop. 17. perpẽdicularem VI partium 924. hincque efficies rectangulum 353430. cuius medietas erit 176715. triangulum IVF, & quia 16. triangula totam figuram complent, ideo si multiplices prædictum numerum per 16. totam aream octogoni obtinebis part. 1827440. Idemque efficies in omnibus alijs figuris regularibus, omnes enim in triangula æquicrura, & deinde in rectangula distribui poterunt, ex quorum notis areis tota area figuræ in palàm erit.

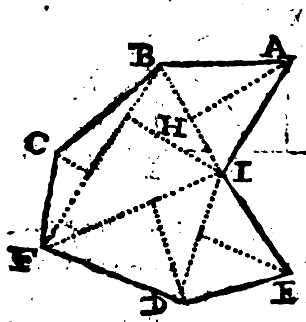


PROBL. IV. PROPOS. XXI.

Aream figuræ rectilineæ irregularis non triangularis inuenire.

RESolues totam figuram in tot triangula, eaque in rectangula transformabis, rectangulorumque singulorum exquires aream, quas deinde areas in vnam summam colliges, & illa erit area figuræ irregularis.

V. g. sit data figura rectilinea irregularis ABCFDEI. Ductis lineis BI, & IF, & ID, deinde BF erit redacta figura in tot triangula, de quorum lateribus præsuppono cognitionem te habere, vel mensura, vel ex tabulis. De singulis itaque triangulis ex prop. 15. vel 16. h. casum perpẽdicularis, vt HA & hinc ex pr. 18. vel 19. h. aream HBA, & sic ages de area IHB, & de alijs, quas omnes areas, vt inueneris, in vnam summam rediges, totamque aream totius figuræ irregularis propositæ consequeris.



PROBL. V. PROP. XXII.

Aream figuræ tum regularis rectilineæ, tum irregularis geometricæ inuenire.

ID exequeris, si eam redigas in quadratum æquale, nam illius quadrati area erit, & figuræ propositæ, vt autem id fiat, ostendemus infra cùm de figurarum transformatione agemus.

EXPENSIO IV.

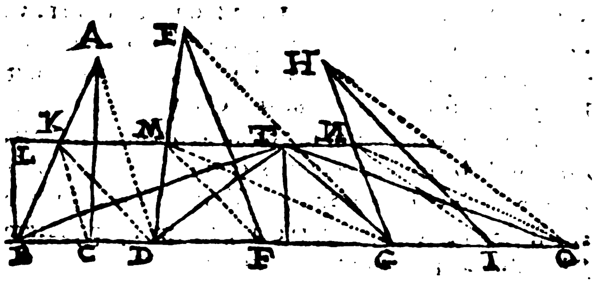
De augmento, & partitione trianguli.

DVplici modo qualibet fig. diuidi potest, vel ex pũcto in eius latere, vel in medio dato in triangula, vel per parallelas vni lateri dato, in trapezia, vel in quid simile, licet enim possit diuidi etiam ex puncto, extra dato, iste tamen modus diuidendi conuenit triangulo, conuenit etiam parallelogrammo, sed vniuersalis non est. Figuræ autem diuidendæ, vel augendæ, vel sunt multilateræ, vel sunt triangula, vel sunt parallelogramma, sed vt à facilioribus exordiamus, incipiemus à triangulis.

PROBL. I. PROPOS. XXIII.

Triangulum datæ altitudinis ex multis triangulis diuersæ altitudinis coagmentatum construere.

SIt triangulum BAC, DEF, & GHI, quæ in triangulum altitudinis BL reducenda sint. Ducta BI indefinita, & huic BL perpendiculari; triangulum BAC redigatur ad triangulum BKD datæ altitudinis ex prædictis de transform. fig pr. 6. h. apud quem super eandem lineã constituatur triangulum DEF, & redigatur in triangulum æquale eiusdem altitudinis DMG, & à puncto G erigatur

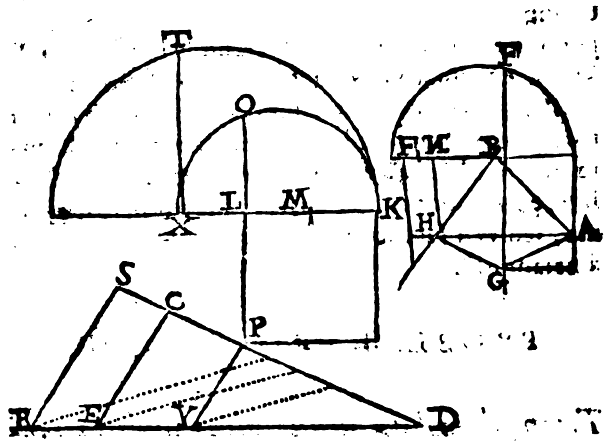


tertium triangulum GHI, & redigatur in triangulũ eiusdem altitudinis GNO. Ductis deinde rectis BT, DT, TG, & TO erunt tria triangula tribus, ob basim eandẽ, & æqualẽ altitudinẽ, æqualia nempe BDT triangulo BKD, & ideo quoque triangulo æquali ex constru. BAC: triangulũ DTG item est æquale triang. DMG, & ideo triangulo DEF: at triangulum GTO triangulo GNO, & consequenter triangulo GHI. Habemus itaque triangulum BTO coagmentatum ex tribus BAC, DEF, & GHI.

PROBL. II. PROPOS. XXIV.

Triangulo datam partem addere, vel auferre eadem figura manente.

SIt primo data pars, nempe area æqualis rhombo ABGH à triangulo, quod debet esse maius, GDE auferenda. Triangulo CBD fiat æquale quadratum PK, priùs *conuertendo* in rectangulum; inde in quadratum ex propos. 14. lib. 2. Elem. idemque fiat de rhombo ABGH, & sit quadratũ ex AF. Deinde de duobus lateribus quadratorum KL, & BF inueniat tertia proportionalis BN, quæ transferatur in latus KL, & fit LM, interq; residuũ KM, & totũ latus KL media proportionalis inueniatur LO. Inueniatusque deinde rectis KL, & LO, & DE lateri trianguli quarta proportionalis DV, ita quòd sit, vt KL ad LO ita DE ad CV, & à puncto V ducatur parallela lateri CE. Dico *triangulo* CED *ablatum esse trapezium* EP *Rhombo* ABGH *æquale*.



Probatur triangulum DEC ad triangulum DVP duplicatam habet laterum rationem ex 19. sexti, nempe lateris DE ad latus DV, quæ ex constructione eadẽ proportio est, quę reperitur inter KL, & LO; At quia KL, & KM sunt cõtinuè proportionales ex effect. quare eadem quoq; proportione respiciet KL rectam KM, qua triangulum DCE alterum minus DPV. Et per *conuersionem rationis*, ita erit quoque triangulum DEC ad Trapezium EP, quo superat triangulum DPV, vt KL ad LM, quo superat lineam KM. Fecimus autem LM tertiam proportionalem inter duo latera LK, & BF quadratorum. Vnde ita erit quadratum FK ad quadratum BF, vt KL ad LM; & ideo erit triangulum CED ad trapezium EP, vt sibi ęquale FK ad quadratum BF, idest Rhombum sibi æquale ABGH. Cum ergo triangulum ECD ad trapezium EP, & ad Rhombum ABGH, eandem habeant rationem ex 9. quinti, erunt inuicem æquales Rhombus, & Trapezium. Quare abstulimus à triangulo DCE partem EP ęqualem Rhombo BAHG, quod promisimus.

Si verò sit addendum hoc idem fiet: nisi quod LM ipsa media proportionalis inter latera quadratorum KL, & BF adiungatur ipsi lateri maioris quadrati, vt fit tota KX, & inter hæc, & latus KL reperietur media proportionalis XT; deinde fiet, vt XT ad KX, ita ED ad aliud, & prodibit DR, proportionalis: Ducta verò RS parallela ad CE erit additum triangulo trapezium RC, quod cum ipso integrat triangulum RSD eiusdem rationis.

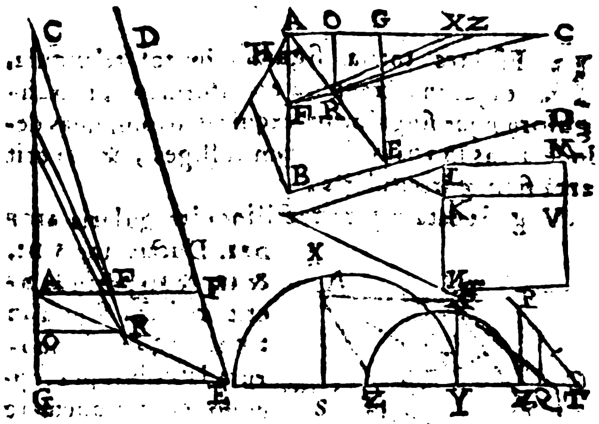
Probatur autem eadem ratione. Nam triangulum RSD est ad triangulum CED in duplicata ratione basis DR ad basim DE: hæc autem proportio basis ad basim, est eadem ex constr. inuent. quæ lineę XK ad mediam XT, quæ est duplicata eius, quam habet eadem KX ad latus quadrati XL (siquidem media proportionalis mediat XT) & ideo XK ad KL latus. habet eandem proportionem duplicatam, vt habet triangulum DRS ad DCE triangulum. Quare poterimus vti *diuisione rationis*, & dicere, quod triangulum CED sit ad trapezium SE, quo triangulum maius superet minus, vt LK latus ad residuum LX, quo linea KX superat LK. Hæc verò linea X, seu LM est ex tertia proportionalis lateris KL, & BF, ita quod sit, vt KL ad BF, ita BF ad LM: Vnde & quadrata dicent eandem proportionem ex Coro

prop. 21. lib. 6. & ita erit quadratum KF ad quadratum ex BF, vt KL ad LX, & ideo, vt triangulum CED æquale quadrato FK, ad trapezium RC. Cum itaque ad trapezium RC, & ad quadratum ex BF Rhombo equale eandem dicat proportionem triangulum CED ex 9. lib. 5. erunt æquales inuicem trapezium RC, & ex BF quadratum, & ideo etiam Rhombus BHAG. Vnde Rhombo equalis pars, triangulo addita est, quod est promissum.

PROBL. III. PROPOS. XXIV.

Triangulo, cui deficiat vertex, vel trapezio destinatam partem addere, vel auferre trahendo parallelam vni ex lateribus.

Sit triangulum ABC, vel Trapezium ABCD, cui parallelâ ad lateri AB sit auferenda pars equalis quadrato MN, quod fit minus isto triangulo ABC. Ducatur CF parallela lateri AD, quæ faciat triangulum AFC: Deinde cruri AB, & lateri AF inueniatur tertia proportionalis HA, vt vides factum in triangulo BHA: Duabus verò AB, HA, & lateri LN quadrati NM, inueniatur quarta proportionalis LK, ex quâ fiat rectangulum KM. Quod dico esse ad quadratum MN, vt triangulum AFC ad triangulum BACD: si esset perfectum.



Probatur. Nam ita est BACD triangulum imperfectum ad AFC triangulum, vt BA ad HA ex Cor. p. 21. l. 6. cum sit HA tertia proportionalis; vt autem BA ad AH, ita est NL ad LK ex effectione, & quia sunt eiusdem altitudinis, ex 1. lib. 6. Elem. ita est NM quadratum ad KM rectangulum, quod cum ita sit, si auferamus partem æqualem rectangulo KI à triangulo AFC ex documentis antecedentis propositionis, quæ sit OF ducta parallela RO lateri BA (inueniendo priùs quadratum ex ZT æquale rectangulo KM, & quadratum ex TP æquale triangulo AFC, & illis duobus lateribus inueniendo tertiã proportionalem TQ, & residui ex QT lateris TP, & ipsius TP mediã proportionalẽ XY, & tandem tribus TP, YX, & cruri CA quartam proportionalẽ CR.) Cum itaq; reperta sit trapezium RO æquale rectangulo MK reperiatur illi trapezium simile, similiterque positum, ad quod illud se habeat, vt rectangulum MK ad quadratum MN, quod fiet ducta diagonali AR vsque ad E, & ducta EG ex E parallela RO, vel BA. Eritque AE trapezium, pars ablata æqualis quadrato MN à triangulo imperfecto AECD.

Probatur. Nam, cùm sint inter parallelas consequenter erunt similia, similiterque posita, cùm & habeant latera proportionalia ex Coroll. prop. 23. lib. 6.

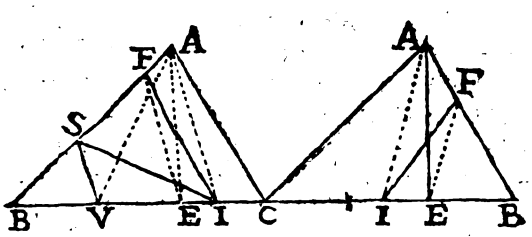
23. lib. 6. & fit AF ad FL, vt AB ad BE. Quare erit trapezium AB ad trapezium OF, vt AB ad AH, Sed ex effectione AB ad AH est, vt NL ad LK, & ideo ex 1. lib. 6. elem. vt MN quadratum ad rectangulum KM. Sed Trapezium OF est æquale rectangulo MK ex effectione. Ergo & trapezium AB erit æquale quadrato MN ex 11. lib. 5.

Idem prorsus agendum, si de additione sermo fit: nisi, quòd quadratum MN nō interest an sit minus: sed potest esse maius. Nam primò inuenitur tertia proportionalis AH duabus AB, & FA. Deinde tribus AB, AH, & LN, quarta LK, super quam, & LM formatur rectangulum MK. Et deinde ex documentis propositionis antecedentis vbi agitur de additione, addatur trapezium AB habens RO parallelum latus lineæ AF (primò inueniendo quadratum TZ rectangulo MK æquale, & quadratum TP triangulo AFC. Deinde reperiendo lateribus eorum tertiam proportionalem QT; duabus verò QT, & PT simul, & ipsi PT mediam proportionalem XS. Postea tribus XS soli PT, & TQ tamquā vna, & CF, quartam proportionalem CR, à quo puncto ducta RO dabit trapezium OF quæsitum) ducta autē AR vsq; ad DE ab E puncto ducatur parallela EG cruri AF, & dabit trapezium AB æquale quadrato MN, vt AB ex effectione est æquale rectangulo MK.

PROBL. IV. PROPOS. XXV.

Triangulum iuxta proportionem datam diuidere per lineas ab vno puncto in eius latere dato discedentes.

Sit triangulum ABC, quod oporteat diuidere secundùm proportionem datam V. g. in tres partes à puncto in eius latere dato. Diuidatur basis BC in tres partes, & tertia pars sit CE, vel ergò punctum datum cadit in E, ex qua diuidendum est triangulum, & ducta AE erit triangulum CAE, vel BAE in dextro triangulo tertia pars, cum sit vt basis ad basim, ita triangulum ad triangulum ex 1. lib. 6. Vel cadit in I, vel hinc, vel inde extra E punctum, & ducatur IA: cui parallela fiat FE; connectaturque IF. Dico trapezium CIAF in sinistro, vel triangulum FIB in dextro triangulo esse tertiam partem trianguli BAC dati.



Probatur. Quia spatium BFE est commune. Triangulum verò FAE est æquale triangulo FEI, cùm sit inter easdem parallelas, & super eandem basim FE: Ideo communi spatio BFE additum est addendo triangulum EFI quantum ablatum est, auferendo triangulum FAE. Propter hoc erit adhuc æquale BAE, & BFI: Sed BAE est tertia pars totius trianguli, cum se habeat ad totum triangulum, vt basis EB, quæ est tertia pars ad basim BC. Ergo, & triangulum BFI erit totius trianguli tertia pars.

Idem dicendū est de sinistro triangulo, vbi triangulum CIA est commune, & triangulum IAE est æquale triangulo AIF. Vnde trapezium AICF erit æquale triangulo CAE. Quod si alia tertia pars desideretur; Ipsi AI ad V tertia parte ducatur parallela VS, & ab S ad I ducatur recta; eritque triangulum ISB æquale triangulo VAB, consequenter tertia pars totius trianguli CAB siquidem PSV est spatium commune, & SAV, & SVI æqualia ob eandem basim, & parallelas SV, AI.

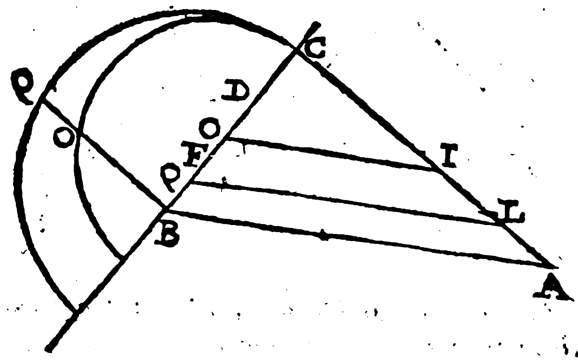
COROLLARIUM.

Quare deducitur, quòd si punctum I coniungatur cum vertice A, & lineæ connectenti IA ducantur parallelæ FE, & VS à partibus basis CE, & EV, & VB, & vbi secant latera angulum oppositum comprehendentia, ad ea puncta à puncto dato rectę ducantur, vt IS, IF, illæ diuident triangulum in tot partes, in quot basis diuisa est.

THEOR. V. PROPOS. XXVI.

Triangulum in partes assignatas secare lineis vni lateri parallelis.

Sit triangulum ABC diuidendum in tres partes per parellelas vni lateri V. g. lateri AB.



Diuidatur alterum latus CB in tres partes, & inter quaslibet, & totam V. g. inter CD, & CB inueniatur media proportionalis BO, & rursus inter CF, & CB media proportionalis BQ, transferanturque à puncto C in latus CB, & fint CO, & CQ; à punctisque O, & Q parallelæ ad basim AB ducantur. Nam illæ secabunt totum triangulum in tres partes ęquales.

Probatur. Nam ex Cor. prop. 21. lib. 6. elem. polygonum ad polygonum simile est in duplicata ratione laterum homologorum, & ideo erit, vt CB ad CD; ita triangulum CAB ad triangulum ICO; siquidem, & CB ad CD habet duplicatam rationem eius, quàm BC, ad CO ex effect. sed CB habet proportionem ad CD, quam 3. ad 1. ex constructione. Quare CAB triangulum totum ad ICO triangulum se habebit, vt 3. ad 1. vnde triangulum ICO erit $\frac{1}{3}$ trianguli CAB.

Idem dicas de triangulo CLQ. Nam triangulum totum CAB ad CLQ duplicatam laterum CB ad CQ possidet rationem, quam quoque possidet CB ad CF; quare cum CB tota sit ad CF vt 3. ad 2. Triangulum quoque ACB totum erit ad triangulum LCQ, vt 3, ad 2. & ideo LCQ erit $\frac{2}{3}$ trianguli CAB. Ablato ergo ICO, de quo ostendimus esse tertam partem totius, residuum LOQI trapezium, erit tertia pars totius CAB.

EXPEN-

EXPENSIO V.

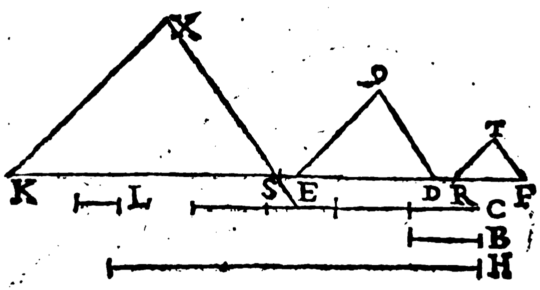
De quocumque rectilineo augendo, vel partiendo in plana rectilinea data similia.

TRiangula in diuersas partes diduximus modo vniuersaliùs est instituenda speculatio, & ad omnes figuras planas extendenda, ad quam aditum aperuit ipsa triangulorum multiplicata partitio.

THEOR. I. PROPOS. XXVII.

Dato rectilineo construere rectilineum simile, & similiter positum maius, aut minus secundùm proportionem datam.

SIt rectilineum datum DQE, quòd debeat fieri quadruplo maius: sed tali modo, vt simile sit id quod componitur rectilineo præcedenti dato, & similiter positum.



Sit linea C quadruplo maior, quam B: lateri verò DE rectilinei dati DQE inueniatur quarta proportionalis maior, vel minor, prout volumus augere, vel minuere, ita quod si augendum sit, vt B est ad C, ita fiat DE, ad H, si minuere, vt C ad B, ita fiat DE ad L: deinde inter istas reperiantur mediæ proportionales KS, vel FR. Nam Triangulum SXK ex 23. lib. 6. constitutum super SX simile similiterque positum, vt EQD erit triangulum quadruplo maius, & FTR constitutum super RF quadruplo minus.

Probatur. Quia ex Cor. pr. 21. l. 6. ita est triangulum super KS ad triungulum super DE, vt H ad DE; cum vtrobique fit duplicata proportio. Sed H est ad DE ex effectione, vt C ad B, nempe quadrupla. Ergo & H ad DE quadrupla erit. Vnde triangulum super SX ad triãgulum super DE quadruplam quoque habebit proportionem.

Idem asserendum de triangulo super RF, vt per se patet.

PROBL. II. PROPOS. XXVIII.

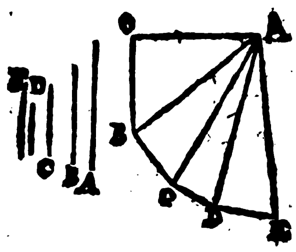
Datis pluribus rectilineis, ea in vnicum rectilineum conglobare:

SI rectilinea sint dissimilia, diuersæque positionis, ea redigantur in similia, similiterque posita triangula, quadrata, seu parallelogramma, vel ad quãcumq; aliam figuram eiusdem rationis, sed meliùs erit ad prædictas figuras facilitatis gratia.

Sint V. g. quinq; quadrata, quę super latera A, B, C, D, E sint cõstituta, vel quinq; parallelogrãma, vel triãgula quorũ latera homologa sint, sintq; primi latera A, & B angulũ rectũ O claudẽtia, subtẽdaturq; basis AB, iterumque super basim hanc BA erigatur ad rectos angulos C linea tertia à puncto, & coniungatur basi secundâ AC angulo recto B subtensa, Sicque fiat rursus de linea D erigendo eam perpendiculariter super CA, & coniungendo basi tertia DA, & tandem idem fiat de linea E.

Dico quadratum seu parallelogrammum ex EA simile, similiterque prædictis positum esse æquale omnibus alijs parallelogrammis similibus positis similiter, seu quadratis.

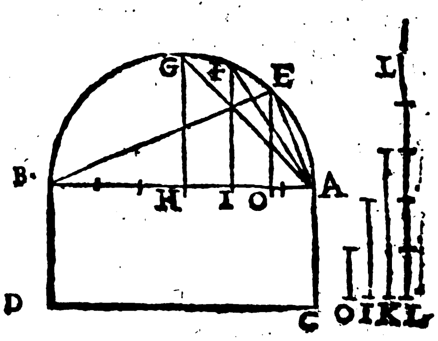
Probatur. Nam quoad quadrata ex 11. l. 2. elem. quoad parallelogrãma, seu alias figuras ex 32. lib. 6. rectilineum factum ex BA basi est æquale duobus similibus, & similiter positis ex BO, & OA factis: huic vero ex AB, & ex BC est æquale rectilineum CA similiter positum, & simile prædictis, huic autem CA, & alteri CD est æquale rectilineum ex AD, & tandem huic postremo, & rectilineo DE est æquale rectilineum EA simile, similiterque positum. vnde rectilineum ex EA est æquale omnibus similibus, & similiter positis, ex E, D, C, B, A, siquidẽ ęquat rectilineum ex DA, quæ omnia comprehendit excepto rectilineo ex DE, & ipsum rectilineum ex DE.



PROBL. III. PROPOS. XXIX.

* *Vnicum rectilineum in plura rectilinea partiri, secundùm proportionem datam. manente eadem figura, & positione.*

SIt rectilineum ABCD, ex quo oporteat fieri plura V. g. tria rectilinea similia, similiterque posita; sed iuxta proportionem, quam habent K, I, & O lineæ, ita quòd vnum sit $\frac{1}{2}$ aliud $\frac{1}{3}$ aliud $\frac{1}{6}$ totius rectanguli, & se excedant inuicem, vt lineę K, I, & O. Ex lineis K, & O componatur vnica linea L, diuidaturque ex 10. lib. 6. Elem. AB in easdem partes, ac L diuisa est, & sint HA similis lineę H linea AI similis lineę I, & AO similis lineę O. Quo facto à diuisionibus erigantur perpendiculares BD, & IF, & HG; & connectantur super AB facto semicirculo pũcta, quibus secatur rectis AE, & AF, & AG. Dico rectilinea tria similia, similiterque posita super tres AE, AF, & AG æquare rectilineum ABCD.

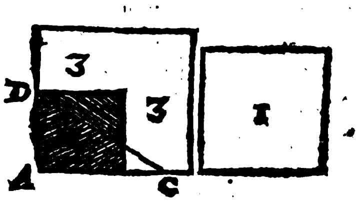


Probatur. Rectilineum ex AE ad illud ex EB habet

habet duplicatam suorum laterum proportionem nempe AE, & EB, sed hæc ob similitudinem triangulorum est eadem, quæ AO, ad BO. Vnde habebunt rectangula ex EA ad EB duplicatam proportionem AO ad OB. Sed hæc est duplicata proportionis AO ad OB, cum sint tres proportionales continuę AO, & OB, & OB ex propos. 16. lib. 6. Elem. Ergo AO ad OB erit eadem, ac rectilinei super AE ad rectilineum super EB. Ergo *componendo* ita erit AO ad AO, & OB, vt AB rectilineum ad duo rectilinea simul AE, & EB, quæ sunt æqualia ex 32. lib. 6. Elem rectilineo ABCD, quamobrem, cum AO sit ad AB; vt O ad L; nempe $\frac{1}{4}$ tale etiam erit rectilineum AE ad AD. Eadem ratio erit de rectilineo super AF, & de rectilineo super AG; sed AO, & AF, & AH; simul æquant lineam AB. Ergo, & tria rectilinea simul ex AE, ex AF, & ex AG æquabunt totum rectilineum ACBD.

COROLLARIVM.

EX istis duabus propositionibus postremis eruitur, quomodo dato rectilineo addatur talis pars, quę libuerit, & tamen remaneat simile, similiterque positum, vt prius, aut dematur ipsi. Et si loquamur de additione detur quadratum 1, & quadratum 2. nigrum oporteatque quadrato 2. addere tantum, quod æquivaleat quadrato 1. Accipe mensuram lateris quadrati 1, & productum vnum ex lateribus quadrati 2. nigri sit æquale ipsi lateri quadrati 1 ab A vsque ad C, coniungeque DC nimirum ex duobus lateribus quadrati 1, & quadrati 2. fiat angulus rectus ad A, ducaturque basis DC.



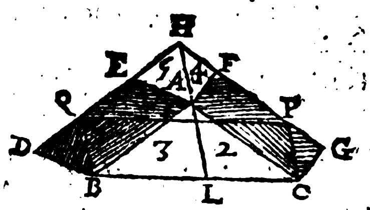
Nam quadratum, cuius latus DC quale est 2.3.3. est ęquale, vt patet ex 11. lib. 2. quadrato nigro 2. & 1. quod idem erit de quocumque alio rectilineo ex prop. 31. l. 6. Si verò loquamur de ablatione, cum iam pr. 23. l. 6. notum sit quomodo fiat rectilineum simile, similiterque positum, quod æquale sit datæ parti alterius parallelogrammi, quale est parallelogrammum ex AE $\frac{1}{4}$ parallelogrammi ABCD clarum est, quod parallelogrammum ex EB simile, similiterque positum, quod cum ipso ex AE est æquale ipsi ABCD, deficiet ab eo $\frac{1}{4}$ nempe parallelogrammo ex AE vt fig. prec. prop.

PROBL. V. PROPOS. XXX.

Dato parallelogrammo dissimili illud augere vel minuere addendo ei aliud parallelogrammum quodcumque:

SIt datum nigrum parallelogrammum CF, & aliud, cui addere oportet EB. Coniungantur eorum latera CA, & AB ad quemcumque angulum apud A, & producantur GF, & DE vsque dum conueniant in H, & per H, & A agatur HL, & terminetur in CB lineam coniungentem latera CA, & AB, ipsi LH ducantur parallelę CP, & BQ, & coniungantur P, & Q, & parallelogrammum PQ erit ęquale duobus CF, & EB nigris.

Probatur 1, quod sit parallelogrammum: Nam HA, & CP inter parallelas CA, & GH parallelæ ex 33. lib. 1. erunt æquales, sic BQ, & AH parallelæ inter parallelas AB, & DH æquales erunt. Ergo etiā inter se erunt æquales, & parallelæ ex 31. l. 1. quare ex 34. lib. 1. BP erit parallelogrammum. Quod verò sit æquale parallelogrammis nigris, patet.

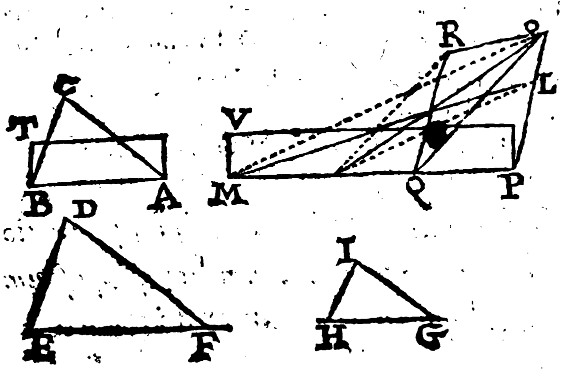


Nam ex 36. lib. 1. LP, & CH parallelogramma super eandem basim CP, interque parallelas CP, & LH sunt ęqualia, sic nigrum CF, & CPAH parallelogramma super basim CA, & inter parallelas GH, & CA æquantur, ergo nigrum parallelogrammum CF, & PL tertio CPAH æqualia inuicem æquabuntur. Sic parallelogrammū LQ æquale est tertio BAHQ ob basim BQ eandem, & parallelas HL, & BQ, cui ęquatur ob basim AB eandem, & parallelas AB, & DH nigrum BE: quare nigrum EB æquabitur ipsi LQ, vnde LP, & LQ, idest BP parallelogrammum ęquabitur duobus nigris CF, & EB.

PROB. VI. PROPOS. XXXI.

Duobus datis rectilineis tertium proportionale inuenire simile, similiterque positum, sicut vnum ex datis.

SIt rectilineum OPQR, & rectilineum ACB, & illi OPQR inuenire oporteat planum tertium proportionale simile, similiterque positum, ac rectilineum ACB. Redigatur trapezium ORQP in ęquale rectilineum, sed simile, similiterque positum



rectilineo ACB, quod ex prop. 27. lib. 6. Elem. fiet redigendo prius in æquale sibi triangulum, & postea hoc triangulum ad eandem altitudinem deprimendo ex prop. 6. huius. & tandem in parallelogrammum PV eiusdem altitudinis, ac AT. Nam media proportionalis inter latera MV, & MP inuenta ex 16. lib. 6. erit illa, super quam efficiendum est triangulum simile, similiterq; positum, ac ACB ex 27. lib. 6. æquale trapezio ROPQ, quod triangulum erit DEF. Inueniatur itaque lateribus AB, & EF tertia proportionalis GH, & super eam constituatur rectilineum simile, similiterque positum, ac ACB ex 23. lib. 6. & erit tertium proportioale duobus rectilineis trapezio, & triangulo simile, similiterque positum vni ex ipsis, nempe triangulo, & ita erit EFD triangulum, vel PROQ ęquale trapezium

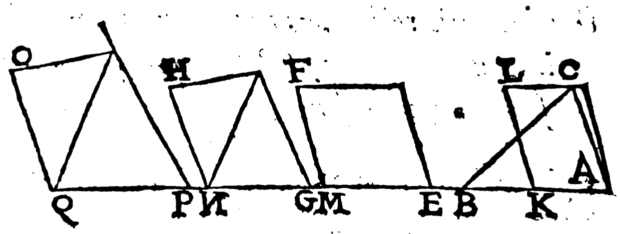
pezium ad ABC triangulum, vt idem ABC ad GHI simile ipsi ACB.

Probatur. Quia latera sunt proportionalia, & ita est FE ad AB, vt AD ad GH, ergo ex 26. lib. 6. El. ipsa quoque rectilinea erunt proportionalia cum sint similia, similiterque posita; sed trapezium est æquale triangulo DFE. Ergo trapezium quoque est prædictis triangulis proportionale.

PROBL. V. PROPOS. XXXII.

Tribus datis rectilineis quartum proportionale inuenire, quod sit simile, similiterque positum, si placet, vni ex datis rectilineis.

Sint data tria rectilinea, ABC triangulum, EB parallelogrammum, & GH trapezium, & oporteat trapezio simile, similiterque positum quartum proportionale inuenire, ita quod sit vt triangulum ad parallelogrammum, ita trapezium ad aliud trapezium. Rectilineo ACB V.g. construatur æquale rectilineum, sed simile, similiterque positum, ac rectilineũ EF ex 27. l. 6., quod sit AL. Deinde tribus lateribus AK, EM, & GN inueniatur quarta proportionalis PQ, superquam construatur trapezium simile, similiterque positum, ac rectilineum GH ex propos. 23. lib. 6. Elem. Dico ita esse rectilineum AL, seu ACA ad rectilineum EF, vt GH ad PO.



Probatur ex eadem propos. 26. lib. 6. Elem. Nam ita sunt rectilinea similia, similiterque posita, vt sunt latera inuicem. Quare cum AK sit ad EM, vt GN ad PQ erit etiam AL rectilineum, vel æquale ACB ad EF, vt GH ad PO trapezia.

PROBL. VI. PROPOS. XXXIII.

Duobus datis rectilineis medium proportionale inuenire simile, similiterque positum, ac aliquod rectilineum ex datis.

Sit datum rectilineũ HIG, & rectilineũ QO super latus QP; oporteatque reperire medium proportionale inter hæc duo rectilinea; sed tale, vt sit simile, similiterque positum ac rectilineum super HG, vt in schemate propos. 31. h.

Redigatur QO in ADF similem figurã, & similiter positam, ac rectilinei dati super HG; Sitque eius latus homologum ad GH latus FE; inter FE, & GH inueniatur ex 16. l. 6. media proportionalis BA, & super BA constituatur rectilineum simile, similiterque positum, ac illud positum super HG latus ex 23. lib. 6. Elem. & hoc erit medium proportionale inter HIG rectilineum, & rectilineum QO super QP.

Probatur ex Iterum proportione ex 26. lib. 6. Elem. Nam cum sit rectilinea similia erunt ad inuicem, vt bases; sed basis FE ex constructione est ad BA proportionata vt BA ad HG. Vnde & rectilineum super FE, vel quod idem est, cum ei sit æquale, rectilineum QO ad rectilineum super BA erit in ea proportione, quã ipsum met super BA ad rectilineum super HG constitutum.

COROLLARIVM.

Istæ propositiones antecedentes intelliguntur etiam de circulis minuendis, & augendis in data proportione. Nam vt est polygonum ad polygonum in circulo inscriptum, ita, & circuli, & vt diameter ad diametrum ita ex prop. 41. lib. 6 Elem. sunt quoque inuicem circuli: quare si reperta proportionalis, vel tertia, vel media, vel quarta constituatur diameter circulorum, ipsi circuli iuxta datam proportionem augescent.

EXPENSIO VI.

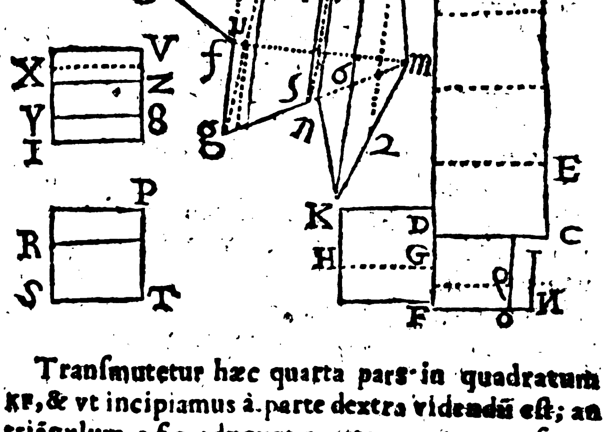
De rectilineo quocumque partiendo etiam in partes non similes per parallelas vni lateri.

Vidimus de augmento, & partitione fig. in plures similes figuras, modo de earum partitione; non quidem in plures figuras; sed quasi in eiusdẽ plures partes statuendo eas inuicẽ æquales, vel proportionales, sed nec similes, nec similiter positæ, duplex autem est ista designatio, vel per parallelas vni lateri, vel per discedentes lineas rectas ab vno puncto in dato latere.

PROBL. I. PROPOS. XXXIV.

Figuram rectilineam regularem in destinatas partes secare per parallelas dato lateri.

Sit figura irregularis rectilinea a e f g n l m h t, quæ debeat in quatuor partes V.g. partiri per parallelas lateri f g ex propos. 8. fiat rectangulum æquale, vel toti rectilineo, vel quod idem est singulis eius omninus partibus, & triangulis, quod sit ABCD, quod diuidatur in quatuor partes, & sit quarta pars DE, quæ erit etiam quarta pars dati rectilinei; oportet itaque hanc quartam partem signare in ipso rectilineo irregulari dato; sed per parallelam lateri f g.



Transmutetur hæc quarta pars in quadratum KF, & vt incipiamus à parte dextra videndũ est; an triãgulum a f e adæquet quartam partem transmutando

tando in rectangulum ex propos. 2. vel 7. huius, cuius latus sit quadrati DF, quod erit FH: Quare non implet totum quadratum KF, & ideo nec triangulum f a e adæquat rectilinei irregularis quartam portionem.

Ex triangulo itaque m a g, cuius vertex non cognoscitur ex documentis 23. prop. h. auferenda est pars æqualis rectangulo residuo DH: Trahendo parallelam lateri r a, vt fiat triangulum m f g; rectangulo verò DH æquale inueniatur quadratum PO. Inuenta autem tertia proportionalis lineis a g, & g f sit N, & tribus g a, & N, & lateri PO quadrati OD quarta proportionalis sit QO, ex qua rectangulũ QF fiat ad altitudinem OF, & sequendo operationem ex 23. prop. h fiat trapezium æquale g u, & ducta g t, & ex puncto t parallela lateri f g. Dico trapezium g t cum triangulo e f a esse quartam partem totius rectilinei irregularis.

Probatur ex ipsa effectione supposita doctrina tradita in 23. propos. huius, nam t g ex effectione est trapezium æquale quadrato DO: quod æquat rectangulum DH, rectangulum verò FH est æquale ex effectione triangulo a f e; quæ duo rectangula integrant quadratum KF, quod est ex effect. æquale rectangulo DE, quod est quarta pars parallelogrammi magni AC æqualis rectilineo irregulari; vnde etiam FK rectangulum erit quarta pars figuræ irregularis, & consequenter t g, & f e a erit quoque quarta pars figuræ irregularis.

Sit secundo ad sinistram partem per lineam parallelam eidem lateri g f abscindenda quoque quarta pars. Quia adest angulus ad h, videatur an parallela ducta ab eo angulo abscindat quartam partem rectanguli AC, & consequenter totius rectilinei irregularis, & facta operatione iuxta præscripta propos. 22. vel 23. erit triangulum h m a æquale rectangulo PR, cuius latus est quadrati PS æquantis rectangulum ED quartam partem totius magni AC, ideoque m h a non æquat quartam partem: Ducemus itaque ab angulo K rectam K 3, & transmutato trapezio h a K 3 in rectangulũ RT iam æquat totum quadratum PS, & consequenter totum rectangulum ED, idest quartam partem rectanguli AC, & consequenter h 3 m K est quarta pars totius rectilinei irregularis.

Sed apud hanc partem alia quarta pars sit locanda. Quia adest triangulum 3 r t, quod eadem linea secari nequit V.g. 45, cùm discontinuum sit in eo situ, ideo placeat illud in hac etiam parte, quæ modo auferenda est, computare.

Redigetur itaque ad rectangulum VX in quadrato VI æquale quartæ parti ED rectanguli AC magni, & quia adest angulus n trahemus lineam n 7, vt videamus, an adæquet trapezium r 7 K n reliquum XZ in quadrato VI: quare triangulum K 6 n redigetur in parallelogrammum XZ, & deinde trapezium 7 6 in rectangulum ZY, quod totum quadratum non æquat, ideo triangulo r 6 n 7, cuius vertex ignoratur, addendum est ad lineam 7 n trapezium 7 4 n 5 æquale rectangulo residuo ex prop. 23. huius; eritque figura 4 5 K 3 cum triangulo 3 r t quarta pars, & consequenter reliquum trapezium 5 t, erit quoque quarta pars. Vnde rectilineum totum irregulare in quatuor æquales partes diuisimus, vt patet.

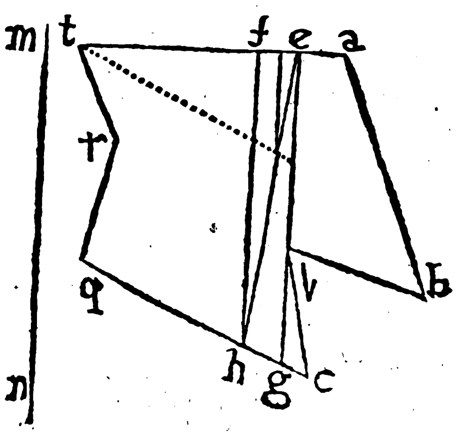
COROLLARIVM.

Hinc potes quoque si placet diuidere per lineas, quæ nulli lateri parallelæ sint, sed cuidam extra rectilineum, nam illa linea, quæ prima fortuitò trahitur ab aliquo angulo, vel alicui extra figuram parallela, potest constitui tamquam si esset latus figuræ, & videre, quid ipsa ex tota figura auferat, & cætera circa ipsam præstare, vt si esset latus figuræ, vt quilibet ex se experimento comprehendet.

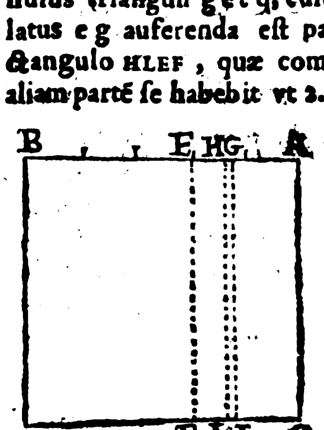
PROBL. II. PROPOS. XXXV.

Figuram irregularem rectilineam in proportionales partes secare per lineas parallelas lineæ extra figuram positæ.

Potest eodem modo in proportionales partes secari area quælibet, ac propos. anteced. V.g. si rectilinei AC vna quarta solum pars assumpta fuisset, & illa à rectilineo irregulari fuisset ablata, vt est n 3 K m, illa esset ad totum, vt 1. ad 4. idem dicas de quibuslibet alijs secundùm diuisionem, in quam rectangulum BADC diuisum fuisset.



Pro quo ostendendo sit fig. a b l c q r t, quæ diuidenda sit parallelis ad m n in duas partes proportionales, ita vt vna nempe sinistra se habeat alteri, vt 2. ad 3. constituatur rectangulum ABCD æquale dato rectilineo irregulari, & diuidatur eius basis in 5. partes. Ex prima lib. 6. rectangulum ABCF erit $\frac{2}{5}$ respectu totius, & ad BDEF cõpartem se habebit, vt 2. ad 3. sicut basis CF ad basim FD se habet, vt 2. ad 3. Ad angulum itaque l ducatur linea parallela lineæ m n scilicet ad sinistram partem, videaturque quid ex AECF rectangulo absumat trapezium b a e l, & triangulum l c g, faciendo rectangulũ AGCI super datum latus AC æquale trapezio a b l e, & GHIL æquale triangulo l c g; Cum ergo ista duo triangula sit minora, quam $\frac{2}{5}$ totius rectanguli AD, ex 23. propos. huius trianguli g e t q, cuius ignoratur vertex ad latus e g auferenda est pars e g h f æqualis rectangulo HLEF, quæ complebit $\frac{2}{5}$ totius, & ad aliam partẽ se habebit vt 2. ad 3. per parallelã f h datæ m n. Nam f g h e est ex constructione æquale trapezium rectangulo HELF; residua verò AHCL sunt æqualia ex construct. Trapezio b a e l, & triangulo l c g. Quare totum AECF rectangulum est æquale toti a f c h rectilineo sicut co-

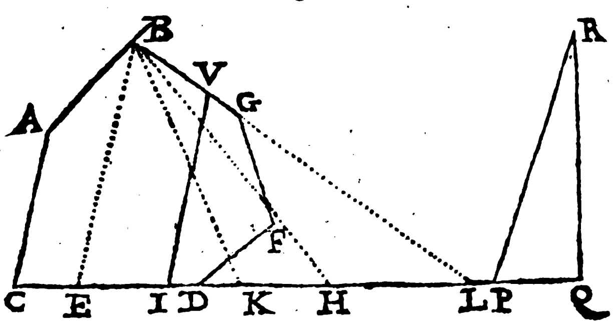


totum rectangulum AD est æquale dato irregulari rectilineo abque; Cum ergo sit AECF $\frac{2}{5}$ totius AD erit ab totius abqt $\frac{2}{5}$, & *diuidendo*, vt est rectangulum AECF ad rectangulum EFBD ita erit afch ad fhqt nempe, vt 2. ad 3.

PROBL. III. PROPOS. XXXVI.

A multilatero datam partem secare per parallelam dato lateri.

A Dato sexagono ABCDFG absumenda sit pars æqualis dato triangulo QPR, quod fiat, aut fiat eiusdem altitudinis sexagoni ex propos. 6. huius. Agatur ex angulo B recta BE dato lateri CA parallela, & fiat triangulum EBH ex dictis propp. 8. h. æquale residuo rectilineo EDFGB continuenturque latera CH, & BG, & concurrant in L, Deinde mensuretur basis QP ab H, & sit HK; & ducta HB erunt æqualia ex 1. Cor. p. 39. l. 1. triangula KBH, & PRQ, & inter LE, & LK reperiatur media proportionalis IL; & ducatur IV parallela ipsi CA. Dico IFGV multilaterum esse æquale triangulo QPR.



Prob. Nam triangulum IVL est æquale triangulo KBL. Etenim triangulũ EBL eandem eis dicit proportionem. Dicũt namque proportionem EBL, IVL duplicatam lateris LE ex 21. l. b. 6. ad latus LI, sed ex effectione hæc est, quam EL habet ad LK; cùm sit IL media proportionalis inter LE, & LK: sed quam proportionem habet LE ad LK eam ex propos. 1. lib. 6. Elem. habet EBL ad KBL. Ergo idem triangulũ EBL eandem dicunt proportionem triangulis IVL, & KBL. Ergo ex 11. lib. 5. æqualia. Quamobrem æqualibus IVL, & BKL ablatis à triangulo EBL, remanebunt æquales EKB triangulum, & EBVI trapeziũ. Si ergo rursùs auferantur hæ portiones æquales triangulum EBK à triangulo EBH, & trapezium à rectilineo EBDFG, quod triangulum EBH ex constructione æquat, remanebunt æqualia triangulum KBH, idest QRP, & pars assumpta VGFI.

EXPENSIO VII.

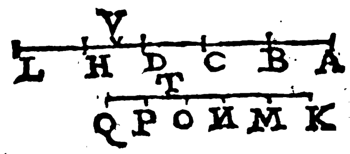
De figuris planis rectilineis in partes dissimiles secandis à dato puncto in ipsis.

NOn minus vtilis hęc alia sectio est arearum, quæ operi demandatur secando eas in destinatas partes à puncto aliquo, vel in ambitu, vel in meditulio dato, pro quo priùs hoc Lemma intelligendum est, vt fundamentum cęterarum propositionum: tale autem est.

LEMMA PROPOS. XXXVII.

Si magnitudo in quaslibet partes secetur, & alia in totidem illis proportionales eadem serie, & accipiantur aliquæ partes prioris magnitudinis hæ simul comparatæ ad residuas simul habebunt eandem proportionem, quæ totidem posterioris simul ad reliquas habent simul sumptas, & eodem ordine.

SIt AL prima magnitudo in quinque partes diuisa, & alia, etiam si sit diuersi generis KQ, pariter in quinque partes diuisa prioris magnitudinis partibus eodem ordine proportionales, & accipiantur duæ ex prima AB, & BC, & duæ de secunda secundùm eundem ordinem KM, & MN. Dico, quod AC ad reliquas simul CL habebunt eandem rationem, quam KN ad reliquas NQ.



Progr. 1. Probatur. Nam ex hypothesi, quam proportionem dicit AB ad BC eam dicit KM ad MN: Igitur *conuertendo* ea est proportio AB cum BC ad BC, quæ KM cum MN ad MN: Ex hypothesi quoque, vt est BC ad CD, ita est MN ad NO: quamobrem ex *æqualitate* erit AB cum BC ad CD, vt KM cum MN ad NO in alia quantitate.

Prog. 2. Deinde cum sit HL ad HD, vt QP ad PO; erit quoque *componendo* LH cum DH ad LH, vt QP cum PO ad QP: sed ex hypothesi *conuertendo*, vt HD ad DC, ita PO ad ON. Ergo ex *æqualitate*, vt DH cum HL respicit in proportione DC, ita QP cum PO respicit ON, & *cõponendo*, vt CL est ad CD ita NQ ad NO: & *inuertẽdo* CD ad CL, vt NO ad NQ, sed respiciebat quoq; AC, CD, vt KN partem NO ex primo progr. Vnde erit AC ad CD, vt KN ad NO, & vt CD ad CL, ita NO ad NQ: vnde ex *æqualitate* ita erit AC duę simul ad CL reliquas simul, vt KN duæ simul alterius quantitatis ad NQ reliquas eiusdem.

COROLLARIVM.

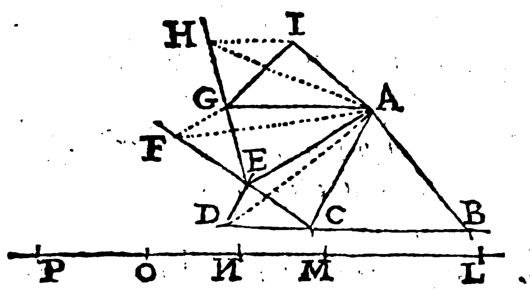
VNde si rursus aliqua pars, vt DH secetur in prima quantitate V. g. in V, & in T secunda pars correspondens OP in ordine, etiam proportionaliter secetur in similes portiones, totæ quoque quantitates erunt sectæ proportionaliter, & ita erit AV ad VL, vt KT ad TQ. Nam eadem probatio militat, cum ex hypothesi, vt primo factæ sint partes proportionales eodem ordine correspondentes, quare, & correspondenter erit AV ad LV, vt KT ad QT, vel etiam AV ad AL, vt KT ad KQ *componendo*.

PROBL.

PROBL. I. PROPOS. XXXVIII.

Diuiso rectilineo quolibet in triangula, rectas lineas eodem ordine, & proportione, qua triangula existunt, præditas inuenire.

SIt figura diuisa in triangula BAC, CAE, EAG, & AI G; oporteatque lineas inuenire, quæ inuicem habeant eam proportionem, quam triangula. Producatur BC in D, & ducatur ED parallela lateri AC: Deinde ducatur AD, eritque triangulum ACD æquale triangulo CAE; sed eiusdem altitudinis, ac BCA, cum desinat in idem punctum A: Quare ex 1. lib. 6. erit BC ad CD, vt triangulum BCA ad triangulum CAD, vel ad æquale CAE, quas lineas transferemus pro primis inuentis in lineã LP, quæ erunt LM, & MN. Idem faciemus triangulis CAE, & collaterali EAG: nam ducta GF ab angulo G parallela lateri AE, & CE in F, ductaque AF erit triangulum AEF æquale triangulo AGE, & eiusdem altitudinis. Quare erit, vt triangulum ad triangulum, ita basis CE ad basim EF, quare lineis CE, EF, & MN inueniemus quartam proportionalem NO: quia ergo est CE ad EF, vt MN ad NO, erit etiam MN ad NO ex 16. lib. 5. vt CAE ad GAE.



Idem tandem faciemus de triangulis EAG, & AGI: eritque, vt triangulum AEG ad GAI, ita basis EG ad basim GH. Sit ergo etiam, vt basis EG ad basim GH, ita NO ad quartam OP; eritque tertia NO ad quartam OP, vt basis EG ad basim GH, & consequenter, vt triangulum EAG ad AGI.

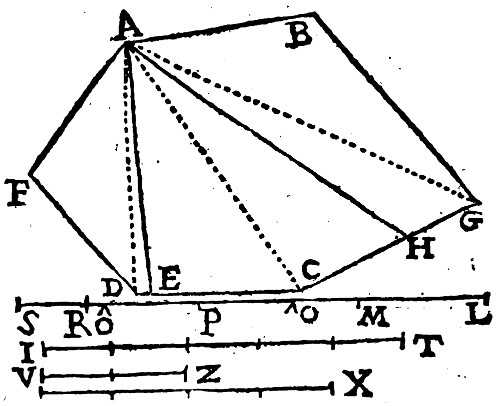
Verùm si aliqua figura adeo erit irregularis, vt nequeat in triangula diuidi ab vno puncto connectantur singula triangula, in triangula æqualia, sed eiusdem altitudinis ex 8. prop. de conuers. figur. vel parallelogramma, & bases erunt inuicem, vt triangula æqualis altitudinis, & consequenter, vt triangula, in quæ figura irregularis diuisa est, vtcumque

PROBL. II. PROPOS. XXXIX.

Datum rectilineum in datas partes secare per rectas ab vno puncto in latere, vel in angulo discedentes, dummodo in triangula ab vno puncto diuidi possit.

SIt figura ABCDF; quæ in triangula à dato puncto A diuisa sit; hanc in quaslibet partes, vel proportiones, nempe quam habet V ad TI $\frac{2}{5}$, & X ad TI $\frac{4}{5}$, volumusque proportionem V ad TI esse ad partem B.

Reperiatur ex propos. præcedenti linea LS, quarum partes habeant eandem proportionem ad inuicem, vt triangula, & eodem ordine, ita quod LM sit ad MP, vt triangulum GBA ad triangulum GAC, & MP sit ad PR, vt triangulum GAC ad CAD, & PR sit ad RS, vt CAD ad DAF.



Tribus verò TI, & V datis, & LS repertæ, inueniatur quarta proportionalis LO, ita quod vt TI ad V, ita sit LS ad LO, quæ cadit inter P, & R, eritq; *inuersè*, vt ad TI, ita LO ad LS, & *diuidendo*, vt V ad TZ, ita LO ad OS.

Diuidatur deinde; quia linea MP correspondet ex ordine basi CG ea basis CO secundùm proportionem MP ad MO, & fit quarta proportionalis GH. Dico trapezium ABGH esse ad totam figuram irregularem ABGCDF, vt V ad TI, idest $\frac{2}{5}$.

Probatur ex Coroll. propos. 37. Nam ita est quantitas LO ad OS; vt est quantitas BAGH ad quantitatem residuam AHCDF: sed illa LO ad OS, vt V ad TZ ex effect. & *inuertendo*, nempe vt 2. ad 3. Ergo etiam figura ABPH erit ad residuum, vt 2. ad 3. & consequenter ad totum erit vt 2. ad 5. & ABPH erit ad totum 2. ad 5. vt est V ad IT.

Placeat rursus diuidere ea proportione, quam X habet ad TI, ita quod antecedens proportionis X sit in figura irregulari versus B.

Tribus eodem modo inueniatur quarta proportionalis, vt TI ad X; ita LS ad LO; & quia hæc diuisio O cadit in tertiam PR, correspondentem tertiæ basi CD; Tribus rursus PR, & PO, & CD inueniatur quarta proportionalis CE. Nam ducta AE erit ABGCE ad totam figuram, vt X ad TI eadem ratione.

PROBL. III. PROPOS. XL.

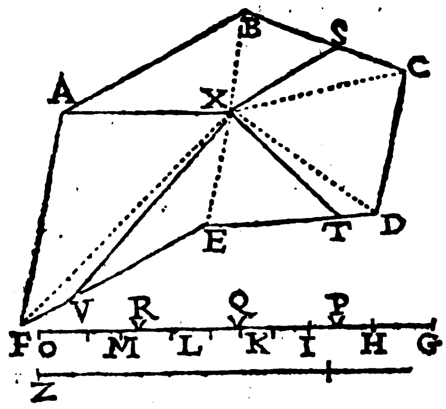
* *Figuram à dato in medio puncto in datas partes secare, dummodo ad angulos ab illo puncto rectæ duci possint.*

SIt in figura ABCDEF datum punctum X in medio vbicumque malueris, & sit diuidenda fig. in quatuor partes æquales (posset, & diuidi in proportionales, sed in præcedenti proportionalem diuisionem exemplo illustrauimus.)

Sit linea GO, cuius partes GH, & HI, & IK, & KL, & LM, & MO sint eodem ordine proportionales ex prop. 38. vt triangula ABX, BXC, CXD, DXE, EXF, FXA, quæ diuidatur in quatuor partes in P, Q, R. Quia ergo prima diuisio P cadit in secundam lineam erit latus BC secundi trianguli diuidendum, ita vt quemadmodum est HI ad HP, ita sit BC ad BS ducta XS erit XABS quarta pars. Sic quia Q cadit in parte KL, quæ correspondet basi quarti trianguli fiet, vt KL ad KQ, ita basis DE ad DT. Et

ducta

ducta XT erit SXV alia quarta pars, & sic de parte R, quæ poscit SF basim correspondentem diuidendam esse, vt LM ad LR in V, vt sit alia quarta pars TXV.



Quod Probatur. Nam ita est ex Coroll. prop. 37. GP ad totam GO, vt XABS ad totum rectilineum; sed GP est quarta pars totius GO. Ergo, & portio XABS erit quarta pars totius rectilinei.

Iterum, vt est GQ ad GO; ita est ABCTX ad totum rectilineum: sed GQ est $\frac{2}{4}$ totius GO. Ergo etiam ABCTX erit $\frac{2}{4}$ totius rectilinei. Ablato ergo AXS, nempe $\frac{1}{4}$, vt ostendi erit SXT $\frac{1}{4}$ totius, & sic dicas de alijs; vt per se patet.

EXPENSIO VII.

De figuris per lineas, vtcumque ductas partiendis.

POscit ordo, & ratio, vt quemadmodum superficies per parallelas lineas, & etiam per lineas ab vno centro progredientes diuisimus, sic, & eas per lineas incertas, & vtcumque ductas partiri doceamus.

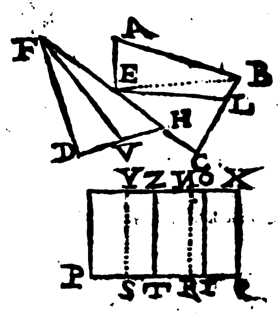
PROBL. IV. PROPOS. XLI.

Rectilineum quodcumque partiri per lineas non parallelas, nec in vnum punctum conspirantes.

SIt Rectilineum ABCDF, quod oporteat secare in tres partes lineis; quę nec sint parallelę, nec sint in vnum punctum coeuntes, vel quia id nequeat, aut quia non placeat.

Fiat rectangulum QO æquale areæ trianguli BAE, & OT æquale areæ trianguli BEC, & tandem PZ æquale areæ trianguli CFD. Diuidatur deinde QP latus in tres partes in R, & S. Et quia prima pars finit in basim IT parallelogrammi OT æqualis secundo triangulo BEC; ideo tribus IT, IR, & BC inueniatur quarta proportionalis BL, vt sit IT ad IR, vt BC ad EL. Ducaturque EL. Dico BAEL esse tertiam partem totius rectilinei.

Probatur. Quoniam QO rectangulum est ęquale triangulo BAE ex effectione; rectangulum verò OR, quod complet tertiam partem totius parallelogrammi æqualis toti rectilineo est æquale triangulo BEL. Ergo BAE, cùm BEL est tertia pars rectilinei; cum æqualium ad æqualia eadem sit proportio: Quod autem triangulum BEL sit æquale rectangulo OR; patet. Nam rectangulum OR est ad rectangulum OT, vt basis IR ad basim IT, & ita triangulum BEL ad triangulum FBC est vt basis BL ad basim BC: sed hæc eadem ex effectione, quam basis IR ad IT. Ergo rectangulum OR ad rectangulum OT habet eandem proportionem, quam BEL ad BEC, sed BEC, & OT sunt æqualia: Ergo etiam rectãgulũ OR ex 12. l. 5. & triangulum BEL erunt æqualia. Eadem est probatio in trahenda linea FV: Siquidem secunda pars RS ex tribus finit in basem TP, in S parallelogrammi æqualis triangulo HFD. Vnde basis HD secanda est proportionaliter, vt TP secta est in S, & trahẽda FV, & FELCV ex dicta ratione erit FOVELC remanentis rectilinei $\frac{2}{3}$.



EXPENSIO VIII.

De planis è puncto extrinseco partiendis.

SIcut plana ab vno puncto in eis electo in plures partes discepsimus, sic à puncto foris electo diuidemus, licet id sit minus necessariũ, & magis laboriosũ, & non semper in opus reducibile.

PROBL. I. PROPOS. XLII.

Datum Triangulum à dato extra ipsum puncto in datas partes secare.

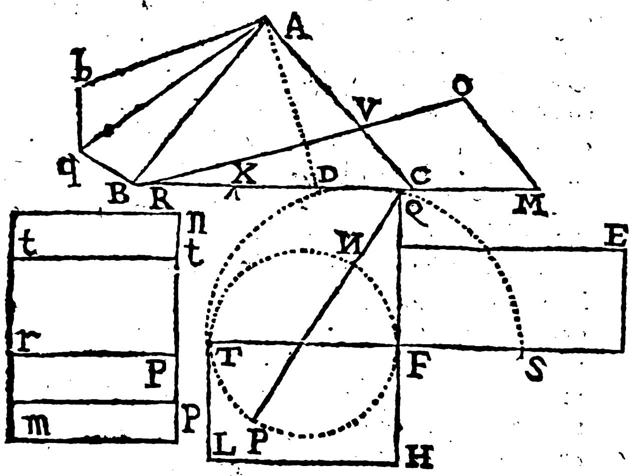
SIt propositum triangulum ABC $\frac{1}{3}$ trianguli BAC, in quo ex O puncto extra ipsum dato sit auferenda data pars æqualis triangulo ACD.

Ex lateribus trianguli AC, & CD fiat rectangulum EF; lineę verò parallelę OM ex 29. lib. I. Elem. applicetur rectangulum æquale ipsi EF rectangulo, & fiat FL rectangulum, cuius alterum latus inuentum sit FT, mensuretur itaque à puncto C latus FT, & sit CX; rectangulo autem CX, & MC, idest TF, & FS fiat æquale quadratum QF, & huic quadrato ex 37. lib. 3. æquale rectangulum ex NQ, & PQ; quod fit constituendo latus quadrati pro tangente, quæ tangat circulum, cuius diameter NP, vel TP æquet CX; ita enim rectangulum NQ, & PQ ex cit. propos. 37. lib. 3. Elem. ęquabit quadratum ex FQ. & ideo ipsi æquale rectangulum ex CX, & MC, vel TF, FS æqualibus; transferatur itaque NQ latus ab X in R, & ducatur à pũcto dato O linea OR, &. Dico CAD æquari triangulo VCR, & ideo per lineam OR auferri tertia pars trianguli BAC, vt fuit promissũ.

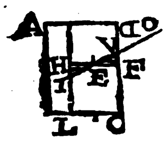
Probatur autem. Rectangulum ex CR, & XR, idest NQ, & PQ æqualibus æquatur quadrato tangentis FQ, ideoque rectangulo ex MC, & CX, ideoque latera ex 10. lib. 6. Eu. erunt reciprocè proportionalia, eritque CR ad MC, vt CX ad XR. Ideoque *componendo* erit CR cum MC, idest tota MR ad CR, vt CX cum XR, idest CR ad CX.

Verùm ob parallelas MO, & CV erit ex 4. lib. 6. MO ad CV, vt MR ad CR, quæ sunt in proportione, vt CR ad CX. Ideoque MO ex 16. lib. 5. erit ad CV, vt CR ad CX. Vnde ex 18. lib. 6. si ex extremis MO,

& CX componatur rectangulum erit æquale rectangulo mediarum CV, & CR. At rectangulum ex MO. & CX ex effectione, idem, quod LF æquatur rectangulo EF, ex lateribus CA, & CD trianguli CAD. Quarè etiam eidem EF æquabitur rectangulum CV, & CR, & propter hoc latera erunt reciprocè proportionalia ex 10. lib. 6. El. & CR erit ad CA, vt CD ad CV, angulus verò C est idem. Vnde ex 15. lib. 6. triangula CAD, & CVR erunt æqualia.



Sit punctum datum O. Oporteatque rectangulum DABC in tres partes secare, diuidatur in tres partes, & sit tertia pars LA parallelogrammum, & reliquum LC duæ tertiæ partes erunt; diuidatur rursus per rectam FH, eritque HC tertia pars; secetur itaque FH bifariam in E. & ducatur OI. Dico trapezium VLCI esse tertiam partem.



Prob. Quia triangula nigra sunt æqualia cum sint rectangula, & anguli ad vertices E sint æquales: quare tantùm additur in triangulo nigro apud V, quantum aufertur in triãgulo nigro apud H. Vnde figura IVHL erit æquale tertiæ parti CFHL.

PROBL. III. PROPOS. XLIV.

Datum quodcumque rectilineum in partes destinatas per lineam à puncto extra ipsum ductam secare.

Sit rectilineum ABQP, quod diuidatur in triangula, & fiat parallelogrammum m n æquale toti, & in eo parallelogramma singulis triangulis æqualia, vt in fig. propos. anteced.

Nimirum mp triangulo bqa sicut pr ipsi AQB, & r n vltimo BAC. Deinde diuide, quia punctum O est prope triangulum BAC rectang. r n in parte, quam voles, vel quæ tibi data fuerit n t, & quia non occupat totam partem r n ideo auferri poterit à triangulo BAC; quod si totam occupasset, vel maiorem: tunc triangula, in quæ diuisa est figura, essent alio pacto ordinanda, & ducenda essent à vertice C, vel partim à C partim ab A, & illis rectangula æqualia facienda in rectangulo m n, & videndum eodem modo, an pars data ab vno ex ipsis subduci posset. Nam eo pacto, & poterit à triangulo ipsi parallelogrammo æquali ea pars auferri per lineam à puncto dato protractam.

Quod cum obtinueris. Tunc illud rectangulum in triangulum æquale DAC parti in parallelogrammo ei correspondenti facta V. g. in parallelogrammo t a conuertendum est; Et deinde ea omnia præstanda, quæ dixi prop. penultima antecedenti, & erit diuisum rectilineum datum in partem datam.

COROLLARIVM.

Poterit etiam, & aliquando diuidi in plures partes datas; sed non semper; quia non omnia triangula, quæ in figura fient, poterunt habere aliquod latus puncto dato obuersum, vt AC ad quod linea duci possit: talis, quæ non secet latus alterius trianguli. Sed ipsa experientia docebit possibilitatem rei, de qua quæritur.

EXPENSIO IX.

De planiciebus Musicis, & proiectis.

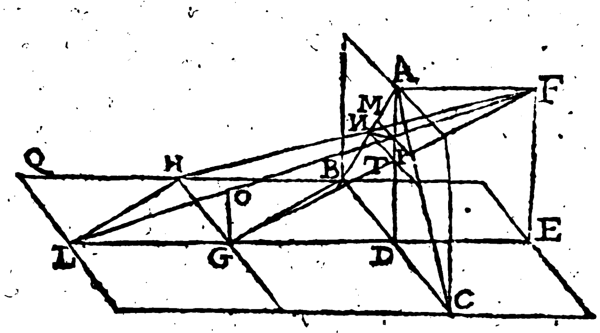
Planities proiectæ sunt illæ, quæ nascuntur à lineis proiectorijs latera figurarum proijciendarum lambentibus, vt descripsimus tract. 26. propos. 8. & quidem de illis, prout conus proiectorius directè in eas incidit, non agemus, vtpote quod de eis certum sit esse in duplicata ratione suorum laterum, cùm vt ibi ostendimus de circulo figuræ similes, sint itaque de eis agendũ cum radij proiectorij in planũ obliquè incidũt, & præcipuè hic de eorum proportionibus agere in animo est.

THEOR. I. PROP. XLV.

Spatiorum originalium altitudines ad proiectorum altitudines obtinent eam proportionem, quæ distantia remotior ad altitudinem centri, si primæ sint; quod si secundæ etiam eam, quam distantia propinquior ad interceptam distantiam.

Sit spatium originale GHBD, cuius altitudo GD, distantia DE à centri F perpendiculari altitudine EF; altitudo verò huius plani proijciatur, & sit DT. Dico GD *altitudinem esse ad altitudinem* DT, *vt* GE *maior distantia, quam* DE, *ad* EF *altitudinem centri.*

Patet ex 4. lib. 6. Nam ob parallelismum linearum, ita GD est ad DT, vt GE ad EF.



Deinde sit altera altitudo LG, quę non sit prima, & immediata, vt est GD. Dico quod proiecta in TI habet proportionem, ne dum, quę est LE ad EF; sed insuper, quæ GE distantia propinquior ad DE interceptam; nempe compositam ex LE ad EF, & GE ad DE, vt si DE esset 3, GE 4. at EF 2. & LE 5. haberet LG ad TI proportionem, quam 20. ad 6. quæ est

est composita ex 4. & 5. ad 2. & 3.

Probatur. Nam ducta GO parallela ipsi DA. Erit LG ad GO, vt LB remotior distantia ad FB altitudinem centri, sed GO est ad TI; vt GF ad TF, & GF est ad TF, vt GE propinquior distantia ad DE interceptam distantiam. Ergo LG erit ad TI, ne dum vt LB ad FB; sed etiam, vt GB ad DB. Vnde LG ad TI erit composita proportio ex EB ad BF, & GB ad DE, & sic dicas de alijs sequentibus.

THEOR. II. PROPOS. XLVI.

Omnes latitudines planorum originaliū ad omnes planorum proiectorum eam habent rationem, quam distantia à centro ad interceptam distantiam.

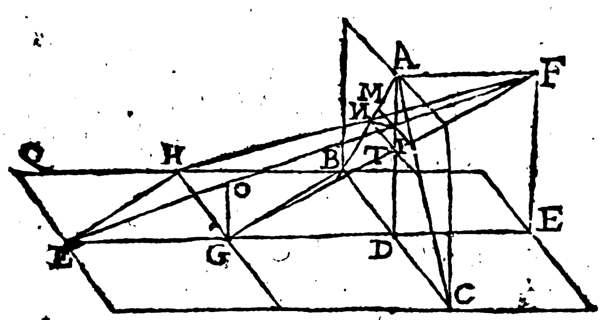
LAtitudines originarias, vt GH eam dico *obtinere proportionem ad proiectas latitudines*, NT, quam distantia GE ad interceptam DE.

Probatur. Nam GH est ad NT, vt GF ad FT ex 4. lib. 6. elem. at vt GF ad FT; sic est GE ad DE. Ergo vt GH ad NT, sic GE ad DE, & idem afferas de latitudine LQ, quæ se habet ad MI, vt LB ad DE.

THEOR. III. PROPOS. XLVII.

Superficies generans parallelis contenta, quæ sit diuisa diagonali in duo triangula, alterum quidem triangulum originarium ad proiectum eam habet proportionem duplicatam, quam distantia tota ad interceptam, & quam distantia remotior ad altitudinem centri radiosi; Alterum autem habet proportionem ex distantia minori ad interceptam, & distantia remotiori ad altitudinem centri radiosi.

DEtur superficies QLHG diuisa diagonali LH, quæ projiciatur, & proiecta sit in NITM. Dico superficiem LHG esse ad NIT primo, vt GB ad DB, secundò rursùs vt GB ad BD, & tertiò ex LB ad BF.



Probatur. Nam triangula quæcumque ex Cor. 2. prop. 22. lib. 6. ea habent proportionem, quę componitur ex altitudinibus, & basibus: sed basis GH habet proportionem ad basim NT, quam GB ad DB: rursùs altitudo LG habet proportionem ad TI altitudinē, vt LB ad BF, & GB ad DB ex 45. h. Ergo proportio trianguli LHG ad triangulum NIT consequitur proportionē GB ad DB duplicatā, nempe distantię minoris ad interceptam distantiam, & insuper distantiæ maioris ad altitudinem centri.

Probatur quoque de reliquo triangulo LQH ad triangulum NMI. Nam LQ latitudo, & basis, collata ad MI basim est, vt maior distantia LB ad interceptam distantiam DB: altitudo verò LG est ad altitudinem TI, vt LB ad BF, & insuper, vt GB ad DB. Ergo triangulum NMI est in proportione composita altitudinum, & basium, nempe LB ad ED, & GE ad DE, & LB ad BF.

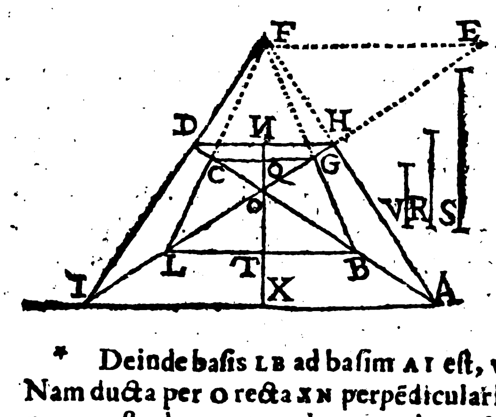
Aduerte tamen, quòd si sit prima superficies BHGD, & immediata, tunc habet proportionem triangulum originarium, quidem BDG ad triangulum GBT proiectū, vt GE ad EF. Quoniam altitudo quidem DT talis est proportionis; basis verò BD eadem. At triangulum HGB ad triangulum BNT proportortionem obtinet compositam ex proportione GB ad BF, & proportione GD ad DB. Ratio est quia altitudo quidem GD ad DT eam proportionem obtinet GB ad BF, at latitudo aliam proportionem GB ad DB.

PROBL. I. PROPOS. XLVIII.

Superficies musicas augere, vel minuere secundum datam rationem.

SIt data superficies BGCL augenda secundum datam rationem V ad S. Inueniatur itaque media proportionalis R, & trahatur diagonalis LG, producaturq; in E, nempe vsque ad parallelam FE basi BL, & iterum prolungetur in I. Rursusq; ducatur diagonalis DA, quæ se secent in O; fiat deinde vt V ad R, sic LO ad IO, ducaturque ab I parallela AI basi LB, & duæ AF, & FI ab I, & A ducantur ad centrum F, quæ secabunt diagonales AD in D, & IE in H, perque punctum D ducatur HD parallela basi AI, & erit factum, quod imperatur. Nam BCLG planum est ad planum HDAI in proportione data V ad S.

Nam ostendetur primo ADHI esse superficiem musicam, vel proiectam, quia ex proppos. II. tract. 16. crura trianguli AFI, & BFL sunt secta proportionaliter parallelis AI, & HD musicè ob lineam IE in ea obliquè incidentem.



Deinde basis LB ad basim AI est, vt V ad R. Nam ducta per O recta XN perpediculari ad AI, linea LO est ad OI, vt OG ad OH in triangulis æquiangulis AOI, & ODH ob angulos ad verticem HOD, & AOI æquales, & angulos incidentis lineæ IE in parallelas HD, & GC, & BL & AI, sed LO ad IO est vt V ad R ex effectione: Ergo etiam OG ad OH: Cum itaque

itaque LO sit ad OI, vt OG ad OH, & ideo *permutando* LO ad OG, vt OI ad OH, hinc *componendo* LO cum OG, idest LG ad LO, vt OI cum OH idest IH ad OI; rursusque *permutando* LG erit ad HI, vt LO ad IO, idest vt V ad R.

Sed vt LO ad IO, sic est basis BL ad AI in triangulis æquiangulis BOL, & AOI ob parallelas BL, & AI. Ergo erit LG ad HI, vt basis BL ad basim AI, scilicet, vt V ad R.

Et quia in triangulis OND, & OQC, ita est ob parallelismum linearum, OQ ad ON, vt OG ad OH erit OQ ad ON, vt V ad R, & sic OT erit ad OX, quia est in æquiangulis triangulis LOT, & IOX, sic quoque, vt OT ad OX, latus LO, & OI. Quadere erit OQ ad ON, vt OT ad OX, & *permutando* OQ ad OT, vt ON ad OX, & *componendo* OQ cum OT, idest QT ad OT, vt ON cũ OX, idest NX ad OX scilicet, vt V ad R.

Quia itaque triangula habent proportionem compositam ex proportione basium, & altitudinum ex propos. 22. Coroll. 2. lib. 6. altitudo verò trianguli BCL est TQ, & trianguli AID est XN; bases verò sunt BL, & AI. Ergo habebit proportionem compositam ex proportione eadem, quæ est basium, & altitudinum: quare ex p. 1. tract. 9. expens. 5. erit proportio duplicata trianguli BCL ad triangulum ADI, quę basis BL ad basim AI, scilicet V ad R; proportio vero V ad S data est duplicata eius, quam habet V ad R. Ergo triangum BCL ad triangulum ADI habet proportionem, vt V ad S.

* Idem dicendum de triangulis BGC, & AHD; siquidem eadem altitudine gaudent XN, & QT, basis verò GC est ad basim HD in æquiangulis triangulis OGC, OHD, vt OG ad OH; sed iam ostensum est OG ad HO eam esse proportionem, quæ LO ad OI, idest ex effectione, quam V ad R. Ergo & basis GC erit basim HD, vt V ad R. Cùm itaque bases, & altitudines obtineant eandem proportionem, & proportio triangulorum sit composita ex altitudinibus, & basibus, quę est eadem, erit duplicata eius, quæ est V ad R, nempe erit, vt V ad S.

Si verò agatur de diminutione ductis diagonalibus AD, HI fiat vt S ad R, sic AO ad BO, quæ mensuretur ab O in B, & ducta parallela BL cætera perficiantur: vt priùs, & compleatur spatium BGCL, eritque spatium musicum AHDI ad spatium musicum BGCL, vt S ad V eadem prorsus ratione, quam supra assignauimus.

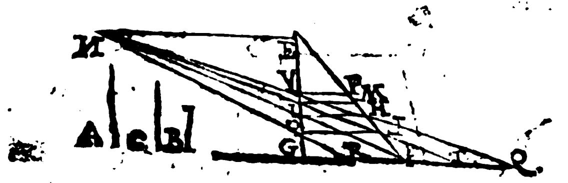
PROBL. II. PROPOS. XLIX.

Superficies iuxta datam proportionem Harmonicè se diminui incipientes constituere.

Sit data proportio A ad B $\frac{2}{3}$; oporteatque constituere superficies procedentes harmonicè iuxta datam proportionem; ita vt primus terminus sit $\frac{2}{2}$, secundus sit $\frac{2}{3}$, & reliqua progressio sequatur, vt exigit progressus harmonicus.

Reperiatur media proportionalis inter A, & B, & sit C; fiatque, vel exhibitum sit triangulum EFG, in quo harmonica proportio instituenda est, fiatque vt A ad C sic CE ad EF, & ducatur parallela HI. Deinde ducatur diagonalis FI, vsque dum occurrat ductæ à centro parallelæ EN basi FG in N, & diuisa FG per medium in R, ducatur NR, & vbi secat in O, ducatur parallela LO. Dico spatia Harmonica HO ad OF habere proportionem, quam A ad B.

Probatur. Nam ex propos. 1. tract. 16. part. 2. GE est diuisa harmonicè cum bases FL, & RG sint æquales; Vnde erit vt FE ad HE termini, sic differentia FL ad LH; sed vt FE ad HE termini, sic est A ad C, est autem A ad C proportio duplicata eius, quæ est A ad B; Ergo A ad B habebit proportionem duplicatam, quæ est FE ad HE terminos, & ideo, quę est trianguli FEG ad triangulum simile ex 20. l. 6. elem. HEI; sed ex Tract. 28. de propos. 11. vt est triangulum FEG ad triangulum HEI, sic est LG superficies scalena ad HO superficiem. Ergo vt est A ad B, sic est LG ad HO, nempe, vt $\frac{2}{2}$ ad $\frac{2}{3}$, & *inuertendo* HO ad LG, vt B ad A: quare si sequaris diminuendo harmonicè ducendo lineas QN, & TN à



partibus æqualibus QT, & TF partibus FR, & RG, successiuè harmonicè à data proportione decrescent termini, vt primus sit $\frac{2}{2}$, tertius sit $\frac{2}{3}$, quintus $\frac{2}{4}$, septimus $\frac{2}{5}$, & sic successiuè ex pr. 3. Tr. 16. p. 2. Siquidem ex tract. 28 de progr. prop. 11. etiam spatia triangularia harmonicè proportionaliter decrescunt, vt ipsæ lineæ, quæ in primis terminis duplicatam FE ad HE obtinent proportionem, quæ est vt 2. ad 3. vel A ad B: lineæ verò illæ ex 3. tract. 16. part. 2. vt numeri $\frac{2}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{4}$ procederent: quare etiam triangulorum superficies, quæ duplicatam basium habet proportionem, ita successiuè propagabuntur. *Differentiæ* verò erunt, successiuè, vt primus ad tertium ponitur, nempe vt $\frac{2}{2}$ ad $\frac{2}{3}$ idest $\frac{4}{4}$ ad $\frac{4}{6}$ ex pr. 12. tract. 16. at termini scilicet triangula successiuè se habebunt harmonicè vt $\frac{4}{4}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{4}{6}$ $\frac{4}{7}$ $\frac{4}{8}$ $\frac{4}{9}$, & cæt. ideoq; GL erit ad LI, vt $\frac{4}{4}$ ad $\frac{4}{6}$ scilicet vt QEB ad HIE, at HO ad HI, vt $\frac{4}{7}$ ad $\frac{4}{9}$, nimirum, vt triangulum LEO ad triãgulum MIE, & IM ad MY, vt $\frac{4}{6}$ ad $\frac{4}{8}$, scilicet, vt triangulum HEI ad triangulum PEY, vnde differentiæ non successiuè se habebunt, nisi bini, & binæ sumantur.

EXPENSIO X.

De planitiebus Isoperimetris constituendis.

Ad perfectam cognitionem mathematicam iste tractatus necessarius est, cum aliquibus videri possit æquales figurarum ambitus æqualia quoque spatia continere, quòd verum non est, vt videbimus: Quia verò aliquando opus potest esse, quod aliquis requirat figuram eiusdem ambitus, & æqualis areæ, ideo id quoque docebimus præstare.

DEFINITIO I.

Isoperimetræ figuræ sunt, quæ æquales ambitus habent.

DEFINITIO II.

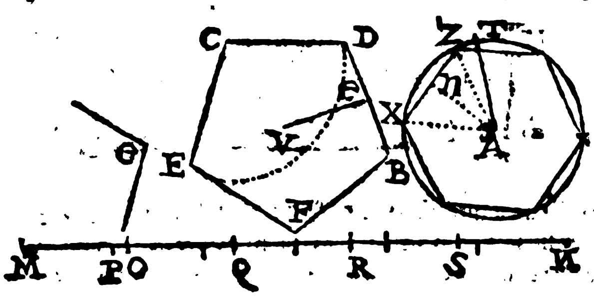
Area cuiuslibet figuræ est eius secundùm planum capacitas.

PROBL. I. PROPOS. L.

Figuram regularem alteri Isoperimetram constituere dato alterius figuræ constituendæ angulo.

SIt sexagonum A, cui figuram Isoperimetram V. g. Pentagonum oporteat constituere.

Latera sex sexagoni super lineam MN extendantur; quale vnum ex ipsis est MP. Hancque lineam diuide iuxta numerum angulorum ad centrum, seu quod idem est laterum fig. constituendę, nempe



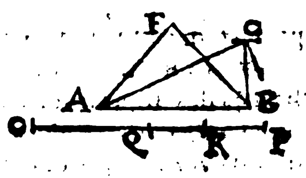
Pentagoni, vt est MO, & OQ, & QR, & RS, & SN: ex duabus verò MO, & OQ, fiat angulus C æqualis angulo pētagoni dato G, & idem fiat de reliquis tribus annectendo V. g. RQ ad CE sub eodem angulo interno G, & fiet Pētagonum dato Isoperimetrum; vt patet ex ipsa constructione.

Eodemque modo quælibet alia figura regularis alteri Isoperimetra constituetur.

PROBL. II. PROPOS. LI.

Dato angulo scaleno super eandem basim æquicrurum Isoperimetrum triangulum constituere.

SIt datum triangulum scalenum ABC, cui æquicrurum sit constituendum Isoperimetrum; Ducatur OP, & in illam transferantur latera AC, & CB, & sint OR, & RP, hæcque linea diuidatur bifariam in Q, & ex duabus æqualibus OQ, & QP super basim AB constituatur triangulum AFB. Nam illud erit Isoperimetrum alteri ACB.

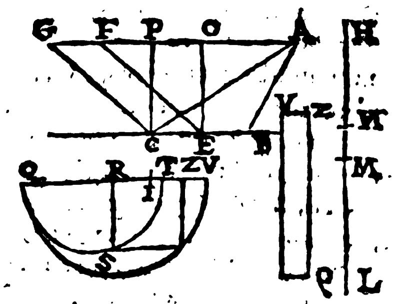


Probatur. Nam AC, & CB scaleni, sicut AF, FB æquicruris sunt æqualia lineæ OP; quare etiam inuicem basis verò AB communis.

PROBL. III. PROPOS. LII.

Dato triangulo parallelogrammum æquale, & Isoperimetrum constituere.

SIt datum triangulum BAC, cui æquale, simulque Isoperimetrum parallelogrammum sit constituendum: Latera BA, & AC in rectam HL transferantur, & sint HN, & NL, lineaque diuidatur bifariam in M sicut, & basis BC in E. Sumpto verò interuallo HM lineæ dimidio, centro E, quarto circuli ducatur, quæ secet parallelam AG in puncto F, ducaturque EF, & à C parallela EF linea, quæ sit CG. Dico parallelogrammum EFGC esse triangulo CBA Isoperimetrum, & æquale.



Probatur de æqualitate ex 33. lib. I. Quòd verò sit Isoperimetrum patet: Nam latera FG, & EC æqualia inuicem ob parallelismum sunt æqualia basi BC. Nam EC est medietas. Vnde basis æqualis FG erit etiam alteri medietati BE æqualis: Latera verò EF, CG sunt æqualia lateribus BA, & AC, quod sunt simul æqualia lineæ HL.

PROBL. IV. PROPOS. LIII.

Rectangulum parallelogrammo non rectangulo æquale, Isoperimetrum constituere.

SIt rectangulum OC in prec. fig. equale parallelogrammo ECFG; sed non isoperimetrum, oporteatque seruata æqualitate in isoperimetrum transformare.

Inueniantur eius lateribus EO, & OR media proportionalis RS, cuius quadratum ex 19. lib. 6. est rectangulo OC æquale. Deinde lateribus EC, & CG parallelogrammi non rectanguli redactis in rectam QV, quę sint QI, & IV, tota QV secetur ex tr. 15. propos. 16. vt sit inter segmenta QZ, & ZV sit media proportionalis, rectanguluq; QZV ex extremis QZ, & ZV erit æquale quadrato mediæ RS, & ideo rectangulo OC, & EG dato ex 19. lib. 6. Sed dico, quod etiam isoperimetrum sit parallelogrammo EG eidem dato.

Probatur. Quia latera ZV, & ZQ sunt æqualia lineæ VQ, cui, & sunt æqualia ex effectione latera EQ, & CG; quare etiam reliqua reliquis.

PROBL. V. PROP. LIV.

Dato rectilineo quocumque æquale, & isoperimetrum rectangulum constituere, cum fieri potest.

SIt datum multilaterum A rectilineum, cui æquale sit rectangulum ET, & linea PQ æqualis dimidiato ambitui rectilinei A.

Inueniatur, vt in antecedenti figura, media proportionalis inter rectāguli ET latera VT, & TE, & sit FG, quę si sit æqualis dimidio PV lineę PQ est ipsū quadratū ex FG, quod quæritur, si maior, tunc iam non potest secari PQ in duo segmenta, inter quæ FG sit media proportionalis; quia erecta normaliter itaque LO sit ad OI, vt OG ad OH, & ideo *permutando* LO ad OG, vt OI ad OH, hinc *componendo* LO cum OG, idest LG ad LO, vt OI cum OH idest IH ad OI; rursusque *permutando* LG erit ad HI, vt LO ad IO, idest vt V ad R.

Sed vt LO ad IO, sic est basis BL ad AI in triangulis æquiangulis BOL, & AOI ob parallelas BL, & AI. Ergo erit LG ad HI, vt basis BL ad basim AI, scilicet, vt V ad R.

Et quia in triangulis OND, & OQC, ita est ob parallelismum linearum, OQ ad ON, vt OG ad OH erit OQ ad ON, vt V ad R, & sic OT erit ad OX, quia est in æquiangulis triangulis LOT, & IOX, sic quoque, vt OT ad OX, latus LO, & OI. Quare erit OQ ad ON, vt OT ad OX, & *permutando* OQ ad OT, vt ON ad OX, & *componendo* OQ cum OT, idest QT ad OT, vt ON cũ OX, idest NX ad OX scilicet, vt V ad R.

Quia itaque triangula habent proportionem compositam ex proportione basium, & altitudinum ex propos. 22. Coroll. 2. lib. 6. altitudo verò trianguli BCL est TQ, & trianguli AID est XN; bases verò sunt BL, & AI. Ergo habebit proportionem compositam ex proportione eadem, quæ est, basium, & altitudinum: quare ex p. 1. tract. 9. expens. 5. erit proportio duplicata trianguli BCL ad triangulum ADI, quę basis BL ad basim AI, scilicet V ad R; proportio vero V ad S data est duplicata eius, quam habet V ad R. Ergo triangum BCL ad triangulum ADI habet proportionem, vt V ad S.

Idem dicendum de triangulis BOC, & AHD; siquidem eadem altitudine gaudent XN, & QT, basis verò GC est ad basim HD in æquiangulis triangulis OGC, OHD, vt OG ad OH; sed iam ostensum est OG ad HO eam esse proportionem, quæ LO ad OI, idest ex effectione, quam V ad R. Ergo & basis GC erit basim HD, vt V ad R. Cùm itaque bases, & altitudines obtineant eandem proportionem, & proportio triangulorum sit composita ex altitudinibus, & basibus, quę est eadem, erit duplicata eius, quæ est V ad R, nempe erit, vt V ad S.

Si verò agatur de diminutione ductis diagonalibus AD, ut fiat vt S ad R, sic AO ad BO, quæ mensuretur ab O in B, & ducta parallela BL cætera perficiantur vt priùs, & compleatur spatium BOCL, eritque spatium musicum AHDI ad spatium musicum BGCL, vt S ad V eadem prorsùs ratione, quam supra assignauimus.

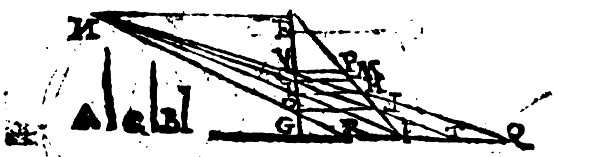
PROBL. II. PROPOS. XLIX.

Superficies iuxta datam proportionem Harmonicè se diminui incipientes constituere.

Sit data proportio A ad B $\frac{2}{3}$; oporteatque constituere superficies procedentes harmonicè iuxta datam proportionem; ita vt primus terminus sit $\frac{2}{2}$, secundus sit $\frac{2}{3}$, & reliqua progressio sequatur, vt exigit progressus harmonicus.

Reperiatur media proportionalis inter A, & B, & sit C: fiatque, vel exhibitum sit triangulum GEF, in quo harmonica proportio instituenda est, fiatque vt A ad C sic GE ad EF, & ducatur parallela HE. Deinde ducatur diagonalis FI, vsque dum occurrat ductæ à centro parallelæ EN basi FG in N, & diuisa FG per medium in R, ducatur NR, & vbi secat in O, ducatur parallela LO. Dico spatia Harmonica HO ad OF habere proportionem, quam A ad B.

Probatur. Nam ex propos. 1. tract. 16. part. 2. GE est diuisa harmonicè cum bases FD, & RG sint æquales; Vnde erit vt FE ad HE termini, sic differentia FL ad LH; sed vt FE ad HE termini, sic est A ad C, est autem A ad C proportio duplicata eius, quæ est A ad B. Ergo A ad B habebit proportionem duplicatam, quæ est FE ad HE terminos, & ideo, quę est trianguli FEG ad triangulum simile ex 20. l. 6. elem. HEI; sed ex Tract. 28. de propos. 11. vt est triangulum FEG ad triangulum HEI, sic est LG superficies scalena ad HO superficiem. Ergo vt est A ad B, sic est LG ad HO, nempe, vt $\frac{2}{2}$ ad $\frac{2}{3}$, & *inuertendo* HO ad LG, vt B ad A: quare si sequaris diminuendo harmonicè ducendo lineas QN, & FN à



partibus æqualibus QT, & FE partibus FE, & EO, successiuè harmonicè à data proportione decrescent termini, vt primus sit $\frac{2}{2}$, tertius sit $\frac{2}{4}$, quintus $\frac{2}{6}$, septimus $\frac{2}{8}$, & sic successiuè ex pr. 3. Tr. 16. p. 2. Siquidem ex tract. 28. de progr. prop. 11. etiam spatia triangularia harmonicè proportionaliter decrescunt, vt ipsæ lineæ, quæ in primis terminis duplicatam FE ad HE obtinent proportionem, quæ est vt 2. ad 3. vel A ad B: lineæ verò illæ ex 3. tract. 16. part. 2. vt numeri $\frac{2}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{4}$ procederent: quare etiam triangulorum superficies, quæ duplicatam basium habet proportionem, ita successiuè propagabuntur. Differentiæ verò erunt, successiuè, vt primus ad tertium ponitur, nempe vt $\frac{2}{2}$ ad $\frac{2}{4}$ idest $\frac{4}{4}$ ad $\frac{4}{6}$ ex pr. 12. tract. 16. at termini scilicet triangula successiuè se habebunt harmonicè vt $\frac{4}{4}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{4}{6}$ $\frac{4}{7}$ $\frac{4}{8}$ $\frac{4}{9}$, & cæt. ideoq; GL erit ad LI, vt $\frac{4}{4}$ ad $\frac{4}{5}$, vt ... ad HIE, at HO ad HI, vt $\frac{4}{5}$ ad $\frac{4}{7}$, nimirum, vt triangulum LEO ad triágulum MIE, & IM ad MY, vt $\frac{4}{6}$ ad $\frac{4}{8}$, scilicet, vt triangulum HEI ad triangulum PEY, vnde differentiæ non successiuè se habebunt, nisi binæ, & binæ sumantur.

EXPENSIO X.

De planitiebus Isoperimetris constituendis.

AD perfectam cognitionem mathematicam iste tractatus necessarius est, cum aliquibus videri possit æquales figurarum ambitus æqualia quoque spatia continere, quod verum non est, vt videbimus: Quia verò aliquando opus potest esse, quod aliquis requirat figuram eiusdem ambitus, & æqualis areæ, ideo id quoque docebimus præstare.

DEFINITIO I.

Isoperimetra figuræ sunt, quæ æquales ambitus habent.

DEFINITIO II.

Area cuiuslibet figuræ est eius secundùm planum capacitas.

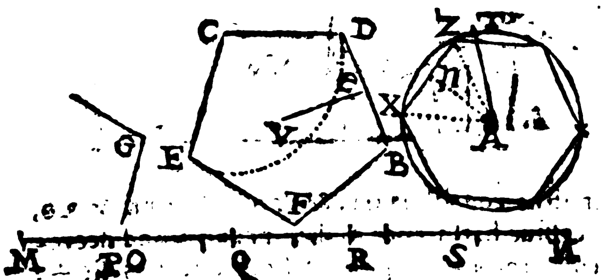
Vuu PROBL.

PROBL. I. PROPOS. L.

Figuram regularem alteri Isoperimetram constituere dato alterius figuræ constituendæ angulo.

SIt sexagonum A, cui figuram Isoperimetram V. g. Pentagonum oporteat constituere.

Latera sex sexagoni super lineam MN extendantur; quale vnum ex ipsis est MP. Hancque lineam diuide iuxta numerum angulorum ad centrum, seu quod idem est laterum fig. constituendæ, nempe



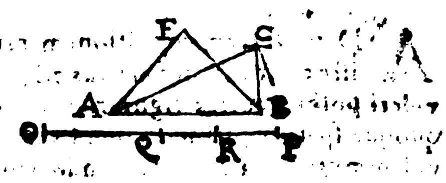
Pentagoni, vt est MO, & OQ, & QR, & RS, & SN: ex duabus verò MO, & OQ, fiat angulus C æqualis angulo pẽtagoni dato G, & idem fiat de reliquis tribus annectendo V. g. RQ ad CE sub eodem angulo interno C, & fiet Pẽtagonum dato Isoperimetrum; vt patet ex ipsa constructione.

Eodemque modo quælibet alia figura regularis alteri Isoperimetra constituetur.

PROBL. II. PROPOS. LI.

Dato angulo scaleno super eandem basim æquicrurum Isoperimetrum triangulum constituere.

SIt datum triangulum scalenum ABC, cui æquicrurum sit constituendum Isoperimetrum; Ducatur OP, & in illam transferantur latera AC, & CB, & sint OR, & RP, hæcque linea diuidatur bifariam in Q, & ex duabus æqualibus OQ, & QP super basim AB constituatur triangulum AFB. Nam illud erit Isoperimetrum alteri ACB.

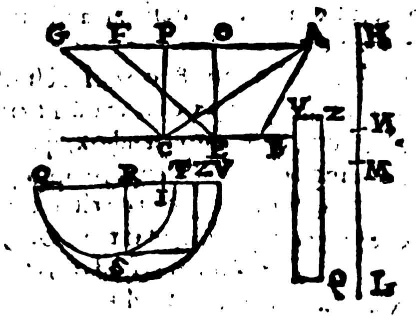


Probatur. Nam AC, & CB scaleni, sicut AF, FB crura æquicruris sunt æqualia lineæ OP; quare etiam inuicem basis verò AB communis.

PROBL. III. PROPOS. LII.

Dato triangulo parallelogrammum æquale, & Isoperimetrum constituere.

SIt datum triangulum BAC, cui æquale, simulq; Isoperimetrum parallelogrammum sit constituendum: Latera BA, & AC in rectam HL transferantur, & sint HN, & NL, lineaque diuidatur bifariam in M, sicut, & basis BC in E. Semper verò interuallo HM lineæ dimidiæ, centro E, [illegible] circuli ducatur, quæ secet parallelam AG [illegible] F, ducaturque EF, & à C parallela EF, li[illegible] sit CG. Dico parallelogrammum EFGC [illegible]angulo CBA Isoperimetrum, & æquale.



Probatur de æqualitate ex 33. lib. I. Quòd verò sit Isoperimetrum patet: Nam latera FG, & EC æqualia inuicem ob parallelismum sunt æqualia basi BC. Nam EC est medietas. Vnde basis æqualis FG erit etiam alteri medietati BE æqualis: Latera verò EF, CG sunt æqualia lateribus BA, & AC, quod sint simul æqualia lineæ HL.

PROBL. IV. PROPOS. LIII.

Rectangulum parallelogrammo non rectangulo æquale, Isoperimetrum constituere.

SIt rectangulum OC in præc. fig. æquale parallelogrammo ECFG; sed non isoperimetrum, oporteatque seruata æqualitate in isoperimetrum transformare.

Inueniantur eius lateribus EO, & OP; media proportionalis RS, cuius quadratum ex 19. lib. 6. est rectangulo OC æquale. Deinde lateribus EC, & CG parallelogrammi non rectanguli redactis in rectam QV, quæ sint QI, & IV, tota QV secetur ex tr. 15. propos. 16. vt SR inter segmenta QZ, & ZV sit media proportionalis; rectangulúq; QZV ex extremis QZ, & ZV erit æquale quadrato mediæ RS, & ideo rectangulo OC, & EG dato ex 19. lib. 6. Sed dico, quod etiam isoperimetrum sit parallelogrammo EC eidem dato.

Probatur. Quia latera ZV, & ZQ sunt æqualia lineæ VQ, cui, & sunt æqualia ex effectione latera EC, & CG, quare etiam reliqua reliquis.

PROBL. V. PROP. LIV.

Dato rectilineo quocumque æquale, & Isoperimetrum rectangulum constituere, cùm fieri potest.

SIt datum multilaterum A rectilineum, cui æquale sit rectangulum FT, & linea PO æqualis dimidiato ambitui rectilinei A.

Inueniatur, vt in antecedenti figura, media proportionalis inter rectãguli FT latera, & FZ, & sit FG, quæ si sit æqualis dimidio PV lineæ PO est ipsũ quadratũ ex FG, quod quæritur, si maior; vt hic, iam non potest secari PO in duo segmenta, inter quæ FG sit media proportionalis; quia erecta normaliter

TRACTATVS XXX.

De Transformatione Curuilineorum.

EA omnia, quæ de Geodæsia plana considerauimus, de curuilineis quoque animaduertere oportet; quamuis eleuatior sit contemplatio, & acrioris ingenij acumen exposcat; neque omnino sit perfecta; cum aliquæ, vt Hyperbola trasformari in rectilineas, vsque adhuc recusauerint, imò nec quidem in curuilineas diuersi generis deduci potuerint.

EXPENSIO I.

De quadratione Circuli Arithmetica.

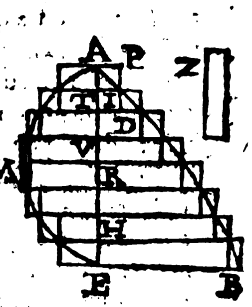
MVlti ne dum apud veteres; sed recentiores etiam, vt testatur Hyeronimus Vitalis ex nostris in suo Lexico mathematico in circuli Tetragonismum sc. quadrationem totis viribus incubuere, & quidem apud antiquos Antiphon, Bryso, Hyppocrates Chius. Inter Neotericos ante Orontius Finæus, Campanus, Nicolaus Cardinalis Cusanus, desudarũt, Sed ceteris sublimius Ambrosius à S. Vincentio in insigni opere, quod de Quadratura circuli inscripsit totam pene ętatem consumpsit. Sed licet multa consequutus fuerit omnino admiratione digna; tamen scopum assequutus nõ est. Nam eius quadraturas (quatuor enim protulit l. 10. de quadratura circuli inscripto) impugnat Vincentius Leotaudus preter multos alios, & euidentiùs deijcit, & licet Franciscus Xauerius Ayscon authorem propugnet. Id tamẽ libro Lugduni impresso anno 1663. nouę impugnationi eidem Leotaudo locum dedit. Vnde satiùs iudicaui antiquam quadraturam Archimedeam approximantem veritati proponere, quàm nouum tetragonismum, & laboriosissimum, & adhuc sub lite versantem producere.

THEOR. I. PROPOS. I.

Cuicumque figuræ curuilineæ, seu mixtilineæ possunt tot rectangula inscribi, aut circumscribi, vt relinquant quantitatem qualibet data minorem.

SIt data figura plana ABE, quę sit aut curuilinea, aut mixta. Dico tot rectangula posse, vel inscribi, vel circumscribi, vt, quod inter figuram curuilineam, vel mixtilineam, & rectangula superficiei remanet, & intercipitur, sit qualibet quantitate plana v. g. assignata Z minus.

Ducta AE hęc diuidatur taliter, vt maximum rectangulum, quod fit ex eius partibus, & maxima linea ei perpendiculariter insistente, vt BE, vel AM sit minus quantitate Z data, & cętera omnia rectangula simul sumpta relinquãt inter se, & figuram cui inscribuntur, vel circumscribuntur quantitatem data Z minorem.



Probatur. Relinquunt inscripta paulò magis quàm medietatẽ rectangulorum AI, & ID, & cęt. circũscripta verò AI, & ID paulò minus ob lineam curuã, & globosam (è contra de concaua esse asserendum) sed omnia rectangula IA, ID, & cętera curuam intercipientia ęquant BH vt patet, ergo spatia, quę remanent, vt AIT, vel IAP, & cętera omnia triangula mixtilinea conclusa inter curuam, & rectangula inscripta, quod sint minus quàm sub duplo, quam rectangula AI, & ID curuam stipantia ęqualia rectangulo BH ęquanti planitiem Z sunt minus, quam planities Z. Quod autem rectangula AI, & ID stipantia curuam AIB æquent rectangulum BH patet ex 3. lib. 2. Elem. cum TI, & cæterę sint partes ipsius EB, & TA, & ID, & cæteræ sint omnes æquales ex hypothe ipsi EM.

THEOR. II. PROPOS. II.

Figura quaelibet circulo circumscripta maiorem obtinet ambitum, quàm circulus, sicut figura inscripta minorem.

Licet praedictam hanc propos. ostendat Archimedes lib. I. de sphaera: nobis tamen ex communi conceptu eam probare satis erit. Circumscripta figura continet circulum. Ergo, cùm ex communi hominum sensu sit maius continens, quàm contentum, erit maior ambitus continentis multilateri, quàm contenti circuli.

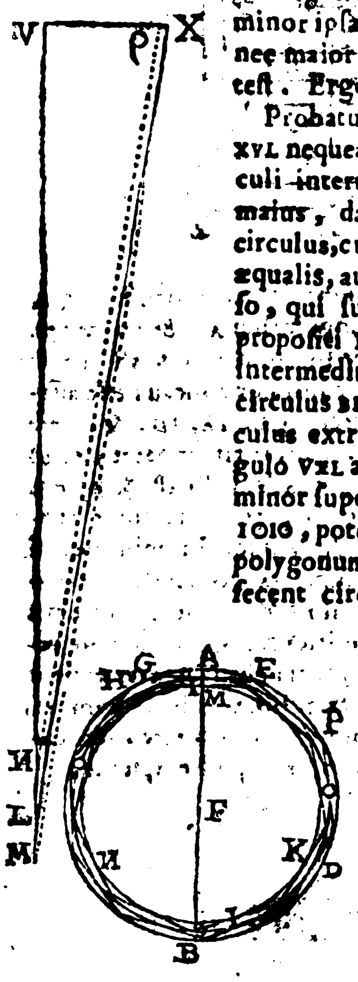
Probatur quoque secunda pars. Nam si circulus contineat multilaterum inscriptum ex eodem principio erit maior circulus, quàm inscripta figura.

THEOR. III. PROPOS. III.

Area cuiuslibet circuli aequalis est rectangulo triangulo ex linea recta aequali circumferentiae, tamquam vno crure, & semidiametro tamquam altero crure confecto.

Sit circulus IOIO intermedius, & supponatur, factum triangulum rectangulum XVL, cuius crus VL sit aequale ipsius circuli peripheriae, & VX semidiametro. Dico hanc rectanguli aream esse aequalem areae circuli IOIO.

Probatur. Nam, si non est aequalis erit area rectanguli VXL, aut maior, aut minor ipsa circuli planitie: Sed nec maior, nec minor esse potest. Ergo erit aequalis.



Probatur. Quòd triangulum XVL nequeat esse maius area circuli intermedij. Nam, si est maius, dabitur itaque aliquis circulus, cuius area, aut illi erit aequalis, aut proximè minor ipso, qui superet aream circuli propositi IOIO, & sit aliquid intermedium. Sit itaque iste circulus BDAH: Quia itaq; circulus extrinsecus BDAH rectangulo VXL aequalis, vel proximè minor superat circulum datum IOIO, poterit in ipso inscribi polygonum, cuius latera non secent circuli interioris IOIO peripheriam. Sed ad summum tangat. Quod fiet si ducto radio FI, tangens ei erigatur in I, quae sit EO; ductis enim ei aequalibus EP, &c. aequales circūferentias abscidēt; ex 28. l. 3. donec aut minor circūferentia remaneat, aut aequalis HG; si aequalis tanget ducta linea HG; si minor saltem non tanget,

Confecto itaq; polygono HPDB, erit vt polygonum comprehendens maius eius ambitus circumferentia circuli IOIO, quam claudit. Igitur si fiat huic polygono triangulū VXM rectangulum aequale ex propos. 5. Trac. praec. [illegible] nibus cruribus polygoni HPDB aequalis, erit maior; quàm VL aequalis peripheriae medij circuli IOIO. Quare etiam triangulum VXM erit maius, quàm triangulum VXL. Verùm triangulum VXL est aequale; vel maius circulo exteriori BDA (siquidem cum dicerent aduersarij triāgulum VXL esse maius, quàm circuli planities IOIO circulū BDA praesupposuimus triangulo illi VXL, aut aequalem, aut minorem) Cùm ergo triangulum VXL sit, vel aequale vel maius circulo exteriori BDA; iste circulus exterior BDA, remaneret minor ipso triangulo VXL, quod etiam minus est triangulo VXM, vt ostensum est: at VXM factū est aequale polygono HPDB; ergo circulus exterior BDA esset minor, vel aequalis Polygono HPDB; quod in se concludit, quod est absurdum.

Probatur deinde. Quòd triangulum praedictum VXL non possit esse minus, quàm superficies circuli propositi IOIO: Quoniam, si est minus, dabitur aliquis circulus intermedius, aut aequalis, aut maior praedicto rectangulo VXL. Sed tamen non excedens circulum datum IOIO. Detur MKN, & illi circumscribatur polygonum, cuius latera in circulo dato IOIO comprehendantur, vt supra documus efficere, erit itaque area huius polygoni minor area circuli dati OIOI circumscribentis. Vnde si fiat rectangulum aquale ex NKM ambitu polygoni, vt supra prop. 5. praec. Tr. vt est QVN hoc erit minus rectangulo triangulo VXL, vt pote cruro minori vel aequali perpendiculari FM, & VN ambitu polygoni inscripti. Cùm ergo triangulū VXL maius sit triāgulo VQN, etiam circulus internus MKN, qui est maior ex aduersarijs, vel aequalis triāgulo VXL (siquidē cū afferrent VXL esse minus circulo IOIO circulū MKN fecimus, aut maiorē proximè, aut aequalē ipsi triāgulo VXL) Circulus inquā internus MKN erit maior, quā Polygonū, à quo circumscribitur, cū polygono illi triāgulū VQN sit aequale, & minus triangulo VXL, qui internus praedictus circulus MKN aut maior est, aut ipsi aequalis ex suppositione. Hoc autem esse nequit, nempe quòd internus circulus comprehensus sit aequalis Polygono, à quo circumscribitur.

Cùm ergo triangulum VXM, nec minus esse possit, nec maius circuli dati OIOI planitie oportebit fateri, quòd illi aequetur.

THEOR. IV. PROP. IV.

Si detur triangulum, cuius altitudo sit radius, & basis portioni peripheriae aequalis subtendenti sectorem, hoc erit sectori aequale.

Exhibeatur sector ACB in circulo ACB & trianguli FEG crus FE radio AC aequetur, & basis FG aequetur arcui sectoris CB. Dico triangulum FEG aequale esse sectori ABC.

Probatur. Nam sit FH aequalis peripheriae toti. Erit itaque, vt arcus CB ad circulum: sic basis FG ad basim FH cùm ex propos. 7. lib. 5. aequalium ad aequales sit eadem proportio. Verùm ex prop. 33. lib. 6. vt arcus CB est ad peripheriam CBVC ita sector ACB est ad superficiem totius circuli, & ex I. lib. 6. vt basis [illegible] ita trian-

gulum

TRACTATVS XXX.

De Transformatione Curuilineorum.

EA omnia, quæ de Geodæsia plana considerauimus, de curuilineis quoque animaduertere oportet; quamuis eleuatior sit contemplatio, & acrioris ingenij acumen exposcat; neque omnino sit perfecta; cum aliquæ, vt Hyperbola trasformari in rectilineas, vsque adhuc recusauerint, imò nec quidem in curuilineas diuersi generis deduci potuerint.

EXPENSIO I.

De quadratione Circuli Arithmetica.

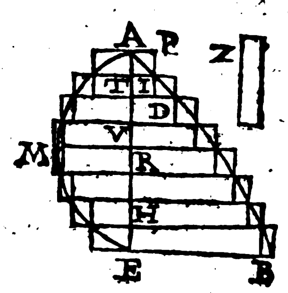
MVlti ne dum apud veteres; sed recentiores etiam, vt testatur Hyeronimus Vitalis ex nostris in suo Lexico mathematico in circuli Tetragonismum sc. quadrationem totis viribus incubuere, & quidem apud antiquos Antiphon, Bryso, Hyppocrates Chius. Inter Neotericos autē Orontius Finæus, Campanus, Nicolaus Cardinalis Cusanus, desudarūt. Sed cęteris sublimius Ambrosius à S. Vincentio in insigni opere, quod de Quadratura circuli inscripsit totam penè ętatem consumpsit. Sed licet multa consequutus fuerit omnino admiratione digna; tamen scopum assequutus nō est. Nam eius quadraturas (quatuor enim protulit l. 10. de quadratura circuli inscripto) impugnat Vincentius Leutaudus preter multos alios, & euidentiùs deijcit, & licet Franciscus Xauerius Ayscon authorem propugnet. Id tamē libro Lugduni impresso anno 1663. nouę impugnationi eidem Leutaudo locum dedit. Vnde satiùs iudicaui antiquam quadraturam Archimedeam approximantem veritati proponere, quàm nouum tetragonismum, & laboriosissimum, & adhuc sub lite versantem producere.

THEOR. I. PROPOS. I.

Cuicumque figuræ curuilineæ, seu mixtilineæ possunt tot rectangula inscribi, aut circumscribi, vt relinquant quantitatem qualibet data minorem.

SIt data figura plana ABE, quę sit aut curuilinea, aut mixta. Dico tot rectangula posse, vel inscribi, vel circumscribi, vt, quod inter figuram curuilineam, vel mixtilineam, & rectangula superficiei remanet, & intercipitur, sit qualibet quantitate plana V. g. assignata Z minus.

Ducta AE hęc diuidatur taliter, vt minimum rectangulum, quod fit ex eius partibus, & maxima linea ei perpendiculariter insistentē, vt BE, vel EM sit minus quantitate Z data, & cętera omnia rectangula simul sumpta relinquāt inter se, & figuram cui inscribuntur, vel circumscribuntur quantitatem data Z minorem.



Probatur. Relinquunt inscripta paulò magis, quàm medietatē rectangulorum AI, & ID, & cęt. circūscripta verò AI, & ID paulo minus ob lineam curuā, & globosām (è contra de concaua esse asserendum) sed omnia rectangula IA, ID, & cętera curuam intercipientia ęquant BH vt patet, ergo spatia, quę remanent, vt AIT, vel IAP, & cętera omnia triangula mixtilinea conclusa inter curuam, & rectangula inscripta, quod sint minus quasi sub duplo, quam rectangula AI, & ID curuam stipantia ęqualia rectangulo BH ęquanti planitiem Z sunt minus, quam planities Z. Quod autem rectangula AI, & ID stipantia curuam AB æquent rectangulum BH patet ex 3. lib. 2. Elem. cum TI, & cæterę sint partes ipsius EB, & TA, & ID, & cæteræ sint omnes æquales ex hypothe ipsi BH.

THEOR. II. PROPOS. II.

Figura qualibet circulo circumscripta maiorem obtinet ambitum, quàm circulus, sicuti & figura inscripta minorem.

LIcet pressius hanc propos. ostendat Archimedes lib. I. de sphera: nobis tamen ex communi conceptu eam probare satis erit. Circumscripta figura continet circulum. Ergo, cùm ex communi hominum sensu sit maius continens, quàm contentum, erit maior ambitus continentis multilateri, quàm contenti circuli.

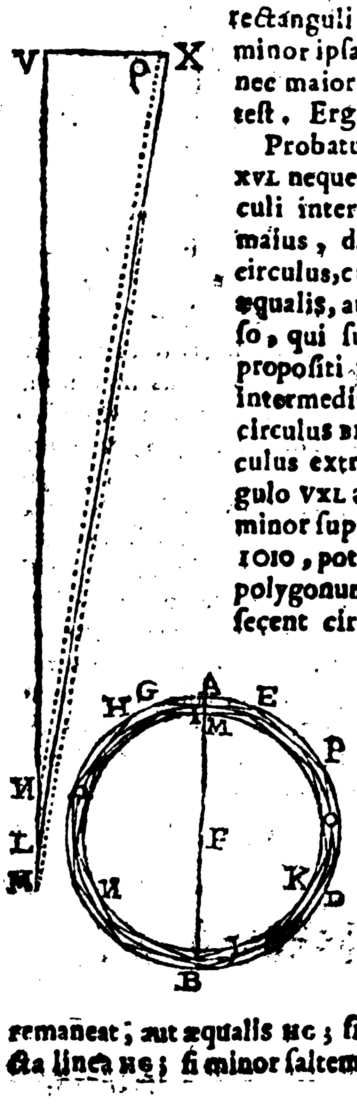
Probatur quoque secunda pars. Nam si circulus contineat multilaterum inscriptum ex eodem principio erit maior circulus, quàm inscripta figura.

THEOR. III. PROPOS. III.

Area cuiuslibet circuli æqualis est rectangulo triangulo ex linea recta æquali circumferentiæ, tamquam vno crure, & semidiametro tamquam altero crure confecto.

SIt circulus IOIO intermedius, & supponatur factum triangulum rectangulum XVL, cuius crus VL sit æquale ipsius circuli peripheriæ, & VX semidiametro. Dico hanc rectanguli aream esse æqualem areæ circuli IOIO.

Probatur. Nam, si non est æqualis erit area rectanguli VXL, aut maior, aut minor ipsa circuli planitie: Sed nec maior, nec minor esse potest. Ergo erit æqualis.



Probatur. Quòd triangulum XVL nequeat esse maius area circuli intermedij. Nam, si est maius, dabitur itaque aliquis circulus, cuius area, aut illi erit æqualis, aut proximè minor ipso, qui superet aream circuli propositi IOIO, & sit aliquid intermedium. Sit itaque iste circulus BDAH: Quia itaq; circulus extrinsecus BDAH rectãgulo VXL æqualis, vel proximè minor superat circulum datum IOIO, poterit in ipso inscribi polygonum, cuius latera non secent circuli interioris IOIO peripheriam. Sed ad summùm tangãt. Quod fiet si ducto radio FI, tãgens ei erigatur in I, quæ sit EG; ductis enim ei æqualibus EP, &c. æquales circũferentias abscidet; ex 31. l. 3 donec aut minor circũferentia remaneat; aut æqualis HG; si æqualis tanget ducta linea HG; si minor saltem non tanget.

Confecto itaq; polygono HPDB, erit vt polygonum comprehendẽs maior eius ambitus, quàm circumferentia circuli IOIO, quam claudit. Quare obrẽ, si fiat huic polygono triangulũ XVM rectangulum æquale ex propos. 5. Tract. primo. licet VM omnibus cruribus polygoni HPDB æqualis, erit maior; quàm VL æqualis peripheriæ medij circuli IOIO Quare etiam triangulum VXM erit maius; quàm triangulum VXL. Verùm triangulum VXL est æquale; vel maius circulo exteriori BDA (siquidem cum dicerent aduersarij triãgulum VXL esse maius, quàm circuli planities IOIO circulũ BDA præsupposuimus triangulo illi VXL, aut æqualem, aut minorem) Cùm ergo triangulum VXL sit, vel æquale, vel maius circulo exteriori BDA; iste circulus exterior BDA, remaneret minor ipso triãgulo VX, quod etiam minus est triangulo VXM, vt ostensum est: at VXM factũ est æquale poligono HEPDB, ergo circulus exterior BDA esset minor, vel æqualis Polygono HEPDB; quod in se concludit, quòd est absurdum.

Probatur deinde. Quòd triangulum prædictum VXL non possit esse minus, quàm superficies circuli propositi IOIO: Quoniam, si est minus, dabitur aliquis circulus intermedius, aut æqualis, aut maior prædicto rectangulo VXL. Sed tamen non excedens circulum datum IOIO. Detur MKN, & illi circumscribatur polygonum, cuius latera in circulo dato IOIO comprehendantur, vt supra docuimus efficere, erit itaque area huius polygoni minor area circuli dati OIOI circumscribentis. Vnde si fiat rectangulum æquale ex NKM ambitu polygoni, vt supra prop. 5. præc. Tr. vt est QVN hoc erit minus rectangulo triangulo VXL, vtpote crure minori VQ æquali perpendiculari FM, & VN ambitu polygoni inscripti. Cùm ergo triangulũ VXL maius sit triãgulo VQN, etiam circulus internus MKN, qui est maior ex aduersarijs, vel æqualis triãgulo VXL (siquidẽ cũ assererent VXL esse minus circulo IOIO circulũ MKN fecimus, aut maiorẽ proximè, aut æqualẽ ipsi triãgulo VXL) Circulus inquã internus MKN erit maior, quã Polygonũ, à quo circumscribitur, cũ polygono illi triãgulũ VQN sit æquale, & minus triangulo VXL, qui internus prædictus circulus KNM, aut maior est, aut ipsi æqualis, ex suppositione; Hoc autem esse nequit, nempe quod internus circulus comprehensus sit æqualis Polygono, à quo circumscribitur.

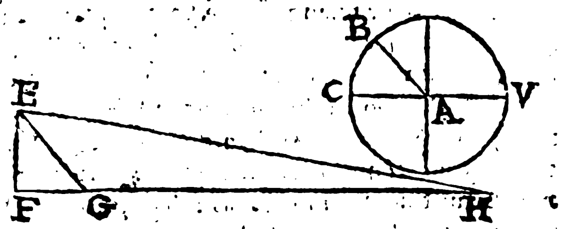
Cum ergo triangulum VXM, nec minus esse possit, nec maius circuli dati OIOI planitiæ oportebit fateri; quòd illi æquetur.

THEOR IV. PROP. IV.

Si detur triangulum, cuius altitudo sit radius, & basis portioni peripheriæ æqualis subtendenti sectorem; hoc erit sectori æquale.

EXibeatur sector ABC, in circulo BCV: & trianguli FEG crus FE radio AC æquetur, & basis FG æquetur arcui sectoris CB. Dico triangulum EFG æquale esse sectori ABC.

Probatur. Nam sit FH æqualis peripheriæ toti. Erit itaque, vt arcus CB ad circulum: sic basis FG ad basim FH cùm ex propos. 7. lib. 5. æqualium ad æquales sit eadem propositio. Verùm ex prop. 39. lib. 6. vt arcus CB est ad peripheriam CAVC, ita sector ACB est ad superficiem totius circuli, & ex 1. lib. 6. vt basis GF ad basim FH, ita EFG triangulum



gulum eiusdem altitudinis FGC ad triangulum FEH. Ergo ex 16. lib. 5. ita erit sectoris planicies ACB ad planu circulic BV, vt trianguli FEG ad planitie trianguli EFH, & permutando. Ita erit ACB sector ad FEG triangulum, vt circulus CBV ad triangulũ EFH: sed circulus, & triangulum in preced. ostensa sunt æqualia: ergo etiam sector ACB, & triangulum FEG equabuntur: quare, & rectangulum ex dimidio, vel radio, vel linea æquali dimidio arcui erit ex 39. equale sectori ACB.

PROBL. I. PROPOS. V.

Aream circuli ex data diametro, & circumferentia proximè inuenire.

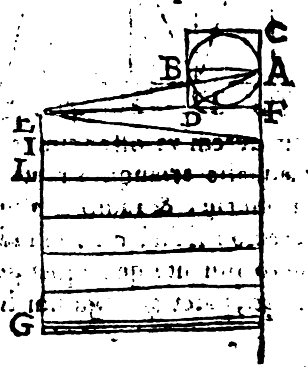
CVm ex ostensis propos. 3. Tract. 16. inuenerimus circumferentiam ad diametrum se habere vt 22. ad 7. quæ tamen verã paulò maior est. Hinc si accipiamus 7. pro diametro, & 22. pro circumferentia, mutuâ horum numerorum multiplicatione efficiemus rectangulum, seu planum 154. cuius medietas 77. ex propos. 40. lib. 1. Elem. erit equalis triangulo rectangulo XVL; de quo iam ostendimus prop. 1. aree circuli æquale esse.

Si verò placeat aream rectanguli vera circuli planitie minorem insensibiliter. Accipies diametro vera circumferentiam habentem minorem proportionem: quam 22. ad 7. nimirum eam, quam prop. 5. tract. 18. explicauimus, in qua posito diametro partium 71. circumferentia erit 223. nimirum in proportione tripla super decupartiente septuagesimas primas, idest comprehendet diametrum ter, & ferè septimam ipsius partem deficiente tantùm $\frac{1}{7}$ vnius vnitatis. Et ita vt priùs multiplicatus diameter 71. per circumferentiam 223. efficiet aream 15833. que bifariam diuisa erit 7916 $\frac{1}{2}$ circuli planities.

THEOR. V. PROPOS. VI.

Area circuli proportionem eam consequitur ad quadratum diametri, quam 11. ad 14. proximè.

SIt circulus, cuius diameter AB, eiusque quadratum CD. Dico aream circuli veluti 11. ad 14. ad quadratum diametri respondere.



Dimidium quadrati CD erit AD, & quarta pars eius erit triangulum FAD. Producatur diameter FD in E, atque FE æqualis circumferentiæ præsupponatur, & ducatur AE. Itaque triangulum FAE erit eiusdem altitudinis, ac triangulum FAD, quod est quarta pars quadrati ex diametro. Quamobrem ita erit triangulum FAE ad triangulum FAD, nempe ad quartam partem quadrati CD, vt basis FE ad basim FD ex 1. lib. 6. Elem. quæ est proximè, vt 22. ad 7. Quare erit triangulum FAE, equale areæ circuli ex 3. h. ad FAD æquale quartæ parti quadrati proximè, vt 22. ad 7. quare FAE triangulum ad quadratum totum quater maius CD erit vt 22. ad numerum quater maiorem 28. quę est eadem proportio, quæ 11. ad 14.

PROBL. II. PROPOS. VII.

Ex diametro noto aream circuli proximè inuenire.

SIt notus diameter partium 84. quadretur hic numerus, & sit 7056. Vtendo itaque regula aurea fiat, vt 14. ad 11. sic 7056. ad aliud, & exeret area circuli 5544.

THEOR. VI. PROPOS. VIII.

Quadratum circumferentiæ se habet ad aream circuli, vt 88. ad 7.

PRobatur. Nam posito FE part. 22 in figura prop. 6. antec. nempe æquali proximè circumferentiæ; & posito diametro partium 7. si fiat quadratum ex FE circumferentia continebit sex rectangula dupla AFE ex 3. lib. 2. Elem. & insuper rectangulum nigrum ex septima parte constans: Nam 22. continet ter diametrum partium 7. & ideo sexies semidiametrum partium $3\frac{1}{2}$, & addit insuper septimam partem diametri, nempe $\frac{2}{7}$ semidiametri: Quare rectangulum FI ex circumferentia FE, & semidiametro FA erectum, erit duplò maius, quàm triangulum FAE proximè æquale areæ circuli. Propterèaque quadratum FG ex circumferentia continebit duodecies aream circuli, & insuper parallelogrammum nigrum, quod est septima pars rectanguli FL sub toto diametro EL, & tota circumferentia FE comprehensi, at $\frac{2}{7}$ dimidij rectanguli FI, & ideo $\frac{4}{7}$ trianguli FAE: Si itaque ad vitandas fractiones efficiamus aream circuli, vel triangulum ei proximè æquale FAE esse partium 7. totum quadratum FG duodecies maius erit, cum quatuor septimis partibus, nempe cum rectangulo nigro part. 88. Nam 7. duodecies acceptus facit 84. & $\frac{4}{7}$ additi efficiunt 88. & ideo quadratum FG erit partium 88. posita area diametri partium 7.

PROBL. III. PROPOS. IX.

Aream circuli proximè inuenire.

FIat, vt 88. ad 7. ita quadratum circumferentiæ 264. ad aliud, & adhibita regula proportionum ellicietur numerus 5544. pro area circuli quæsiti.

PROBL. IV. PROPOS. X.

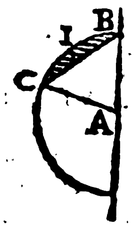
Data sectoris peripheria, & cruribus, eius aream admensire.

Sit, vt in pr.4. sector ABC, cuius AC crus notū sit partium 25. pedum, & arcus BC 10. pedum, Ideoque ex prop. 4. huius triangulum rectangulum EFC, cuius crus FE sit 25. pedum, & basis FG 10. pedum erit ei æquale. Quaderè si mutua multiplicatione fiat rectangulum partium 250 & medietas sumatur partium 125. hęc erit sectoris area. Ita quæsita quantitas.

PROBL. VI. PROPOS. XI.

Cognito sectore, & chorda cognoscere aream segmenti circuli.

Sit segmentum circuli nigrum BIC, detturque chorda BC, & cognitus quoque sector BACI;

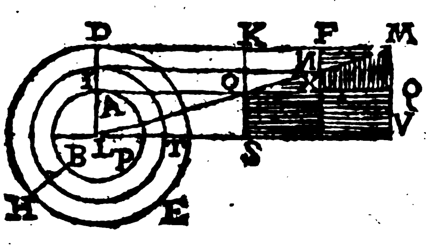


Debet priùs per ea, quæ prop.16. Tract.29. triangulum BAC cognosci. A sectore itaque subductum triangulum CBA relinquet segmentum nigrum ICB.

PROBL. VII. PROPOS. XII.

Annulum planum in quadratum redigere, & mensurare.

Detur annulus DEHAPB planus, cuius notus sit circulus medius ITI, vt faciliter ex nota diametro inueniri potest: multiplicetur hic circulus per residuum semidiametri AD subducto diametro minori LA, & productum erit area prædicti annuli DEHAPB.



* Prob. Nam fiant parallelogrāma LM, LN, & LO æqualia singulis circulis DEH, ITI, & BAP; quæ ob latera æqualia semicircumferentijs erunt similia, cùm sit ita radius vnius circuli ad radium alterius vt peripheria ad peripheriā ex pr.39.l.6.El.& ex 25 l.6. ideo triangula circa diametrum cōsistentia ex prop.35.lib.1.Elem. MOX, & MOQ, necnon, & complementa OD, & OV erunt æqualia: si autem spatio MXOQ auferatur triangulum MXO, & addatur æquale triangulum MFN, spatium nigrum parallelogrāmo albo XD remanebit æquale. Sed rectangulum istud est factum ex dimidia circumferentia circuli medij ITI, & residuo AD semidiametri LD. Quare ex integra circumferentia, cùm fiat duplo maius æquabitur toti gnomoni AMS: sed gnomon AMS æquatur annulo DEH, APB. Ergo etiam duplum rectangulum XD, quod fit ex peripheria ITI, & segmento AD æquabit annulum DEHABP.

Quod autem gnomon AMS æquet annulum patet. Nam rectangulum OAS æquat circulum BAP. Totum autem rectangulum LM æquat totum circulum DEH. Ergo subductus ab æqualibus rectangulum LO ab LM, & minimus circulus à toto circulo restabũt annulus DEHPBA, & gnomon AMS residua æqualia.

COROLLARIVM.

Hinc quoque agnosces partem annuli dimetiri. Nam sicut tota annuli media peripheria ITI cum residuo diametri AD multiplicata dat totum annulum; sic pars IT peripheriæ eiusdem medię cum eodem diametri residuo AD multiplicata partem annuli ADT, quem metitur, producet.

EXPENSIO II.

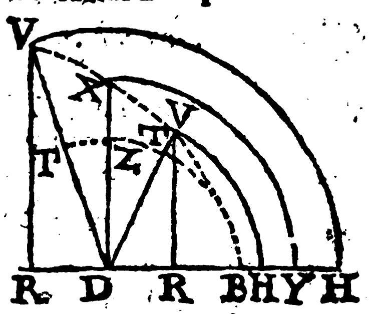
De Quadratione Circuli Geometrica.

Faciliori modo quadrationem circuli operi demandabimus mediante quadratrice, quam descripsimus tract.18. de flexis ex prop.14. vnde fit;

THEOR I. PROPOS. XIIII.

Circuli areæ æquale triangulum parallelogrammumque, & quadratum constituere.

Corollario 1. propos. 19. tract. 18. cit. probauimus DB sagittam ad DX radium esse, vt radius ad quadrantem XY, si in quadrante XY circuli propositi quadrandi describamus quadratricem; obtinebimus quoque sagittam DB illius. Quamobrem, si sagittę inuentę DB, & radio XD tertiam proportionem inueniamus, hęc erit ęqualis quadranti XY, quam quadruplicabimus, & totum ambitum circuli, cuius radius XD æquabit.



Quoniam autem vt ostendimus prop.2. h. area circuli est æqualis triangulo rectangulo ex linea æquali peripherię, & radio tamquam ex duobus lateribus erecto: si faciamus ex radio DX, & tertia proportionali inuenta, quę ęquat peripheriam circuli XY totius; patet triangulum hoc esse ęquale areę

areę circuli, cuius quadrans DXY. Quod si ex dimidio prędictę lineę inuentę, quę ęquat peripheriam constituatur rectangulum parallelogrammum, cùm hoc sit æquale triangulo prędicto, erit quoque æquale areę ipsius circuli, cum vt prędiximus prop. 23. tract. pręced. hoc modo triangulum in rectangulum ęquale conuertatur.

Tandem parallelogrammum commutetur in æquale quadratum, vel ex prop. 14. l. 2. vel reperiendo inter eius latera mediam proportionalem. Nam quadratum ex hac media erectum cum sit ęquale parallelogrammo consequenter etiam circulo æquabitur.

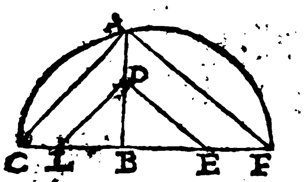
Vnus autem circulus in quadratum redactus multos alios similiter quadrabit. Quandoquidem si offeratur alius circulus similiter redigendus ad quadratum. Inueniatur quarta linea proportionalis istis tribus, nempe diametro circuli, & rectę ęquali eius circumferentię ex linea quadratrice iam notæ, & diametro circuli propositi ex propos. 12. lib. 6. & inuenietur linea ęqualis peripherię circuli oblati; siquidem ex prop. 33. lib. 6. ita diameter est ad diametrum, vt peripheria cuiuscumque circuli ad alius peripheriam. Si itaque hac quarta proportionali inuenta, & semidiametro circuli alterius propositi constituamus triangulum, hoc erit ęquale alterius circuli propositi areę, quod; & redigemus in rectangulum, & in quadratum ęquale, quę consequenter ipsa quoque aream circuli exęquabunt.

THEOR. I. PROPOS. XIV.

Quadratum in circulum æqualem transfundere.

Oportet priùs inuenisse aliquod quadratum ęquale alicui circulo ex prop. pręced. cuius circuli radius notus sit. Deinde inueniatur tribus quadrati lateri, & circuli ei ęqualis iam noti radio, & tandem lateri quadrati in circulum transfundendi quarta proportionalis ex prop. 12. lib. 6. & hęc erit diameter circuli ęqualis quadrati.

Detur itaque Ex. g. latus quadrati AB, & diameter notus circuli ei ęqualis BC; & latus quadrati transmutandi BD. Ducta parallela DL. Linea DL erit diameter circuli trasmutandi, qui cōsequetur aream ęqualem quadrato ex BD.



Probatur. Nam sit nota BF semicircumferentię prehabiti noti circuli ęqualis, nempe tertia proportionalis duabus BC, & BA, talis enim prop. 13. huius ostensa est, cum in fine illius fuit dictum, quòd latus quadrati circulo ęqualis sit medium proportionale inter lineam ęqualē semicircumferentię eius, & radium, cum sit æquale rectangulo ab illis extremis comprehenso, & ideo FB tertia proportionalis. Iungatur deinde FA, quę claudet cum AC, vt patet ex Coroll. prop. 13. l. 6. angulum rectum, cùm sit BC radius ad BA latus quadrati, vt BA ad BF semiperipheriā, deinde à puncto D ducatur DE parallela ipsi AF quibus positis.

Probatur prop. Nam quia est ob similitudinem triangulorum FB ad BA, vt EB ad BD, & vt BA ad BC ita DB ad BL; erit ex *æquo* eadem proportio FB ad BC, vt EB ad BL; quadere ex 43. l. 6. BE erit ęqualis circuli semicircūferentię, cuius semidiameter sit BL. Sicut FB est ęqualis circuli semiperipherię, cuius radius BC. Et quia quadratum DB est ęquale rectangulo ex linea BE ęquali peripherię, & BL radio; Etiam BD quadratum erit ęquale circulo, cui radius BL, illi rectangulo ex BE, & BL ęquali.

PROBL. II. PROPOS. XV.

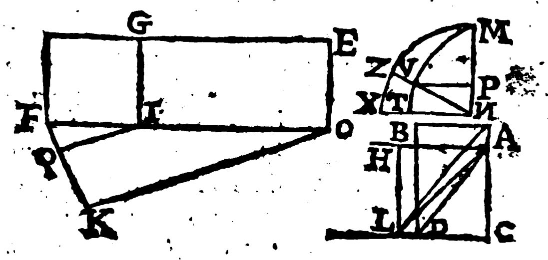
Dato sectori inuenire rectangulum æquale cognita proportione arcus subtensi ad circulum.

Quoniam ex propos. 4. huius. Rectangulum sub linea dimidio arcui æquali, & sub radio comprehensum est æquale sectori, si detur eius proportio ad circulum V.g. quòd octaua pars, accipietur octaua pars lineę rectę ęqualis peripheriæ inuentæ, & ex huius dimidio, & ex radio rectangulum constituetur. Nam dimidium octauæ partis lineæ æqualis peripherię erit æquale dimidio octauæ partis peripheriæ. Vnde rectangulum quoque erit ęquale sectori.

PROBL. III. PROPOS. XVI.

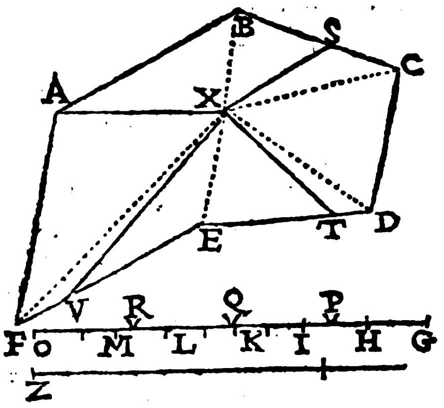
Dato rectangulo circulo æquale constituere eius sectorem æqualem dato rectangulo minori.

Detur rectangulū EF, æquale areę circuli sub FO semiperipheria, & sub radio OE cōprehensum, & rectangulum ACBD, eo minus, cui quęritur sector ęqualis. Si non est eiusdem altitudinis, ac EF, redigatur ad eandem altitudinem, ex prop. 6. part. 1. huius, & sit CH. Mensuretur deinde eius latus CL in latere FI. & ducta OI, erit parallelogrammū GF ęquale ipsi CH, & cōsequenter CB parallelogrammo. Deinde ex pr. 10. l. 6. Elem. secetur OK, vel FK diameter iuxta proportionem, quam habet FI ad OF, & sit eadem proportio FQ ad QK; Radio itaque FK seorsim fiat quadrans MNX in quo inscribatur quadratrix MVT, qui quadrans erit quarta pars parallelogrammi EF, cum sit quarta pars circuli æqualis.



Translata itaque FQ in PN ducatur ad quadratricem MVT parallela PV basi NT, & & per V à centro N ducatur radius NZ. Dico quadruplum sectoris NXZ esse ęquale parallelogrammo ABCD.

Prob. Nam vt sector NZX, est ad quadrantē MNX ita est arcus XZ ad quadrātis ambitū XZM ex 39. l. 6. vt autē arcus XZ ad XZM quadrantem, sic portio NP ad radiū NM ex 18. Tr. 18. & FQ ad QK, & FI ad FO, ex essect. & rectangulū cū sit eiusdē altitudinis ex I ducta XT erit SXT alia quarta pars, & sic de parte R, quæ poscit BF basim correspondentem diuidendam esse, vt LM ad LR in V, vt sit alia quarta pars TXV.



Quod Probatur. Nam ita est ex Coroll. prop. 37. GP ad totam GO, vt XABS ad totum rectilineum; sed GP est quarta pars totius GO. Ergo, & portio XABS erit quarta pars totius rectilinei.

Iterum, vt est GQ ad GO; ita est ABCTX ad totum rectilineum: sed GQ est $\frac{2}{4}$ totius GO. Ergo etiam ABCTX erit $\frac{2}{4}$ totius rectilinei. Ablato ergo AXS, nempe $\frac{1}{4}$, vt ostendi erit SXT $\frac{1}{4}$ totius, & sic dicas de alijs; vt per se patet.

EXPENSIO VII.

De figuris per lineas, vtcumque ductas partiendis.

POscit ordo, & ratio, vt quemadmodum superficies per parallelas lineas, & etiam per lineas ab vno centro progredientes diuisimus, sic, & eas per lineas incertas, & vtcumque ductas partiri doceamus.

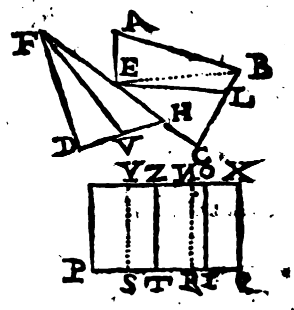
PROBL. IV. PROPOS. XLI.

Rectilineum quodcumque partiri per lineas non parallelas, nec in vnum punctum conspirantes.

SIt Rectilineum ABCDF, quod oporteat secare in tres partes lineis; quę nec sint parallelę, nec sint in vnum punctum coeuntes, vel quia id nequeat, aut quia non placeat.

Fiat rectangulum QO æquale areæ trianguli BAE, & OT æquale areæ trianguli BEC, & tandem PZ æquale areæ trianguli CFD. Diuidatur deinde QP latus in tres partes in R, & S. Et quia prima pars finit in basim IT parallelogrammi OT æqualis secundo triangulo BEC; ideo tribus IT, IR, & BC inueniatur quarta proportionalis BL, vt sit IT ad IR, vt BC ad EL. Ducaturque EL. Dico BAEL esse tertiam partem totius rectilinei.

Probatur. Quoniam QO rectangulum est ęquale triangulo BAE ex effectione; rectangulum verò OR, quod complet tertiam partem totius parallelogrammi æqualis toti rectilineo est æquale triangulo BEL. Ergo BAE, cùm BEL est tertia pars rectilinei; cum æqualium ad æqualia eadem sit proportio: Quod autem triangulum BEL sit æquale rectangulo OR; patet. Nam rectangulum OR est ad rectangulum OT, vt basis IR ad basim IT, & ita triangulum BEL ad triangulum EBC est vt basis BL ad basim BC: sed hæc eadem ex effectione, quam basis IR ad IT. Ergo rectangulum OR ad rectangulum OT habet eandem proportionem, quam BEL ad BEC, sed BEC, & OT sunt æqualia: Ergo etiam rectágulũ OR ex 12. l. 5. & triangulum BEL erunt æqualia. Eadem est probatio in trahenda linea FV: Siquidem secunda pars RS ex tribus finit in basem TP, in S parallelogrammi æqualis triangulo HFD. Vnde basis HD secanda est proportionaliter, vt TP secta est in S, & trahẽda FV, & FELCV ex dicta ratione erit FOVELC remanentis rectilinei $\frac{2}{3}$.



EXPENSIO VIII.

De planis è puncto extrinseco partiendis.

SIcut plana ab vno puncto in eis electo in plures partes discerpsimus, sic à puncto foris electo diuidemus, licet id sit minus necessariũ, & magis laboriosũ, & non semper in opus reducibile.

PROBL. I. PROPOS. XLII.

Datum Triangulum à dato extra ipsum puncto in datas partes secare.

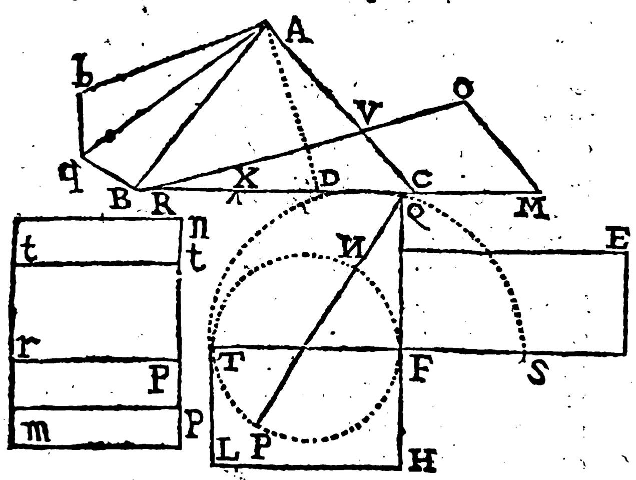
SIt propositum triangulum ABC $\frac{1}{3}$ trianguli BAC, in quo ex O puncto extra ipsum dato sit auferenda data pars æqualis triangulo ACD.

Ex lateribus trianguli AC, & CD fiat rectangulum EF; lineę verò parallelę OM ex 31. lib. 1. Elem. applicetur rectangulum æquale ipsi EF rectangulo, & fiat FX rectangulum, cuius alterum latus inuentum sit FT, mensuretur itaque à puncto C latus FT, & sit CX; rectangulo autem CX, & MC, idest TF, & FS fiat æquale quadratum QF, & huic quadrato ex 37. lib. 3. æquale rectangulum ex NQ, & PQ; quod fit constituendo latus quadrati pro tangente, quæ tangat circulum, cuius diameter NP, vel TP æquet CX; ita enim rectangulum NQ, & PQ ex cit. propos. 37. lib. 3. Elem. ęquabit quadratum ex FQ; & ideo ipsi æquale rectangulum ex CX, & MC, vel TF, FS æqualibus; transferatur itaque NQ latus ab X in R, & ducatur à pũcto dato O linea OR, & Dico CAD æquari triangulo VCR, & ideo per lineam OR auferri tertia pars trianguli BAC, vt fuit promissũ.

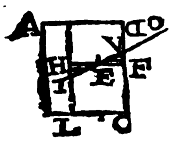
Probatur autem. Rectangulum ex CR, & XR, idest NQ, & PQ æqualibus æquatur quadrato tangentis FQ, ideoque rectangulo ex MC, & CX, ideoque latera ex 10. lib. 6. Eu. erunt reciprocè proportionalia, eritque CR ad MC, vt CX ad XR. Ideoque *componendo* erit CR cum MC, idest tota MR ad CR, vt CX cum XR, idest CR ad CX.

Verùm ob parallelas MO, & CV erit ex 4. lib. 6. MO ad CV, vt MR ad CR, quæ sunt in proportione, vt CR ad CX. Ideoque MO ex 16. lib. 5. erit ad CV, vt CR ad CX. Vnde ex 18. lib. 6. si ex extremis MO, & CX

& CX componatur rectangulum erit æquale rectangulo mediarum CV, & CR. At rectangulum ex MO, & CX ex effectione, idem, quod LF æquatur rectangulo EF, ex lateribus CA, & CD trianguli CAD. Quarè etiam eidem EF æquabitur rectangulum CV, & CR, & propter hoc latera erunt reciprocè proportionalia ex 10. lib. 6. El. & CR erit ad CA, vt CD ad CV, angulus verò C est idem. Vnde ex 11. lib. 6. triangula CAD, & CVR erunt æqualia.



Sit punctum datum O. Oporteatque rectangulum DABC in tres partes secare, diuidatur in tres partes, & sit tertia pars LA parallelogrammum, & reliquum LC duæ tertiæ partes erunt; diuidatur rursus per rectam FH, eritque HC tertia pars; secetur itaque FH bifariam in E. & ducatur OI. Dico trapezium VLCI esse tertiam partem.



Prob. Quia triangula nigra sunt æqualia cum sint rectangula, & anguli ad vertices E sint æquales: quare tantùm additur in triangulo nigro apud V, quantum aufertur in triãgulo nigro apud H. Vnde figura IVHL erit æquale tertiæ parti CFHL.

PROBL. III. PROPOS. XLIV.

Datum quodcumque rectilineum in partes destinatas per lineam à puncto extra ipsum ductam secare.

SIt rectilineum Abqr, quod diuidatur in triangula, & fiat parallelogrammum m n æquale toti, & in eo parallelogramma singulis triangulis æqualia, vt in fig. propos. anteced.

Nimirum mp triangulo bqA sicut pr ipsi Aqr, & r n vltimo BAC. Deinde diuide, quia punctum O est prope triangulum BAC rectang. r n in parte, quam voles, vel quæ tibi data fuerit n t, & quia non occupat totam partem r n ideo auferri poterit à triangulo BAC; quod si totam occupasset, vel maiorem: tunc triangula, in quæ diuisa est figura, essent alio pacto ordinanda, & ducenda essent à vertice C, vel partim à C partim ab A, & illis rectangula æqualia facienda in rectangulo m n, & videndum eodem modo, an pars data ab vno ex ipsis subduci posset. Nam eo pacto, & poterit à triangulo ipsi parallelogrammo æquali ea pars auferri per lineam à puncto dato protractam.

Quod cum obtinueris. Tunc illud rectangulum in triangulum æquale DAC parti in parallelogrammo ei correspondenti facta V. g. in parallelogrammo t n conuertendum est: Et deinde ea omnia præstanda, quæ dixi prop. penultima antecedenti, & erit diuisum rectilineum datum in partem datam.

COROLLARIVM.

POterit etiam, & aliquando diuidi in plures partes datas; sed non semper; quia non omnia triangula, quæ in figura fient, poterunt habere aliquod latus puncto dato obuersum, vt AC ad quod linea duci possit: talis, quæ non secet latus alterius trianguli. Sed ipsa experientia docebit possibilitatem rei, de qua quæritur.

EXPENSIO IX.

De planiciebus Musicis, & proiectis.

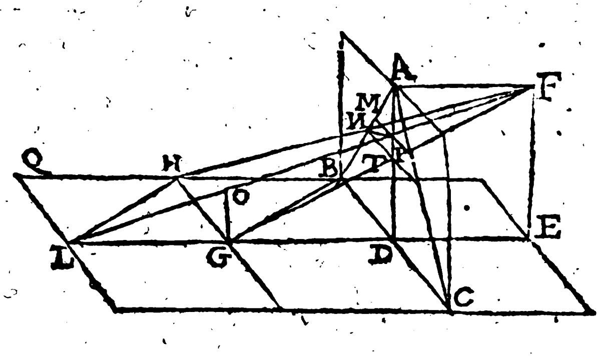
PLanities proiectæ sunt illæ, quæ nascuntur à lineis proiectorijs latera figurarum proijciendarum lambentibus, vt descripsimus tract. 26. propos. 8. & quidem de illis, prout conus proiectorius directè in eas incidit, non agemus, vtpote quod de eis certum sit esse in duplicata ratione suorum laterum, cùm vt ibi ostendimus de circulo figuræ similes, sint itaque de eis agendũ cum radij proiectorij in planũ obliquè incidũt, & præcipuè hic de eorum proportionibus agere in animo est.

THEOR. I. PROP. XLV.

Spatiorum originalium altitudines ad proiectorum altitudines obtinent eam proportionem, quæ distantia remotior ad altitudinem centri, si primæ sint; quod si secundæ etiam eam, quam distantia propinquior ad interceptam distantiam.

SIt spatium originale GHBD, cuius altitudo OD, distantia DE à centri F perpendiculari altitudine EF; altitudo verò huius plani proijciatur, & sit DT. Dico GD *altitudinem esse ad altitudinem* DT, *vt* GE *maior distantia, quam* DE, *ad* EF *altitudinem centri.*

Patet ex 4. lib. 6. Nam ob parallelismum linearum, ita GD est ad DT, vt GE ad EF.



Deinde sit altera altitudo LG, quę non sit prima, & immediata, vt est GD. Dico quod proiecta in TI habet proportionem, ne dum, quę est LE ad EF; sed insuper, quæ est distantia propinquior ad DE interceptam; nempe compositam ex LE ad EF, & GE ad DE, vt si DE esset 3, GE 4. at EF 2. & LE 5. haberet LG ad TI proportionem, quam 20. ad 6. quæ

est

est composita ex 4. & 5. ad 2. & 3.

Probatur. Nam ducta GO parallela ipsi DA. Erit LG ad GO, vt LB remotior distantia ad FE altitudinem centri, sed GO est ad TI; vt GF ad TF, & GF est ad TF, vt GE propinquior distantia ad DE interceptam distantiam. Ergo LG erit ad TI, ne dum vt LB ad FE; sed etiam, vt GE ad DE. Vnde LG ad TI erit composita proportio ex LB ad EF, & GE ad DE, & sic dicas de alijs sequentibus.

THEOR. II. PROPOS. XLVI.

* *Omnes latitudines planorum originaliũ ad omnes planorum proiectorum eam habent rationem, quam distantia à centro ad interceptam distantiam.*

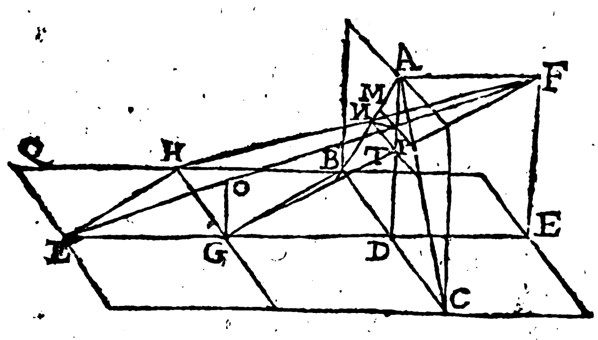
* LAtitudines originarias, vt GH eam dico *obtinere proportionem ad proiectas latitudines*, NT, quam distantia GE ad interceptam DE.

Probatur. Nam GH est ad NT, vt GF ad FT ex 4. lib. 6. elem. at vt GF ad FT; sic est GE ad DE. Ergo vt GH ad NT, sic GE ad DE; idem asseras de latitudine LQ, quæ se habet ad MI, vt LE ad DE.

THEOR. III. PROPOS. XLVII.

* *Superficies generans parallelis contenta, quæ sit diuisa diagonali in duo triangula, alterum quidem triangulum originarium ad proiectum eam habet proportionem duplicatam, quam distantia tota ad interceptam, & quam distantia remotior ad altitudinem centri radiosi; Alterum autem habet proportionem ex distantia minori ad interceptam, & distantia remotiori ad altitudinem centri radiosi.*

* DEtur superficies QLHG diuisa diagonali LH, quæ proijciatur, & proiecta sit in NITM. Dico superficiem LHG esse ad NIT primo, vt GE ad DE, secundò rursus vt GE ad ED, & tertiò ex LB ad EF.



Probatur. Nam triangula quæcumque ex Cor. 2. prop. 22. lib. 6. ea habent proportionem, quę componitur ex altitudinibus, & basibus: sed basis GH habet proportionem ad basim NT, quam GE ad DE: rursus altitudo LG habet proportionem ad TI altitudinẽ, vt LB ad EF, & GE ad DE ex 45. h. Ergo proportio trianguli LHG ad triangulum NIT consequitur proportionẽ GE ad DE duplicatã, nempe distantię minoris ad interceptam distantiam, & insuper distantiæ maioris ad altitudinem centri.

* Probatur quoque de reliquo triangulo LQH ad triangulum NMI. Nam LQ latitudo, & basis, collata ad MI basim est, vt maior distantia LE ad interceptam distantiam DE: altitudo verò LG est ad altitudinem TI, vt LB ad EF, & insuper, vt GE ad DE. Ergo triangulum NMI est in proportione composita altitudinum, & basium, nempe LE ad ED, & GE ad DE, & LB ad EF.

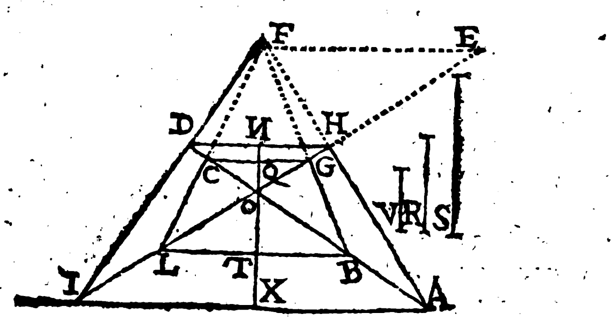
Aduerte tamen, quòd si sit prima superficies BHCD, & immediata, tunc habet proportionem triangulum originarium, quidem BDC ad triangulum GBT proiectũ, vt GE ad EF. Quoniam altitudo quidem DT talis est proportionis; basis verò BD eadem. At triangulum HCB ad triangulum BNT proportortionem obtinet compositam ex proportione GE ad EF, & proportione CD ad DE. Ratio est quia altitudo quidem CD ad DT eam proportionem obtinet GE ad EF, at latitudo aliam proportionem GE ad DE.

PROBL. I. PROPOS. XLVIII.

* *Superficies musicas augere, vel minuere secundum datam rationem.*

* SIt data superficies BGCL augenda secundum datam rationem V ad S. Inueniatur itaque media proportionalis R, & trahatur diagonalis LG, producaturq; in E, nempe vsque ad parallelam FE basi BL, & iterum prolungetur in I. Rursusq; ducatur diagonalis DA, quæ se secent in O; fiat deinde vt V ad R, sic LO ad IO, ducaturque ab I parallela AI basi LB, & duæ AF, & FI ab I, & A ducantur ad centrum F, quæ secabunt diagonales AD in D, & IE in H, perque punctum D ducatur HD parallela basi AI, & erit factum, quod imperatur. Nam BCLG planum est ad planum HDAI in proportione data V ad S.

* Nam ostendetur primo ADHI esse superficiem musicam, vel proiectam, quia ex proppos. 11. tract. 16. crura trianguli AFI, & BFL sunt secta proportionaliter parallelis AI, & HD musicè ob lineam IE in ea obliquè incidentem.



* Deinde basis LB ad basim AI est, vt V ad R. Nam ducta per O recta XN perpẽdiculari ad AI, linea LO est ad OI, vt OG ad OH in triangulis æquiangulis AOI, & ODH ob angulos ad verticem HOD, & AOI æquales, & angulos incidentis lineæ IE in parallelas HD, & GC, & BL, & AI, sed LO ad IO est vt V ad R ex effectione: Ergo etiam OG ad OH: Cum itaque

itaque LO sit ad OT, vt OG ad OH, & ideò *permutando* LO ad OG, vt OT ad OH, hinc *componendo* LO cum OG, idest LG ad LO, vt OT cum OH idest IH ad OT; rursusque *permutando* LO erit ad HI, vt LO ad IO, idest vt V ad R.

Sed vt LO ad IO, sic est basis BL ad AI in triangulis æquiangulis BOL, & AOI ob parallelas BL, & AI. Ergo erit LG ad HI, vt basis BL ad basim AI, scilicet, vt V ad R.

Et quia in triangulis OND, & OQC, ita est ob parallelismum linearum, OQ ad ON, vt OG ad OH erit OQ ad ON, vt V ad R, & sic OT erit ad OX, quia est in æquiangulis triangulis LOT, & IOX, sic quoque, vt OT ad OX, latus LO, & OI. Quadere erit OQ ad ON, vt OT ad OX, & *permutando* OQ ad OT, vt ON ad OX, & *componendo* OQ cum OT, idest QT ad OT, vt ON cũ OX, idest NX ad OX scilicet, vt V ad R.

Quia itaque triangula habent proportionem compositam ex proportione basium, & altitudinum ex propos. 22. Coroll. 2. lib. 6. altitudo verò trianguli BCL est TQ, & trianguli AID est XN; bases verò sunt BL, & AI. Ergo habebit proportionem compositam ex proportione eadem, quæ est basium, & altitudinum: quare ex p. 1. tract. 9. expens. 5. erit proportio duplicata trianguli BCL ad triangulum ADI, quę basis BL ad basim AI, scilicet V ad R; proportio verò V ad S data est duplicata eius, quam habet V ad R. Ergo triangum BCL ad triangulum ADI habet proportionem, vt V ad S.

Idem dicendum de triangulis BGC, & AHD; siquidem eadem altitudine gaudent XN, & QT, basis verò GC est ad basim HD in æquiangulis triangulis OGC, OHD, vt OG ad OH; sed iam ostensum est OG ad HO eam esse proportionem, quæ LO ad OI, idest ex effectione, quam V ad R. Ergo & basis GC erit basim HD, vt V ad R. Cùm itaque bases, & altitudines obtineant eandem proportionem, & proportio triangulorum sit composita ex altitudinibus, & basibus, quę est eadem, erit duplicata eius, quæ est V ad R, nempe erit, vt V ad S.

Si verò agatur de diminutione ductis diagonalibus AD, HI fiat vt S ad R, sic AO ad BO, quæ mensuretur ab O in B, & ducta parallela BL cætera perficiantur: vt priùs, & compleatur spatium BGCL, eritque spatium musicum AHDI ad spatium musicum BGCL, vt S ad V eadem prorsus ratione, quam supra assignauimus.

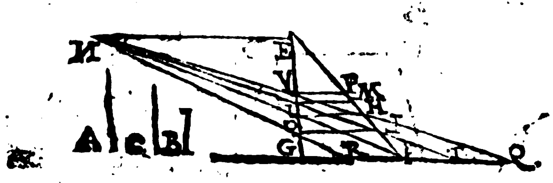
PROBL. II. PROPOS. XLIX.

Superficies iuxta datam proportionem Harmonicè se diminui incipientes constituere.

SIt data proportio A ad B $\frac{1}{2}$; oporteatque constituere superficies procedentes harmonicè iuxta datam proportionem; ita vt primus terminus sit $\frac{1}{2}$, secundus sit $\frac{1}{3}$, & reliqua progressio sequatur, vt exigit progressus harmonicus.

Reperiatur media proportionalis inter A, & B, & sit C; fiatque, vel exhibitum sit triangulum GEF, in quo harmonica proportio instituenda est, fiatque vt A ad C sic CE ad BF, & ducatur parallela MF. Deinde ducatur diagonalis FI, vsque dum occurrat ductæ à centro parallelæ EN basi FG in N, & diuisa FO per medium in R, ducatur NR, & vbi secat in O ducatur parallela LO. Dico spatia Harmonica HO ad OF habere proportionem, quam A ad B.

Probatur. Nam ex propos. 1. tract. 16. part. 2. GB est diuisa harmonicè cum bases FE, & RG sint æquales; Vnde erit vt FE ad HE termini, sic differentia FL ad LH; sed vt FE ad HE termini, sic est A ad C, est autem A ad C proportio duplicata eius, quæ est A ad B; Ergo A ad B habebit proportionem duplicatam, quæ est FE ad HE terminos, & ideo, quę est trianguli FEG ad triangulum simile ex 20. l. 6. elem. HEI; sed ex Tract. 28. de propos. 11. vt est triangulum FEG ad triangulum HEI, sic est LG superficies scalena ad HO superficiem. Ergo vt est A ad B, sic est LG ad HO, nempe, vt $\frac{1}{2}$ ad $\frac{1}{3}$, & *inuertendo* HO ad LG, vt B ad A: quare si sequaris diminuendo harmonicè ducendo lineas QN, & TN à



partibus æqualibus QT, & TF partibus FR, & RG, successiuè harmonicè à data proportione decrescent termini, vt primus sit $\frac{1}{2}$, tertius sit $\frac{1}{3}$, quintus $\frac{1}{4}$, septimus $\frac{1}{5}$, & sic successiuè ex pr. 3. Tr. 16. p. 2. Siquidem ex tract. 28 de progr. prop. 11. etiam spatia triangularia harmonicè proportionaliter decrescunt, vt ipsæ lineæ, quæ in primis terminis duplicatam FE ad HE obtinent proportionem, quæ est vt 2. ad 3. vel A ad B: lineæ verò illæ ex 3. tract. 16. part. 2. vt numeri $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ procederent: quare etiam triangulorum superficies, quæ duplicatam basium habet proportionem, ita successiuè propagabuntur. Differentiæ verò erunt, successiuè, vt primus ad tertium ponitur, nempe vt $\frac{1}{2}$ ad $\frac{1}{3}$ idest $\frac{1}{4}$ ad $\frac{1}{9}$ ex pr. 12. tract. 16. at termini scilicet triangula successiuè se habebunt harmonicè vt $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{9}$, & cæt. ideoq; GL erit ad LI, vt $\frac{1}{4}$ ad $\frac{1}{9}$ sicut OER ad HIE, at HO ad HI, vt $\frac{1}{3}$ ad $\frac{1}{4}$, nimirum, vt triangulum LEO ad triangulum MIE, & IM ad MY, vt $\frac{1}{4}$ ad $\frac{1}{5}$, scilicet, vt triangulum HEI ad triangulum PEY, vnde differentiæ non successiuè se habebunt, nisi bini, & binæ sumantur.

EXPENSIO X.

De planitiebus Isoperimetris constituendis.

AD perfectam cognitionem mathematicam iste tractatus necessarius est, cum aliquibus videri possit æquales figurarum ambitus æqualia quoque spatia continere, quòd verum non est, vt videbimus: Quia verò aliquando opus potest esse, quod aliquis requirat figuram eiusdem ambitus, & æqualis areæ, ideo id quoque docebimus præstare.

DEFINITIO I.

Isoperimetræ figuræ sunt, quæ æquales ambitus habent.

DEFINITIO II.

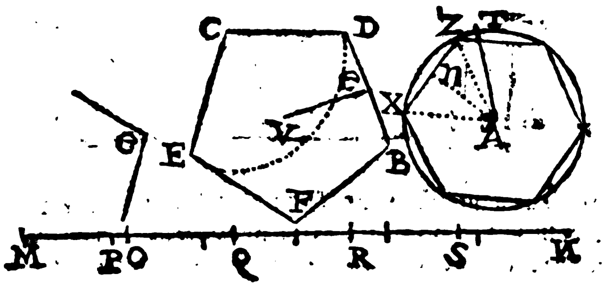
Area cuiuslibet figuræ est eius secundùm planum capacitas.

PROBL. I. PROPOS. L.

Figuram regularem alteri Isoperimetram constituere dato alterius figuræ constituendæ angulo.

SIt sexagonum A, cui figuram Isoperimetram V. g. Pentagonum oporteat constituere.

Latera sex sexagoni super lineam MN extendantur; quale vnum ex ipsis est MP. Hancque lineam diuide iuxta numerum angulorum ad centrum, seu quod idem est laterum fig. constituendæ, nempe



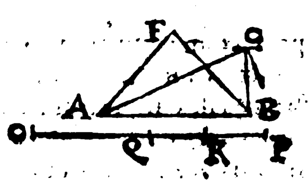
Pentagoni, vt est MO, & OQ, & QR, & RS, & SN: ex duabus verò MO, & OQ, fiat angulus C æqualis angulo pētagoni dato G, & idem fiat de reliquis tribus annectendo V. g. RQ ad CE sub eodem angulo interno G, & fiet Pētagonum dato Isoperimetrum; vt patet ex ipsa constructione.

Eodemque modo quelibet alia figura regularis alteri Isoperimetra constituetur.

PROBL. II. PROPOS. LI.

Dato angulo scaleno super eandem basim æquicrurum Isoperimetrum triangulum constituere.

SIt datum triangulum scalenum ABC, cui æquicrurum sit constituendum Isoperimetrum; Ducatur OP, & in illam transferantur latera AC, & CB, & sint OR, & RP, hacque linea diuidatur bifariam in Q, & ex duabus æqualibus OQ, & QP super basim AB constituatur triangulum AFB. Nam illud erit Isoperimetrum alteri ACB.

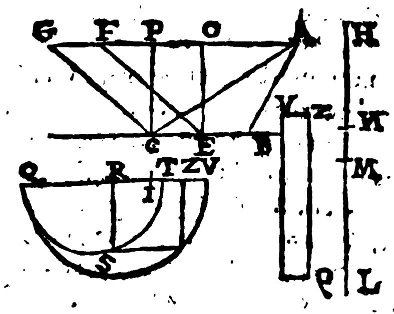


Probatur. Nam AC, & CB scaleni, sicut AF, FB cruræ æquicruris sunt æqualia lineæ OP; quare etiam inuicem basis verò AB communis.

PROBL. III. PROPOS. LII.

Dato triangulo parallelogrammum æquale, & Isoperimetrum constituere.

SIt datum triangulum BAC, cui æquale, simulque Isoperimetrum parallelogrammum sit constituendum: Latera BA, & AC in rectam HL transferantur, & sint HN, & NL, lineaque diuidatur bifariam in M sicut, & basis BC in E. Sumpto verò interuallo HM lineæ dimidio, centro E [illegible] circuli ducatur, quæ secet parallelam AG in puncto F, ducaturque EF, & à C parallela EF linea, quæ sit CG. Dico parallelogrammum EFGC esse triangulo CBA Isoperimetrum, & æquale.



Probatur de æqualitate ex 33. lib. 1. Quòd verò sit Isoperimetrum patet: Nam latera FG, & EC æqualia inuicem ob parallelismum sunt equalia basi BC. Nam EC est medietas. Vnde basis æqualis FG erit etiam alteri medietati BE æqualis: Latera verò EF, CG sunt æqualia lateribus BA, & AC, quod sint simul æqualia lineæ HL.

PROBL. IV. PROPOS. LIII.

Rectangulum parallelogrammo non rectangulo æquale, Isoperimetrum constituere.

SIt rectangulum OC in prec. fig. equale parallelogrammo ECFG; sed non isoperimetrum, oporteatque seruata æqualitate in isoperimetrum transformare.

Inueniantur eius lateribus EO, & OB media proportionalis RS, cuius quadratum ex 19. lib. 6. est rectangulo OC æquale. Deinde lateribus EC, & CG parallelogrammi non rectanguli redactis in rectam QV, quę sint QI, & IV, tota QV secetur ex tr. 15. propos. 16. vt [illegible] inter segmenta QZ, & ZV sit media proportionalis, rectanguluq; QZV ex extremis QZ, & ZV erit æquale quadrato mediæ RS, & ideo rectangulo OC, & EG dato ex 19. lib. 6. Sed dico, quod etiam isoperimetrum sit parallelogrammo EG eidem dato.

Probatur. Quia latera ZV, & ZQ sunt æqualia lineæ VQ, cui, & sunt æqualia ex effectione latera EQ, & CG: quare etiam reliqua reliquis.

PROBL. V. PROP. LIV.

Dato rectilineo quocumque æquale, & isoperimetrum rectangulum constituere, cùm fieri potest.

SIt datum multilaterum A rectilineum, cui æquale sit rectangulum FT, & linea PQ æqualis dimidiato ambitui rectilinei A.

Inueniatur, vt in antecedenti figura, media proportionalis inter rectāguli FT latera VF, & FZ, & sit FG, quę si sit æqualis dimidio PV lineę PQ est ipsū quadratū ex FG, quod queritur, si maior, vt hic, iam non potest secari PQ in duo segmenta, inter quæ FG sit media proportionalis: quia erecta normaliter itaque LO sit ad OI, vt OG ad OH, & ideo *permutando* LO ad OG, vt OI ad OH, hinc *componendo* LO cum OG, idest LE ad LO, vt OI cum OH idest IH ad OI; rursusque *permutando* LG erit ad HI, vt LO ad IO, idest vt V ad R.

Sed vt LO ad IO, sic est basis BL ad AI in triangulis æquiangulis BOL, & AOI ob parallelas BL, & AI. Ergo erit LG ad HI, vt basis BL ad basim AI, scilicet, vt V ad R.

Et quia in triangulis OND, & OQC, ita est ob parallelismum linearum, OQ ad ON, vt OG ad OH erit OQ ad ON, vt V ad R, & sic OT erit ad OX, quia est in æquiangulis triangulis LOT, & IOX, sic quoque, vt OT ad OX, latus LO, & OI. Quadere erit OQ ad ON, vt OT ad OX, & *permutando* OQ ad OT, vt ON ad OX, & *componendo* OQ cum OT, idest QT ad OT, vt ON cũ OX, idest NX ad OX scilicet, vt V ad R.

Quia itaque triangula habent proportionem compositam ex proportione basium, & altitudinum ex propos. 22. Coroll. 2. lib. 6. altitudo verò trianguli BCL est TQ, & trianguli AID est XN; bases verò sunt BL, & AI. Ergo habebit proportionem compositam ex proportione eadem, quæ est, basium, & altitudinum: quare ex p. 1. tract. 9. expens. 5. erit proportio duplicata trianguli BCL ad triangulum ADI, quę basis BL ad basim AI, scilicet V ad R; proportio vero V ad S data est duplicata eius, quam habet V ad R. Ergo triangum BCL ad triangulum ADI habet proportionem, vt V ad S.

Idem dicendum de triangulis BGC, & AHD; siquidem eadem altitudine gaudent XN, & QT, basis verò GC est ad basim HD in æquiangulis triangulis OGC, OHD, vt OG ad OH; sed iam ostensum est OG ad HO eam esse proportionem, quæ LO ad OI, idest ex effectione, quam V ad R. Ergo & basis GC erit basim HD, vt V ad R. Cùm itaque bases, & altitudines obtineant eandem proportionem, & proportio triangulorum sit composita ex altitudinibus, & basibus, quę est eadem, erit duplicata eius, quæ est V ad R, nempe erit, vt V ad S.

Si verò agatur de diminutione ductis diagonalibus AD, HI fiat vt S ad R, sic AO ad BO, quæ mensuretur ab O in B, & ducta parallela BL cætera perficiantur: vt priùs, & compleatur spatium BGCL, eritque spatium musicum AHDI ad spatium musicum BGCL, vt S ad V eadem prorsùs ratione, quam supra assignauimus.

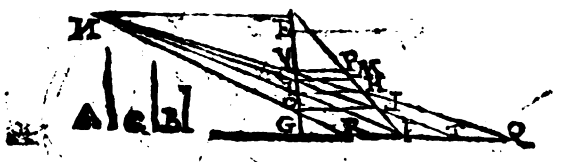
PROBL. II. PROPOS. XLIX.

Superficies iuxta datam proportionem Harmonicè se diminui incipientes constituere.

SIt data proportio A ad B $\frac{2}{3}$; oporteatque constituere superficies procedentes harmonicè iuxta datam proportionem; ita vt primus terminus sit $\frac{2}{2}$, secundus sit $\frac{2}{3}$, & reliqua progressio sequatur, vt exigit progressus harmonicus.

Reperiatur media proportionalis inter A, & B, & sit C: fiatque, vel exhibitum sit triangulum EFG, in quo harmonica proportio instituenda est, fiatque vt A ad C sic CE ad EF, & ducatur parallela HI. Deinde ducatur diagonalis FI, vsque dum occurrat ductæ à centro parallelæ EN basi FG in N, & diuisa FO per medium in R, ducatur NR, & vbi secat in O, ducatur parallela LO. Dico spatia Harmonica HO ad OF habere proportionem, quam A ad B.

Probatur. Nam ex propos. 1. tract. 16. part. 2. GE est diuisa harmonicè cum basis FD, & KG sint æquales; Vnde erit vt FE ad HE termini, sic differentia FL ad LH; sed vt FE ad HE termini, sic est A ad C; est autem A ad C proportio duplicata eius, quæ est A ad B. Ergo A ad B habebit proportionem duplicatam, quæ est FE ad HE terminos, & ideo, quę est trianguli FEG ad triangulum simile ex 20. l. 6. elem. HEI; sed ex Tract. 18. de propos. 11. vt est triangulum FEG ad triangulum HEI, sic est LG superficies scalena ad HO superficiem. Ergo vt est A ad B, sic est LG ad HO, nempe, vt $\frac{2}{2}$ ad $\frac{2}{3}$, & *inuertendo* HO ad LG, vt B ad A: quare si sequaris diminuendo harmonicè ducendo lineas QN, & FN à



partibus æqualibus QT, & FE partibus FE, & EO, successiuè harmonicè à data proportione decrescent termini, vt primus sit $\frac{2}{2}$, tertius sit $\frac{2}{4}$, quintus $\frac{2}{6}$, septimus $\frac{2}{8}$, & sic successiuè ex pr. 3. Tr. 16. p. 2. Siquidem ex tract. 16. de progr. prop. 11. etiam spatia triangularia harmonicè proportionaliter decrescunt, vt ipsæ lineæ, quæ in primis terminis duplicatam FE ad HE obtinent proportionem, quæ est vt 2. ad 3. vel A ad B: lineæ verò illæ ex 3. tract. 16. part. 2. vt numeri $\frac{2}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{4}$ procederent: quare etiam triangulorum superficies, quæ duplicatam basium habet proportionem, ita successiuè propagabuntur. Differentiæ verò erunt, successiuè, vt primus ad tertium ponitur, nempe vt $\frac{2}{2}$ ad $\frac{2}{4}$ idest $\frac{2}{4}$ ad $\frac{2}{8}$ ex pr. 12. tract. 16. at termini scilicet triangula successiuè se habebunt harmonicè vt $\frac{2}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{6}$, & cæt: ideoq; GL erit ad LI, vt $\frac{2}{2}$ ad $\frac{2}{4}$ scilicet ad MIE, at HO ad HL vt $\frac{2}{3}$ ad $\frac{2}{5}$, nimirum, vt triangulum LEO ad triãgulum MIE, & IM ad MY, vt $\frac{2}{4}$ ad $\frac{2}{6}$, scilicet, vt triangulum HEI ad triangulum PEY, vnde differentiæ non successiuè se habebunt, nisi bina, & bina sumantur.

EXPENSIO X.

De planitiebus Isoperimetris constituendis.

AD perfectam cognitionem mathematicam iste tractatus necessarius est, cum aliquibus videri possit æquales figurarum ambitus æqualia quoque spatia continere, quod verum non est, vt videbimus: Quia verò aliquando opus potest esse, quod aliquis requirat figuram eiusdem ambitus, & æqualis areæ, ideo id quoque docebimus præstare.

DEFINITIO I.

ISoperimetra figuræ sunt, quæ æquales ambitus habent.

DEFINITIO II.

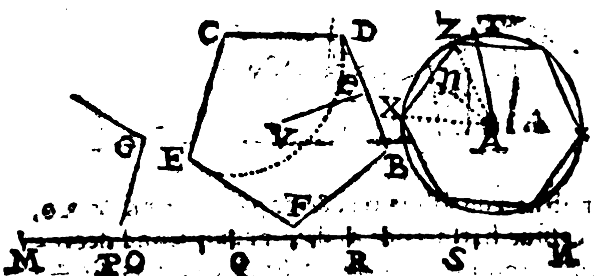
AREa cuiuslibet figuræ est eius secundùm planum capacitas.

PROBL. I. PROPOS. L.

Figuram regularem alteri Isoperimetram constituere dato alterius figuræ constituendæ angulo.

SIt sexagonum A, cui figuram Isoperimetram V. g. Pentagonum oporteat constituere.

Latera sex sexagoni super lineam MN extendantur; quale vnum ex ipsis est MP. Hancque lineam diuide iuxta numerum angulorum ad centrum, seu quod idem est laterum fig. constituendæ, nempe



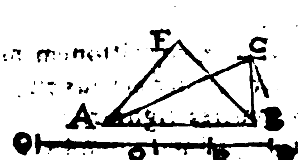
Pentagoni, vt est MO, & OQ, & QR, & RS, & SN; ex duabus verò MO, & OQ, fiat angulus C æqualis angulo pẽtagoni dato G, & idem fiat de reliquis tribus annectendo V. g. RQ ad CE sub eodem angulo interno G, & fiet Pẽtagonum dato Isoperimetrum; vt patet ex ipsa constructione.

Eodemque modo quælibet alia figura regularis alteri Isoperimetra constituetur.

PROBL. II. PROPOS. LI.

Dato angulo scaleno super eandem basim æquicrurum Isoperimetrum triangulum constituere.

SIt datum triangulum scalenum ABC, cui æquicrurum sit constituendum Isoperimetrum; Ducatur OP, & in illam transferantur latera AC, & CB, & sint OR, & RP, hæcque linea diuidatur bifariam in Q, & ex duabus æqualibus OQ, & QP super basim AB constituatur triangulum AFB. Nam illud erit Isoperimetrum alteri ACB.

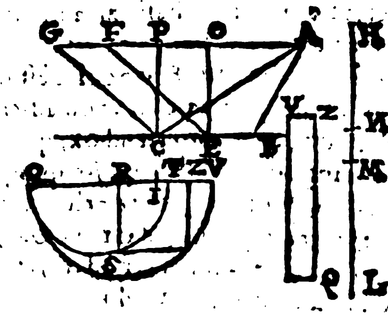


Probatur. Nam AC, & CB scaleni, sicut AF, FB crura æquicruris sunt æqualia lineæ OP; quare etiam inuicem basis verò AB communis.

PROBL. III. PROPOS. LII.

Dato triangulo parallelogrammum æquale, & Isoperimetrum constituere.

SIt datum triangulum BAC, cui æquale, simulq; Isoperimetrum parallelogrammum sit constituendum: Latera BA, & AC in rectam HL transferantur, & sint HN, & NL, lineaque diuidatur bifariam in M, sicut, & basis BC in E; Semper verò interuallo HM lineæ dimidio, centro E, radio circuli ducatur, quæ secet parallelam AG in puncto F, ducaturque EF, & à C parallela EF linea occurrens GC. Dico parallelogrammum EFGC æquiangulo CBA Isoperimetrum, & æquale.



Probatur de æqualitate ex 33. lib. 1. Quòd verò sit Isoperimetrum patet: Nam latera FG, & EC æqualia inuicem ob parallelismum sunt æqualia basi BC. Nam EC est medietas. Vnde basis æqualis FG erit etiam alteri medietati BE æqualis: Latera verò EF, CG sunt æqualia lateribus BA, & AC, quod sint simul æqualia lineæ HL.

PROBL. IV. PROPOS. LIII.

Rectangulum parallelogrammo non rectangulo æquale, Isoperimetrum constituere.

SIt rectangulum OC in præc. fig. æquale parallelogrammo ECFG; sed non isoperimetrum, oporteatque seruata æqualitate in isoperimetrum transformare.

Inueniantur eius lateribus EO, & OP, media proportionalis RS, cuius quadratum ex 19. lib. 6. est rectangulo OC æquale. Deinde lateribus EC, & CG parallelogrammi non rectanguli redactis in rectam QV, quæ sint QI, & IV, tota QV secetur ex tr. 15. propos. 16. vt sit inter segmenta QZ, & ZV sit media proportionalis; rectanguluq; QZV ex extremis QZ, & ZV erit æquale quadrato mediæ RS, & ideo rectangulo OC, & EG dato ex 19. lib. 6. Sed dico, quod etiam isoperimetrum sit parallelogrammo EG eidem dato.

Probatur. Quia latera ZV, & ZQ sunt æqualia lineæ VQ, cui, & sunt æqualia ex effectione latera EC, & CG; quare etiam reliqua reliquis.

PROBL. V. PROP. LIV.

Dato rectilineo quocumque æquale, & Isoperimetrum rectangulum constituere, cum fieri potest.

SIt datum multilaterum A rectilineum, cui æquale sit rectangulum FT, & linea PO æqualis dimidiato ambitui rectilinei A.

Inueniatur, vt in antecedenti figura, media proportionalis inter rectãguli FT latera FV, & FZ, & sit FG, quę si sit æqualis dimidio PV lineę PO est ipsũ quadratũ ex FG, quod quæritur, si maior; vt hic, iam non potest secari PO in duo segmenta, inter quæ FG sit media proportionalis; quia erecta normaliter

TRACTATUS XXX.

De Transformatione Curuilineorum.

EA omnia, quæ de Geodæsia plana considerauimus, de curuilineis quoque animaduertere oportet; quamuis eleuatior sit contemplatio, & acrioris ingenij acumen exposcat; neque omnino sit perfecta; cum aliquæ, vt Hyperbola trasformari in rectilineas, vsque adhuc recusauerint, imò nec quidem in curuilineas diuersi generis deduci potuerint.

EXPENSIO I.

De quadratione Circuli Arithmetica.

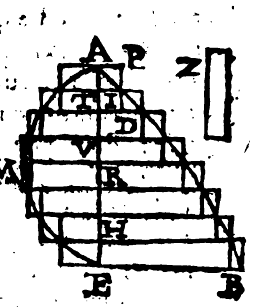
MVlti ne dum apud veteres; sed recentiores etiam, vt testatur Hyeronimus Vitalis ex nostris in suo Lexico mathematico in circuli Tetragonismum sc. quadrationem totis viribus incubuere, & quidem apud antiquos Antiphon, Bryso, Hyppocrates Chius. Inter Neotericos ante Orontius Finæus, Campanus, Nicolaus Cardinalis Cusanus, desudarũt. Sed cęteris sublimius Ambrosius à S. Vincentio in insigni opere, quod de Quadratura circuli inscripsit totam penè ętatem consumpsit. Sed licet multa consequutus fuerit omnino admiratione digna; tamen scopum assequutus nõ est. Nam eius quadraturas (quatuor enim protulit l. 10. de quadratura circuli inscripto) impugnat Vincentius Leutaudus pręter multos alios, & euidentiùs deijcit, & licet Franciscus Xauerius Ayscon authorem propugnet. Id tamẽ libro Lugduni impresso anno 1663. nouę impugnationi eidem Leutaudo locum dedit. Vnde satiùs iudicaui antiquam quadraturam Archimedeam approximantem veritati proponere, quàm nouum tetragonismum, & laboriosissimum, & adhuc sub lite versantem producere.

THEOR. I. PROPOS. I.

Cuicumque figuræ curuilineæ, seu mixtilineæ possunt tot rectangula inscribi, aut circumscribi, vt relinquant quantitatem qualibet data minorem.

SIt data figura plana ABE, quę sit aut curuilinea, aut mixta. Dico tot rectangula posse, vel inscribi, vel circumscribi, vt, quod inter figuram curuilineam, vel mixtilineam, & rectangula superficiei remanet, & intercipitur, sit qualibet quantitate plana V. g. assignata Z minus.

Ducta AE hęc diuidatur taliter, vt maximum rectangulum, quod fit ex eius partibus, & maxima linea ei perpendiculariter insistente, vt BE, vel RM sit minus quantitate Z data, & cętera omnia rectangula simul sumpta relinquẽt inter se, & figuram cui inscribuntur, vel circumscribuntur quantitatem data Z minorem.



Probatur. Relinquunt inscripta paulò magis, quàm medietatẽ rectangulorum AI, & ID, & cętera circũscripta verò AI, & ID paulò minus ob lineam curuã, & globosam (è contra de concaua esse asserendum) sed omnia rectangula IA, ID, & cętera curuam intercipientia ęquant BH vt patet, ergo spatia, quę remanent, vt AIT, vel IAP, & cętera omnia triangula mixtilinea conclusa inter curuam, & rectangula inscripta, quod sint minus quasi sub duplo, quam rectangula AI, & ID curuam stipantia ęqualia rectangulo BH ęquanti planitiem Z sunt minus, quam planities Z. Quod autem rectangula AI, & ID stipantia curuam AIB æquent rectangulum BH patet ex 3. lib. 2. Elem. cum TI, & cæterę sint partes ipsius EB, & TA, & ID, & cęteræ sint omnes æquales ex hypothe ipsi EH.

THEOR.

THEOR. II. PROPOS. II.

Figura quælibet circulo circumscripta maiorem obtinet ambitum, quàm circulus, sicut, & figura inscripta minorem.

Licet præsens hanc propos. ostendat Archimedes lib. 1. de sphæra: nobis tamen ex communi conceptu eam probare satis erit. Circumscripta figura continet circulum. Ergo, cùm ex communi hominum sensu sit maius continens, quàm contentum, erit maior ambitus continentis multilateri, quàm contenti circuli.

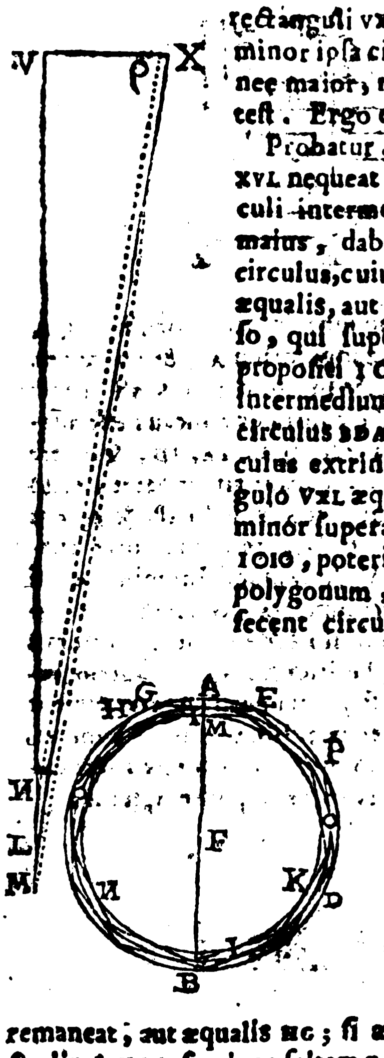
Probatur quoque secunda pars. Nam si circulus contineat multilaterum inscriptum ex eodem principio erit maior circulus, quàm inscripta figura.

THEOR. III. PROPOS. III.

Area cuiuslibet circuli æqualis est rectangulo triangulo ex linea recta æquali circumferentiæ, tamquam uno crure, & semidiametro tamquam altero crure confecto.

Sit circulus IOIO intermedius, & supponatur factum triangulum rectangulum XVL, cuius crus VL sit æquale ipsius circuli peripheriæ, & VX semidiametro. Dico hanc rectanguli aream esse æqualem areæ circuli IOIO.

Probatur. Nam, si non est æqualis erit area rectanguli VXL, aut maior, aut minor ipsa circuli planitie: Sed nec maior, nec minor esse potest. Ergo erit æqualis.



Probatur. Quòd triangulum XVL nequeat esse maius area circuli intermedij. Nam, si est maius, dabitur itaque aliquis circulus, cuius area, aut illi erit æqualis, aut proximè minor ipso, qui superet aream circuli propositi IOIO, & sit aliquid intermedium. Sit itaque iste circulus BDAH: Quia itaq; circulus extrinsecus BDAH rectangulo VXL æqualis, vel proximè minor superat circulum datum IOIO, poterit in ipso inscribi polygonum, cuius latera non secent circuli interioris IOIO peripheriam. Sed ad summum tangat. Quod fiet si ducto radio FI, tangens ei erigatur in I, quæ sit EO; ductis enim ei æqualibus EP, &c. æquales circumferentias abscidet; ex 30.l.3. donec aut minor circumferentia remaneat, aut æqualis HG; si æqualis tanget ducta linea HG; si minor saltem non tanget.

Confecto itaq; polygono HPDB, erit vt polygonum comprehensum maius esset circumferentia circuli IOIO, quam claudit. Et si fiat huic polygono triangulū VXM rectangulum æquale ex propos. 5. Tr. præc. habebit omnibus cruribus polygoni HPDB æqualis, erit maior: quàm VL æqualis peripheriæ medij circuli IOIO Quare etiam triangulum VXM erit maius quàm triangulum VXL. Verùm triangulum VXL est æquale; vel maius circulo exteriori BDA (siquidem cum dicerent aduersarij triāgulum VXL esse maius, quàm circuli planities IOIO circulū BDA præsupposuimus triangulo illi VXL, aut æqualem, aut minorem) Cùm ergo triangulum VXL sit, vel æquale, vel maius circulo exteriori BDA; iste circulus exterior BDA, remaneret minor ipso triāgulo VX, quod etiam minus est triangulo VXM, vt ostensum est: at VXM factū est æquale polygono HPDB, ergo circulus exterior BDA esset minor, vel æqualis Polygono HPDB; quod in se concludit, quod est absurdum.

Probatur deinde. Quòd triangulum prædictum VXL non possit esse minus, quàm superficies circuli propositi IOIO: Quoniam, si est minus, dabitur aliquis circulus intermedius, aut æqualis, aut maior prędicto rectangulo VXL. Sed tamen non excedens circulum datum IOIO. Detur MKN, & illi circumscribatur polygonum, cuius latera in circulo dato IOIO comprehendantur, vt supra docuimus efficere, erit itaque area huius polygoni minor area circuli dati OIOI circumscribentis. Vnde si fiat rectangulum aquale ex NKM ambitu polygoni, vt supra prop. 5. præc. Tr. vt est QVN, hoc erit minus rectangulo triangulo VXL, vtpote crure minori vel æquali perpendiculari FM, & VN ambitu polygoni inscripti. Cùm ergo triangulū VXL maius sit triāgulo VQN, etiam circulus internus MKN, qui est maior ex aduersarijs, vel æqualis triāgulo VXL (siquidē cū asseterent VXL esse minus circulo IOIO circulū MKN fecimus, aut maiorē proximè, aut æqualē ipsi triāgulo VXL) Circulus inquā internus MKN erit maior, quā Polygonū, à quo circumscribitur, cū polygono illi triāgulū VQN sit æquale, & minus triangulo VXL, qui internus prædictus circulus MKN, aut maior est, aut ipsi ęqualis ex suppositione; Hoc autem esse nequit, nempe quòd internus circulus comprehensus sit æqualis Polygono, à quo circumscribitur.

Cùm ergo triangulum VXM, nec minus esse possit, nec maius circuli dati OIOI planitie, oportebit fateri; quòd illi æquetur.

THEOR. IV. PROP. IV.

Si detur triangulum, cuius altitudo sit radius, & basis portioni peripheriæ æqualis subtendenti sectorem; hoc erit sectori æquale.

Exhibeatur sector ABC, in circulo ACV & trianguli FEG crus FE radio AC æquetur, & basis FG æquetur arcui sectoris CB. Dico triangulum FEG æquale esse sectori ABC.

Probatur. Nam sit FH æqualis peripheriæ toti. Erit itaque, vt arcus CB ad circulum: sic basis FG ad basim FH cùm ex propos. 7. lib. 5. æqualium ad æquales sit eadem proportio. Verùm ex prop. 33. lib. 6. vt arcus CB est ad peripheriam CBVC ita sector ACB est ad superficiem totius circuli, & ex 1. lib. 6. vt basis FG ad basim FH, ita EFG triangulum

TRACTATVS XXX.

De Transformatione Curuilineorum.

EA omnia, quæ de Geodæſia plana conſiderauimus, de curuilineis quoque animaduertere oportet; quamuis eleuatior ſit contemplatio, & acrioris ingenij acumen expoſcat; neque omninò ſit perfecta; cum aliquæ, vt Hyperbola traſformari in rectilineas, vſque adhuc recuſauerint, imò nec quidem in curuilineas diuerſi generis deduci potuerint.

EXPENSIO I.

De quadratione Circuli Arithmetica.

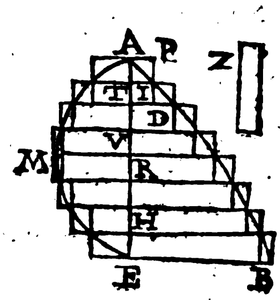
MVlti ne dum apud veteres; ſed recentiores etiam, vt teſtatur Hyeronimus Vitalis ex noſtris in ſuo Lexico mathematico in circuli Tetragoniſmum ſc. quadrationem totis viribus incubuere, & quidem apud antiquos Antiphon, Bryſo, Hyppocrates Chius. Inter Neotericos autē Orontius Finæus, Campanus, Nicolaus Cardinalis Cuſanus, deſudarũt. Sed cęteris ſublimius Ambroſius à S. Vincentio in inſigni opere, quod de Quadratura circuli inſcripſit totam penè ętatem conſumpſit. Sed licet multa conſequutus fuerit omninò admiratione digna; tamen ſcopum aſſequutus nō eſt. Nam eius quadraturas (quatuor enim protulit l. 10. de quadratura circuli inſcripto) impugnat Vincentius Leutaudus pręter multos alios, & euidentiùs deijcit, & licet Franciſcus Xauerius Ayſcon authorem propugnet. Id tamē libro Lugduni impreſſo anno 1663. neuę impugnationi eidem Leutaudo locum dedit. Vnde ſatiùs iudicaui antiquam quadraturam Archimedeam approximantem veritati proponere, quàm nouum tetragoniſmum, & laborioſiſſimum, & adhuc ſub lite verſantem producere.

THEOR. I. PROPOS. I.

Cuicumque figuræ curuilineæ, ſeu mixtilineæ poſſunt tot rectangula inſcribi, aut circumſcribi, vt relinquant quantitatem qualibet data minorem.

SIt data figura plana AEB, quę ſit aut curuilinea, aut mixta. Dico tot rectangula poſſe, vel inſcribi, vel circumſcribi, vt, quod inter figuram curuilineam, vel mixtilineam, & rectangula ſuperficiei remanet, & intercipitur, ſit qualibet quantitate plana V. g. aſſignata Z minus.

Ducta AE hęc diuidatur taliter, vt minimum rectangulum, quod fit ex eius partibus, & maxima linea ei perpendiculariter inſiſtente, vt BE, vel EM ſit minus quantitate Z data, & cętera omnia rectangula ſimul ſumpta relinquāt inter ſe, & figuram cui inſcribuntur, vel circumſcribuntur quantitatem data Z minorem.



Probatur. Relinquunt inſcripta paulò magis, quàm medietatē rectangulorum AI, & ID, & cęt. circūſcripta verò AI, & ID paulo minus ob lineam curuā, & globoſam (è contra de concaua eſſe aſſerendum) ſed omnia rectangula IA, ID, & cętera curuam intercipientia ęquant BH vt patet, ergo ſpatia, quę remanent, vt AIT, vel IAP, & cętera omnia triangula mixtilinea concluſa inter curuam, & rectangula inſcripta, quod ſint minus quaſi ſub duplo, quam rectangula AI, & ID curuam ſtipantia ęqualia rectangulo BH ęquanti planitiem Z ſunt minus, quam planities Z. Quod autem rectangula AI, & ID ſtipantia curuam AIB æquent rectangulum BH patet ex 3. lib. 2. Elem. cum TI, & cæterę ſint partes ipſius EB, & TA, & ID, & cæteræ ſint omnes æquales ex hypothe ipſi EH.

THEOR. II. PROPOS. II.

Figura qualibet circulo circumscripta maiorem obtinet ambitum, quàm circulus, sicuti & figura inscripta minorem.

LIcet pressius hanc propos. ostendat Archimedes lib. I. de sphæra: nobis tamen ex communi conceptu eam probare satis erit. Circumscripta figura continet circulum. Ergo, cùm ex communi hominum sensu sit maius continens, quàm contentum, erit maior ambitus continentis multilateri, quàm contenti circuli.

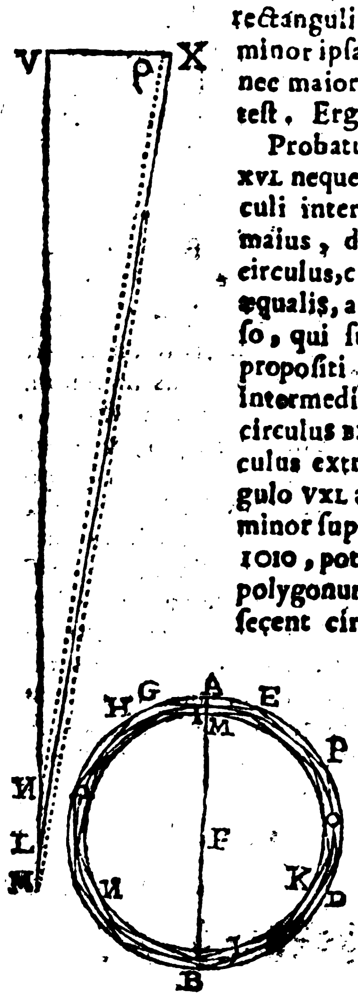
Probatur quoque secunda pars. Nam si circulus contineat multilaterum inscriptum ex eodem principio erit maior circulus, quàm inscripta figura.

THEOR. III. PROPOS. III.

Area cuiuslibet circuli æqualis est rectangulo triangulo ex linea recta æquali circumferentiæ, tamquam vno crure, & semidiametro tamquam altero crure confecto.

SIt circulus IOIO intermedius, & supponatur factum triangulum rectangulum XVL, cuius crus VL sit æquale ipsius circuli peripheriæ, & VX semidiametro. Dico hanc rectanguli aream esse æqualem areæ circuli IOIO.

Probatur. Nam, si non est æqualis erit area rectanguli VXL, aut maior, aut minor ipsa circuli planitie: Sed nec maior, nec minor esse potest. Ergo erit æqualis.



Probatur. Quòd triangulum XVL nequeat esse maius area circuli intermedij. Nam, si est maius, dabitur itaque aliquis circulus, cuius area, aut illi erit æqualis, aut proximè minor ipso, qui superet aream circuli propositi IOIO, & sit aliquid intermedium. Sit itaque iste circulus BDAH: Quia itaq; circulus extrinsecus BDAH rectãgulo VXL æqualis, vel proximè minor superat circulum datum IOIO, poterit in ipso inscribi polygonum, cuius latera non secent circuli interioris IOIO peripheriam. Sed ad summum tangãt. Quod fiet si ducto radio FI, tãgens ei erigatur in I, quæ sit EG; ductis enim ei æqualibus EP, &c. æquales circũferẽtias abscidẽt; ex 33. l. 3. donec aut mi nor circũferentia remaneat; aut æqualis HG; si æqualis tanget ducta linea HG; si minor saltem non tanget.

Confecto itaq; polygono HPDB, erit vt polygonum comprehendẽs maior eius ambitu, quàm circumferentia circuli IOIO, quam claudit. Quare, si fiat huic polygono triangulũ XVM rectangulum æquale ex propos. 5. Tract. præc. linea VM omnibus cruribus polygoni HPDB æqualis, erit maior; quàm VL æqualis peripheriæ medij circuli IOIO. Quare etiam triangulum VXM erit maius, quàm triangulum VXL. Verùm triangulum VXL est æquale; vel maius circulo exteriori BDA (siquidem cum dicerent aduersarij triãgulum VXL esse maius, quàm circuli planities IOIO circulũ BDA præsupposuimus triangulo illi VXL, aut æqualem, aut minorem) Cùm ergo triangulum VXL sit, vel æquale, vel maius circulo exteriori BDA; iste circulus exterior BDA, remaneret minor ipso triãgulo VX, quod etiam minus est triangulo VXM, vt ostensum est: at VXM factũ est æquale poligono HEPDB, ergo circulus exterior BDA esset minor, vel æqualis Polygono HEPDB; quod in se concludit, quòd est absurdum.

Probatur deinde. Quòd triangulum prædictum VXL non possit esse minus, quàm superficies circuli propositi IOIO: Quoniam, si est minus, dabitur aliquis circulus intermedius, aut æqualis, aut maior prædicto rectangulo VXL. Sed tamen non excedens circulum datum IOIO. Detur MKN, & illi circumscribatur polygonum, cuius latera in circulo dato IOIO comprehendantur, vt supra docuimus efficere, erit itaque area huius polygoni minor area circuli dati OIOI circumscribentis. Vnde si fiat rectangulum æquale ex NXM ambitu polygoni, vt supra prop. 5. præc. Tr. vt est QVN hoc erit minus rectangulo triangulo VXL, vtpote crure minori VQ æquali perpendiculari FM, & VN ambitu polygoni inscripti. Cùm ergo triangulũ VXL maius sit triãgulo VQN, etiam circulus internus MKN, qui est maior ex aduersarijs, vel æqualis triãgulo VXL (siquidẽ cũ assererent VXL esse minus circulo IOIO circulũ MKN fecimus, aut maiorẽ proximè, aut æqualẽ ipsi triãgulo VXL) Circulus inquã internus MKN erit maior, quã Polygonũ, à quo circumscribitur, cũ polygono illi triãgulũ VQN si æquale, & minus triangulo VXL, qui internus prædictus circulus KNM, aut maior est, aut ipsi æqualis ex suppositione; Hoc autem esse nequit, nempe quod internus circulus comprehensus sit æqualis Polygono, à quo circumscribitur.

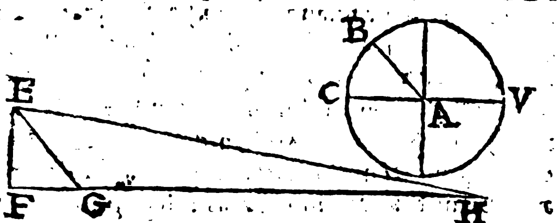
Cùm ergo triangulum VXM, nec minus esse possit, nec maius circuli dati OIOI planitie oportebit fateri; quòd illi æquetur.

THEOR. IV. PROP. IV.

Si detur triangulum, cuius altitudo sit radius, & basis portioni peripheriæ æqualis subtendenti sectorem; hoc erit sectori æquale.

EXibeatur sector ABC, in circulo BCV: & trianguli FEG crus FE radio AC æquetur, & basis FG æquetur arcui sectoris CB. Dico triangulum EFG æquale esse sectori ABC.

Probatur. Nam sit FH æqualis peripheriæ toti. Erit itaque, vt arcus CB ad circulum: sic basis FG ad basim FH cùm ex propos. 7. lib. 5. æqualium ad æquales sit eadem proportio. Verùm ex prop. 33. lib. 6. vt arcus CB est ad peripheriam CBVC, ita sector ACB est ad superficiem totius circuli, & ex I. lib. 6. vt basis GF ad basim FH, ita EFG triangulum



gulum eiusdem altitudinis FGE ad triangulum FEH. Ergo ex 16. lib. 5. ita erit sectoris planities ACB ad planum circuli CBV, vt trianguli FEG ad planitiem trianguli EFH, & *permutando*. Ita erit ACB sector ad FEG triangulum, vt circulus CBV ad triangulū EFH: sed circulus, & triangulum in preced. ostensa sunt aequalia: ergo etiam sector ACB, & triangulum FEG aequabuntur: quare, & rectangulum ex dimidio, vel radio, vel linea aequali dimidio arcui erit ex 39. equale sectori ACB.

PROBL. I. PROPOS. V.

Aream circuli ex data diametro, & circumferentia proximè inuenire.

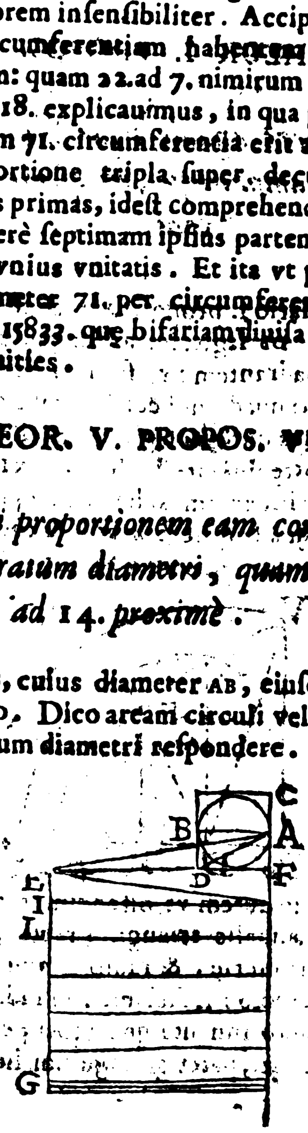
CVm ex ostensis propos. 3. Tract. 16. inuenerimus circumferentiam ad diametrum se habere vt 22. ad 7. quae tamen verā paulò maior est. Hinc si accipiamus 7. pro diametro, & 22. pro circumferentia, mutuâ horum numerorum multiplicatione efficiemus rectangulum, seu planum 154. cuius medietas 77. ex propos. 40. lib. 1. Elem. erit equalis triangulo rectangulo XVI. de quo iam ostendimus prop. 1. aree circuli aequale esse.

Si verò placeat aream rectanguli verā circuli planitie minorem insensibiliter. Accipies diametro verę circumferentiam habentem minorem proportionem: quam 22. ad 7. nimirum eam, quam prop. 5. tract. 18. explicauimus, in qua posito diametro partium 71. circumferentia erit 223. nimirum in proportione tripla super decupartiente septuagesimas primas, idest comprehendet diametrum ter, & ferè septimam ipsius partem deficiente tantùm $\frac{1}{3}$ vnius vnitatis. Et ita vt priùs multiplicatus diameter 71. per circumferentiam 223. efficiet aream 15833. que bifariam diuisa erit 7916 $\frac{1}{2}$ circuli planities.

THEOR. V. PROPOS. VI.

Area circuli proportionem eam consequitur ad quadratum diametri, quam 11. ad 14. proximè.

SIt circulus, cuius diameter AB, eiusque quadratum CD. Dico aream circuli veluti 11. ad 14. ad quadratum diametri respondere.



Dimidium quadrati CD erit AD, & quarta pars eius erit triangulum FAD. Producatur diameter FD in E, atque FE aequalis circumferentiae praesupponatur, & ducatur AE. Itaque triangulum FAE erit eiusdem altitudinis, ac triangulum FAD, quod est quarta pars quadrati ex diametro. Quamobrem ita erit triangulum FAE ad triangulum FAD, nempe ad quartam partem quadrati CD, vt basis FE ad basim FD ex 1. lib. 6. Elem. quae est proximè, vt 22. ad 7. Quare erit triangulum FAE, equale areae circuli ex 3. h. ad FAD aequale quartae parti quadrati CD proximè, vt 22. ad 7. quare FAE triangulum ad quadratum totum quater maius CD erit vt 22. ad numerum quater maiorem 28. que est eadem proportio, quae 11. ad 14.

PROBL. II. PROPOS. VII.

Ex diametro noto aream circuli proximè inuenire.

SIt notus diameter partium 84. quadretur hic numerus, & fit 7056. Vtendo itaque regula aurea fiat, vt 14. ad 11. sic 7056. ad aliud, & exibit area circuli 5544.

THEOR. VI. PROPOS. VIII.

Quadratum circumferentiae se habet ad aream circuli, vt 88. ad 7.

PRobatur. Nam posito FE part. 22 in figura prop. 6. antec. nempe aequali proximè circumferentiae; & posito diametro partium 7. si fiat quadratum ex FE circumferentia continebit sex rectangula dupla AFE ex 3. lib. 2. Elem. & insuper rectangulum nigrum ex septima parte constructum: Nam 22. continet ter diametrum partium 7. & ideo sexies semidiametrum partium $3\frac{1}{2}$, & addit insuper septimam partem diametri, nempe $\frac{1}{7}$ semidiametri: Quare rectangulum FI ex circumferentia FE, & semidiametro FA erectum, erit duplò maius, quàm triangulum FAE proximè aequale areae circuli. Proptereaque quadratum FG ex circumferentia continebit duodecies aream circuli, & insuper parallelogrammum nigrum, quod est septima pars rectanguli FL sub toto diametro EL, & tota circumferentia FE comprehensi, at $\frac{1}{7}$ dimidij rectanguli FI, & ideo $\frac{1}{7}$ trianguli FAE: Si itaque ad vitandas fractiones efficiamus aream circuli, vel triangulum ei proximè aequale FAE esse partium 7. totum quadratum FG duodecies maius erit, cum quatuor septimis partibus, nempe cum rectangulo nigro part. 88. Nam 7. duodecies acceptus facit 84. & $\frac{4}{7}$ additi efficiunt 88. & ideo quadratum FG erit partium 88. posita area diametri partium 7.

PROBL. III. PROPOS. IX.

Aream circuli proximè inuenire.

FIat, vt 88. ad 7. ita quadratum circumferentiae 264. ad aliud, & adhibita regula proportionum elicietur numerus 5544. pro area circuli quaesiti.

PROBL. IV. PROPOS. X.

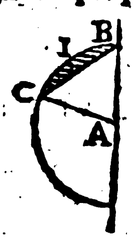
Data sectoris peripheria, & cruribus, eius aream adinuenire.

Sit, vt in pr. 4. sector ABC, cuius AC crus notũ sit partium 25. pedum, & arcus BC 10. pedum, ideoque ex prop. 4. huius triangulum rectangulum BFC, cuius crus FB sit 25. pedum, & basis FC 10. pedum erit ei æquale. Quadere si mutua multiplicatione fiat rectangulum partium 250 & medietas sumatur partium 125. hæc erit sectoris arealis quæsita quantitas.

PROBL. VI. PROPOS. XI.

Cognito sectore, & chorda cognoscere aream segmenti circuli.

Sit segmentum circuli nigrum BIC, deturque chorda BC, & cognitus quoque sector BACI;

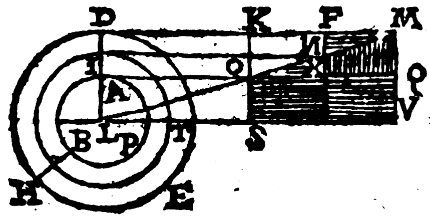


Debet priùs per ea, quæ prop. 16. Tract. 29. triangulum BAC cognosci. A sectore itaque subductum triangulum CBA relinquet segmentum nigrum ICB.

PROBL. VII. PROPOS. XII.

Annulum planum in quadratum redigere, & mensurare.

Detur annulus DEHAPB planus, cuius notus sit circulus medius ITI, vt faciliter ex nota diametro inueniri potest: multiplicetur hic circulus per residuum semidiametri AD subducto diametro minori LA, & productum erit area prædicti annuli DEHAPB.



* Prob. Nam fiant parallelogrãma LM, LN, & LO æqualia singulis circulis DEH, ITI, & BAP; quæ ob latera æqualia semicircumferentijs erunt similia, cùm sit ita radius vnius circuli ad radium alterius vt peripheria ad peripheriã ex pr. 30. l. 6. El. & ex 25 l. 6. ideo triangula circa diametrum cõsistentia ex prop. 35. lib. 1. Elem. MOX, & MOQ, necnon, & complementa OD, & OV erunt æqualia: si autem spatio MXOQ auferatur triangulum MXO, & addatur æquale triangulum MFN, spatium nigrum parallelogrammo albo XD remanebit æquale. Sed rectangulum istud est factum ex dimidia circumferẽtia circuli medij ITI, & residuo AD semidiametri LD. Quare ex integra circumferentia, cùm fiat duplo maius æquabitur toti gnomoni AMS: sed gnomon AMS æquatur annulo DEH, APB. Ergo etiam duplum rectangulum XD, quod fit ex peripheria ITI, & segmento AD æquabit annulum DEHABP.

Quod autem gnomon AMS æquet annulum patet. Nam rectangulum OAS æquat circulum BAP. Totum autem rectangulum LM æquat totum circulum DEH. Ergo subductus ab æqualibus rectangulum LO ab LM, & minimus circulus à toto circulo restabũt annulus DEHPBA, & gnomon AMS residua æqualia.

COROLLARIVM.

Hinc quoque agnosces partem annuli dimetiri. Nam sicut tota annuli media peripheria ITI cum residuo diametri AD multiplicata dat totum annulum; sic pars IT peripheriæ eiusdem mediæ cum eodem diametri residuo AD multiplicata partem annuli ADT, quem metitur, producet.

EXPENSIO II.

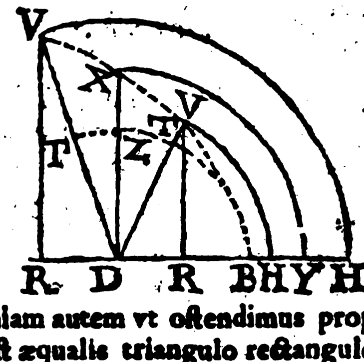
De Quadratione Circuli Geometrica.

Facilliori modo quadrationem circuli operi demandabimus mediante quadratrice, quam descripsimus tract. 18. de flexis ex prop. 14. vide sit.

THEOR I. PROPOS. XIIII.

Circuli area æquale triangulum parallelogrammumque, & quadratum constituere.

Corollario 1. propos. 19. tract. 18. cit. probauimus DB sagittam ad DX radium esse, vt radius ad quadrantem XY, si in quadrante XY circuli propositi quadrandi describamus quadratricem; obtinebimus quoque sagittam DB illius. Quamobrem, si sagittæ inuentę DB, & radio XD tertiam proportionem inueniamus, hęc erit ęqualis quadranti XY, quam quadruplicabimus, & totum ambitum circuli, cuius radius XD æquabit.



Quoniam autem vt ostendimus prop. 2. h. area circuli est æqualis triangulo rectangulo ex linea æquali peripheriæ, & radio tamquam ex duobus lateribus erecto: si faciamus ex radio DX, & tertia proportionali inuenta, quę ęquat peripheriam circuli XY totius; patet triangulum hoc esse ęquale areę

areę circuli, cuius quadrans DXY. Quod si ex dimidio prædictę lineę inuentę, quę æquat peripheriam constituatur rectangulum parallelogrammum, cùm hoc sit æquale triangulo prędicto, erit quoque æquale areę ipsius circuli, cum vt prędiximus prop. 23. tract. pręced. hoc modo triangulum in rectangulum ęquale conuertatur.

Tandem parallelogrammum commutetur in æquale quadratum, vel ex prop. 14. l. 2. vel reperiendo inter eius latera mediam proportionalem. Nam quadratum ex hac media erectum cum sit æquale parallelogrammo consequenter etiam circulo æquabitur.

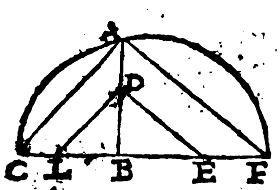
Vnus autem circulus in quadratum redactus multos alios similiter quadrabit. Quandoquidem si offeratur alius circulus similiter redigendus ad quadratum. Inueniatur quarta linea proportionalis istis tribus, nempe diametro circuli, & rectę ęquali eius circumferentię ex linea quadratrice iam notæ, & diametro circuli propositi ex propos. 12. lib. 6. & inuenietur linea ęqualis peripherię circuli oblati; siquidem ex prop. 33. lib. 6. ita diameter est ad diametrum, vt peripheria cuiuscumque circuli ad alius peripheriam. Si itaque hac quarta proportionali inuenta, & semidiametro circuli alterius propositi constituamus triangulum, hoc erit ęquale alterius circuli propositi areę, quod & redigemus in rectangulum, & in quadratum ęquale, quę consequenter ipsa quoque aream circuli exęquabunt.

THEOR. I. PROPOS. XIV.

Quadratum in circulum æqualem transfundere.

Oportet priùs inuenisse aliquod quadratum ęquale alicui circulo ex prop. pręced. cuius circuli radius notus sit. Deinde inueniatur tribus quadrati lateri, & circuli ei ęqualis iam noti radio, & tandem lateri quadrati in circulum transfundendi quarta proportionalis ex prop. 12. lib. 6. & hęc erit diameter circuli ęqualis quadrati.

Detur itaque Ex. g. latus quadrati AB, & diameter notus circuli ei ęqualis BC; & latus quadrati transmutandi BD. Ducta parallela DL. Linea DL erit diameter circuli trasmutandi, qui cõsequetur aream ęqualem quadrato ex BD.



Probatur. Nam sit nota BF semicircumferentię pręhabiti noti circuli ęqualis, nempe tertia proportionalis duabus BC, & BA, talis enim prop. 13. huius ostensa est, cum in fine illius fuit dictum, quòd latus quadrati circulo ęqualis sit medium proportionale inter lineam ęqualẽ semicircumferentię eius, & radium, cum sit æquale rectangulo ab illis extremis comprehenso, & ideo FB tertia proportionalis. Iungatur deinde FA, quę claudet cum AC, vt patet ex Coroll. prop. 13. l. 3. angulum rectum, cùm sit BC radius ad BA latus quadrati, vt BA ad BF semiperipheriã, deinde à puncto D ducatur DE parallela ipsi AF quibus positis.

Probatur prop. Nam quia est ob similitudinem triangulorum FB ad BA, vt EB ad BD, & vt BA ad BC ita DB ad BL; erit ex *æquo* eadem proportio FB ad BC, vt EB ad BL; quadere ex 43. l. 6. BE erit ęqualis circuli semicircũferentię, cuius semidiameter sit BL. Sicut FB est ęqualis circuli semiperipherię, cuius radius BC. Et quia quadratum DB est ęquale rectangulo ex linea EB ęquali peripherię, & BL radio; Etiam BD quadratum erit ęquale circulo, cui radius BL, illi rectangulo ex BE, & BL ęquali.

PROBL. II. PROPOS. XV.

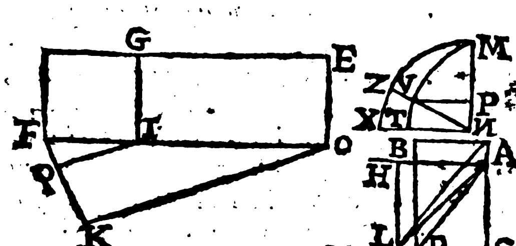
Dato sectori inuenire rectangulum æquale cognita proportione arcus subtensi ad circulum.

Quoniam ex propos. 4. huius. Rectangulum sub linea dimidio arcui æquali, & sub radio comprehensum est æquale sectori, si detur eius proportio ad circulum V.g. quòd octaua pars, accipietur octaua pars lineę rectę ęqualis peripheriæ inuentæ, & ex huius dimidio, & ex radio rectangulum constituetur. Nam dimidium octauæ partis lineæ æqualis peripherię erit æquale dimidio octauæ partis peripheriæ. Vnde rectangulum quoque erit ęquale sectori.

PROBL. III. PROPOS. XVI.

Dato rectangulo circulo æquale constituere eius sectorem æqualem dato rectangulo minori.

Detur rectangulũ EF, æquale areę, circuli sub FO semiperipheria, & sub radio OE cõprehensum, & rectangulum ACBD, eo minus, cui quęritur sector ęqualis. Si non est eiusdem altitudinis, ac EF, redigatur ad eandem altitudinem, ex prop. 6. part. 1. huius, & sit CH. Mensuretur deinde eius latus GL in latere FI. & ducta OI, erit parallelogrammũ GF ęquale ipsi CH, & cõsequenter CB, parallelogrammo. Deinde ex pr. 10. l. 6. Elem. secetur OK, vel FK diameter iuxta proportionem, quam habet FI ad OF, & sit eadem proportio FQ ad QK; Radio itaque FK seorsim fiat quadrans MNX in quo inscribatur quadratrix MVT, qui quadrans erit quarta pars parallelogrammi EF, cum sit quarta pars circuli æqualis.



Translata itaque FQ in PN ducatur ad quadratricem MVT parallela PV basi NT, & & per V à centro N ducatur radius NZ. Dico quadruplum sectoris NXZ esse ęquale parallelogrammo ABCD.

Prob. Nam vt sector NZX, est ad quadrantẽ MNX ita est arcus XZ ad quadrãtis ambitũ XZM ex 39. l. 6. vt autẽ arcus XZ ad XZM quadrantem, sic portio NP ad radiũ NM ex 18. Tr. 18. & FQ ad QK, & FI ad FO, Cx effect. & rectangulũ cũ sit eiusdẽ altitudinis ex 1 omne, quòd occupant, segmenti huius elliptici FHA æquatur alteri EDB ab æqualibus numero, & extensione triangulis occupato.

THEOR. III. PROP. XXII.

Sectores æqualibus segmentis Ellipticis insistentes inter se sunt æquales.

INspiciatur figura præcedens triangula MKA, & BKM; sicut, & BFM, & MAF sunt æqualia ob æquales bases BM, & MA, cum desinant in eundem verticem K, & F. Ablatis itaque triangulis BMK, & MKA erunt æqualia triangula BKF, & FKA; additis itaque æqualibus segmentis ex Thesi BDF, & FHA erunt æquales sectores FKAH, & KBDF.

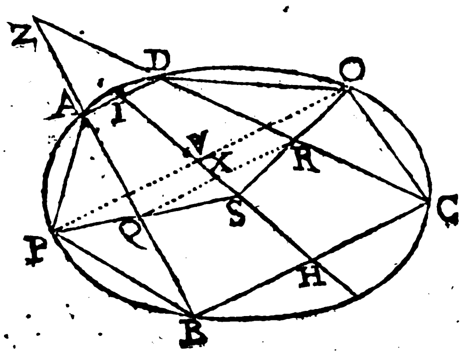
Vnde etiam ceteri erunt æquales sectores BKDC, & AKHI, vtpote dimidia æqualium, & sic de reliquis.

PROBL. II. PROPOS. XXIII.

Dato segmento abscindere aliam portionem ab Ellipsi æqualemquò quò versùm in ea placauerit.

SIt datum segmentum APB, & ducatur semidiameter SP. Dato deinde semidiametro SO sit auferendum prædicto APB segmento aliud æquale.

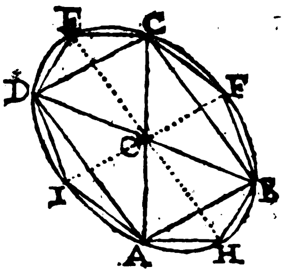
Ducatur OP, & vt SP ad QS, sic fiat OS ad RS, & ducatur QR, quæ ex prop. 4. lib. 6. Elem. erit parallela ipsi OP, & per R ducatur recta applicata CD, ex Cor. 1. prop. 32. tract. 24. eritque segmentum COD æquale segmento APB.



Prob. Nam productis CD, & BA in Z, & ductis CB, & DA cùm sint CR, & RD æquales inuicem, vtpote applicatæ; sicut etiam AQ & QB erit RD ad QA ex prop. 7. lib. 5. Eucl. vt CR ad QB in triangulo CBZ: ideoque CB, & OP, & DA erunt parallelæ ex prop. 2. lib. 6. Elem. quę diuisæ bifariam, erunt quoque applicatæ diametro HI. Vnde ex propos. 1. & 2. huius cum bases æquales OD, & BA nectant applicatas; & vertices sint in applicatis OV, & VP, necnō, & in diametris SO, & SP substernēt maxima, & æqualia triangula DOC, & APB, vnde, & ex 3. h. etiam segmēta ellipsis, in quibus sunt COD, & DBA erunt æqualia. Possent etiam duci à punctis A, & B parallelæ lineę AD, & BC ipsi PO, & per C, & D extrema trahi CD. Nam CR, & RD erunt applicatæ, & hinc, vt priùs ostēdetur propositio. Ratio est, quia productis CD, & BA in Z in triangulo CZB erit RQ ad QA, vt CR ad RD ex propos. 3. lib. 6. Elem. sed QA, & QB sunt æquales: ergo CR, & RD ex 7. l. 5.

COROLLARIVM.

HInc colliges modum, quo diuidas Ellipsim in partes subduplas V. g. in 2. in 4. in 8. in 16. Nam primo per quemcumque diametrum ex prop. 32. Tr. 24. bifariam secabis, deinde rursus aliam diametrum coniugatam duces, & diuides in 4. partes: exinde per eorū extrema duces rectas, quæ bifariam diuidentur, & diametri per earum medietates ducti quatuor iam partes effectas bifariam diuident, & 8 efficient, & sic de reliquis.

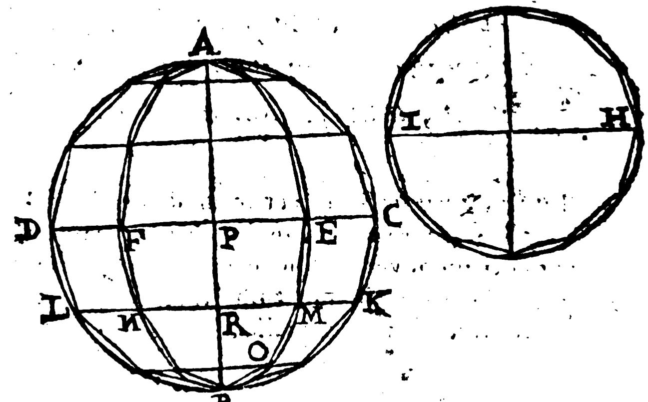


Patet; CDA, & CBA sunt triangula maxima; cùm BD applicata, simulque diameter eorum extrema nectat, ergo etiam segmenta CDA, & CBA erunt æqualia: triangulum verò COD est æquale triangulo COB ob bases æquales OB, & OD, & eumdem verticem C segmenta quoque æqualia CED, BFC ex dictis prop. 21. huius sunt, & sic de alijs asserendum

THEOR. IV. PROPOS. XXIV.

Omne spatium ellipsis ea proportione respicit circulus maiori eius diametro descriptus, qua maior diameter minorem.

SIt Ellipsis AEPB. Dico ad eā proportionē habere circulū ABCD maiori diametro descriptum, quam diameter maior CD ad minorem BF. Quod vt probetur; sit circulus HI; cui cū habeat pportionē circulus ADBC, quā CD ad BF; quod fiet ex 21. l. 6. si inter CD, & EF media pportionalis inueniat HI, & ea diametro circulus HI describatur. Deinde diuisis circulis in æquales numero partes inscribatur figura quælibet V. g. 12. laterum, in circulo verò CADB ducantur rectæ parallelæ diametro CD, vt sunt KL; puncta autem, in quibus secant ellipsim, vt E, M, & O rectis iungantur. Eritque in ipsa Ellipsi inscripta figura tot laterum, quot in circulo inscripta possidet.



Antequam autem propos. probetur, primò considerandum. Quod spatia plana á dictis lineis circuli comprehensa, vt est PACX dicunt eam proportionem ad spatia Ellipsis inter easdem lineas clausa V. g. EPRM, vt CP ad PE, vel vt KR ad MR.

Ratio

Ratio est deducta à propos.72.Tract.24.Conic. Cum enim sit CP ad EP, vel XR ad MR erit etiam eiusdem altitudinis spatium CKPR ad spatium EPMR, vt bases, quæ sunt eiusdem proportionis, vt propos 13.tract. preced. nimirum vel CP, ad EP, vel XR ad MR, & ita dicas de omnibus alijs spatijs. Quare figura inscripta in circulo ex prop.17.lib.5. Elem. ad figuram inscriptam in Ellipsi eam obtinebit proportionem, quam diameter Ellipsis maior CD habet ad minorem EF. Siquidem cùm singula spatia circularia singulis ellipticis sint in eadem proportione, quam CP ad CE, quę est eadem, quę XR ad MR, & sic de alijs lineis, quę omnes in eadem proportione sunt, etiam omnia spatia simul composita circularia ad omnia spatia simul composita Elliptica in eadem proportione erunt, vt CP ad CE, vel etiam CD ad EF.

Deinde aduertendum est quoque, quia fecimus circulum ACBD, se habentē ad circulum HI, vt diameter CD ad diametrum EF; quod etiam circulo maiori ACBD inscripta figura se habebit ad inscriptā circulo minori HI, vt CD ad EF ex pr.26. 39. lib.6. Quare figura inscripta Ellipsi, & figura inscripta circulo HI erunt ęquales ex prop. 7. l.5. vtpote, quod illis dicat eandem proportionem CD ad EF figura circulo maiori ACDB inscripta.

Quo posito ostenditur propos. Spatium Ellipticum est ęquale areæ circuli HI, sed circulus CADB, ita est ex effectione ad circulum HI, vt diameter CD ad diametrum Ellipsis EF. Ergo etiam spatium circuli maiori diametro descripti ACBD respiciet spatium Ellipticum, vt CD diameter, vel EA respicit minorem diametrum FE.

Probatur quòd spatium Ellipticum sit æquale circulo HI. Nam si non est æquale erit, aut maius, aut minus; sed neutrum dici potest. Ergo erit æquale. Nam si non est Ellipsis æqualis circulo HI: Sit circulus HI maior. Describatur in circulo HI figura adeo multiplicatis lateribus, vt sit maior ipsa Ellipsi: siquidem in circuli maiori, quàm Ellipsis, maior figura ipsâ Ellipsi capere poterit. Similis autem figura circulo ADCB, & Ellipsi, vt docuimus, inscribatur, & erit figura multilatera circuli maioris ACBD ad multilaterā Ellipsis in eadem proportione, vt ad multilateram circuli HI, & ideo æquales erūt circulo HI, ac Ellipsi figurę inscriptę. Sed est maior figura circulo inscripta ex aduersarijs, ergo esset maior, simulque æqualis, quòd esse nequit.

Quod si afferatur circulus HI minor; quàm Ellipsis. Tunc in Ellipsi talis figura inscribatur adeo multiplicatis lateribus, vt docuimus, vt sit maior ipso circulo HI; Nam cum sit maior Ellipsis circulo HI adeo inscriptæ fig. latera multiplicari poterunt, vt euadat circulo HI in aliquo maior, fitq; alia tot numero laterū in circulo HI inscripta. Sed, vt ostendi, figura circulo HI inscripta est æqualis ipsi figuræ Ellipticæ, ergo figura in HI esset ęqualis, & vt volunt aduersarij minor, quam figura Elliptica: quod esse nequit.

COROLLARIVM.

HInc educitùr Ellipsim AEBF ad circulum CDAB consequi eam proportionem, quam rectangulum ex CD, & EF lateribus ad quadratum CD. Ratio est, quod cum quadratum, & rectangulum sint eiusdem altitudinis CD se habebunt inuicem, vt bases EF ad CD, quàm, & adipiscitur Ellipsis AEBF, collata ad circulum ACBD.

THEOR. V. PROP. XXV.

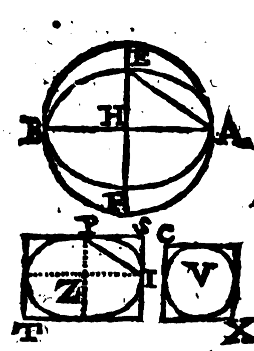
Si circulus fiat ex diametro, qui sit media proportionalis inter diametrum maiorem, & minorem Ellipticum, æqualis Ellipsi est.

PRobatur ex præced. Siquidem ostendimus talem circulum, nec posse esse Ellipsi minorem, nec maiorem. Quare æqualem esse conclusimus. Et hinc iam habes modum, quo circulum æqualem Ellipsi efficias; si inter CD, & EF mediam proportionalem inuenias HI, & ex eo circulum HI delinees.

THEOR. VI. PROPOS. XXVI.

Ellipsis qualibet ad circulum quemcumq; in proportione ea est, qua rectangulum ex diametris ad quadratum circuli dati.

SIt circulus V Ellipsis EAFB. Dictum est in Cor. Ellipsim EAFB ea proportione referri ad circulum maiori eius diametro descriptum AB; qua rectangulum ex eius diametris AB, & EF ad quadratum



AB; Sed circulus ex AB ad circulum V eā refertur proportione, qua quadratum AB ad quadratum XC ex propos.40. lib.6. Elem. Ergo ex æquo Ellipsis EAFD eam retinet proportionem ad circulum V, quam rectangulum ex AB, & EF diametris ad quadratum CX.

THEOR. VII. PROPOS. XXVII.

Ellipsis quæcumque ad quamcumque Ellipsim eam consequitur proportionem, quam rectangulum ex diametris primæ ad rectangulum ex diametris secundæ.

ELlipsis AEBF in fig. prop. anteced. eam adipiscitur proportionem ad circulum V; quam rectangulum ex diametris AB, & EF ad quadratum XC ex pr.antec. Sic circulus V ad Ellipsi alteram Z eam dicit proportionem ob eandem propos. quam quadratum CX ad rectangulum ST. Ergo ex æquo Ellipsis AEBF ad Ellipsim Z eam dicit proportionem, quam rectangulum ex AB, & EF ad rectangulum ST.

CO-

THEOR. II. PROPOS. II.

Figura quælibet circulo circumscripta maiorem obtinet ambitum, quàm circulus, sicut, & figura inscripta minorem.

Licet expressius hanc propos. ostendat Archimedes lib. 1. de sphæra: nobis tamen ex communi conceptu eam probare satis erit. Circumscripta figura continet circulum. Ergo, cùm ex communi hominum sensu sit maius continens, quàm contentum, erit maior ambitus continentis multilateri, quàm contenti circuli.

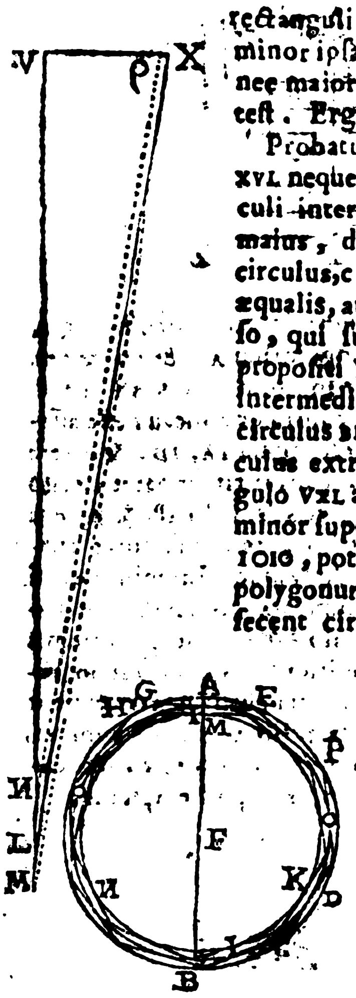
Probatur quoque secunda pars. Nam si circulus contineat multilaterum inscriptum ex eodem principio erit maior circulus, quàm inscripta figura.

THEOR. III. PROPOS. III.

Area cuiuslibet circuli æqualis est rectangulo triangulo ex linea recta æquali circumferentiæ, tamquam vno crure, & semidiametro tamquam altero crure confecto.

Sit circulus IOIO intermedius, & supponatur factum triangulum rectangulum XVL, cuius crus VL sit æquale ipsius circuli peripheriæ, & VX semidiametro. Dico hanc rectanguli aream esse æqualem areæ circuli IOIO.

Probatur. Nam, si non est æqualis erit area rectanguli VXL, aut maior, aut minor ipsa circuli planitie: Sed nec maior, nec minor esse potest. Ergo erit æqualis.



Probatur. Quòd triangulum XVL nequeat esse maius area circuli intermedij. Nam, si est maius, dabitur itaque aliquis circulus, cuius area, aut illi erit æqualis, aut proximè minor ipso, qui superet aream circuli propositi IOIO, & sit aliquid intermedium. Sit itaque iste circulus BDAH: Quia itaq; circulus extrinsecus BDAH rectangulo VXL æqualis, vel proximè minor superat circulum datum IOIO, poterit in ipso inscribi polygonum, cuius latera non secent circuli interioris IOIO peripheriam. Sed ad summum tangãt. Quod fiet si ducto radio FI, tãgens ei erigatur in I, quæ sit EO; ductis enim ei æqualibus EP, &c. æquales circũferẽtias abscĩdet; ex 30.l.3. donec aut minor circũferentia remaneat, aut æqualis HG; si æqualis tanget ducta linea HG; si minor saltem non tanget.

Confecto itaq; polygono HPDB, erit vt polygonum comprehensum [illegible] eius [illegible] circumferentia circuli IOIO, quam [illegible] [illegible] si fiat huic polygono triangulũ XVM [illegible] cum æquale ex propos. 5. Tr. præc. [illegible] nibus cruribus polygoni HPDB æqualis, erit maior: quàm VL æqualis peripheriæ medij circuli IOIO Quare etiam triangulum VXM erit maius, quàm triangulum VXL. Verùm triangulum VXL est æquale; vel maius circulo exteriori BDA (siquidem cum dicerent aduersarij triãgulum VXL esse maius, quàm circuli planities IOIO circulũ BDA præsupposuimus triangulo illi VXL, aut æqualem, aut minorem) Cùm ergo triangulum VXL sit, vel æquale, vel maius circulo exteriori BDA; iste circulus exterior BDA, remaneret minor ipso triãgulo VXL, quod etiam minus est triangulo VXM, vt ostensum est: at VXM factũ est æquale poligono HPDB; ergo circulus exterior BDA esset minor, vel æqualis Polygono HPDB; quod in se concludit, quod est absurdum.

Probatur deinde. Quòd triangulum prædictum VXL non possit esse minus, quàm superficies circuli propositi IOIO: Quoniam, si est minus, dabitur aliquis circulus intermedius, aut æqualis, aut maior prædicto rectangulo VXL. Sed tamen non excedens circulum datum IOIO. Detur MKN, & illi circumscribatur polygonum, cuius latera in circulo dato IOIO comprehendantur, vt supra docuimus efficere, erit itaque area huius polygoni minor area circuli dati OIOI circumscribentis. Vnde si fiat rectangulum æquale ex NKM ambitu polygoni, vt supra prop. 5. præc. Tr. vt est QVN, hoc erit minus rectangulo triangulo VXL, vt pote crure minori vel æquali perpendiculari FM, & VN ambitu polygoni inscripti. Cùm ergo triangulũ VXL maius sit triãgulo VQN, etiam circulus internus MKN, qui est maior ex aduersarijs, vel æqualis triãgulo VXL (siquidẽ cũ asserebant VXL esse minus circulo IOIO circulũ MKN fecimus, aut maiorẽ proximè, aut æqualẽ ipsi triãgulo VXL) Circulus inquã internus MKN erit maior, quã Polygonũ, à quo circumscribitur, cũ polygono illi triãgulũ VQN sit æquale, & minus triangulo VXL, qui internus prædictus circulus MKN, aut maior est, aut ipsi æqualis ex suppositione: Hoc autem esse nequit, nempe quod internus circulus comprehensus sit æqualis Polygono, à quo circumscribitur.

Cum ergo triangulum VXM, nec minus esse possit, nec maius circuli dati OIOI planitie, oportebit fateri; quod illi æquetur.

THEOR. IV. PROP. IV.

Si detur triangulum, cuius altitudo sit radius, & basis portioni peripheriæ æqualis subtensæ sectori; hoc erit sectori æquale.

Exhibeatur sector ACB, in circulo ACB & trianguli FEG crus FE radio AC æquetur, & basis FG æquetur arcui sectoris CB. Dico triangulum [illegible] æquale esse sectori ABC.

Probatur. Nam sit FH æqualis peripheriæ toti. Erit itaque, vt arcus CB ad circulum: sic basis FG ad basim FH cùm ex propos. 7. lib. 5. æqualium ad æquales sit eadem proportio. Verùm ex prop. 33. lib. 6. vt arcus CB est ad peripheriam CBVC, ita sector ACB est ad superficiem totius circuli, & ex 1. lib. 6. vt basis [illegible], ita [illegible] triangulum

TRACTATVS XXX.

De Transformatione Curuilineorum.

EA omnia, quæ de Geodæsia plana considerauimus, de curuilineis quoque animaduertere oportet; quamuis eleuatior sit contemplatio, & acrioris ingenij acumen exposcat; neque omninò sit perfecta; cum aliquæ, vt Hyperbola trasformari in rectilineas, vsque adhuc recusauerint, imò nec quidem in curuilineas diuersi generis deduci potuerint.

EXPENSIO I.

De quadratione Circuli Arithmetica.

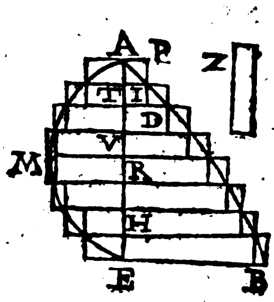
MVlti ne dum apud veteres; sed recentiores etiam, vt testatur Hyeronimus Vitalis ex nostris in suo Lexico mathematico in circuli Tetragonismum sc. quadrationem totis viribus incubuere, & quidem apud antiquos Antiphon, Bryso, Hyppocrates Chius. Inter Neotericos autē Orontius Finæus, Campanus, Nicolaus Cardinalis Cusanus, desudarūt. Sed cęteris sublimius Ambrosius à S. Vincentio in insigni opere, quod de Quadratura circuli inscripsit totam penè ętatem consumpsit. Sed licet multa consequutus fuerit omninò admiratione digna; tamen scopum assequutus nō est. Nam eius quadraturas (quatuor enim protulit l. 10. de quadratura circuli inscripto) impugnat Vincentius Leutaudus prçter multos alios, & euidentiùs deijcit, & licet Franciscus Xauerius Ayscon authorem propugnet. Id tamē libro Lugduni impresso anno 1663. nouę impugnationi eidem Leutaudo locum dedit. Vnde satiùs iudicaui antiquam quadraturam Archimedeam approximantem veritati proponere, quàm nouum tetragonismum, & laboriosissimum, & adhuc sub lite versantem producere.

THEOR. I. PROPOS. I.

Cuicumque figuræ curuilineæ, seu mixtilineæ possunt tot rectangula inscribi, aut circumscribi, vt relinquant quantitatem quálibet data minorem.

SIt data figura plana ABE, quę sit aut curuilinea, aut mixta. Dico tot rectangula posse, vel inscribi, vel circumscribi, vt, quod inter figuram curuilineam, vel mixtilineam, & rectangula superficiei remanet, & intercipitur, sit qualibet quantitate plana V. g. assignata z minus.

Ducta AE hęc diuidatur taliter, vt maximum rectangulum, quod fit ex eius partibus, & maxima linea ei perpendiculariter insistentē, vt BE, vel RM sit minus quantitate z data, & cętera omnia rectangula simul sumpta relinquāt inter se, & figuram cui inscribuntur, vel circumscribuntur quantitatem data z minorem.



Probatur. Relinquunt inscripta paulò magis, quàm medietatē rectangulorum AI, & ID, & cęt. circūscripta verò AI, & ID paulo minus ob lineam curuā, & globosām (è contra de concaua esse asserendum) sed omnia rectangula IA, ID, & cętera curuam intercipientia ęquant BH vt patet, ergo spatia, quę remanent, vt AIT, vel IAP, & cętera omnia triangula mixtilinea conclusa inter curuam, & rectangula inscripta, quod sint minus quasi sub duplo, quam rectangula AI, & ID curuam stipantia ęqualia rectangulo BH ęquanti planitiem z sunt minus, quam planities z. Quod autem rectangula AI, & ID stipantia curuam AIB æquent rectangulum BH patet ex 3. lib. 2. Elem. cum TI, & cæterę sint partes ipsius EB, & TA, & ID, & cæteræ sint omnes æquales ex hypothe ipsi RH.

THEOR.

THEOR. II. PROPOS. II.

Figura qualibet circulo circumscripta maiorem obtinet ambitum, quàm circulus, sicuti & figura inscripta minorem.

Licet pressius hanc propos. ostendat Archimedes lib. I. de sphæra: nobis tamen ex communi conceptu eam probare satis erit. Circumscripta figura continet circulum. Ergo, cùm ex communi hominum sensu sit maius continens, quàm contentum, erit maior ambitus continentis multilateri, quàm contenti circuli.

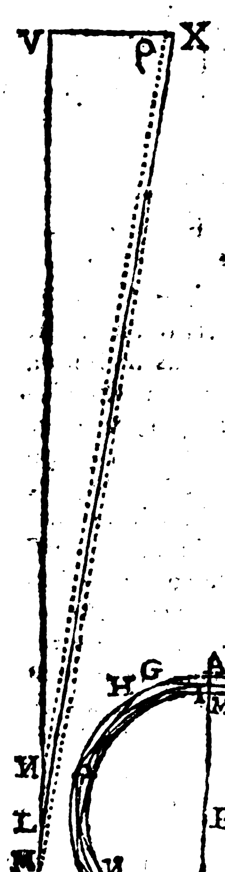
Probatur quoque secunda pars. Nam si circulus contineat multilaterum inscriptum ex eodem principio erit maior circulus, quàm inscripta figura.

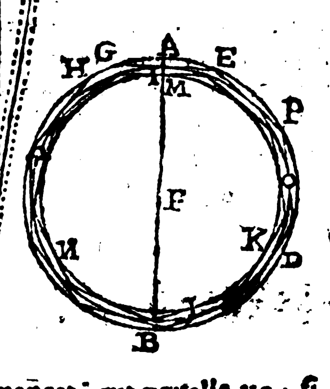
THEOR. III. PROPOS. III.

Area cuiuslibet circuli æqualis est rectangulo triangulo ex linea recta æquali circumferentiæ, tamquam vno crure, & semidiametro tamquam altero crure confecto.

Sit circulus IOIO intermedius, & supponatur factum triangulum rectangulum XVL, cuius crus VL sit æquale ipsius circuli peripheriæ, & VX semidiametro. Dico hanc rectanguli aream esse æqualem areæ circuli IOIO.

Probatur. Nam, si non est æqualis erit area rectanguli VXL, aut maior, aut minor ipsa circuli planitie: Sed nec maior, nec minor esse potest. Ergo erit æqualis.





Probatur. Quòd triangulum XVL nequeat esse maius area circuli intermedij. Nam, si est maius, dabitur itaque aliquis circulus, cuius area, aut illi erit æqualis, aut proximè minor ipso, qui superet aream circuli propositi IOIO, & sit aliquid intermedium. Sit itaque iste circulus BDAH: Quia itaq; circulus extrinsecus BDAH rectãgulo VXL æqualis, vel proximè minor superat circulum datum IOIO, poterit in ipso inscribi polygonum, cuius latera non secent circuli interioris IOIO peripheriam. Sed ad summum tangãt. Quod fiet si ducto radio FI, tãgens ei erigatur in I, quæ sit EG; ductis enim ei æqualibus EP, &c. æquales circũferentias abscidet; ex 33. l. 3. donec aut minor circũferentia remaneat, aut æqualis HG; si æqualis tanget ducta linea HG; si minor saltem non tanget.

Confecto itaq; polygono HPDB, erit vt polygonum comprehendes maior eius ambitu quàm circumferentia circuli IOIO, quam claudit. Quare si fiat huic polygono triangulũ XVM rectangulum æquale ex propos. 5. Tract. præc. [illegible] nibus cruribus polygoni HPDB æqualis, erit maior; quàm VL æqualis peripheriæ medij circuli IOIO. Quare etiam triangulum VXM erit maius, quàm triangulum VXL. Verùm triangulum VXL est æquale; vel maius circulo exteriori BDA (siquidem cum dicerent aduersarij triãgulum VXL esse maius, quàm circuli planities IOIO circulũ BDA præsupposuimus triangulo illi VXL, aut æqualem, aut minorem) Cùm ergo triangulum VXL sit, vel æquale, vel maius circulo exteriori BDA; iste circulus exterior BDA, remaneret minor ipso triãgulo VX, quod etiam minus est triangulo VXM, vt ostensum est: at VXM factũ est æquale poligono HEPDB, ergo circulus exterior BDA esset minor, vel æqualis Polygono HEPDB; quod in se concludit, quòd est absurdum.

Probatur deinde. Quòd triangulum prædictum VXL non possit esse minus, quàm superficies circuli propositi IOIO: Quoniam, si est minus, dabitur aliquis circulus intermedius, aut æqualis, aut maior prædicto rectangulo VXL. Sed tamen non excedens circulum datum IOIO. Detur MKN, & illi circumscribatur polygonum, cuius latera in circulo dato IOIO comprehendantur, vt supra documus efficere, erit itaque area huius polygoni minor area circuli dati OIOI circumscribentis. Vnde si fiat rectangulum æquale ex NKM ambitu polygoni, vt supra prop. 5. præc. Tr. vt est QVN hoc erit minus rectangulo triangulo VXL, vtpote crure minori VQ æquali perpendiculari FM, & VN ambitu polygoni inscripti. Cùm ergo triangulũ VXL maius sit triãgulo VQN, etiam circulus internus MKN, qui est maior ex aduersarijs, vel æqualis triãgulo VXL (siquidẽ cũ assererent VXL esse minus circulo IOIO circulũ MKN fecimus, aut maiorẽ proximè, aut æqualẽ ipsi triãgulo VXL) Circulus inquam internus MKN erit maior, quã Polygonũ, à quo circumscribitur, cũ polygono illi triãgulũ VQN sit æquale, & minus triangulo VKL, qui internus prædictus circulus KNM, aut maior est, aut ipsi æqualis, ex suppositione; Hoc autem esse nequit, nempe quod internus circulus comprehensus sit æqualis Polygono, à quo circumscribitur.

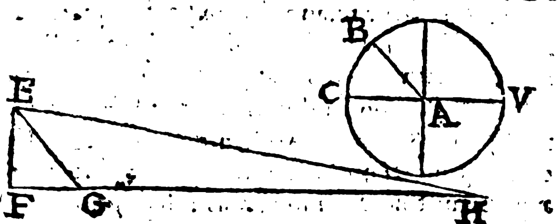
Cùm ergo triangulum VXM, nec minus esse possit, nec maius circuli dati OIOI planitie, oportebit fateri; quòd illi æquetur.

THEOR. IV. PROP. IV.

Si detur triangulum, cuius altitudo sit radius, & basis portioni peripheriæ æqualis subtendenti sectorem; hoc erit sectori æquale.

Exhibeatur sector ABC, in circulo BCV; & trianguli FEG crus FE radio AC æquetur, & basis FG æquetur arcui sectoris CB. Dico triangulum EFG æquale esse sectori ABC.

Probatur. Nam sit FH æqualis peripheriæ toti. Erit itaque, vt arcus CB ad circulum: sic basis FG ad basim FH cùm ex propos. 7. lib. 5. æqualium ad æquales sit eadem proportio. Verùm ex propos. 39. lib. 6. vt arcus CB est ad peripheriam CBVC, ita sector ACB est ad superficiem totius circuli, & ex 1. lib. 6. vt basis ad basim FH, ita EFG triangulum



gulum eiusdem altitudinis FEG ad triangulum FEH. Ergo ex 16. lib. 5. ita erit sectoris planicies ACB ad planitiem circuli CBV, vt trianguli FEG ad planitiem trianguli EFH, & *permutando*. Ita erit ACB sector ad FEG triangulum, vt circulus CBV ad triangulũ EFH: sed circulus, & triangulum in praeced. ostensa sunt aequalia: ergo etiam sector ACB, & triangulum FEG aequabuntur: quare, & rectangulum ex dimidio, vel radio, vel linea aequali dimidio arcui erit ex 39. equale sectori ACB.

PROBL. I. PROPOS. V.

Aream circuli ex data diametro, & circumferentia proximè inuenire.

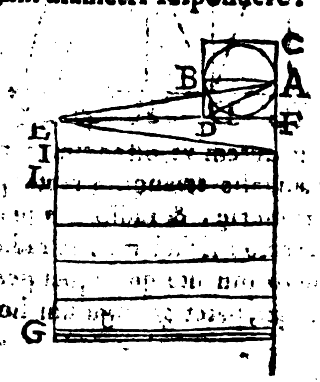
CVm ex ostensis propos. 3. Tract. 16. inuenerimus circumferentiam ad diametrum se habere vt 22. ad 7. quae tamen vera paulò maior est. Hinc si accipiamus 7. pro diametro, & 22. pro circumferentia, mutuâ horum numerorum multiplicatione efficiemus rectangulum, seu planum 154. cuius medietas 77. ex propos. 40. lib. 1. Elem. erit equalis triangulo rectangulo XVZ; de quo iam ostendimus prop. 1. areę circuli aequale esse.

Si verò placeat aream rectanguli verâ circuli planitie minorem insensibiliter. Accipies diametro verę circumferentiam habentem minorem proportionem: quam 22. ad 7. nimirum eam, quam prop. 5. tract. 18. explicauimus, in qua posito diametro partium 71. circumferentia erit 223. nimirum in proportione tripla super decupartiente septuagesimas primas, idest comprehendet diametrum ter, & ferè septimam ipsius partem deficiente tantùm $\frac{1}{71}$ vnius vnitatis. Et ita vt priùs multiplicatus diameter 71. per circumferentiam 223. efficiet aream 15833. quę bifariam diuisa erit 7916 $\frac{1}{2}$ circuli planities.

THEOR. V. PROPOS. VI.

Area circuli proportionem eam consequitur ad quadratum diametri, quam 11. ad 14. proximè.

SIt circulus, cuius diameter AB, eiusque quadratum CD. Dico aream circuli veluti 11. ad 14. ad quadratum diametri respondere.



Dimidium quadrati CD erit AD, & quarta pars eius erit triangulum FAD. Producatur diameter FD in E, atque FE aequalis circumferentiae praesupponatur, & ducatur AE. Itaque triangulum FAE erit eiusdem altitudinis, ac triangulum FAD, quod est quarta pars quadrati ex diametro. Quamobrem ita erit triangulum FAE ad triangulum FAD, nempe ad quartam partem quadrati CD, vt basis FE ad basim FD ex 1. lib. 6. Elem. quae est proximè, vt 22. ad 7. Quare erit triangulum FAE, equale areę circuli ex 3. h. ad FAD aequale quartae parti quadrati CD proximè, vt 22. ad 7. quare FAE triangulum ad quadratum totum quater maius CD erit vt 22. ad numerum quater maiorem 28. quę est eadem proportio, quae 11. ad 14.

PROBL. II. PROPOS. VII.

Ex diametro noto aream circuli proximè inuenire.

SIt notus diameter Partium 84. quadretur hic numerus, & sit 7056. Vtendo itaque regula aurea fiat, vt 14. ad 11. sic 7056. ad aliud, & exeret area circuli 5544.

THEOR. VI. PROPOS. VIII.

Quadratum circumferentiae se habet ad aream circuli, vt 88. ad 7.

PRobatur. Nam posito FB part. 22 in figura prop. 6. antec. nempè aequali proximè circumferentiae, & posito diametro partium 7. si fiat quadratum ex FB circumferentia continebit sex rectangula dupla AFE ex 3. lib. 2. Elem. & insuper rectangulum nigrum ex septima parte constitutum: Nam 22. continet ter diametrum partium 7. & ideo sexies semidiametrum partium $3\frac{1}{2}$, & addit insuper septimam partem diametri, nempe $\frac{1}{7}$ semidiametri: Quare rectangulum FI ex circumferentia FB, & semidiametro FA erectum, erit duplò maius, quàm triangulum FAE proximè aequale areae circuli. Propptereaque quadratum FG ex circumferentia continebit duodecies aream circuli, & insuper parallelogrammum nigrum, quod est septima pars rectanguli FL sub toto diametro EL, & tota circumferentia FB comprehensi, at $\frac{2}{7}$ dimidij rectanguli FI, & ideo $\frac{4}{7}$ trianguli FAE: Si itaque ad vitandas fractiones efficiamus aream circuli, vel triangulum ei proximè aequale FAE esse partium 7. totum quadratum FG duodecies maius erit, cum quatuor septimis partibus, nempe cum rectangulo nigro part. 88. Nam 7. duodecies acceptus facit 84. & $\frac{4}{7}$ additi efficiunt 88. & ideo quadratum FG erit partium 88. posita area diametri partium 7.

PROBL. III. PROPOS. IX.

Aream circuli proximè inuenire.

FIat, vt 88. ad 7. ita quadratum circumferentiae 264. ad aliud, & adhibita regula proportionum elicietur numerus 5544. pro area circuli quaesiti.

PROBL. IV. PROPOS. X.

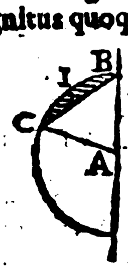
Data sectoris peripheria, & cruribus, eius aream adinuenire.

SIt, vt in pr. 4. sector ABC, cuius AC crus notũ sit partium 25. pedum, & arcus BC 10. pedum, ideoque ex prop. 4. huius triangulum rectangulum EFC, cuius crus FE sit 25. pedum, & basis FG 10. pedum erit ei æquale. Quadere si mutua multiplicatione fiat rectangulum partium 250 & medietas sumatur partium 125. hęc erit sectoris arealis quæsita quantitas.

PROBL. VI. PROPOS. XI.

Cognito sectore, & chorda cognoscere aream segmenti circuli.

SIt segmentum circuli nigrum BIC, deturque chorda BC, & cognitus quoque sector BACI;

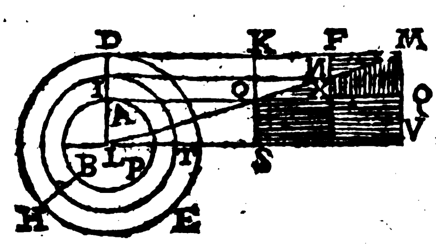


Debet priùs per ea, quæ prop. 16. Tract. 29. triangulum BAC cognosci. A sectore itaque subductum triangulum CBA relinquet segmentum nigrum ICB.

PROBL. VII. PROPOS. XII.

Annulum planum in quadratum redigere, & mensurare.

DEtur annulus DEHAPB planus, cuius notus sit circulus medius ITI, vt faciliter ex nota diametro inueniri potest: multiplicetur hic circulus per residuum semidiametri AD subducto diametro minori LA, & productum erit area prædicti annuli DEHAPB.



* Prob. Nam fiant parallelográma LM, LN, & LO æqualia singulis circulis DEH, ITI, & BAP; quæ ob latera æqualia semicircumferentijs erunt similia, cùm sit ita radius vnius circuli ad radium alterius vt peripheria ad periphæriã ex pr. 30. l. 6. El. & ex 25 l. 6. ideò triangula circa diametrum cõsistentia ex prop. 35. lib. 1. Elem. MOX, & MOQ, necnon, & complementa OD, & OV erunt æqualia: si autem spatio MXOQ auferatur triangulum MXO, & addatur æquale triangulum MFN, spatium nigrum parallelográmo albo XD remanebit æquale. Sed rectangulum istud est factum ex dimidia circumferẽtiá circuli medij ITI, & residuo AD semidiametri LD. Quare ex integra circumferentia, cùm fiat duplo maius æquabitur toti gnomoni AMS: sed gnomon AMS æquatur annulo DEH, APB. Ergo etiam duplum rectangulum XD, quod fit ex peripheria ITI, & segmento AD æquabit annulum DEHABP.

Quod autem gnomon AMS æquet annulum patet. Nam rectangulum OAS ęquat circulum BAP. Totum autem rectangulum LM æquat totum circulum DEH. Ergo subductus ab æqualibus rectangulum LO ab LM, & minimus circulus à toto circulo restabũt annulus DEHPBA, & gnomon AMS residua æqualia.

COROLLARIVM.

HInc quoque agnosces partem annuli dimetiri. Nam sicut tota annuli media peripheria ITI cum residuo diametri AD multiplicata dat totum annulum; sic pars IT peripheriæ eiusdem medię cum eodem diametri residuo AD multiplicata partem annuli ADT, quem metitur, producet.

EXPENSIO II.

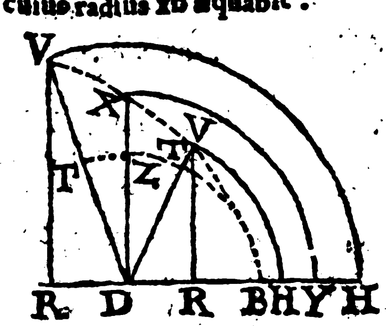
De Quadratione Circuli Geometrica.

FAciliori modo quadrationem circuli operi demandabimus mediante quadratrice, quam descripsimus tract. 18. de flexis ex prop. 14. vnde sit,

THEOR I. PROPOS. XIII.

Circuli areæ æquale triangulum parallelogrammumque, & quadratum constituere.

COrollario 1. propos. 19. tract. 18. cit. probauimus DB sagittam ad DX radium esse, vt radius ad quadrantem XY, si in quadrante XY circuli propositi quadrandi describamus quadratricem; obtinebimus quoque sagittam DB illius. Quamobrem, si sagittę inuentę DB, & radio XD tertiam proportionem inueniamus, hęc erit ęqualis quadranti XY, quam quadruplicabimus, & totum ambitum circuli, cuius radius XD æquabit.



Quoniam autem vt ostendimus prop. 2. h. area circuli est æqualis triangulo rectangulo ex linea æquali peripherię, & radio tamquam ex duobus lateribus erecto: si faciamus ex radio DX, & tertia proportionali inuenta, quę ęquat peripheriam circuli XY totius; patet triangulum hoc esse ęquale areę

areę circuli, cuius quadrans DXY. Quod si ex dimidio prædictę lineę inuentę, quę æquat peripheriam constituatur rectangulum parallelogrammum, cùm hoc sit æquale triangulo prędicto, erit quoque æquale areę ipsius circuli, cum vt prędiximus prop. 23. tract. pręced. hoc modo triangulum in rectangulum ęquale conuertatur.

Tandem parallelogrammum commutetur in æquale quadratum, vel ex prop. 14. l. 2. vel reperiendo inter eius latera mediam proportionalem. Nam quadratum ex hac media erectum cum sit æquale parallelogrammo consequenter etiam circulo æquabitur.

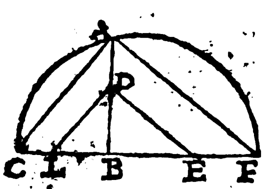
Vnus autem circulus in quadratum redactus multos alios similiter quadrabit. Quandoquidem si offeratur alius circulus similiter redigendus ad quadratum. Inueniatur quarta linea proportionalis istis tribus, nempe diametro circuli, & rectę ęquali eius circumferentię ex linea quadratrice iam notæ, & diametro circuli propositi ex propos. 12. lib. 6. & inuenietur linea ęqualis peripherię circuli oblati; siquidem ex prop. 33. lib. 6. ita diameter est ad diametrum, vt peripheria cuiuscumque circuli ad alius peripheriam. Si itaque hac quarta proportionali inuenta, & semidiametro circuli alterius propositi constituamus triangulum, hoc erit ęquale alterius circuli propositi areę, quod, & redigemus in rectangulum, & in quadratum ęquale, quę consequenter ipsa quoque aream circuli exęquabunt.

THEOR. I. PROPOS. XIV.

Quadratum in circulum æqualem transfundere.

Oportet priùs inuenisse aliquod quadratum ęquale alicui circulo ex prop. pręced. cuius circuli radius notus sit. Deinde inueniatur tribus quadrati lateri, & circuli ei ęqualis iam noti radio, & tandem lateri quadrati in circulum transfundendi quarta proportionalis ex prop. 12. lib. 6. & hęc erit diameter circuli ęqualis quadrati.

Detur itaque Ex. g. latus quadrati AB, & diameter notus circuli ei ęqualis BC, & latus quadrati transmutandi BD. Ducta parallela DL. Linea DL erit diameter circuli trasmutandi, qui cõsequetur aream ęqualem quadrato ex BD.



Probatur. Nam sit nota BF semicircumferentię pręhabiti noti circuli ęqualis, nempe tertia proportionalis duabus BC, & BA, talis enim prop. 13. huius ostensa est, cum in fine illius fuit dictum, quòd latus quadrati circulo ęqualis sit medium proportionale inter lineam ęqualẽ semicircumferentię eius, & radium, cum sit æquale rectangulo ab illis extremis comprehenso, & ideo FB tertia proportionalis. Iungatur deinde FA, quę claudet cum AC, vt patet ex Coroll. prop. 13. l. 6. angulum rectum, cùm sit BC radius ad BA latus quadrati, vt BA ad BF semiperipheriã, deinde à puncto D ducatur DE parallela ipsi AF quibus positis.

Probatur prop. Nam quia est ob similitudinem triangulorum FB ad BA, vt EB ad BD, & vt BA ad BC ita DB ad BL; erit ex *æquo* eadem proportio FB ad BC, vt EB ad BL; quadere ex 43. l. 6. BE erit ęqualis circuli semicircũferentię, cuius semidiameter sit BL. Sicut FB est ęqualis circuli semiperipherię, cuius radius BC. Et quia quadratum DB est ęquale rectangulo ex linea BE ęquali peripherię, & BL radio; Etiam BD quadratum erit ęquale circulo, cui radius BL, illi rectangulo ex BE, & BL ęquali.

PROBL. II. PROPOS. XV.

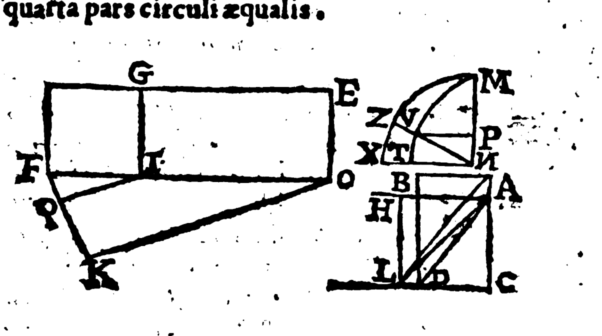
Dato sectori inuenire rectangulum æquale cognita proportione arcus subtensi ad circulum.

Quoniam ex propos. 4. huius. Rectangulum sub linea dimidio arcui æquali, & sub radio comprehensum est æquale sectori, si detur eius proportio ad circulum V. g. quòd octaua pars, accipietur octaua pars lineę rectę ęqualis peripheriæ inuentæ, & ex huius dimidio, & ex radio rectangulum constituetur. Nam dimidium octauæ partis lineæ æqualis peripherię erit æquale dimidio octauæ partis peripheriæ. Vnde rectangulum quoque erit ęquale sectori.

PROBL. III. PROPOS. XVI.

Dato rectangulo circulo æquale constituere eius sectorem æqualem dato rectangulo minori.

Detur rectangulũ EF, æquale areę, circuli sub FO semiperipheriã, & sub radio OB cõprehensum, & rectangulum ACBD, eo minus, cui quęritur sector ęqualis. Si non est eiusdem altitudinis, ac EF, redigatur ad eandem altitudinem, ex prop. 6. part. 1. huius, & sit CH. Mensuretur deinde eius latus CL in latere FI. & ducta OI, erit parallelogrammũ GF ęquale ipsi CH, & cõsequenter CB, parallelogrammo. Deinde ex pr. 10. l. 6. Elem. secetur OK, vel FK diameter iuxta proportionem, quam habet FI ad OF, & sit eadem proportio FQ ad QK; Radio itaque FK seorsim fiat quadrans MNX in quo inscribatur quadratrix MVT, qui quadrans erit quarta pars parallelogrammi EF, cum sit quarta pars circuli æqualis.



Translata itaque FQ in PN ducatur ad quadratricem MVT parallela PV basi NT, & & per V à centro N ducatur radius NZ. Dico quadruplum sectoris NXZ esse ęquale parallelogrammo ABCD.

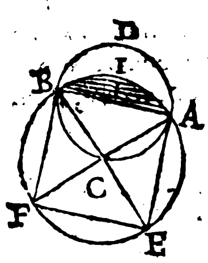
Prob. Nam vt sector NZX, est ad quadrantẽ MNX ita est arcus XZ ad quadrãtis ambitũ XZM ex 39. l. 6 vt autẽ arcus XZ ad XZM quadrantem, sic portio NP ad radiũ NM ex 18. Tr. 18. & FQ ad QK, & FI ad FO, ex effect. & rectangulũ cũ sit eiusdẽ altitudinis ex 1 lib.6. FG ad FE: Igitur ex 16. lib. 5. Elem. vt est sector XZN ad quadrantem XNM, ita est rectangulum FG ad rectangulum EF; sed quadruplum quadrantis FZM, & rectangulum FE sunt æqualia. Ergo etiam ex prop. 12. l. 5. Elem. sectoris NZX quadruplum, & rectangulum FG erunt æqualia.

PROBL. IV. PROPOS. XVII.

Triangulum Lunulæ exhibere æquale.

FVit hic nixus, quò Hyppocrates Chyus ad quadrationem circuli peruenire putauit; fiat itaque circulus ACBD, & ducto diametro AB, & quadrati lateribus AC, & CB, alius circulus fiat radio CB, & relinquet in antecedenti circulo lunulam AIDB, quam dico esse æqualem triangulo ACB.

Probatur. Quoniam quadratum ex FB est duplum quadrati ex AB circulus quoque EABF erit duplus circuli ACBD ex prop. 40. lib. 6. & ex prop. 39. semicirculus semicirculo, & quadrans quadrante duplus erit; Si ergo quadrans circuli minoris dupletur, & fiat semicirculus ADB, is erit æqualis quadranti ACB: Dempto igitur communi spatio nigro AIB inter vtrosq; intercepto, erit Lunula AIDB triangulo ACB æqualis.

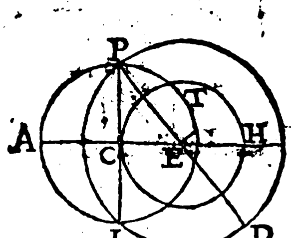


PROBL. V. PROPOS. XVIII.

Dato circulo annulum planum æqualem exhibere, cuius magnitudinis placeat. Et data annuli latitudine, & diametro circulum annulo æqualem facere.

SIt datus circulus APTI cuius centrum C, & datus semidiametro annuli describendi EP, qui vt patet debet esse maior semidiametro PC dati circuli, à quo erigatur perpendicularis à centro C, quæ sit radius CA, & centro P ad interuallum dati diametri EP describatur arcus, qui secet AH in E; ibiq; facto centro describatur EP radio circulus, & eodem centro E interuallo EC alius circulus describatur, quem aio includere annulum CHDIP æqualem circulo APTI.

Probatur. Nam vt sunt quadrata ex diametris, ita circuli ex prop. 40. lib. 6. Cum ergo ex 47. lib. 1. quadratum PE sit æquale duobus quadratis ex CP, & CE etiam erit equalis circulus ex EP duobus circulis ex CP & CE. Ergo etiam circulus PD erit equalis duobus circulis ex PC diametro, & CH diametro, cum sint dupla circulorũ super semidiametros CE, & CP, & circulus quoque PD duplus circuli ex PE semidiametro. Quare cum circulus ex PD, vt diametro æquet circulos ex IP, & CH diametris, ablato CH communi obtinebimus annulum CHPDI æqualem circulo APTI.



Quod si detur annulus CPTHD, & desideres huic annulo adinuenire circulum æqualem primò ex propos. 19. l. 3. duces tangentem PCI interiori circulo CTH vsque dum secet exteriorem PDI, quam bifariam diuides, & produces AB, factoque centro in puncto contactus C interuallo CP describes circulum; eritque circulus æqualis annulo dato CP HD, vt patet ex præc. ostensione.

COROLLARIVM.

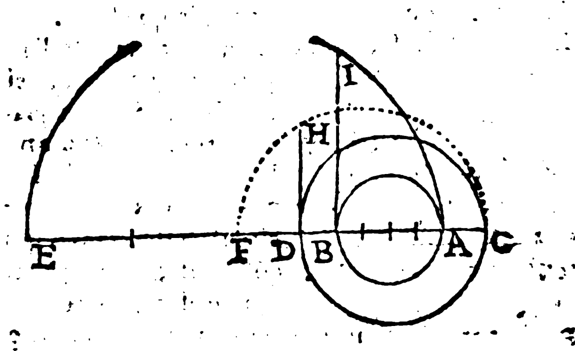
HInc disces plurimos circulos in vnum aggregare; Siquidem ex preced. circulus PDI equatur circulis API, & CTH. Vnde sic eidem PHD alium poteris aggregare; successiueque alios vsque dum placeat.

PROBL. XI. PROP. XIX.

Circulos proportionaliter augere, vel minuere.

EFficies quadratum ex prop. 28. Tract. 29. V. g. duplum, vel triplum alterius; describesque circulos super eorum latera, tamquam diametris; obtinebisque circulos in data proportione tripla V. g. maiores. Sit circulus AB augendus, ita vt ad circulum maiorem se habeat vt 1. ad 3. Sit rectangulum ex AB, & BE triplo maius, quam quadratum AB, quod fit assumendo latus BE triplò maius; Nam cum sint eiusdem altitudinis se referent, vt bases AB, & BE ex 1. lib. 6. Deinde inter AB, & BE reperiatur media proportionalis BI, & quadratum ex BI æquabitur rectangulo AB, & BE triplo maiori, quam quadratum ex AB constituatur, ergo circulus ex IB, vel æquali CD, & erit intentum.

Si verò oporteat diminuere sit circulus CD minuendus, diuidaturq; latus CD in tres partes, & sit FD æqualis tertiæ parti, ita vt se habeat rectangulum ex CD, & FD tertia parte ad quadratum FD, vt 3. ad 1. interque totam diametrũ CD, & tertiam partem DF sit media proportionalis DH, & circulus ex DH, tamquam diametro factus erit $\frac{1}{3}$ circuli ex CD.



Patet, quia circuli ita se habent in proportione, vt ex diametris quadrata ex 39. lib. 6. ideoque se habebunt ad inuicem, vt quadratum ex CD ad quadratum ex AB; sed quadratum ex CD ad quadratum ex AB se habet, vt rectangulum AB, & BE ad quadratum AB ex constructione nimirum, vt 3. ad 1. ergo etiam circuli ex 16. lib. 6. se habebunt, vt 3. ad 1.

EXPEN-

EXPENSIO III.

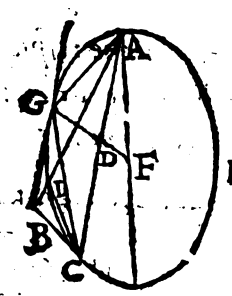
De Ellipsium tum inuicem, tum in alias figuras transmutatione.

TRansformatio Ellipsium non minus vtilis: quam necessaria est, cum enim ipsius vsus sit apud homines communissimus ipsius quoque mensuratio multoties, ne dum opportuna erit, sed & pernecessaria: iureque succedit circulo cùm sit quoad figuram valdè ei proxima, & ferè in omnibus proprietatibus suis illum imitetur.

PROBL. I. PROPOS. XX.

Triangulum maximum Ellipsi inscribere.

SIt Ellipsis ACE, & eius segmentum CGA, sitq; inscribendum maximum triangulum, quòd in eo inscribi queat. Ex centro F per medium D lineę CA ducatur diameter GF, & compleatur triangulum CAG, quod erit maximum.

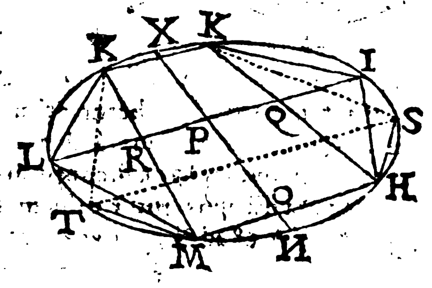


Probatur CG, & CA cum ex effectione sint ęquales sunt applicatę, & G F diameter def. 11. Tract. 24. quare ducta BG contingente in G, hæc erit parallela lineæ CA ex prop. 28. Tr. 24 Si ergo CGA triangulum maximum non est, assignetur aliquod maius, & sit CIA; producaturque IA in B ad contingentem BG, & ducatur CB. Erit igitur triangulum CBA æquale triangulo CAG ex propos. 39. lib. 1. Coroll. Ergo CIA erit minus, quàm CAG, quod ponebatur æquale. Ergo non dabitur triangulum maius, quàm CGA.

THEOR. I. PROPOS. XXI.

Omnia triangula, quę super bases nectentes diametrum aliquem cum applicatis, vel applicatas ad idem punctum, nec non, & vertices in applicatis similiter obtineant, inter se sunt æqualia.

SInt HK, & KM nectetes verticem diametri X, vel applicatarum KK cùm applicatis OM, & OH ad idem punctum O, verticesque earum sint in applicatis PI, & PL ad idem punctum P. Dico hæc triangula HIK, & KLM esse æqualia.



Probatur. Nam PL, & PI applicatę sunt ęquales; Quare subductis æqualibus QP, & PR, remanebunt bases æquales IQ, & RL: Quare triangula in eundem verticem X, vel in parallelam KK desinentia IQH, & RKL erunt ęqualia: Sic, & triangula IQH, & RML, vtpote inter parallelas HM, & IL. Vnde tota triágula HIK, & KLM erunt æqualia. Quod autem QP, & PR sint æquales, patet. Quia KM, & HM sunt parallelę; & ideo cum HO, & OM sint ęquales, & KX, & KX ex prop. 13. Cor. tract. 29. erunt etiam RP, & PQ ęquales, vel si in eundem verticem terminent ex prop. 4. Cor. 2. lib. 6.

COROLLARIVM.

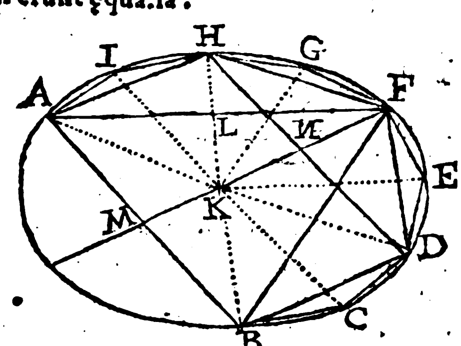
HInc euenit, quòd si triangulum, & taliter assignatis sit maximum, vt KLM, quòd etiam aliud HIK erit maximum. Nam si non est, sit punctatum triangulum maximum HSK, & ducatur ST parallela HM, & constituatur triangulum punctatum MKT, quod erit minus triangulo MLK: quod ponitur maximum: sed hoc est æquale triangulo HIK ex præced. Ergo triangulum HIK maius erit punctato KMT: quare contra hypothesim, & maius punctato HSK ipsi æquali ex pręced. quod est absurdum cum SHK ab aduersarijs statuatur maximum, quod in segmento HIK capere possit.

THEOR. II. PROPOS. XXII.

Segmenta Ellipsium, in quibus capiunt maxima triangula æqualia, inter se sunt æqualia.

SInt duo segmenta FHA, & FDB Ellipsis AFEB in quibus capiant triangula maxima ęqualia FDB, & FHA. Dico ea esse æqualia.

Probatur. Nam KH erit diameter, & LA, & LF applicatę, & bases FH, & HA nectentes diametrum HK; quæ bifariam diametris, KI, & KG diuisæ constituent triágula maxima: ideoq; ex præc. FGH, & HIA erunt ęqualia.



Sic si connectatur D, & H recta DH nectens erit parallela lineæ BA ex præced. quare HN, & ND erunt applicatæ. Vnde bases DF, & FH nectentes diametrum KF, & applicatas DN, & NH diuisæ bifariam diametris KO, & KE substernent triangula maxima, & ex pręc. æqualia HGF, & FED. Sicque erūt quoq; æqualia triágula BCD, & DEF; & sic probabis si alia triágula in residuis rursùs inscribas in infinitum.

Si ergo inscribantur omnia triangula maxima in segmentis BDF, & FHA, quæ inscriptibilia sunt omne spatium occubabunt segmentorum ellipticorum FHA, & BDF; alioquin, si aliquid remaneret, non omnis triangulorum inscriptibilis multitudo inscripta fuisset; sed omnia triangula inscriptibilia remanent semper equalia; Ergo & spatium omne,

omne, quòd occupant, segmenti huius elliptici FHA æquatur alteri EDB ab æqualibus numero, & extensione triangulis occupato.

THEOR. III. PROP. XXII.

Sectores æqualibus segmentis Ellipticis insistentes inter se sunt æquales.

INspiciatur figura præcedens triangula MKA, & BKM; sicut, & BFM, & MAF sunt æqualia ob æquales bases BM, & MA, cum desinant in eundem verticem K, & F. Ablatis itaque triangulis BMK, & MKA erunt æqualia triangula BKF, & FKA; additis itaque æqualibus segmentis ex Thesi BDF, & FHA erunt æquales sectores FKAH, & KBDF.

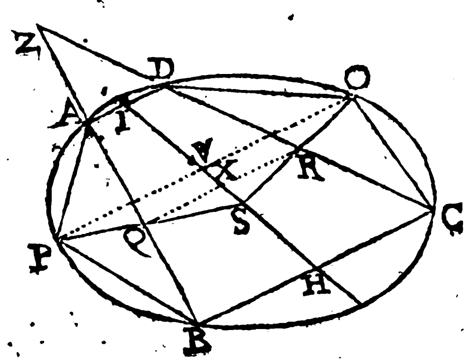
Vnde etiam ceteri erunt æquales sectores BKDC, & AKHI, vtpote dimidia æqualium, & sic de reliquis.

PROBL. II. PROPOS. XXIII.

Dato segmento abscindere aliam portionem ab Ellipsi æqualemquò quò versùm in ea placauerit.

SIt datum segmentum APB, & ducatur semidiameter SP. Dato deinde semidiametro SO sit auferendum prædicto APB segmento aliud çquale.

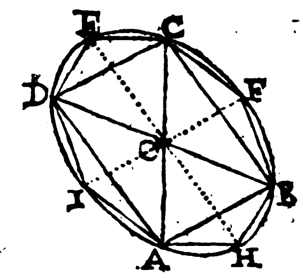
Ducatur OP, & vt SP ad QS, sic fiat OS ad RS, & ducatur QR, quæ ex prop.4. lib.6. Elem. erit parallela ipsi OP, & per R ducatur recta applicata CD, ex Cor.1. prop.32. tract. 24. eritque segmentum COD æquale segmento APB.



Prob. Nam productis CD, & BA in Z, & ducta CB, & DA cùm sint CR, & RD æquales inuicem, vtpote applicatę; sicut etiam AQ, & QB erit RD ad QA ex prop.7. lib.5. Eucl. vt CR ad QB in triangulo CBZ; ideoque CB, & OP, & DA erunt parallelæ ex prop. 2. lib.6. Elem. quę diuisæ bifariam, erunt quoque applicatæ diametro HI. Vnde ex propos. 1. & 2. huius cum bases æquales OD, & BA nectant applicatas; & vertices sint in applicatis OV, & VP, necnō, & in diametris SO, & SP substernēt maxima, & æqualia triangula DOC, & APB, vnde, & ex 3. h. etiam segmēta ellipsis, in quibus sunt COD, & DBA erunt æqualia. Possent etiam duci à punctis A, & B parallelæ lineę AD, & BC ipsi PO, & per C, & D extrema trahi CD. Nam CR, & RD erunt applicatæ, & hinc, vt priùs ostēdetur propositio. Ratio est, quia productis CD, & BA in Z in triangulo CZB erit BQ ad QA, vt CR ad RD ex propos.3. lib.6. Elem. sed QA, & QB sunt æquales: ergo CR, & RD ex 7. l.5.

COROLLARIVM.

HInc colliges modum, quo diuidas Ellipsim in partes subduplas V.g. in 2. in 4. in 8. in 16. Nam primo per quemcumque diametrum ex prop.32. Tr.24. bifariam secabis, deinde rursus aliam diametrum coniugatam duces, & diuides in 4. partes: exinde per eorū extrema duces rectas, quæ bifariam diuidentur, & diametri per earum medietates ducti quatuor iam partes effectas bifariam diuident, & 8 efficient, & sic de reliquis.

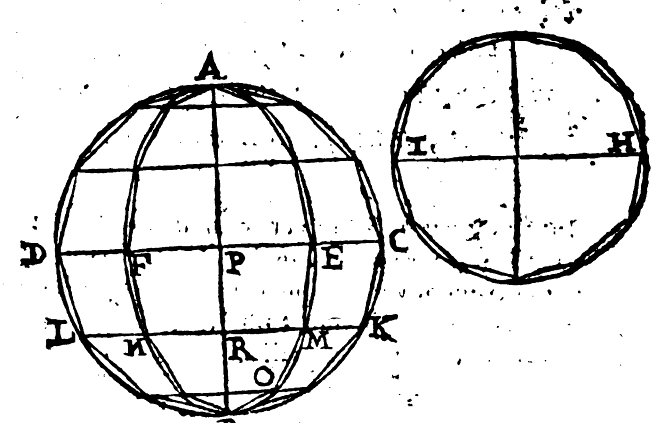


Patet; CDA, & CBA sunt triangula maxima; cùm BD applicata, simulque diameter eorum extrema nectat, ergo etiam segmenta CDA, & CBA erunt æqualia: triangulum verò COD est æquale triangulo COB ob bases æquales OB, & OD, & eumdem verticem C segmenta quoque æqualia CAD, BFC ex dictis prop.21. huius sunt, & sic de alijs asserendum.

THEOR. IV. PROPOS. XXIV.

Omne spatium ellipsis ea proportione respicit circulus maiori eius diametro descriptus, qua maior diameter minorem.

SIt Ellipsis AEPB. Dico ad eā proportionē habere circulū ABCD maiori diametro descriptum, quam diameter maior CD ad minorem BF. Quod vt probetur; sit circulus HI; cui eā habeat pportionē circulus ADBC, quā CD ad BF; quod fiet ex 21.l.6. si inter CD, & EF media pportionalis inueniat HI, & ea diametro circulus HI describatur. Deinde diuisis circulis in æquales numero partes inscribatur figura qualibet V.g. 12. laterum, in circulo verò CADB ducantur rectæ parallelæ diametro CD, vt sunt KL; puncta autem, in quibus secant ellipsim, vt E, M, & O rectis iungantur. Eritque in ipsa Ellipsi inscripta figura tot laterum, quot in circulo inscripta possidet.



Antequam autem propos. probetur, primò considerandum. Quod spatia plana á dictis lineis circuli comprehensa, vt est PACK dicunt eam proportionem ad spatia Ellipsis inter easdem lineas clausa V.g. EPRM, vt CP ad PE, vel vt KR ad MR.

Ratio

Ratio est deducta à propos.72. Tract.24.Conic. Cum enim sit CP ad EP, vel KR ad MR erit etiam eiusdem altitudinis spatium CKPR ad spatium EPMR, vt basos, quæ sunt eiusdem proportionis, vt propos 13.tract. preced. nimirum vel CP, ad EP, vel KR ad MR, & ita dicas de omnibus alijs spatijs. Quare figura inscripta in circulo ex prop.17.lib.5. Elem. ad figuram inscriptam in Ellipsi eam obtinebit proportionem, quam diameter Ellipsis maior CD habet ad minorem EF. Siquidem cùm singula spatia circularia singulis ellipticis sint in eadem proportione, quam CP ad EP, quę est eadem, quę KR ad MR, & sic de alijs lineis, quę omnes in eadem proportione sunt, etiam omnia spatia simul composita circularia ad omnia spatia simul composita Elliptica in eadem proportione erunt, vt CP ad EP, vel etiam CD ad EF.

Deinde aduertendum est quoque, quia fecimus circulum ACBD, se habentē ad circulum HI, vt diameter CD ad diametrum EF; quod etiam circulo maiori ACBD inscripta figura se habebit ad inscriptā circulo minori HI, vt CD ad EF ex pr.26. 39. lib.6. Quare figura inscripta Ellipsi, & figura inscripta circulo HI erunt ęquales ex prop. 7. l.5. vtpote, quod illis dicat eandem proportionem CD ad EF figura circulo maiori ACDB inscripta.

Quo posito ostenditur propos. Spatium Ellipticum est ęquale areæ circuli HI, sed circulus CADB, ita est ex effectione ad circulum HI, vt diameter CD ad diametrum Ellipsis EF. Ergo etiam spatium circuli maiori diametro descripti ACBD respiciet spatium Ellipticum, vt CD diameter, vel BA respicit minorem diametrum FE.

Probatur quòd spatium Ellipticum sit æquale circulo HI. Nam si non est æquale erit, aut maius, aut minus; sed neutrum dici potest. Ergo erit æquale. Nam si non est Ellipsis æqualis circulo HI: Sit circulus HI maior. Describatur in circulo HI figura adeo multiplicatis lateribus, vt sit maior ipsa Ellipsi: siquidem in circuli maiori, quàm Ellipsis, maior figura ipsâ Ellipsi capere poterit. Similis autem figura circulo ADCB, & Ellipsi, vt docuimus, inscribatur, & erit figura multilatera circuli maioris ACBD ad multilaterā Ellipsis in eadem proportione, vt ad multilateram circuli HI, & ideo æquales erūt circulo HI, ac Ellipsi figurę inscriptę. Sed est maior figura circulo inscripta ex aduersarijs, ergo esset maior, simulque æqualis, quòd esse nequit.

Quod si asseratur circulus HI minor; quàm Ellipsis. Tunc in Ellipsi talis figura inscribatur adeo multiplicatis lateribus, vt docuimus, vt sit maior ipso circulo HI; Nam cum sit maior Ellipsis circulo HI adeo inscriptæ fig. latera multiplicari poterunt, vt euadat circulo HI in aliquo maior, sitq; alia tot numero laterū in circulo HI inscripta. Sed, vt ostendi, figura circulo HI inscripta est æqualis ipsi figuræ Ellipticæ, ergo figura in HI esset ęqualis, & vt volunt aduersarij minor, quam figura Elliptica: quod esse nequit.

COROLLARIVM.

Hinc educitùr Ellipsim AEBF ad circulum CDAB consequi eam proportionem, quam rectangulum ex CD, & EF lateribus ad quadratum CD. Ratio est, quod cum quadratum, & rectangulum sint eiusdem altitudinis CD se habebunt inuicem vt bases EF ad CD, quàm, & adipiscitur Ellipsis AEFB, collata ad circulum ACBD.

THEOR. V. PROP. XXV.

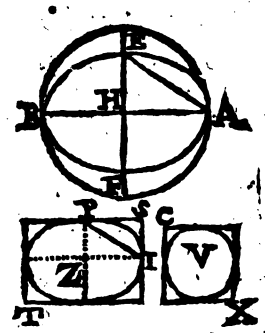
Si circulus fiat ex diametro, qui sit media proportionalis inter diametrum maiorem, & minorem Ellipticum, æqualis Ellipsi est.

Probatur ex præced. Siquidem ostendimus talem circulum, nec posse esse Ellipsi minorem, nec maiorem. Quare æqualem esse conclusimus. Et hinc iam habes modum, quo circulum æqualem Ellipsi efficias; si inter CD, & EF mediam proportionalem inuenias HI, & ex eo circulum HI delinees.

THEOR. VI. PROPOS. XXVI.

Ellipsis quælibet ad circulum quemcumq; in proportione ea est, qua rectangulum ex diametris ad quadratum circuli dati.

Sit circulus V Ellipsis EAFB. Dictum est in Cor. Ellipsim EAFB ea proportione referri ad circulum maiori eius diametro descriptum AB; qua rectangulum ex eius diametris AB, & EF ad quadra-



tum AB; Sed circulus ex AB ad circulum V eam refertur proportione, qua quadratum AB ad quadratum XC ex propos.40. lib.6. Elem. Ergo ex æquo Ellipsis EAFD eam retinet proportionem ad circulum V, quam rectangulum ex AB, & EF diametris ad quadratum CX.

THEOR. VII. PROPOS. XXVII.

Ellipsis quæcumque ad quamcumque Ellipsim eam consequitur proportionem, quam rectangulum ex diametris primæ ad rectangulum ex diametris secundæ.

Ellipsis ABEF in fig. prop. anteced. eam adipiscitur proportionem ad circulum V; quam rectangulum ex diametris AB, & EF ad quadratum XC ex pr.antec. Sic circulus V ad Ellipsi alteram Z eam dicit proportionem ob eandem propos. quam quadratum CX ad rectangulum ST. Ergo ex æquo Ellipsis A E B F ad Ellipsim Z eam dicit proportionem, quam rectangulum ex AB, & EF ad rectangulum ST.

CO-

COROLLARIVM I.

Hinc deduces quomodo Ellipses æquales describantur, aut iuxta datam proportionem. Nam sufficit efficere rectangula, quæ inuicem datam proportionem consequantur ex prop. 27. Tr. 39. præced. & ex istorum lateribus constituere duas Ellipses, ex prop. 55. Tr. 24. quæ inuicem datam proportionem rectangulorum obseruabunt.

COROLLARIVM II.

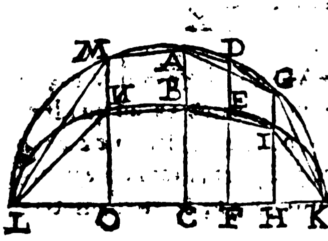
Hinc quoque est, quod Ellipsis sit ad Ellipsim, & ad circulum, vt triangulum ex diametris, vel semidiametris AHE Ellipsis AEBF præc. prop. 26. ad triangulum ex iisdem LPZ in altera Ellipsi Z, vel ex radijs in circulo: Patet quoniam triangula dimidia sunt rectangulorum: ex iisdem lateribus constantium: quare cum sit totum ad totum, vt dimidium ad dimidium. Etiam triangulum erit in eadem proportione ad triangulum, vt rectangulum ad rectangulum, vel ad quadratum, & ideo, vt Ellipsis ad Ellipsim, vel ad circulum.

THEOR. VIII. PROP. XXVIII.

Segmentum circuli se habet ad totum circulum, vt segmentum Ellipsis ad totam Ellipsim, quæ sint inter easdem parallelas conclusa.

Segmentum aliquod Ellipticum exhibeatur CBIH, & aliud circulare ACGH inter parallelas AC, & GH. Dico, quod spatium ACGH est ad circulum LAK, vt spatium Ellipticum CBIH est ad totam Ellipsim LBK.

Probatur, vt est AC ad BC, ita est spatium ACGH



Trapezij circulo inscripti ad ECIH trapezium Ellipticum, & ita est spatium totum figuræ inscriptæ circulo LMACK ad figuram Ellipsi inscriptam ENBIK, vt demonstrauimus prop. huius 24. initio. Diuidatur itaque trapezium circuli CAGH bifariam per eandem parallelam DF; diuidatur quoque trapezium BCIH, ducanturq; IB & EP, necnon, & AD, & DG; eritque trapezium GHDF ad trapezium EFIH, vt DF ad EF, & vt AC ad CB, & sic trapezium DACF erit ad trapezium BCEF, veluti AC respicit BC, & ideo, vt figura LMACK ad figuram Ellipticam: Quare etiam simul duo trapezia circularia ACDF, & DFGH erunt ad duo Elliptica BCEF, & EFIH ex propos. 17. lib. 5. vt figura circulo inscripta ad figuram Ellipsi inscriptam; Et hoc semper sequetur si diuidas in infinitum; Sit igitur facta in trapezio dato circuli ACGH omnis possibilis subdiuisio, sicut etiam in trapezio Elliptico, ambo ita diuisa omne spatium, quod inter GA rectam, & curuam ADG, sicut inter rectam IB, & ambitum BEI absumeretur, si aliquid remaneret, omnis possibilis subdiuisio facta nō esset; cum minor figura rectilinea capere posset in circulo, & Ellipsi ex cuius latere ductæ lineæ trapezium minus constituerent. Cum ergo facta omni possibili trapeziorum subdiuisione semper sit omnis congeries trapeziorum in ACGH factorum ad omnem multitudinem trapeziorum in BCIH factorum, vt figura LMOK ad figuram LNIK, & figura LMGK ad figuram LNIK sit vt circulus ad Ellipsim. Etiam trapezium circulo inscriptum omni possibili subdiuisione multiplicatum erit ad trapezium CIIH, & ideo segmentum circulare CAGH ad segmentum Ellipticum CBIH ita subdiuisa æquantur, erit, vt circulus ad Ellipsim. Quare permutando segmentum circulare CAGH erit ad totum circulum, vt segmentum Ellipticum CBIH ad totam Ellipsim.

COROLLARIVM.

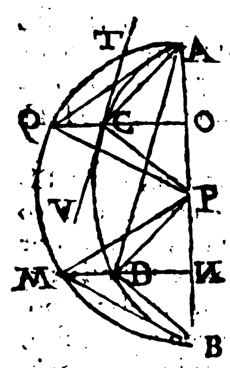
Hinc, si habes circulum in quotcumque partes æquales parallelis sectum, obtinebis quoque Ellipsim ex eius diametro, vel axi maiori factam in partes æquales similiter sectam ab iisdem parallelis, verùm in circulo vsque adhuc inuenta via non est tales partes efficiendi.

PROBL. III. PROPOS. XXIX.

Datam Ellipsim in quascumque partes æquales, in quas circulus diuidi possit, per sectores partiri.

Svpra docuimus subduplam diuisionem, hic autem omnem eam, quæ circulo describi possit. Sit itaque data semiellipsis ACDB, & oporteat eam in tres æquales sectores partiri, vt semicirculus diuisus est AQMB. Demittatur perpendicularis QO à circuli sexta parte AQ, & ducatur CP. Dico ACP sectorem esse sextam partem Ellipsis, vnde si ducta TV tangente, & parallela AD facias alium sectorem æqualem erit CPD altera pars, & sic de reliquis faciendo alios sectores æquales ex prop. 21. huius.

Prob. ex 24. h. vt QO ad CO lineas, sic QAO segmentum circuli ad ACO segmentum Ellipsis, & ita erit QOP in circulo triangulum ad triangulum COP in Ellipsi ob eandem altitudinem cum terminent in idem punctum P. Quare, si componantur, ita erit triangulum QOP cum AQO segmento, idest sector AQP in circulo ad triangulum COP cum segmento ACO, idest sectorem ACP in semiellipsi, vt QO ad CO: Sed vt QO ad CO, ita est



semicirculus AQMB ad semiellipsim ACDB ex prop. 24. huius contextu Erit itaque AQP sector circuli ad ACP sectorem Ellipticum, vt totus circulus ad Ellipsim: Quapropter *permutando* erit AQP sector circuli ad circulum, vt ACP sector Ellipticus ad Ellipsim: sed ille sector circuli est sexta pars ipsius, & tertia eius dimidij: Ergo etiam sector Ellipticus sexta pars erit totius, & tertia eius dimidij. Quare si ducta tangente TV ducas & parallelam AD, & facias segmentum AC æquale segmento CD ex huius 23. erunt etiā ACP sector, & CPD consistentes æqualibus segmentis æquales ex huius prop. 22. Propterea que CPD erit altera totius sexta pars, & sic de reliquis.

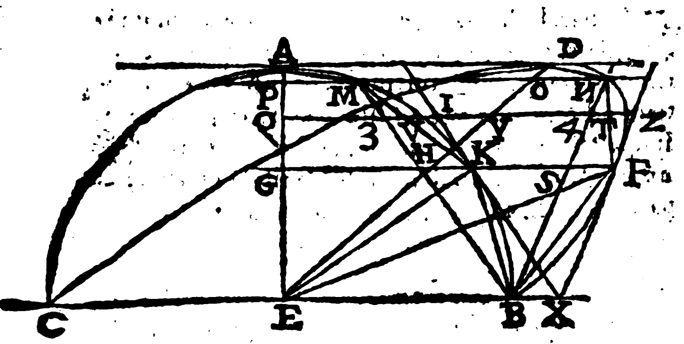
COROLLARIVM.

Hinc nosces describere figuras in Ellipsibus similes illis; quæ sunt in circulo, si fiant tales, quarum singula triangula se habeant in circulo ad totum circulum, vt singula triangula ellipticæ figuræ ad totam ellipsim, etiam si sint triangula quæcumque, & irrationalia. Quia, & tota figura circuli inscripta erit ad totum circulum, vt figura Ellipsi inscripta ad totam ellipsim. Nam si V. g. BMQO figuræ circuli triangula BMP, & MQP, & QOP, erunt ad figuræ ellipticæ BDCO triangula BDP, & CPD, & PCO, vt OQ ad OC, vel æquales MN ad ND, idest, vt circulus ad Ellipsim; etiam tota figura circulo inscripta se habebit ad figuram ellipticam, vt circulus ad Ellipsim: Propterea que *conuertendo* ita erit figura in circulo ad totum circulum, vt figura ellipsis ad totam ellipsim.

PROBL. IV. PROPOS. XXX.

Super datam circuli diametrum describere Ellipsim circulo æqualem, cuius data sit semidiameter, & applicata æqualis radio.

Sit BAC circulus, cuius centrum E, & data semidiameter ellipsis maior semidiametro circuli ED: ducta tangente AD inter parallelas AD, & EC accommodetur ab E puncto data ED, & ductis parallelis, vt FG singuli sinus, vt GK trasferantur à semidiametro ellipsis ED super eandem lineam, vt sunt HF, singulaque puncta flexa molli ductu iungantur, & semiellipsis BFDGC erit, constituta; quam iuxta easdem mensuras perficies. Dico itaque hanc semiellipsim semicirculo esse æqualem.



Nam, quod sit ellipsis patet ex ijs, quę diximus propos. 52. Cor. Tract. 24. Quod verò sit ęqualis semicirculo.

Probatur. Nam ducta PN vsquequo intersecet circulum, & ellipsim in M, & N parallela ad diametrum ellipsis productum, erunt eius partes MP & NO diametro ED, & EA applicatę in P, & O, & ideo æquales cum omnes alias applicatas tales effecerimus ex constructione. Ducantur deinde subtensę BM, & BN ab intersectionibus N, & M, & erit segmentũ circuli MKB ellipsis NFB. In segmentis ergo circuli BKM maximũ triang. inscribatur BKM, & ab K vertice ducatur parallela FG, si nõ sit ducta, & in F erit vertex maximi trianguli ellipsis segmento NFB inscripti, vt infra ostendendum. Erunt itaque cum sint triangula maxima plusquam dimidia ipsorum segmentorum. Sunt autem etiam æqualia, & triangulum BFN æquatur triangulo BKM, sicut & trapezium BNOE trapezio MPBE, & semitriangulum maximum NDO semitriangulo maximo MAP, cum sit dimidium maximorum: Et si in segmentis remanentibus rursus alia triangula inscribantur, & multiplicentur vsque dum multiplicari possunt, semper idem succedet, & semper multiplicata maxima triangula in circulo æquabuntur ellipticis æquè in successiuè remanenti quolibet segmento multiplicatis: sed maxima triangula in circulo multiplicata, vsquedum multiplicari queunt, æquant circulum; alioquin si remaneret aliquod segmentum, non essent multiplicata omni multiplicatione possibili, & sic dicas de ellipsi. Ergo cum omnia triangula circuli ęqualia circulo æquentur omnibus triangulis ellipticis æqualibus ellipsi; Ellipsis, & circulus erunt æquales.

Itaque ostendendum remanet primo triangulum BFN, & omne similiter inscriptum esse maximum. Hoc autem ostenditur. Nam ducta per F linea XF parallela ipsi BN tangens erit, & ideo ex dictis 1. propos. huius BFN erit maximum triangulum. Quod autem XF sit tangens ducta XK parallela ipsi MB, tangente circuli K sic ostenditur. Quoniam omne punctum, quod in ipsa assignetur extra ellipsim est, ergo non secabit eam; sed continget in F, ergo tangens erit, quod si ita non est. Assignetur punctum Z V. g. quod dicatur esse intra ellipsim, & ostēdetur de illo extra ellipsim reperiri. Ducta ZQ Trapezia NOBE, & BEMP sunt ęqualia ob ęquales bases ex constr. NO, & MP, & eandem EB ex propos. 72. Tract. 24. Vnde, & ex prop. 13. tract. 19 prec. SM, & HE æquabũtur sicut & in ZQ partes 4. Y, & 3 Q. Sunt verò æquales ex constructione HF, & KG. Vnde, & residua FS, & HK erunt ęqualia. Quamobrem cum sint inter parallelas, & parallelæ Z4, & 13. erunt æquales ex prop. 33. lib. 1. Elem. quæ additæ æqualibus, vt ostendi 4Y, & 34 remanebunt æquales ZY, & 1Q. Sunt autem VQ, & TY ex constructione ęquales, & QV est minor, quam 1Q. Ergo etiam TV, quæ finit in ambitu elliptico in T est minor, quam YZ: Vnde punctum Z remanebit extra ellipsim: quod cum possit demonstrari de omni alio puncto excepto F in quo tangit, remanebit tota XZ extra ellipsis ambitum. Quamobrem ZX erit tangens, & ideo NBB maximum triangulum, quod in segmento NFB inscribi possit ex prop. 1. h.

Deinde ostendendum est triangula, seu trapezia Elliptica ęquari circularibus. Nam primo trapezium BNOE æquatur trapezio BMPE ex prop. 13. tract. præc. quòd sint inter parallelas, & æqualium basium. Triangulum quoque BFN in ellipsi ęquatur triangulo BKM in circulo; quod pars FSB sit æqualis parti KBH, vtpote inter parallelas existenti, & super bases æquales FS, & HK, vt supra ostensum est, & idem dicendum de triangulis HMK, & FSN; necnon, & de triangulis MAP, & NDO, & sic de alijs, si inscribantur. Verificatur itaque, quòd omnia triangula in ellipsi sint maxima, & sint æqualia maximis, & inscriptis in circulo, & ideo quòd in perpetuã minorum descriptione, tũm circuli, tũm ellipsis, cum triangula sint semper æqualia, circulus ellipsi æqualis erit.

COROLLARIVM.

Hinc potes non dum totam ellipsim alteri exhibere æqualem, seu circulo, seu ellipsi, sed etiam singula eius segmenta, ita quod triangulum BFN sit æquale triangulo BKM, cum in ipsis triangula, & in segmentis successiuè remanentibus semper

ſemper æqualia inſcribi poſſint, vt ex demonſtratione patet: quin imò ſector quoq; BXR æquabitur ſectori BFR cum triangula BFR, & BXR ob æqualem baſim, & altitudinem ſint æqualia.

EXPENSIO VI.

De areis parabolarum quadrandis.

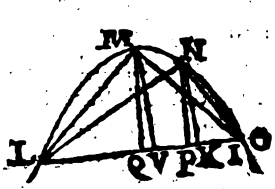
QVoniam aliquando ſuperficies ſpatijs parabolicis, vel ferè talibus continentur, vt exactus Geodeta poſſit talia ſpatia exactiſſimè menſurare, etiam quadrationem parabolæ noſcere debet, & eam in libitas partes diuidere.

PROBL. I. PROPOS. XXXI.

Datæ parabolæ terminatæ maximum inſcribere triangulum.

SIt parabola, ſeu ſegmentum eius LMO, cui oporteat inſcribere triangulum maximum. Subtendat itaque illum quælibet recta LO, quæ diuidetur bifariàm, & erigatur diameter QM, & coniungantur rectæ LM, & MO. Dicoque LMO eſſe maximum triangulum ſegmento parabolę O N M L inſcriptum.

Probatur. Nam ſi triangulum LMO non eſt maximum, erit aliquod aliud V. g. LNO, de quo probo non eſſe maximum contra hypotheſim, ſiquidem ita ex Coroll. propoſ. 50. tract. 24. eſt LQO rectangulum ad LPO rectangulum, vt QM ad PN: ſed eſt maius rectangulum, LQO, quam LPO ex



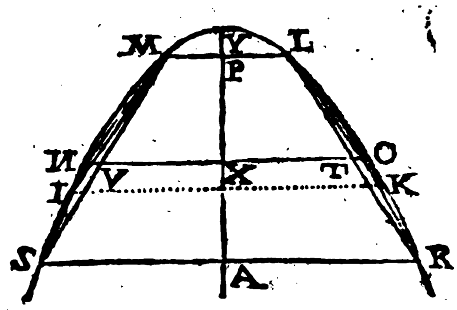
propoſ. 29. lib. 6. Quare etiam erit maior QM, quam PN. Vnde triangulum LMO erit maius triangulo LNO, ſiquidem ductis perpendicularibus MV, & NX, & ideo parallelis, cùm QM, & PN diametri ſint in parabola parallelæ quoque ex propoſ. 27. tract. 24. triangula QMV, & PNX erunt æquiangula, vnde erit QM ad PN, vt normalis VM ad normalem XN; ſed maior oſtenſa eſt diameter QM, quàm NP. Ergo etiam maior VM; quam XN. Vnde cum triangulum LNO obtineat altitudinem minorem ex 1. lib. 6. Cor. erit minus.

THEOR. I. PROPOS. XXXII.

Omnia triangula, quæ in applicatis obtinent vertices ſuos in parabola, inter ſe ſunt æqualia.

SIt triangulum LOR, & MNS, quæ in applicatis LM, ON, & RS vertices M, N, S, & R, O, L habebât. Dico ea eſſe in parabola SMLR æqualia.

Probatur. Ducto diametro XY, erunt XN, & OX æquales, & TX, & XV quoque ex prop. 13. Tract. 29. quia SM, & LR coniunguntur æquales applicatas PM, & PL in æqualibus trapezijs RASP, & APMS; ſicut etiam RA, & SA. Ablatis itaque æqualibus TX, & TV ab æqualibus OX, & XN, reliquæ erunt æquales OT, & VN: Quapropter triangula OTL, & VMN ex pr. 39. lib. 1. Cor. inter parallelas LM, & NO, & ſuper æquales baſes OT, & VN exiſtentia erunt



æqualia; necnon ob eandem rationem triangula OTR, & VNS; quare tota triangula ROL, & MNS erunt æqualia.

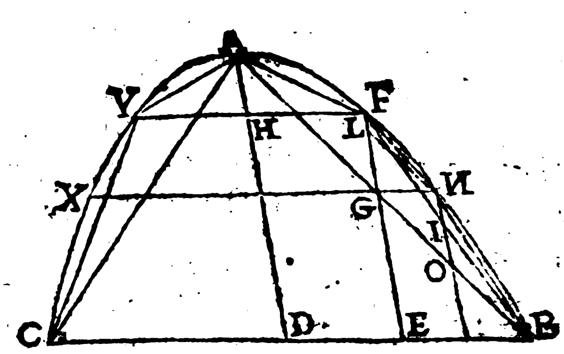
COROLLARIVM.

HInc educes, quòd ſi triangulum ORL ſit maximum, etiam aliud NMS futurum eſſe maximum. Quoniam, ſi aliud maximum poſſet conſtitui in ſegmento MNS, cuius vertex I; Tunc ducta ab I parallela IK, ſi conſtitueretur triangulum RKL eſſet æquale triangulo maximo NIS, & ideo maius triangulo SNM non maximo ex aduerſarijs: ſed MNS æquatur triangulo ROL. Ergo etiam triangulum, quod conſtitueretur RKL eſſet maius triangulo ROL. Ergo triangulum ROL contra Theſim maximum non eſſet, quod inſcriptum fuiſſet in ſegmento parabolico ROL.

THEOR. II. PROPOS. XXXIII.

Parabola eſt ſeſquitertia trianguli maximi in illa inſcripti.

SIt parabola BFAYC, & triangulum maximum in ipſa BAC. Dico parabolam ei eſſe ſeſquitertiam; nempe triangulum continere, & inſuper eius tertiam partem, vel eſſe ad illud, vt 4. ad 3. Ducatur itaque diameter AD; diuiſaque bifariam ſemibaſi BD in E ducatur AD diametro parallela EF vſque ad parabolam in F, & ducatur baſi parallela FH.



Probatur. Nam ex propoſ. 2. de conicis Tr. 24. Quadratum BD eſt ad quadratum FH, vel ED, vt AD ad AH, ſed quadratum BD ex propoſ. 6. lib. 2. Cor. eſt quadruplum quadrati EB. Ergo etiam diameter AD quadruplus eſt portionis HA, & per diuiſionem rationis HD ipſius AH, vel EF æqualis ſeſquitertia. Linea verò EG ſubdupla eſt ipſius AD propter triangulorum ſimilitudinem, cùm GE ſit ad DA, vt BE ad BD, & ita quoque BG ad BA. Itaque ea erit duplo maior ipſius GF æqualis ipſi AH. Siquidem EF eſt $\frac{3}{4}$ ipſius AD, & EG $\frac{2}{4}$.

Quamobrem triangulum quoque GFB erit duplum

plum trianguli BFG ex 1. lib. 6. eandem verticem habentis in B; & ideo eandem altitudinem, & quia BA est dupla ipsius BG, vt dixi; ideo triangulum BFA erit trianguli BFG duplum, & ideo ęquale triangulo BGB, sed huic BGB est quadruplum triangulum BDA ex 21. lib. 6. siquidem duplicatam habet basim, & est similiter positum, & simile: vnde illi habebit proportionem, quem 4. ad 1. nempe duplicatam, quam 2. ad 1. idest basis DB ad basim BB.

Deinde sit parabolæ segmentum BFA. In eo GF parallela DA, ex BG æquali applicatæ AG puncto medio erecta, quæ erit diameter, & maximum triangulum in eo inscriptum BFA, ex propos. 1. h.

Diuidatur bifariam semibasis BG in O, & ducatur parallela ON ipsi FG, & NL basi BA. Et eodem prorsùs arguméto ostendes ON esse sesquitertiã FG, eo q a ex 5. Tr. 24. quadratũ BG quadruplũ quadrati BO, sit ad NL quadratũ, vt GF ad FL, idest 4. ad 1. & hinc residuum GL ad LF, vt 3. ad 1. & ideo NO æqualem ipsi GL esse $\frac{3}{4}$ ipsius GF, & OI ipsius GL dimidiam, quod ei eandem dicat proportionem; quam BO ad BG; ideoque OI ipsius GF $\frac{2}{4}$, idest duplam residuæ IO $\frac{3}{8}$, quę sublatis $\frac{2}{4}$ erit $\frac{1}{4}$, ideoque triangulum IOB duplo maius, quam BIN erit, quę ob eandem altitudinem B sunt inuicem, vt bases OI ad IN: ideoque addito æquali INF triangulum BIO æquabitur triangulo toti NBF; & ideo erit subquadruplus trianguli BFG, cum sit ille BFG supra duplo maioré basim BF, & ideo, vt similis, similiterq; positus ex 21. lib. 6. habeat proportionem duplicatam nempe BIO, vel æqualis BNF subquadruplus erit trianguli BFG, & sic semper erit etiam, si diuidas in infinitum.

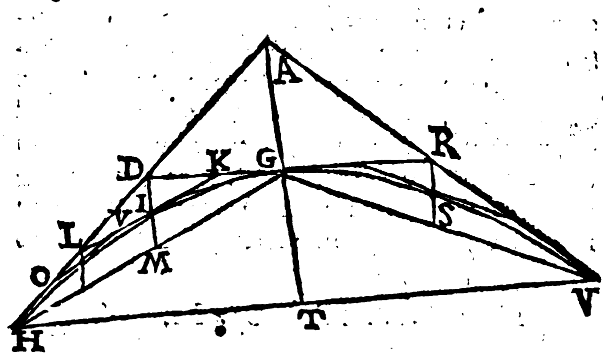
Si ergo inscripta sint in parabola BAC omnia triangula, quæ inscribi possunt, illa multitudo æquabit totam parabolam alioquin si aliquid parabolę restaret, non esset inscripta omnis inscriptibilis multitudo, cùm adhuc inscribendi spatium suppeteret, cùm itaque omnia triangula inscriptibilia se habeant successiuè, vt 1. ad 4. & sit illimitata progressio hæc successiua; ideo ex Cor. 3. pr. 26. Tract. 16. part. 1. differentia secundi termini BFA à primo BAD erit ad BAD, vt BAD ad totam collectionem terminorum, scilicet triangulorum in seriem continuam proportionalium æquantium ipsam parabolam: sed ostẽsum est BFA esse ad BAD, vt 1. ad 4. & ideo differentia erit 3. Quapropter, vt 3. ad 4. ita erit triangulum BAD primus terminus ad totam collectionem triangulorum inscriptorum in seriem continuam proportionalium, idest ad parabolã BFDA; & ideo duplũ Trianguli BAG ad duplam parabolam BFAYC. Vel conuertendo parabola BFAYC erit ad triangulum BAC, vt 4. ad 3.

THEOR. III. PROPOS. XXXIV.

Si parabola contingentibus stringantur, & applicata terminetur, figura concaua, quæ restat, est ad triangulum exterius contingentium, vt 4. ad 3.

SIt Parabola VGH, & contingentibus VA, & AH, & RD stringatur, & applicata VH terminetur. Dico concauam figuram VAHG esse ad triangulum contingentium exterius RAD, vt 4. ad 3.

Probatur. Quia VA, & AH sunt contingentes ex propos. 12. Tract. 24. GT æquabitur GA, & quia RD ponitur contingens erit parallela VH applicatæ ex 27. tr. 24. & ideo triang. RAD erit super basim GA subduplã basi TA, vel AD ipsi AH, cumq; triangula TAH, & GAD sint similia, similiterq; posita ex prop. 22. lib. 6. Elem. erunt inuicem in duplicata ratione laterum, & quia AD se habet ad AH, vt 1. ad 2. triangulum AGD erit ad triangulum ATH, vt 1. ad 4. nempe in proportione subquadrupla. Idem dicas de triangulo KDL, quia enim GD, & DH sunt tangentes, & GH applicata, ab eius puncto medio M educta parallela MD ipsi TG in contactũ tangentiũ coueniet in D, vt diameter ex 11. tr. 24 & MD erit dupla IM, & KL, vtpote tangens erit parallela GH applicatę, & ideo erit KD dupla GD: quare KDL triangulum simile, similiterque positum super basim KD subduplam basi GD erit subquadruplum trianguli GDH, sed triangulum GDH est æquale triangulo GDA ob æquales bases AD, & DH, & verticem eundem G, ergo KLD triangulum est ad triangulum GAD, vt 1. ad 4. scilicet in propositione subquadrupla, & sic in infinitum poteris sequi circumscribendo, qui semper erunt ad antecedentem vt 1. ad 4. Nam KDL triangulum est ad triangulum ADG dimidium trianguli circumscripti RAD, vt 1. ad 4. ita triangulum VLO est ad dimidium IDL trianguli circumscripti KDL, vt 1. ad 4. & sic procedendo.



Ponatur itaque parabolę VGH conclusę tangentibus AH, & VH esse circumscripta omnia triãgula, quæ circumscribi possunt, omnia spatium AHIG tandem absorbebunt; alioquin, si remaneret spatium aliquod omnia triangula circumscriptibilia, non essent circumscripta contra Thesim, cùm adhuc aliquod spatium inscriptibile remaneret.

Verùm omnia illa in infinitum procedentia semper seruant eandem proportionem 1. ad 4. quà secundus respicit antecedentem, vel 4. ad 1 quà respicit primus terminus GAD secundum KDL: quare differentia minoris trianguli KDL, terminiq; secundi à primo GAD erit ad primum GAD, vt 3. ad 4. sed vt differentia secundi termini à primo ad ipsum primum, sic primus terminus GAD ad totam collectionem terminorum in infinitum procedentium in serie continua eiusdem proportionis ex Coroll. 3. prop. 26. Tract. 16. de progr. Geom. Ergo GAD triangulum ad totam collectionem triangulorum circumscriptibilium figuræ concauæ GAHIG, & ideo ad ipsam figuram concauã ei collectioni æqualem se habebit, vt 3. ad 4. & ideo duplum trianguli RAD se habebit ad duplum collectionis seriei triangulorum in infinitum procedentis, & ideo figurę cõcauæ VAHGV, vt 3. ad 4. vel è contra figura VAHG ad triangulum RAD, vt 4. ad 3

COROLLARIVM.

HInc patet figuram concauam VAHG esse ad figuram conuexam VGIH subduplam; Nam figura concaua est ad triangulum RAD, vt 4. ad 3. sic figura conuexa est ad inscriptū VGH triangulū, vt 4. ad 3. ex 44. h. ideoque figura concaua VAHG sic se habebit ad triangulū RAD, vt conuexa VGIH ad triangulum VGH; ideoque *permutando* figura concaua ad conuexam se habebit, vt triangulum RAD ad triangulum VGH; sed triangulum RAD est subduplum trianguli VGH ob subduplas altitudines GD, & GR respectu altitudinum TH, & TV ex Coroll prop 16. & æqualem basim GA, & GT. Quare etiam figura concaua erit ad conuexam in ratione subdupla sc. vt 1. ad 2.

THEOR. IV. PROPOS. XXXV.

Parabolica segmenta, in quibus capiunt triangula maxima æqualia inuicem erunt æqualia.

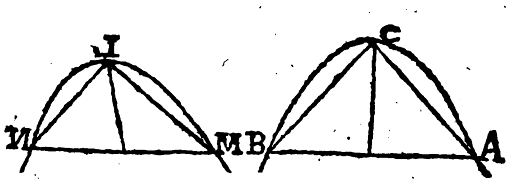
SIt fig. propos. 32. h. præced. in qua parabola BFAYC, & sint duo segmenta BFA, & AYC, in quibus capiat ex prop. 2. h. exp. triangula maxima, & æqualia. Dico ipsa segmenta esse equalia.

Prob BFA triangulum est æquale triangulo AYC, cùm sint inter parallelas eorum vertices, ita triangula FNB, & YXC ob eandem rationem, & sic continuè in infinitum, quare cum continua progressio infinita triangulorum absorbeat omne spatium segmentorum parabolicorum BFA, & AYC iuxta ostensa propos. 15. Tract. 16. part. 1. quod ostensum sit prop. 23. huius semper iuxta eandem proportionē procedere, quæ est 1. ad 4. etiam segmenta parabolica AFB, & AYC erunt æqualia, quod in eis omnia inscriptibilia triangula sint equalia.

PROBL. V. PROPOS. XXXVI.

Parabola ad parabolam, seu segmentum eius ad aliud segmentum obtinet eandem proportionem, quam triangulum maximum ad triangulum maximum, quæ in illis inscripta sunt.

SIt parabola ACB, vel segmentum, quam dico habere ad aliam parabolam, vel segmentum MLN eandem proportionem, quam triangulum ACB ad triangulum MLN, quæ maxima sint.



Probatur. Nam Parabola ACB est ad triangulum ACB, vt 4. ad 3. Sic etiam parabola MLN ad triangulum MLN, vt 4. ad 3. Quare parabolæ ad sua triangula sunt in eadem proportione, ideoq; *permutando* ACB parabola erit ad parabolam MLN, vt triangulum ACB ad triangulum MLN.

COROLLARIVM I.

HInc, si duæ parabolæ habeant æquales bases erunt inuicem, vt altitudines, & si obtineāt altitudines æquales erunt ad inuicem, vt bases.

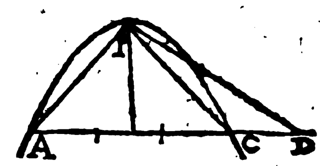
COROLLARIVM II.

HInc quoque colligitur; quomodò describantur parabolæ æquales, vel iuxta datam proportionem. Nam factis triangulis ACB, & LMN, quæ datam proportionem consequantur circa illa describetur parabola iuxta dicta propos. 59. tract. 24. & quia ita est triangulum ad triangulum, vt parallelogrammum ad parallelogrammum inter easdem bases, & parallelas; hinc est; quòd factis duobus parallelogrammis iuxta datam proportionem, si ope illorum duæ parabolæ describantur ex propos. 69. tract. 24. illæ erunt quoque in data proportione.

PROBL. II. PROPOS. XXXVII.

Data parabola æquale triangulum exhibere.

MOdus exhibendi triangulum Parabolę equale hic est, inscribatur parabolæ AC triangulum maximū AIC, & deinde in tres partes secetur basis AC; nam si basi AC addatur tertia pars CD, & fiat AD, & ducatur ID hoc triangulum AID erit æquale parabolæ AIC.

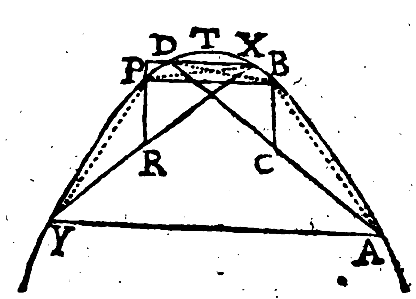


Prob. Parabola AIC est ad triangulum AIC, vt 4. ad 3. sed triangulum AID est ad idem triangulum AIC, vt basis AD ad AC basim ex 1. l. 6. quę ex effectione est vt 4. ad 3. Ergo est in eadem proportione ad triangulū AIC, ac parabola AIC ad idem triangulum AIC: quare ex prop. 9. lib. 5. erunt æqualia triangulum AID, & parabola AIC, cùm eidem triangulo AIC eandem proportionem dicant.

PROBL. III. PROPOS. XXXVIII.

E parabolæ dato puncto auferre segmentum alteri æquale dato diametro eiusdem,

DAta sit parabola ATY, & segmentum in eo ABTD; diameterque BC, & oporteat aliud segmentum dato æquale resecare, quod incipiat à puncto X. Iungatur punctū X puncto D, & lineæ XD ducatur parallela AY, ducaturq; XY; nam segmētū XPY erit, quod exoptatur æquale segmēto ABD.



Probatur. Nam ducta BP erunt æqualia triangula ex prop. 32. huius ABD, & XPY cum habeant vertices in parallelis XD, & BP, & AY, triangulum

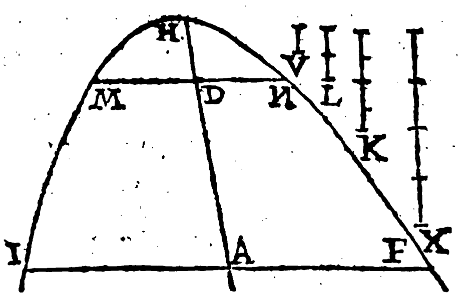
verò

verò ABD est maximum ex propos. 11. huius. Ergo etiam triangulum XPY ex Cor. p. 25. h. Quadere, cùm maxima sint triangula ABD, & XPY, & æqualia; erunt quoque segmenta XPY, & ABD parabolæ æqualia ex prop. 35. huius.

THEOR. VI. PROPOS. XXXIX.

A parabola eadem auferre segmentum dato proportionale.

SIt parabola, seu segmentum FHI, & oporteat ab ea resecare aliud segmentum, quod se habeat, vt X ad V; Inter X, & V inueniantur duæ mediæ proportionales LK ex propos. 3 Tract. 15. fiatque vt X ad L, sic AH diameter ad HD, & ducatur parallela NM. Dico segmentum FHI esse ad segmentum NHM, vt X ad V.



Progr. 1. Probatur segmentum FHI ad segmentum parabolicum HNM est in ratione triplicata FI ad NM, & proportionis FI ad NM duplicata, vt dicā est proportio AH ad HD, & AH ad HD, sic facta est, vt X ad L, & X ad L ex effect. est duplicata proportio X ad K. Ergo FI ad NM est, vt X ad K. Verum segmentorum parabolicorum, vt dixi FHI ad MHN triplicata est proportio FI ad NM; quæ est, vt X ad K; & X ad V triplicatam possidet proportionem illius, quæ est X ad K. Ergo segmentum parabolicum FHI ad NHM segmentum est vt X ad V.

Remanet ostendendum proportionem parabolici segmenti FHI esse ad NHM in triplicata ratione FI ad NM.

Progr. 2. Ex 36. h. parabola FHI se habet ad parabolam NHM, vt triāgulum in maiori FHI inscriptum ad triangulum in minori designatum NHM; sed triangulorum proportio componitur ex proportione FI ad NM, & AH ad HD; sed pportionis FI ad NM est duplicata ratio AH ad HD, quod sit, vt quadratum FA ad ND, vel ex 6. lib. 2. quadruplum quadratum ex FI ad illud ex NM, sic AH ad HD ex 5. Tr. 24. ergo ex dupla proportione componitur AH ad HD, & ex simplici pportione quoq; FI ad NM. Ergo proportio segmenti parabolici FHI ad NHM est triplicata illius, quæ est FI ad NM.

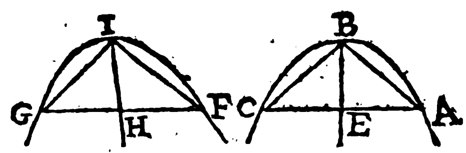
COROLLARIVM.

HInc est, quòd si illud item segmentum NHM alibi in eadem parabola efficere desideres, poteris id facere ex propos. 37. huius detruncando alibi in eadem parabola segmentum æquale segmento NHM. Nam erit illi segmentum FHI, vt X ad V, cùm ad æquales eadem sit proportio.

PROBL. III. PROPOS. XL.

A Parabola data segmentum rescindere, quod sit æquale alterius parabolæ datæ segmento.

DEtur parabola ABC, & oporteat resecare à parabola FIG segmentū æquale; Accōmodetur in parabola FIG linea GF æqualis lineæ AC, & ducatur diameter HI ex 36. tr. 24. Dico FIG esse æquale segmento ABC.

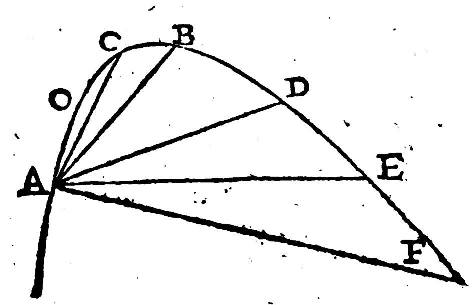


Probatur cum FH sit dimidia FG æquabitur ipsi AE. Sed vt AE ad EB, sic ob similitudinem omnium parabolarum ex prop. 51. tract. 24. est ex defin. similitudinis sectionum est FH ad HI, & *permutando* AE ad FH, vt EB ad HI. Sed FH, & AE sunt æquales; Ergo etiam tales erunt EB, & HI. Quare triangula ABC, & FIG erunt æqualia, vtpote æqualium altitudinum, & basium; sed etiam sunt triangula maxima, quia sunt ad diametros ex 31. h. ideoque vt triangulum ABC ad triangulum FIG sibi æquale sic erit segmentum parabolicum ABC ad parabolicum segmentum FIG, ergo 12. lib. 5. erunt æqualia parabolica segmenta CBA, & FIG.

PROBL. IV. PROPOS. XLI.

Segmenta à parabola datâ detruncare, quæ sint in continua proportione.

SIt data proportio segmenti AOC ad segmentum ACB, & fiat ex propos. 14. lib. 6. vt subtensa AC ad AB subtensam, sic AB ad aliud AD, & sic successiuè vt AB ad AD, ita AD ad AE, & cæt. Deinde lineæ inuentæ à puncto A accommodentur in parabola, & ducantur AD, AE, AF, & cæt. Nam dico segmenta ACB, & ABD, & ADE, & AEF, esse in continua proportione.



Probatur ex ostensione pr. 39. progr. 2. vbi ostēdimus segmenta ACB, & ACBD, & ABDE, & cæt. esse in triplicata proportione subtensarum AB, & AD, & AE, & cæt. sed illæ factæ sunt continuæ proportionales. Ergo ex propos. 1. tract. 28. etiam segmenta parabolica erunt continuæ proportionalia.

PROBL.

PROBL. V. PROP. XLII.

Parabolæ aream ad quamcumque figuram reducere.

QVoniam vt prop. 36. huius ostendimus, quod parabola in triangulum æquale commutari potest: hinc enascitur, quòd si triangulum illud æquale parabolæ conuertatur ex pr. 3. tr. 29. in rectangulum, & hoc in quadratum, & deinde in circulum ex pr. 14. tr. 30. & tandem in Ellipsim ex prop. 30. h. quòd etiam parabola omnes istas transformationes sit subitura, cum sit consequenter æqualis Ellipsi, circulo, quadrato, & rectangulo, quę triangulo, in quod primo conuersa est æquantur.

EXPENSIO VI.

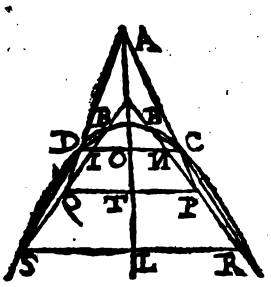
De partitione Hyperbolæ.

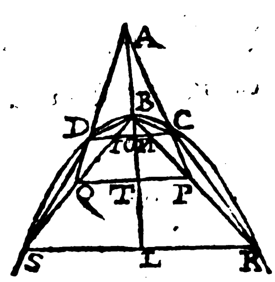
HYperbola vsque adhuc quadrationi subigi non potuit, & licet Ambrosius à S. Vincentio in id conetur, illius tamen quadratio adeo inuoluta est, vt omninò incomperta remaneat: Vnde ne inutiliter librum oneremus satiùs erit certam tantùm eius Geodęsiam proponere.

THEOR. II. PROPOS. XLIII.

In Hyperbola triangula segmentorum, quorum vertices in parallelis sunt, & applicatis, æqualia inuicem sunt.

SInt triangula RCB, & BDS, que sint in segmentis hyperbolicis, & vertices eorum nectant parallelæ CD, RS, & vertices B, vel sint in eodem puncto, vel aliqua V. g. BB predictis RS, & CD parallela nectantur. Dico illa esse æqualia.



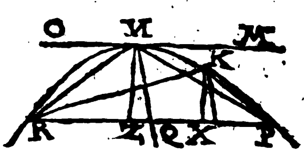


Prob. Cum RBL, & LBS sint triangula ad eamdem altitudinem super bases ęquales, idest applicatas RL & LS ex pr. 13. tr. 29. æquales erunt NO, & OI, sed CO, & OD sunt quoque applicatæ: Ergo erunt æquales; Ablatis itaque æqualibus NO, & OI reliquæ erunt æquales CN, & ID; Quamobrem triangula CBN, & IBD erunt æqualia, vtpotè super basis æquales, & inter parallelas; sic triangula CNR, & IDS ob eandem rationem erunt ęqualia. Vnde etiam triangula BDS, & RCB ex illis partialibus constituta erunt æqualia.

PROBL. I. PROPOS. XLIV.

Data Hyperbolæ terminatæ maximum triangulum inscribere.

IN Hyperbolæ PNR ducta quacumque PR, & diuisa bifariam in Q erigatur diameter QN ex propos. 30. Tract. 24. & ducatur contingens MO, quæ erit ex propos. 28. Tract. 24. de conicis parallela lineæ PR. Ducantur itaque à contactu N rectæ PN, & NR, & triangulum quod constituitur, PNR maximum erit.



Probatur facile. Quia, si aliquod triangulum aliud adsit in segmento Hyperbolico PNR, quod obtineat verticem alibi V. g. in K punctum K non erit in parallela MO, cùm MO tangat tantum in N; ergo inferius erit, & minor erit altitudo KX, quam ZN, vt patet. Vnde cum minorem altitudinem triangulum PKR consequeretur, esset minus, quam PNR. Quare PNR erit maximum cum maius, vel æquale nequeat assignari.

THEOR. II. PROP. XLV.

Triangula maxima inter parallelas existentia in Hyperbola sunt inuicem æqualia.

*SInt triangula maxima RCB in pr. 43. h. & BDS. Dico illa esse æqualia. Nam ductis diametris PA, & QA, & linea DC per eorum vertices C, & D ea erit parallela applicatę RS, & ideo etiam vertices triágulorum maximorũ RCB, BDS erũt in parallelis applicatisque; quare ex 43. h. erunt æqualia.

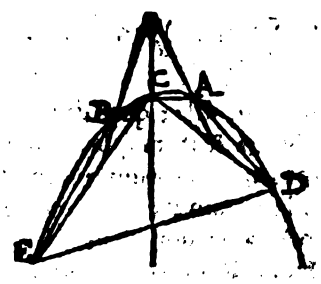
*Prob. Nam ducatur PQ, & applicata CO, & diuisa bifariam RS ducatur quoque diameter LA; Isti itaque tres diametri ex prop. 29. Tract. 24. Coroll. conuenient in idem punctum A, & quia in triangulo RBL est vt RL ad TP, sic LB ad TB, & sic in alio LS ad TQ; ideo erit RL ad PT, vt LS ad TQ, ideoq; *permutando* RL erit ad LS, vt PT ad TQ; sed RL, & RS sunt æquales, ergo etiam PT, & PQ. Ab O itaq; ducatur OD in verticem trianguli BDS, & hæc erit applicata quoque. Nam æquabitur ipsi OC. Probatur autem hoc. Nam TQ est ad OD, vt TA ad OA, & TA ad OA, vt PT ad CO. Ergo ex 16. lib. 5. TQ erit ad DO, vt PT ad CO; ideoq; *permutando* TQ erit ad TP, vt OD ad CO; sed PT, & TQ ostésæ suntequales, ergo etiam CO, & OD ex 12. l. 5. Ergo DO erit applicata, & ideo parallela ipsi RS. Quamobrem cum triangula RCB, & BDC maxima obtineant vertices in parallelis, & applicatis erunt æqualia.

THEOR.

THEOR. III. PROPOS. XLVI.

Cuiuscumque Hyperbolæ segmenta; in quibus capiant triangula æqualia maxima inuicem æqualia sunt.

*SInt segmenta Hyperbolica, in quibus triangula maxima DAC, & CAE capiant: Dico etiam ipsa segmenta esse æqualia.



Probatur. Nam reliqua quoque segmenta capient triangula maxima, cum sint inter parallelas DE, & AB ex thesi, & idem dicas de residuis, & sic absque fine: Inscribantur itaque semper per æqualem numerum procedendo in vtroque segmento omnia triangula maxima, quæ inscribi possunt; hæc infinita series equabit ipsa segmenta. Nam si non equaret adhuc restaret aliquod spatium, in quo triangulum maximum posset inscribi: sed hæc triangula, vt vt multiplicentur semper æqualia perseuerant, ergo etiam omni possibili multiplicatione præstita æqualia erunt. Quadere ipsa quoque hyperbolica segmenta, quæ equant series possibili omni multiplicatione numerosas erunt equalia.

Quod verò semper multiplicentur equali numero patet: nam relinquit quodlibet triangulum duo spatia, quæ duobus triangulis possunt inscribi, & hæc singula duo quoque, & ideo quatuor, & hæc octo, & sic continuè duplicando.

PROB. IV. PROPOS. XLVII.

Si detur Hyperbola Asymptotis inclusa, & applicata extremo ducantur Asymptotis parallelæ, illa includent spatia æqualia.

EXponatur Hyperbola BC, & ab ea fiat duæ parallelæ ductæ BL, & CM à terminis applicatæ BC, necnon BN, & CP Asymptotis PD, & DN. Dico etiam EBDL, & MDCF esse æqualia quadrangula.

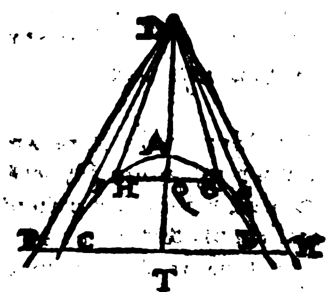
Prob. Producta BC ad asymptotos in N, & P erunt NB, & CP æquales ex prop. 46. vel 66. Tract. 24. de conicis, & ob parallelismum linearum EB, & MC, ita erit, NB ad NC, idest æquales CP, ad PB, vt EB ad CM. Verùm ob eandem rationem, vt CP ad PB, sic EB ad BL. Ergò ob similitudinem rationum vni tertiæ ex prop. 16. lib. 5. erit EB ad MC, vt CF ad BL reciprocè, quare rectangula EL, & FM æqualia ex prop. 10. lib. 6. Elem.

THEOR. IV. PROPOS. XLVIII.

Si detur Hyperbola asymptotis stipata, & in ea duo segmenta conuexa perhibeantur æqualia, erunt etiam segmenta concaua æqualia.

SIt Hyperbola BGAHC Asymptotis stipata PD, & ND, & dentur segmenta æqualia conuexa BOG, & HIC in ipsa BGAHC: Dico, quòd etiam segmenta concaua BODG, & HICD erunt æqualia.

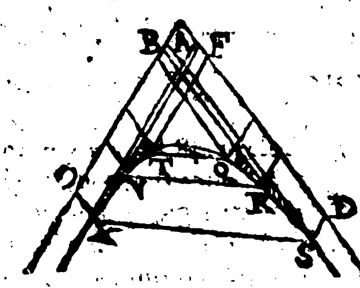
* Probatur. Nam primo triangula GDQ, & HDQ ob eandem altitudinem, & equales bases GQ, & QH erunt æqualia: Trapezia quoque QGTB, & CHTQ erunt æqualia ex propos. 12. tract. 29, ob eandem altitudinem cum sint inter parallelas, & equales bases, quæ applicatæ GQ, & QH, & CT, & TB sunt. Tandemq; idem asseras de triangulis BDT, & DTC ob eandem altitudinem DT, & æquales bases CT, & TB. Ablatis itaq; triangulo DQG, & trapezio TQGB ab æquali toto BDT alteri TDC toti, cui similiter auferantur partialia prædictis equalia triangulum HDQ, & trapezium HQCT reliqua remanebunt æqualia BGD, & HDC. A quibus si vtrinque auferantur segmenta conuexa ex 46. h. æqualia BOG, & HIC remanebunt quoque concaua BOGD, & HDIC æqualia.



THEOR. V. PROPOS. XLIX.

Si sint segmenta in Hyperbola concaua, quæ æqualium parallelogrammorum lateribus continentur, illa inter sæuerunt æqualia.

*SIt Hyperbola contenta asymptotis suis, sintque iuxta propos. 47. huius exposit. æqualia parallelogramma TA, & QA, necnon, & SA, & XA, relinquent mixtilinea nigra super SQ, & XT.



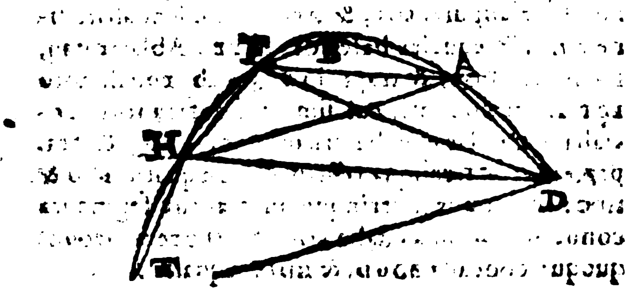
Ducta parallela RV erunt rursus parallelogramma VA, & RA æqualia; necnon, & parallelogramma TA, & QA ex eadem prop. & relinquent mixtilinea minora nigra, & si sic semper subdiuidantur, semper ipsa parallelogramma remanebunt equalia: sed semper minus, & minus mixtilineum relinquent. Multiplicentur itaque vsquedum multiplicari queunt subdiuidendo, relinquent minus spatium mixtilineum omni possibili simili spatio; si enim adhuc superesset aliquod mixtilineum, tantò magis adesset spatium pro parallelogrammo mi-

minori constituendo. Quoniam parallelogrammũ quodlibet à mixtilineo deficit segmento concauo nigro. Cum itaque omnis possibibilis multiplicatio parallelogrammorum omne spatium mixtilineum absumat, erunt illa parallelogramma æqualia toti segmento concauo OAFTX, sic etiã ex alia parte concauo segmento SDBAQ. Cum itaque series parallelogrammorũ SQAD sit secundum omnes suos terminos æqualis seriei parallelogrammorũ ATXO, & singulæ seriei æquent segmentum concauum suum, etiam ipsa segmenta concaua SBQDAB, & TVXOAT erunt æqualia.

PROBL. III. PROPOS. L.

Dato Hyperbolæ segmento conuexo à dato puncto in ambitu illius ducere rectam, quæ æquale segmentum auferat.

DAtum sit segmentum Hyperbolæ lineæ AD abscissum, & punctum B in ambitu Hyperbolæ DAT. Ducatur ab A ad B punctum datum linea AB, & huic fiat parallela DF, & ducatur BF. Dico factum esse, quod petebatur, & segmenta lineis DA, & BA abscissa esse inter se æqualia.



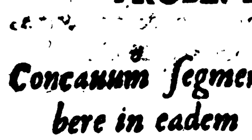
Probatur. Quoniam cum sint inter parallelas DF, & AB in ipsis triangula maxima inscribi poterunt æqualia ex propos. 44. huius. Vnde ex prop. 46. huius ipsa segmenta conuexa erunt æqualia; Rursus si AF punctum coniungatur puncto A, & ducatur ipsi AF parallela DH, & FH segmentum FH erit æquale opposito DA, & ideo segmento BF, & sic in infinitum.

PROBL. IV. PROPOS. LI.

Concauum segmentum alteri æquale exhibere in eadem Hyperbola suis Asymptotis stipata ab assignato puncto.

SIt in Hyperbola pr. 48. h. in asymptotis ND, & NP segmentum concauum BOC, & velit aliquis à puncto H abscindere segmentum, quod sit æquale dato BOC. Ducatur CH ad datum punctum H, & postea illi parallela BC, & coniungantur extrema H, & C vertici D, & erit factum, quòd postulatur.

Patet enim ex pr. 48. h. BDOC triangulũ concauũ æquari triang. cõcauo HICD, vel segmentum segmento.



Quod si cupias segmentum non contineri lineis in verticem D conuenientibus; sed parallelis alteri asymptotorum sit datum segmentum concauum CRPO clausum lineis CO, & RP, & ad destinatum punctum N æquale oporteat ponere aliud segmentum. Ducatur parallela ad datum punctum N recta NM, & ei parallela CX; deinde ducantur rectæ à punctis N, & X parallelæ asymptoto OA, & dico *segmentum* NMXR *æquari segmento* CRPO.

Probatur. Nam segmentum concauum CRPO æquatur segmento concauo NXRA ex propos. 49. h. Parallelogrammum quoque BAP parallelogrammo NMA, quibus ablatis BAP, & NMA relinquentur RPCO, & XRNM æqualia.

EXPENSIO VII.

De Spatijs Spiralibus.

SPatia spiralia sunt illa; quæ diametro spiram generante, vt QA, & spira ipsa continentur, vt est spatium AQEBQA; Horum autem spatiorum proportiones ad spatium circuli inuestigandæ sunt vt ex illis innotescat eorum quadratio.

Præassumptum. Reminiscendum itaque sectores habere eam proportionem, quam rectãgula ex semiarcu subtenso, & radio, si sint diuersorum circulorum; dummodo arcus sint similes, quia eis sunt æqualia, vt diximus propos. 4. h. agentes de circulo. Quadere sectores diuersorum circulorum decrescentium, vel crescentium augmento arithmetico, vel decremento, quorum arcus sint similes; ipsi quoque decrescent, vel se augebunt eadem ratione, qua rectangula diametrorum, & arcuum.

V. g. sector BAQ erit in fig. prop. 53. maior sectore CPQ eodem incremento, quo augetur rectangulum ex dimidio arcu BA, & radio QA. Super rectangulũ ex dimidio arcu CP, & radio CQ. Siquidem arcus similes sunt inuicem, vt diametri ex 44. 1. Quare ita augebuntur arcus inuicem, & diametri, & ita semidiametri, & semiarcus, scilicet si QA sit 8. partium, & arcus BA octaua pars sui circuli ponatur 8. partium, diameter QL erit 7. partium, & PC arcus eius, octaua pars sui circuli, erit quoque 7. partium, & si MQ sit 6. erit arcus MA octaua pars sui circuli conflatus ex 6. partibus. Quare etiam rectangula ex semidiametro, & semiarcu æqualia sectoribus: se respicient, vt ea rectangula quorum latera arithmetico decremento continuo decrescunt, de quibus supra Tract. 28. Exp. 3. Siquidem deficiunt, horum quoque rectangulorum latera duplici decremento arithmetico. Quare se habebunt ad inuicẽ, vt rectangula AB, & BC, & cet. vsq; ad LX. vt fig. pr. 12. tr. 28. videre potes. Quæ sunt facta ex lateribus arithmetico decremento deficientibus BA, & XG vsque ad CL. Ostensum autem ibi est prop. 16. Quod hæc rectangula in seriem infinitam multiplicata, si simul ponantur ad rectangula integra, & maximo æqualia inuicem, & multitudine prædictis erunt, vt 2. ad 6. Rectangula igitur quoque sectoribus æqualia, quæ deficiunt duplici decremento Arithmetico propter radium, & propter arcum deficientes erunt ad integra, vt 2. ad 6. si multiplicentur omni multiplicatione possibili, siquidem quoad vtrumque latus alterum æquale radio alterum æquale semiarcui deficiunt.

THEOR.

PROBL. I. PROPOS. LII.

Spiræ inſcribere, vel circumſcribere ſectores tot, vt ſint ſimul poſita omnia ſpatia inter ſpiram, ſectoremque concluſa minora qualibet data quantitate.

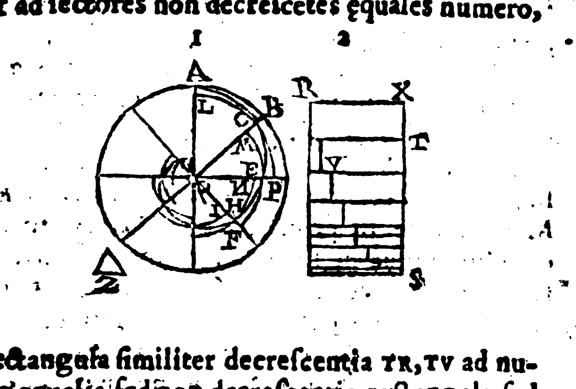
Sit data ſpira in fig. prop. ſequent. ACEHQ, & debeat circumſcribi tot ſectores, vt ſpatium quod relinquunt, vt CAL, ſit minus quantitate Z. Redigatur quantitas Z in rectangulum ex tract. 19. prop. 3 & hoc fiat ſector QBA primus minor, quod facile fiet efficiendo triangulum circumſcriptum ABQ illi rectangulo ex Z effecto æquale; & ſector ipſe BAQ minor triangulo erit minor quoque, quàm Z. Dico, quòd ſi reliqui ſectores æqualis anguli apud Q circumſcribantur æquali deficientes diminutione AL, & CM, vt diximus tract. 18. prop. 9. poſſe fieri, relinquent ij ſectores, vt BAQ, & cæt. quantitatem minorem, quam Z.

Probatur. Quia differentiæ BACL, & CPEM, & EFNH, & aliæ omnes æquant, vt patet BAQ ſectorem minorem, quam Z. Ergo omnes ſimul differentiæ erunt minores, quam quantitas Z, & tantò minores; ſi ſumamus differentias non quibus inuicem differunt, ſed quibus differunt à ſpira, vt BAC, CPE, EFH exteriores, vel interiores ACL, CEM, ENH.

THEOR. I. PROPOS. LIII.

Spiræ primæ circumſcripti ſectores habent proportionem ad ſectores circuli ſpiram comprehendentis maiorem; quàm 2. ad 6. & ſectores ſpiræ inſcripti habent minorem proportionem ad illos, quam 2. ad 6.

Sit ſpira ACEH vſque ad Q, quæ eſt prima, & circulus illam complectens, cuius radius AQ. Sectores circuli ſint octo; quorum vnus eſt BAQ; Sectores circumſcripti ſint BAQ, & CPQ, & EFQ, & cæt. Inſcripti LCQ, & MQE, & NHQ, & cæt. Circumſcriptique erunt 8. cum maximo, at inſcripti, quia excludunt maximum, erunt ſeptem. Itaque vt in præſſ. Arithmeticè decreſcentes ſectores ſunt ad ſectores non decreſcẽtes æquales numero,



vt rectangula ſimiliter decreſcentia TX, TV ad numero æqualia ſed non decreſcentia rectangula, ſed hæc decreſcentia ſunt magis, quam 1 ad 3. incluſo maximo, & minus eo excluſo maximo ad tot rectangula non decreſcentia æqualia. Ergo tales quoque erunt ſectores, & omnes octo ſectores decreſcentes arithmeticè incluſo maximo, vt BQA & CQP, & EQF, & cæt. erunt ad octo maximos, vt QBA æquales inuicem magis, quam 1. ad 3. at ſeptem ſectores CQL, MQE, & NHQ minùs, quam 1. ad 3. ad octo maximos, & ſic ſemper erit quocumque numero maiori ſectorum electo, & ſine vlla meta multiplicato.

THEOR. II. PROP. LIV.

Spatium à ſpira prima, & radio ad eius initium ducto concluſum eſt ad circulum ſuum, vt 1. ad 3.

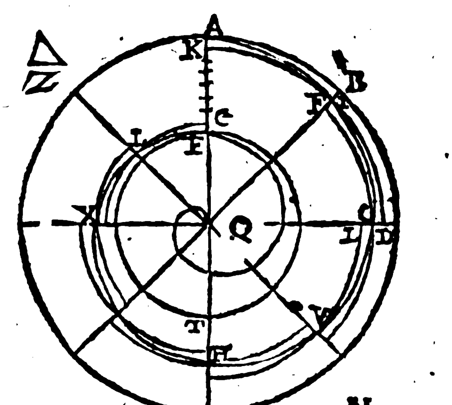
Sit ſpatium ACEHQA ſpira ACEHQ, & radio QA clauſum. Dico, quòd hoc ſpatium ad totam planitiem circuli eſt, vt 1. ad 3. vel quod idẽ 2. ad 6.

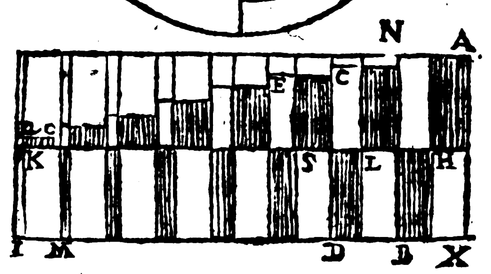
* Probatur. Nam ſpatium ACEHQA prædictum non eſt maius, aut minus, quam $\frac{1}{3}$ totius circuli. Ergo æquale erit. Primò enim ſi illud ſpatium eſt maius, ſit minus quãtitate aliqua Z, & tot ſpiræ ſectores inſcribantur ex 1. h. donec ſpatiũ inter ſpirã arcũq; inſcripti ſectoris clauſũ ſit minus quãtitate propoſita Z, qua ſpatium à ſpira, radioque concluſum ACL, & cætera omnia ſuperant tertiã partẽ circuli. Cum itaque ſpatium radio, ſpiraque clauſum ſit maius tertia parte circuli conſequenter ſpatium ſectoribus contextum CLQ, & MEQ, & cæt. erit maius tertia parte circuli, cùm ſpatium inter ſpiram, ſectoremque arcus interceptum quale vnum ex ipſis CAL ſit minus eo ſpatio, quo ſpatium ſpira, radioque clauſum tertiam partem circuli ſuperat. Quòd autem ſpatium ſectorum inſcriptorum, qui primo, & maximo excluſo BAQ incipiunt à ſectore CLQ habeat maiorem proportionem, quam 1. ad 3. ad circulum, ideſt tertia parte circuli ſit maius, hoc eſt contra præcedentem demonſtrationem, ideoque abſurdè eſſet minus, & maius ſectorum ſpatium tertia parte circuli. Si verò aſſeratur ſpira, radioque ſpatium concluſum eſſe minus, quam tertia pars circuli. Sit minus quantitate Z, & deinde tot ſectores circumſcribantur, & ſit adeo numeroſa multitudo ſectorum, vt ſpatium arcubus ſectorum, ſpiraque interceptum CBA, & PCE, & cæt. ſit minus quantitate Z. Spatium itaque ſectoribus clauſum minus erit tertia parte circuli, cum illud ſpatium interceptum inter ſpiram, & ſectorum arcus ſit minus ſpatio Z, quo ſpirale ſpatium minus eſt tertia parte circuli: Sed ſupra oſtenſum eſt ſectores circumſcriptos cum includant maximum conficere ſpatium maius, quàm tertia pars circuli: Ergo eſſet maius. & minus, quod eſſe nequit.

THEOR. III. PROPOS. LV.

Sectores inſcripti ſpiræ ſecundæ habent proportionem ad primum circulum minus quàm 7. ad 3. & circumſcripti ad eundem circulum maiorem proportionem obtinent, quàm 7. ad 3.

Sit ſpira in ſecunda ſua reuolutione AFCVHXLE; & inſcripti ſectores FKQ, & FCQ, & cæt. Dico hos ſectores habere proportionem ad ſectores tot numero, vt EQL, ſeu ad circulum primæ reuolutionis ET, cuius radius EQ, vt 7. ad 3. Sectores verò circumscriptos, vt BAQ, & IDQ habere maiorem proportionem ad eundem circulum ET, quam 7. ad 3. Quod vt ostendatur fiant rectangula illis inscriptis æqualia BC, & DE, vsq; ad X necnon etiam circumscriptis æqualia rectangula BA, & BC, & DE, quę deficient, vt sectores arithmetico decremento, & primum AB æquabitur primo sectori BAQ. Cum itaque hæc rectangula decrescentia se habeant ad rectangula XH, & cęt. primi circuli sectoribus æqualia magis, quàm, vt 7. ad 3. vt ostendetur incluso maximo, & minus, quàm 7. ad 3 eo excluso, sequitur, quòd etiam sectores illis ęquales incluso maximo se habeant ad sectores primi circuli magis, quàm 7. ad 3. & minus excluso maximo, quàm 7. ad 3.





Ostendendum itaque est rectangula AB, & BC, & cęt. decrescentia se habere ad rectangula primi circuli sectoribus æqualia magis, quam 7. ad 3. & rectangula BC, & DE, & cęt. excluso maximo minus quàm 7 ad 3. Siquidem sector BAQ maximus est ad sectorem EQL circuli primi, vt circulus maior ad circulum minorem: sed circulus ad circulũ est quadruplus cum sit supra duplò maiorem diametrum. & ideo duplicatam diametrorum habeat rationem ex prop. 21. lib. 6. duplicata verò proportio 2. ad 1. est 4. ad 1. sed etiam rectangulum AB ad HX se habet, vt 4. ad 1. Ergo cùm rectangulum AB æquetur sectori BAQ ex constructione etiam rectangulum HX, seu HN æquabitur sectori EQL circuli primi. Considerandum autem est, quòd in tota progressione decrescente HX, BL, & DS, & cæt. vsque ad I perseuerant integra. Deinde rectangula nigra AH, & LN, & ES, vel HB, LD, & cęt. perseuerantia eiusdem altitudinis ex pr. 12. Tr. 28. de progr. planitierum erunt dimidium rectangulorũ omnium æqualium BL, & DS, & aliorum vsque ad I. Sic eorum complementa nigra HA, & NL, & CS, & aliorum vsque ad K ipsis æqualia ex prop. 35. lib. 1. quapropter erunt cum alijs rectangulis nigris, complementisque suis æqualia rectangulis albis BL, & DS, & cęt. quæ æqualia perseuerant; siquidem duo dimidia integrum æquant. Vnde si sumamus omnia simul rectangula integra XH, & BL, & cęt. vsque ad I, & complementa vtraque nigra decrescentia HB, & LD, & AH, NL, & CS vsq; ad K erunt totę planities duplæ planitierũ XH, BL vsq; ad I, quæ integræ perseuerant, scilicet, vt 2. ad I. vel vt 6. ad 3.

Quia verò HN, & LC, & SE, & cęt. vsque ad I duplici decremento arithmetico hinc, & inde quo ad vtrumq; latus deficiunt. & primum, maximumque HN demonstratum est æquale maximo sectori ELQ, & ideo maximo rectangulo sibi ęquali præc. propos. decrementa omnia ex Thesi sunt ęqualia decrementis rectangulorum præc. propos. rectangula LC vsque ad KQ erunt singula singulis prædictis æqualia; Ideoque ad tot numero rectangula integra HN ex prop. 13. Tract. 28. se habebunt magis, quam 1. ad 3. incluso maximo HN vtrinq; Propterea que cum rectangula, quę integra perseuerant, & deficientia complementa se habeant ad integra tantum, vt 6. ad 3 si istis addes rectangula HN cum deficientibus LC vsque ad KQ erunt ad rectãgula integra tot numero HN, vel HX, BL, DS vsq; ad I magis, quam 7. ad 3 ex prop. 32. Tract. 28. de propor. rationũ. Verùm si demas ab vnaquaque serie maximum scilicet XH, & HA, & HB, & HN, series LC vsque ad KQ deficiens ad seriem non deficientem BL, & DS conflata ex pari multitudine terminorum erit minus, quàm 1. ad 3. & ideo cum serie rectangulorum prædictorum ęqualium BL, & complementorum nigrorum, scilicet tota rectangula BC, & DE, & cęt. se habebit ad seriem rectangulorum non deficientium XH, & aliorum minus, quàm 7. ad 3. quòd remanserat ostendendum.

COROLLARIVM.

Hinc est, quod cum ex 41. lib. 6. circuli inter se sint, vt ex diametris quadrata, quod si ponamus primum circulum 3. cuius radius EQ secundus erit 12. nempe vt quadratum EQ ad quadratum QA. Vnde rectangula circumscripta spirę secundę se habebunt ad circulum eundem QA magis, quam 7. ad 12. & inscripta minus, quam 7. ad 12.

THEOR. IV. PROPOS. LVI.

Circulus secundæ spiræ est ad spatium ab ipsa spira, semiradioque clausum, vt 12. ad 7.

Sit spatium EA recta, & spira secunda ACXEA conclusum. Dico, *quòd circulus, cuius radius AQ ad hoc spatium se habet, vt 12. ad 7.*

* Probatur. Nam sectores circumscripti, & decrescentes BAQ, & FCQ & cęt. vsque ad LEQ ostensi sunt ex Coroll. præced. propos. in maiori proportione maximum BAQ includendo, quàm 7. ad 12. & inscripti deficientes KQF excludendo maximum in minori proportione, quam 7. ad 12. demonstrati sunt ad sectores maximos numero æquali multiplicatos. Si ergo spatium spirale non sit ad circulum, vt 7. ad 12. erit ad quid minus, aut maius. Maius itaque sit primo, quam 7. partes, in quas circulus diuisus est spatio Z. Et tot inscribantur sectores donec omne spatium, vt KFA, & FCI, & cęt. quòd inter arcus sectorum, & spiram intercluditur sit minus, quàm spatium Z. Ergo erunt omnes isti sectores maiores, quam 7. partes ex 12. in quas circulus diuisus est: quia à spatio spirali maiori, quam partes 7. illarum, in quas circulus diuisus est in spatio Z minus differunt, quam 7. quod est absurdum; cum ostensum sit sectores inscriptos

scriptos

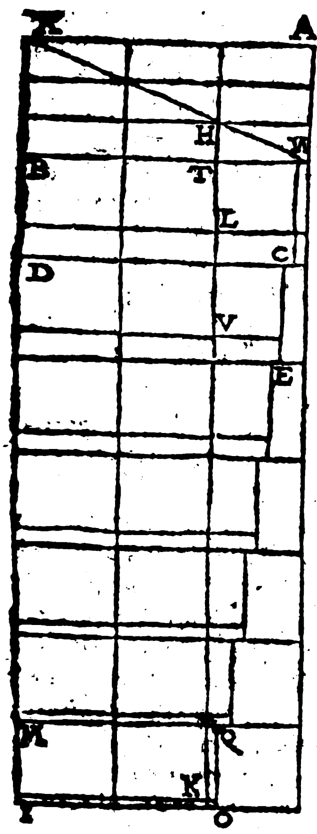
scriptos ad totum circulum se habere minori in proportione, quam 7. ad 12.

Si verò aliquis dicat esse minus spatium spirale, quam partes 7. & ijs, in quas 12. circulus suus diuisus est. Circumscribantur tot sectores donec omne spatium, quod arcu sectorum, & spira clauditur fit minus, quàm spatium Z: tunc sectores circumscripti erunt minores, quàm 7. partes ex ijs 12. in quas circulus partitus est, cum minus differant à spatio spirali minori, quam partes 7. minori differentia, quam Z spatium, in quo spirale spatium partibus 7. minus euadit: Hoc autem esse nequit cum sectores circumscripti ostensi sint obtinere proportionem maiorem ad 12. quàm 7. ad 12. Ergo cum non possit esse, aut maius, aut minus spatium spirale AICVGXEA; quam 7. partes ex partibus 12. circuli, erit ad circulum, vt 7. ad 12, & *conuertendo* circulus ad spirale spatium, vt 12. ad 7.

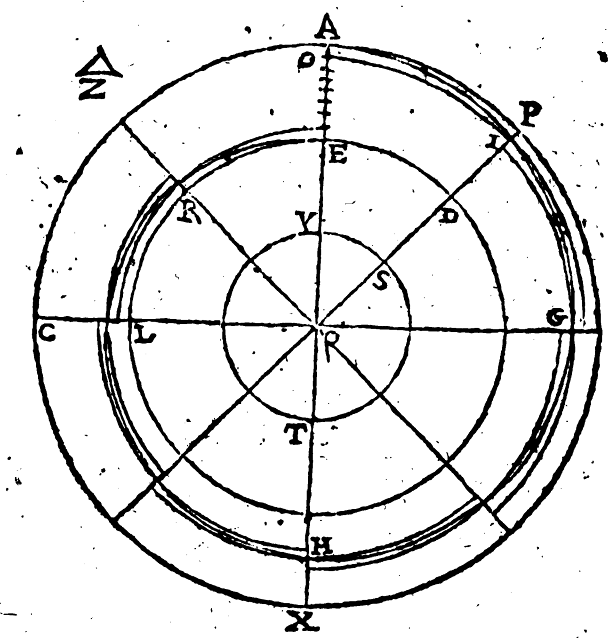
THEOR. V. PROPOS. LVII.

Sectores inscripti tertiæ spiræ habent minorem proportionem ad primum circulum, quam 19. ad 3. & circumscripti maiorem proportionem, quàm 19. ad 3.

Sit spira in tertia circumuolutione AIGH, vsque ad E, & diameter circuli spiram comprehendentis QA triplus diametri primæ spiræ TY; erunt circuli in ratione duplicata suorum diametrorum; Ideoque circulus tertiæ spiræ QAX erit ad circulum primæ spiræ TY, vt 9. ad 1. ex 41. lib. 6. Quare singuli sectores similes eius ad sectores circuli TY primæ spiræ se habebunt, vt 9. ad 1. Fiant itaque rectangula AB, BC, & DE, & cęt. æqualia sectori PAQ tertiæ spiræ, & sectoribus alijs deficientibus, & rectangulum primũ AB se habeat ad rectangulũ HN, vt 9. ad 1. eritque rectangulum HN æquale sectori maximo simili circuli YQS primæ spiræ cumque cęteri LC, & VE, & cęt. deficiant æqualibus decrementis arithmeticis secundum vtrũque latus, ac rectangula primæ spiræ, vt in fig. 2. pr. 53. hinc singula singulis erunt æqualia; Quamobrem ad rectangula æqualia, & non deficientia incluso maximo vtrinque HN magis erunt, quam 1. ad 3. at excluso maximo, minus quàm 1. ad 3.



His itaque rectangulis decrescentibus adde pari numero rectangula, quæ eadem perseuerant XN, & HL vsque ad XM, & cęt. quæ se habent, ad HN, vt 4. ad 1. & insuper rectangula HC, & LD, & alia, quæ decrescunt secundum vnicum latus decremento arithmetico, quę etiam dupla sunt rectanguli HN; & erunt ad integra HN, vt 2. ad 1.; siquidem ob decrementum arithmeticum pro dimidio deficiunt ex prop. 18. Tract. 27. & ideo efficiuntur ei æqualia, quibus adde æqualia complementa, similiterque deficientia MA, & cęt. vsque ad KQ, & cum prędictis erunt dupla ipsorum, scilicet, vt 2. ad 1., & cum rectangulis quadruplicibus XH vsq; ad MK erunt, vt 6. ad 1. seu, vt 18. ad 3. Adde itaque insuper rectangula duplici arithmetico decremento deficientia HN, & LC, & cęt. vsque ad KO, quæ addito XN se habent magis, quam 1. ad 3.



Ideoque tota series rectangulorum XN, & BC, & DE deficientia incluso maximo XN, cuius singuli termini prædictis rectangulis partialibus constant, erit ad rectangula HN æquali numero sumpta non deficientia magis, quàm 19. ad 3. At si à singulis seriebus excludas maximum, & ideo rectangulum XN, erit tota series rectangulorum BC, & DE vsque ad MO ad totam seriem rectangulorum æqualium inuicem, & multitudine prędictis HN minùs, quàm 19. ad 3. Cum itaque sectores circumscripti singuli sint æquales singulis rectangulis; siquidem ita deficit rectangulum, vt sector quilibet circumscriptus ex hypothesi, & æqualibus decrementis, & sectores circumscripti includant maximum PAQ, sectoresque circuli primæ spiræ SYQ, omnes sint æquales ostensi rectangulis HN ęqualibus inuicem; Sequitur, quod sectores PAQ, & cæteri circũscripti deficientes se habeant ad sectores circuli YSQ primę spirę magis, quã 19. ad 3. Sectores verò inscripti OIQ, & cæt ęquales rectangulis BC, & DE, & cęt. maximũ excludentes minus, quam 19. ad 3. ad sectores circuli primę spirę SYQ, & cęteris ęqualibus, & qui numero sectoribus deficientibus respõdeãt.

COROLLARIVM.

Circulus tertiam spiram comprehendens iuxtà Coroll. prop. 21. lib. 6. est ad circulum primæ spiræ, vt 27. ad 3. cum ad illum obtineat diametri proportionẽ duplicatã 9. ad 3. Quamobrem cum rectangula ęqualia sectoribus circumscriptis tertiæ spiræ sint ad rectangula omnia æqualia sectoribus primi circuli, vt 19. ad 3. erunt ad sectores æquales tertij circuli, & ideo ad ipsum circu-

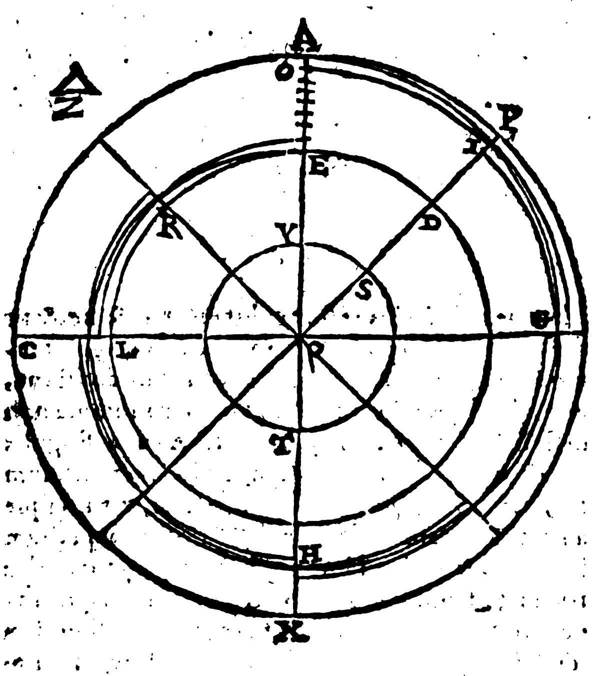
 lum

lum, vt 19. ad 27. & paulò ampliùs, quia includunt maximum. At inſcriptis ſectoribus æqualia rectangula ad rectangula æqualia ſectoribus primi circuli, quia ſunt minùs, quàm 19. ad 3. & ideo quoque ſectores inſcripti ſectoribus circuli primi æqualibus ſint minùs, quam 19. ad 3. erunt ad ſectores omnes tertij circuli, & ideo ad ipſum tertium circulum minùs, quam 19. ad 27.

THEOR. VI. PROPOS. LVIII.

Spiræ tertiæ ſpatium comprehenſum eſt ad circulum eam claudentem, vt 19. ad 27.

PRobatur eodem modo ex propoſ. 54. h. Nam ſpatium ſpira concluſum AGHLEA non eſt maius, aut minus, quàm 19. partes, quarum circulus eam comprehendens continet 27. Ergo erit ad circulum vt 19. ad 27. Nam ſi poteſt eſſe maius ſit maius quantitate Z, & ſectores inſcripti adeò multiplicentur, vt propoſ. 52. Tract. h. vt ſpatium AIO, & alia omnia inter ſpiram arcumque ſectoris internum concluſa ſimul ſumpta ſint minora,



quantitate Z. Quia itaq; ex aduerſarijs ſpatiū ipsū ſpirale eſt maius partibus 19. erit etiam multitudo ſectorū maior, quā partes 19. ex 27. circuli partibus, cum ſectores differant minùs à ſpatio ſpirali, quā quod ipſum ſpatium ſpirale differt à partibus circuli 19. Hoc autem eſſe nequit; cum inſcripti ſectores ſint minùs, quàm 19. partes circuli maximi partibus 27. conſtantis, vt propoſ. præced.

Si verò affirmetur, quòd ſpatium ſpirale ſit minùs, quàm partes 19. quarum circulus includens eſt 27. Sit defectus ſpatiū Z, & tot circūſcribātur ſectores, vt ſpatia omnia, vt IPA inter ſpiram, arcuſq; ſectorum ambiētiū intercepta ſimul ſumpta ſint minus, quam ſpatium Z, tunc ſectores, qui minus differunt à ſpirali ſpatio minori partibus 19. quàm partes 19. differant ab ipſo ſpatio ſpirali erunt minora, quàm partes 19. vnde ſe habebunt ad circulum claudentem minus, quàm 19. ad 27. contra oſtenſa propoſ. 57. h. Cum itaque ſpirale ſpatium, nec maius eſſe poſſit, nec minus, quam 19. ad 27. eam proportionem conſequetur, quam 19. ad 27. quod demonſtrandum erat.

THEOR. VII. PROPOS. LIX.

Spira prima ad ſecundam eſt, vt 1. ad 6. & ſecūda verò ad tertiam ſe habet, vt 1. ad 2. & ſic tertia ad quartam, & cæt.

PRobatur. Nam repetita figura propoſ. 55. h. ſit ſpatium primum ſpirale QE, & ſecundum ACHXEA. Dico itaque, quod primum ſpatium ſpirale ad ſecundum ſe habet, vt 1. ad 6.

Probatur. Nam prima ſpira eſt ad ſuum circulum, vt 1. ad 3. hic verò ad circulum ſecundum, vt 3. ad 12. Quare prima ſpira ſe habebit ad circulum ſecundum, vt 1. ad 12. ſecunda ſpira eſt ad circulum ſuum, vt 7. ad 12. Propterea que cum iſtæ proportiones habeant eoſdem terminos ex prop. 7. de propor. Tract. 17. ſe habebunt ad inuicem, vt fundamenta 1. ad 7. Sed ſpatium ſpirale 7. comprehēdit ipſam ſpiram minorem cum ſuo circulo; clauditur enim ſpira ACHXE, & portione radij EA, ideoq; ſubducta ſpira prima EQ remanebit ſecūda 6. Vnde prima ſpira ſe habebit ad ſecūdā, vt 1. ad 6.

Probatur etiam ſecunda pars. Nam tertia ſpira habet proportionem ad ſuum circulum, quam 19. ad 27. & circulus iſte ad primum eſt, vt 27. ad 3. & circulus primus ad ſpiram, quam claudit eſt, vt 3. ad 1. ideo ex *æquo* ſpira tertia ad primam erit vt 19. ad 1. Cum ergo tertia ſpira cum ſecunda, & prima ſit 19. ablata prima erit 18. & ſecunda, quæ eſt 7. remanebit 12. Quare habebit ſecunda ſpira ad tertiam proportionem, quam 6. ad 12. nempe ſubduplam.

Quòd verò reliquæ ſpiræ minores ad immediatè maiores ſubduplam proportionem ſeruent, patet. Nam iuxta modū probandi adhibitū antecedentibus propoſitionibus quarta ſpira ſe habebit ad ſuum circulum, vt 43. ad 48. ablata verò prima ſecunda, & tertia ſpira, quod ſpatium eſt 19. partium remanebit ſpira quarta 24. ad tertiam ſpiram quæ eſt 12. nempe 2. ad 1. vel conuertendo tertia ad quartam, vt 1. ad 2. & ſic de reliquis.

COROLLARIVM I.

VNde cum noueris circulum, in quo prima ſpira deſcribitur, facilè inuenies areæ cuiuſlibet ſpiralis quantitatem. Nam V. g. ſit quinta ſpira, & circulus primæ reuolutionis ſit 25. partium. Inuenietur primo proportio reuolutionis quintæ ad primum circulum, qui ponatur 3. Itaq; iuxta tradita, quia ita eſt ſector ad ſectorem, vt circulus ad circulum, & rectangula ſectoribus æqualia, & pariter progreſſiones eorum; ideo rectangulum æquale ſectori ſpiræ quintæ ad rectangulū æquale ſectori ſpiræ primæ ſe habebit, vt 25. ad 1. vel vt 75. ad 3. cum latera ſe habeant, vt 5. ad 1. Ideoq; ſi in fig. 1. pr. 57 ponas latus XA eſſe 5. partiū rectāgulū AB æquale ſectori quinti circuli erit partiū 25. ad 1. vel 75. ad 3. rectāgulum verò XH, cuius latus erit, minus vnica parte erit, vt 16. ad 1. Ideoque triplatum erit vt 48. ad 3 rectangula verò HB, & HA deficientia pro ſuo dimidio ſe habebunt, vt baſes, nempe quodlibet, vt 4. ad 1. & ſimul, vt 8. ad 1. & quia deficiunt pro dimidio rurſus, vt 4. ad 1. & ideo, vt 12. ad 3. & cū non deficientibus AB, vt 60. ad 3. ſi verò addas rectāgula HN, quæ deficiunt circuli ſui ⅓; ideo omnia ſimul ſe habebunt ad circulum primæ ſpiræ, qui ponitur 3. vt 64. ad 3. Et erit inuenta

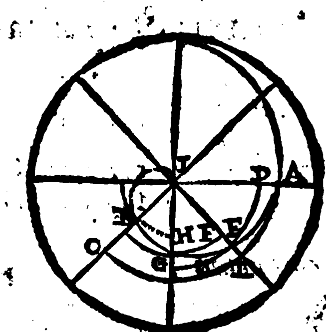
uenta proportio primi circuli ad quintam spiram. Quâ ob temâ dices adhibendo regulam proportionum, si 3. dant 61. quid 35. ideoque calculus prodet 711 $\frac{2}{3}$ pro quintæ reuolutionis spatio posito primo circulo partium 35.

THEOR. VIII. PROPOS. LX.

Spiralis spatij sectio est ad suum sectorem maximum circuli maximi comprehendentem eam sectionem, vt rectangulum ex lineis eam terminantibus simul, & triens quadrati ex earundem differentia ad quadratum diametri circuli prædicti maximi comprehendentis.

SIt datum segmentum spiralis AGB, quod concludat spatium IAB. Dico, quod hoc spatium ad sectorem comprehendentem ALC habet eam proportionem, quam rectangulum ex IB, & AI, vel IC æquali vnà cum quadrato ex differentia BC ad quadratum ex diametro IA, vel IC.

Probatur. Nam si fiant rectangula deficientia æqualia sectoribus singulis inscriptis, & deficientibus omni possibili multiplicatone multiplicatis AIL, DEI, EGI, & HIB, & cæt. hæc rectangula erunt ad rectangula æqualia quantitate sectoribus non deficientibus & inuicem, in numero prædictis deficientibus ex prop. 19. tract. 28. Cor. vt rectangulum ex maximo, à quo incipit, & minimo latere, ad quem peruenit progressio cum triente quadrati ex differentia eorundé laterum ad rectangulum totum maximum. Ergo etiam sectores ipsi similiter multiplicati, & iisdem rectangulis singuli singulis æquales arithmeticò decremento deficientes, sed non vsque ad vltimum sui ab A vsque ad B, & ob omnem eorum multiplicationem omnimodam possibilem, spiram æquantes, habebunt ad sectores integros æquales numero prædicto, & quantitate inuicem eandem proportionem, eruntque, vt rectangulum ex AI, & IB maximo, ad quem terminat cum triente quadrati ex BC differentiæ ad rectangulum ex AI, & IC hoc est quadratum AI.



TRAC.

TRACTATVS XXXI.

De Transformatione superficierum corpora circumuestientium.

SVperficies, quæ corpora circundant aliæ sunt curuæ, aliæ planæ, de planis supra satis est actum. Vnde breuiter ab hoc nos expediemus negotio. Curuarum ingeniosior, difficiliorque speculatio. Quapropter in ea magis immorabimur datorum corporum regularium, rotundorum, vel semirotundorum superficiebus planas æquiualentes, seu proportionales indigitando, & quibus modis possint, & partiri, & augeri, & minui proportionaliter; & in alias operationes mathematicas cogi.

EXPENSIO I.

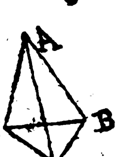
De transformatione superficierum corporum planis contentorum.

TRansformatio superficierum planarum, quæ corpora ambiunt, non differt à transformatione superficierum planarum de quibus egimus expens. 1. tract. 19. proptereaque sufficiet eas indigitasse: sed vt ea, quæ dicentur expeditiùs capiantur accipe corporum regularium planis contentorum ex 11. lib. Euclid. definitiones, quæ nondum haustæ sunt.

DEFINITIO I.

PYramis est figura solida, quæ planis continetur ab vno puncto ad idem planum terminantia.

Videlicet si tres superficies, vt in fig. prop. 2. BAC, ACH, & BAH conueniant à plano BCH, quod est basis in punctum A hoc corpus pyramis dicetur, quæ potest obtinere, nedum tres superficies, quæ in vnũ punctum A conspirent: sed etiam quatuor, & quinque, prout basis BHC latera multiplicat.



DEFINITIO II.

PRisma est figura solida planis superficiebus parallelis contenta, quarum duæ, quæ bases vocantur, sunt æquales, & similes.

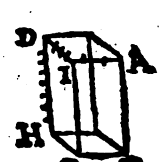
Itaque Prisma est velut figura sequentis prop. BD, cuius bases AD, & BH sunt æquales, & similes; potest verò Prisma obtinere præter bases tres, aut quatuor, aut quinque superficies, prout altera basium multiplicat latera, ex quibus superficies laterales consurgunt. Quia verò latera basium correspondentia sunt æqualia, & parallela, patet, superficies laterales parallelogrammas esse.

PROBL. I. PROPOS. I.

Omnes Prismatis superficies mensurare, & in vnicam planam superficiem redigere.

HOc faciliter efficitur. Nam quoad mensurationem, cùm omne prisma superficiebus parallelogrammis constet, singulæ iuxta dicta tract. 29. ex prop. 3. per mutuum laterum eas ambientium ductum inuenientur; Propter quod cognitis tribus lateribus cuiuscumque superficiei prismatis, nempe altitudinem AB 10. palmorum, & latitudinẽ AI 3. palmorum, Area AC multiplicatis inuicem lateribus 3. per 10. innotescet, quæ erit 30. palmorum quadratorum; Sic cognito latere DI 4. palmorum cum iam habeamus notum latus AB, seu CI, obtinebimus quoque aream DC 40. palmorum ex mutua eorum multiplicatione: Area verò DA ex notis lateribus DI, & AI 12. palmorum prodibit: Itaque tres superficies simul erunt 82. palmorum quadratorum, & quia aliæ tres restant istis singulæ æquales, duplicato numero 82. erunt omnes 164. palmorum quadratorum.

Quoad verò transformationem facilè fiet ex Expens. quarta de augendis, & minuendis fig. tract. 29. Si vni ex ipsis superficiebus cęterę omnes addantur.



PROBL.

PROBL. II. PROPOS. II.

Pyramidis areas inuenire ex notis lateribus, & in vnicam planam superficiem componere.

FAcilis quoque euadit mensuratio arearum alicuius pyramidis, ex notis lateribus. Nam cum singulæ laterales superficies V. g. BAC sint triangula; bases verò sint superficies planæ vt BOH vel triangulares, vel pluribus lateribus constantes ex dict. prop. 17. & 19. Tr. 29. Planimetrici, earum mensuratio dignoscitur, si singula triangula, seu scalena, seu Isoscelia ad mensuram redigantur, vt ibi docemus, & si basis sit polygona inuenietur eius area iuxta dicta propos. 29. Tract. 20. eiusdem. Quaderè collectis tandem in vnam summam omnibus areis, tum triangulorum lateralium, tùm basis subtensæ, conficient mensuram areæ totam Pyramidem ambientis.

Ad secundam propos. partem operi consignandam videatur expens. 4. Tract. 29. de augment. & diminutione fig. Ibi enim docemus modum reuocandi plurima triangula diuersę altitudinis in vnicum triangulum. Quapropter si omnia triangula Pyramidis datæ in vnicum transferantur, & basis quoq; multilatera in triangulum iuxta dicta pr. 20. tract. 29. de transformatione fig. transfundatur, & hoc triangulum quoque cum alijs in vnam superficiem restituatur, hęc superficies, seu triangularis ea sit, seu quadrata erit æqualis superficiei pyramidem circumuestientis.

PROBL. III. PROPOS. III.

Omnium corporum regularium dato vno latere areas inuenire.

QVoniam quodcumque corpus regulare constat superficiebus vnius tantum generis V. g. triangulis quatuor, vt pyramis, aut octo, vt octaedrum, aut viginti, vt Icosaedrum, vel sex quadratis, vt cubus, vel duodecim pentagonis, vt duodecaedrum; Ideo cognito vnico latere, per ea, quæ dicta sunt prop. 19. Tract. 20. tota superficies vnius trianguli, vel quadrati, vel pentagoni agnoscitur, & cum omnes vnius cuiuscumque generis sint inuicem æquales, ideo cognita vna, omnes aliæ patebunt. Quare per numerum superficierum V. g. si sit pyramis per quatuor, si cubus per sex, & cęt. totam summam superficierum corpus regulare circundantium component. Vt verò latera harum figurarum inueniantur, si fortè aliunde non pateant, docebimus, cùm de solidis agemus.

COROLLARIVM.

IDem tandem prestandum in omni corpore, cuiuscumque generis, & irregulari, dummodo singulorum planorum, quibus constat latera noueris; eadem enim est ratio de omnibus.

COROLLARIVM II.

SI verò cupias superficies illas iuxta datam proportionem augere, vel minuere, idem agendum in singulis, quod, & de superficiebus planis prop. 23. tract. 19. Et deinde omnibus simul conglobatis, & in corporis ambitum redactis, seu factis superficiebus alicuius corporis illis adauctis æqualibus obtinebimus corpus; quod superficies consequetur iuxta datam proportionem maiores, vt autem constituatur corpus regulare, id suo loco reseruamus, cum de corporibus.

EXPENSIO II.

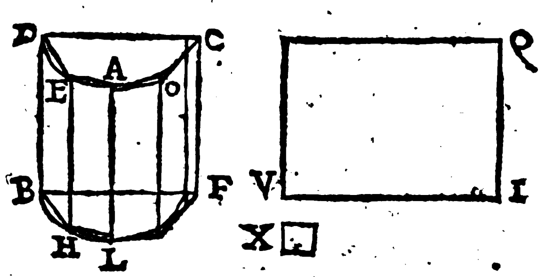
De superficie Cylindrica.

CYlindri superficies est radix, primaque origo, ob quam cęteræ superficies rotundæ tetragonismo subijciantur, & ad aliquam figuram planam reuocentur, ideo hic in primis de ea agendum, vt est superficies cylindri circularis.

THEOR. I. PROPOS. IV.

Superficies Cylindri recti est æqualis ex axe, & peripheriæ linea æquali constituto rectangulo.

SIt Cylindrus CDFB: Dico, quod, si fiat rectangulum, cuius altitudo IQ, æquet altitudinem DB, & latus IV peripheriam CAD; hoc inquam rectangulum superficiei Cylindricę æquabitur. Quod si ab aliquo negetur; & superficies FLBCAD



Cylindrica non æquat rectangulum QV; erit, aut maior, aut minor ipso rectangulo QV. Sit ergo primo maior, differentiaq; sit quantitas X, quam si non haberet esset rectangulo QV æqualis, ideo diceret rectangulo FD eandem proportionem, quam eidem dicit rectangulum QV ex prop. 7. lib. 5. Inscribatur itaque tot rectangula BE, & HA, & cęt. donec sit minor differentia inter ipsa, & superficiem cylindricam, quam quantitas X, dicent itaq; ad quadratum FBCD maiorem proportionem, quam rectangulum QV, quia minus differunt, à superficie maiori cylindrica.

Verùm etiam dicerent minorem proportionem omnia rectangula inscripta DH, & EL, & cęt. ad rectangulum CB, quam QV, ergo dicerent maiorem, & minorem proportionem ad FD rectangula inscripta, quam QV, vnde ex prop. 8. lib. 5. essent maiora, & minora ipso rectangulo QV, quod est absurdum.

Id autem ostenditur, nam rectangula inscripta DH, & EL

& EL, & cęt. cum sint eiusdem altitudinis, ac rectang. QV se habebunt ad inuicem, vt bases ex 16. sed bases, vtpote inscriptę sunt minores peripheriis, & ideo æquali peripheriæ latere IV. Ergo etiam rectangula inscripta HE, & EL, & cęt. erunt minora, quàm QV. Vnde ad CB rectangulum minorem proportionem dicerent. Itaque dicerent proportionē ad rectangulū CB simul, & maiorē, & minorē, q̃ est impossibile. Quod si dicatur Cylindrica superficies minor rectangulo QV sit differentia quantitas X. Circumscribanturque rectangula FO adeo multiplicata, vt differant eorū superficies à superficie Cylindrica minùs, quàm quantitas X; ideo quia est minor Cylindrica superficies rectangulo QV ex aduersarijs, minor quoque differentia ab ipsa, dicent minorem proportionem ad rectangulum BFCD, quàm rectangulum QV; quia minùs differunt à minori superficie cylindrica, sed hæ rectangularum circumscriptorū bases, vt OC, vtpote circumscriptę simul sūt maiores peripheria Cylindrica, & ideo latere IV, quare cum rectangula OF obtineant eandem altitudinem erūt simul maiora rectangulo QV, cū se referant vt bases; quare ad rectangulū FBCD dicent maiorē proportionem. Idest maiorem simul, & minorē, quod impossibile est. Cum ergo superficies Cylindrica non possit esse, aut maior, aut minor rectangulo QV; erit æqualis, quod vult propos.

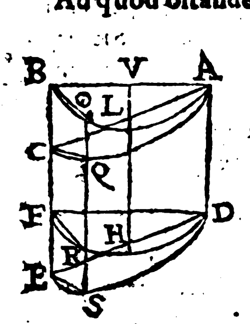
THEOR. II. PROP. V.

Cylindri etiam obliqui superficies dummodò bases parallelas habeat, est æqualis parallelogrammo eiusdem altitudinis, ac eius axis, & cuius alterum latus sit æquale circumferentiæ alicuius plani secantis, ad axem recti.

SIt Cylindrus ACDE obliquus quoad bases AQC, & DSE: Sitque circulus DRF rectus axi LH. Dico *eius superficiem esse æqualem* rectangulo altitudinis HL, & cuius alterum latus æquet peripheriam DRF plani ad axem recti secantis cylindrum.

Prolungetur cylindrus in B, sitque linea CB æqualis lineæ EF, quà planum obliquum maximè à recto elongatur. Nam dico in primis superficiem DRFESD esse æqualem superficiei AOBCQA.

Ad quod ostendendum, inscribantur rectangula in æqualibus arcubus RF, & OB, & cæt. vt sunt OBQC, & cæt.; ista erunt æqualia, & si inscribantur donec inscribi possunt successiuè, quę inscripta sunt in AOBCQ semper erūt æqualia ijs, quæ in DRFES inscribuntur.



Sed omnia rectangula, quæ inscribi possunt æquant totam superficiem, & si adhuc daretur locus non omnis possibilis multitudo esset inscripta. Ergo superficies AOBCQ æquatur superficiei DSEFR.

Quod verò rectangula inscripta semper perseuerent æqualia, dummodò æqualibus arcubus planorum, rectorum, secantium inscripta.

Probatur linea OB ob parallelismum ex Thesi planorum æquatur lineæ AD, & pariter linea QS ob idem parallelismum æquatur lineæ AD, cùm ergo vni tertiæ AD lineæ OB, & QS æquentur; inuicem quoque erunt æquales, & sic dicas de lineis BF, & CE; Quare quadrangula QCSE, & OBRF inter easdem parallelas, & super æquales bases erunt ęqualia: Ablato itaque communi QCRF; restabunt æqualia trapezia inscripta OBQC; & RFSE, & idem dicas de alijs quibuscunq; inscriptis: Vnde patet etiam superficies cylindricas omnem multitudinem inscriptorum rectangulorum ęquantes, esse inuicem æquales.

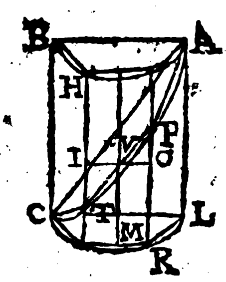
Quapropter si cylindrus obliquus DEAC differt à recto DFAB æquali superficie, ita quòd quantùm addit superficies DFE tantùm deficiat alteri parti ACB, erit itaque superficies cylindri recti ABDF æqualis obliqui superficiei ACDE. Sed illa ostensa est æqualis rectangulo ex altitudine AD, & peripheria AOB. Ergo, & cylindrus obliquus talis rationis erit. Linea autem AD æquatur axi HL.

THEOR. III. PROPOS. VI.

Frusti Cylindri acuta superficies est æqualis superficiei dimidiæ recti Cylindri.

SIt acuta superficies, & Cylindri segmentum à à basi obliqua ad axem, & altera recta, vt est ALC factum, & perficiatur cylindrus rectus AHB, LMC. Dico superficiem acutam ALC esse dimidium superficiei AHB, LMC.

Inscribatur rectangulum APLR, & BHTC super æquales arcus HB, & LR basis ad axem rectæ. Assero in primis hæc rectangula, & quęcumque alia similiter inscripta esse inuicem æqualia. Agatur planum HR per latera RP, & TH, secabitque planum APTC, & sectio erit linea TP, quæ diuisa per medium in V ducatur OI per V parallela basibus.



Erunt itaque triangula PVO, & VIT æquiangula in plano AR: siquidem anguli apud I, & O recti sunt, & apud V sunt anguli ad verticem: quare cum sint æquiangula ex 17. lib. 1. Elem. & basis VP basi VT sit æqualis reliqua latera ex 4. lib. 6. erunt in eadem proportione, ac qualitatis: Quare TI æquabitur lineę OP. Et quia OR ęquatur lineę IH, quod punctum V medium sit inter M, & R additis æqualibus TI, & OP remanebunt æquales RP, & TH. Quare etiam rectangula trapezia æqualibus lateribus, & eiusdem altitudinis contenta erunt æqualia. Siquidem HB, & LR ęquales, lineis BO, & LA sunt rectangulę. Cum ergo omnia trapezia, quæ successiuè inscribi possunt in superficiebus acutis cylindri ALCB sint æqualia, & illa omnia possibili multiplicatione multiplicata æquent superficiem cylindricam; etiam cylindricę superficies acutę inuicē erunt æquales. Vnde totius LACB superficies cylindrica LAC dimidiū erit.

COROLLARIVM.

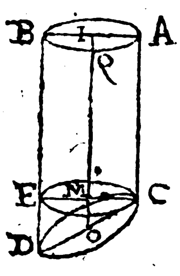
ELlicitur frusti Cylindrici acutam superficiem esse æqualem rectangulo sub dimidia CB æquali axi, & circumferentia AHB, vel dimidia circumferentia AHB, & tota perpendiculari ac cylindri recti, in quo est. Ratio est, quia hæc sunt æqualia dimidio rectanguli ex altitudine, & peripheria pheriæ linea æquali comprehensi toti superficiei cylindri recti æqualis.

THEOR. IV. PROPOS. VII.

Cylindri superficies sine basibus, cuius bases non sint parallelæ, sed altera sit circulus, est æqualis parallelogrammo, cuius unum latus sit æquale circulari ambitui; alterum verò ipsius axi.

Sit Cylindrus ABCD, euius bases nequaquam sint parallelæ. Dico eius superficiem esse æqualem rectangulo sub axe OQ, comprehenso, latere alio ex linea æquali circumferentiæ facto.

Probatur. Nam ducta CE parallela basi AB erit superficies cylindri CABE sine basibus æqualis rectangulo comprehenso sub axe MI, & circumferentia AQBA, ex propos. 1. h. Item ex Coroll. præced. CED portio erit æqualis rectangulo eiusdem longitudinis, quæ est ambitus. Sed sub dimidia ED, sc. sub axe MO comprehenso. Ergo tota superficies exclusis basibus cylindri ABCD, erit æqualis rectangulo longitudine æquali peripheriæ basis AQBA, & axi ID contento.



COROLLARIVM I.

Hinc ergo obtines modum mensurandi omnes cylindros; quorum bases sint circuli, siue illę sint basibus parallelis, siue non. Nam multiplicata peripheria cum axe dabit rectangulum superficiei cylindricę exclusis basibus ęquale. Quadratio verò basium est eadem ac circulorum, quam docuimus supra prop. 2. tract. 30.

COROLLARIVM II.

Hinc etiam euenit omnem superficiem cylindricam esse ęqualem quadrato, quod fit à media proportionali inter lineam æqualem peripherię, & axem ipsius. Nam ex propos. 17. lib. 6. quadratum tale est ęquale rectangulo QIV fig. propos. 4. cuius latus VI ęquat peripheriam, & IQ axem.

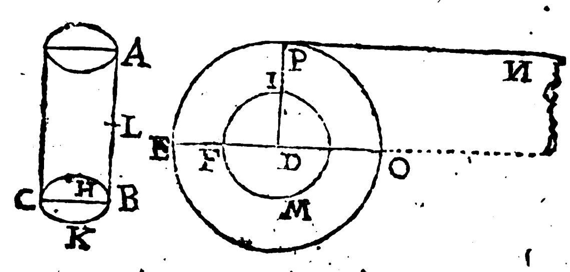
COROLLARIVM III.

Hinc etiam est: Quòd si cylindrus secetur per axem, rectangulum à diametro, & axe comprehensum, vt FBCD in fig. prop. 4. h. in quocumque cylindro, etiam basium non ęquidistantium dicat eam proportionem ad superficiem cylindricam sine basibus; quam diameter ad circumferentiam, quia rectangulum QIV ęquale cylindricę superficiei habet ęqualem basim QI, cum sit eadem, ac axis, aut CF latus. Vnde se habebunt inuicem, vt altitudines ex propos. 1. lib. 6. Cor. sed altitudo rectanguli QV, nempe IV est ęqualis peripherię, & rectanguli FD diametro. Ergo erit FD rectangulum ad QV rectangulum ęquale superficiei cylindricę, vt diameter CD ad circumferentiam, seu ei ęqualem lineam IV.

THEOR. V. PROP. VIII.

Superficies Cylindri recti sine basibus æqualis est circulo, cuius semidiameter sit media proportionalis inter axem, & diametrum basis.

Sit Cylindrus, cuius latus axi ęquale AB, & diameter basis BC, inueniaturque media proportionalis DE inter AB, & BC: superque eam, vt semidiametro fiat circulus. Dico hunc circulum esse æqualem superficiei cylindricę sine basibus.



Probatur. Nam, cùm sit AB latus ad DE semidiametrum circuli confecti, vt ipse semidiameter DE ad diametrum basis BC ex effectione. Erit quoque medietas LB lateris ad medietatem FE radij DE, vt ipsa medietas FE ad radiū basis medietatem BH. Et vt medietas DF ad BH, ita gyrus FIM ad gyrū basis BKCB ex prop. 43. lib. 6. Et ideo ex 16. lib. 5. El. latus integrum BA erit ad semidiametrum ED, vt circumferentia FIM ad circumferentiam BKCB. Si ergo ex circumferentia FIM, & diametro DE, fiat rectangulum DN, & ex circumferentia BKCB, & latere AB fiat item rectangulum hæc rectangula erunt æqualia ex prop. 43. lib. 6. Eucl. Nam cum sint quatuor proportionales rectangulum comprehensum sub medijs DE, & FIM æquale erit ei, quod comprehenditur sub extremis AB latere, & BKCB circumferentia cylindrica.

Rectangulum verò DN ex circumferentia FIM, & DE factum est ęquale circulo, cuius diameter EO: Quia huic circulo est æquale rectangulum factum ex semidiametro DE, & eius circumferentia: Tota verò circumferentia MFI est æqualis dimidię circumferentię EPO; quod sit facta super semidiametrum DE tamquam ex diametro. Vnde quia ita est circumferentia ad circumferentiam, vt diameter ad diametrum ex prop. 43. lib. 6. quia DE est dimidius diameter circumferentia etiam FMI erit dimidia circumferentia totius EPOE. Cum ergo circulus EPO æquetur rectangulo DN, & huic ęquetur rectangulum sub AB latere, seu axi, & BKCB circumferentia, quod ostensum est æquale supra prop. 4. h. superficiei Cylindricę, etiam circulus EPO factus ex radio DE media proportionali inter BA, & BC ęquabitur superficiei cylindricę.

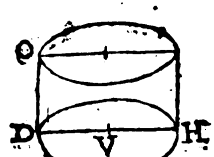
COROLLARIVM.

Hinc verò emanat, quòd si ex diametro, & axe fiat rectangulum, & ex eo extrahatur radix quadrata, quòd hæc erit diameter prædicti circuli, cuius area iuxta dicta de planorum curuilineorum mensura conquisita offeret circulum æqualem cylindricę superficiei.

THEOR. VI. PROPOS. VIIII.

Superficies Cylindrica est dupla suæ basis, si habeat Cylindrus eandem altitudinem ac semidiameter.

SIt Cylindrus HO, cuius latus DO sit æquale radio DV. Dico eius superficiem esse duplam basis.



Probatur. Rectangulum sub dimidia peripheria, & semidiametro comprehensum est æquale ipsi circulo ex prop. 3. Tract. 30. Ergo rectangulum sub tota circumferentia, & semidiametro comprehensum est duplum sui circuli: Sed talis est superficies cylindri HO, quæ est eiusdem altitudinis DO, ac semidiametri, vt patet ex prop. 4. h. ergo erit dupla suæ basis.

COROLLARIVM.

HInc est, quod ita sit superficies cylindrica, quæ sit eiusdem altitudinis, ac radius ad suam basim, vt diameter ad radium, quia sicut superficies cylindrica est dupla suæ basis, sic diameter est duplus radij. Vnde etiam si sit cylindrus eius altitudinis, ac diameter, superficies eius eandem rationem ad duplum suę basis, quam altitudo ad radium ex prop. 18. lib. 5. consequetur.

THEOR. VI. PROPOS. X.

Superficies Cylindricæ, sine basibus eiusdem altitudinis sunt inuicem, vt peripheriæ, vel diametri basium, vel si bases sint eadem, erunt, vt altitudines.

PRobatur. Nam superficies cylindri AC est ad superficiem cylindri LH, vt rectangulum æquale cylindricæ superficiei AC ad rectangulum ęquale cylindricę superficiei LH: sed illa rectangula habent eandem altitudinem, ac cylindri AC, & LH eiusdem altitudinis: ergo etiam inuicem eiusdem altitudinis sunt: quare erunt inuicem ex 1. lib. 6. vt bases; bases autem rectangulorum illorũ sunt æquales peripherijs, ergo dicent inuicem eandem rationem: quam peripherię cylindricę, & peripherię eam, quam diametri. Vnde, & superficies cylindri AC erit ad superficiem cylindri LH, vt diameter CB ad diametrum IH.

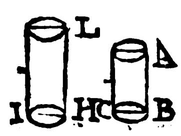
Pr. 2 pars eadem ratione, quod æqualia superficiei cylindricę rectangula ęquentur inuicem basi, quia æquatur peripherijs cylindrorum, & ideo se referant inuicem, vt altitudines, ex 1. lib. 6.

THEOR. VII. PROPOS. XI.

Superficies Cylindricæ sine basibus similium Cylindrorum ad inuicem dicunt proportionem duplicatam peripheriarum, seu altitudinum.

CYlindri similes sunt illi; quorum rectangula per axem AC, & LH sunt æquiangula, & habent circa æquales angulos latera proportionalia V.g. AB ad BC, vt LH ad HI: quæ est eadem ac proportio axis coni ad diametrum, aut radium, vel ad circumferentiam.

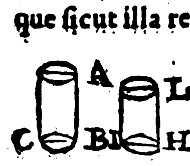
* Prob. vt rectangulum per axem AC ad superficiem cylindri AC, sic BC diameter ad peripheriam ex BC ex prop. 7. Coroll. 3. h. Vt autem diameter BC ad peripheriam ex BC: sic diameter HI ad peripheriam ex HI ex 43. lib. 6. vt autem HI diameter ad peripheriam ex HI sic ex propos. 7. h. Coroll. 3. rectangulum per axem LI ad superficiem cylindri LI, ergo ex 16. lib. 5. vt rectangulum per axem AC, ad superficiem cylindri AC, sic rectangulum LI ad superficiem cylindri LI. Ideo permutando rectangulum AC ad rectangulum LI erit, vt superficies cylindri AC ad superficiem cylindri LI, sed rectangulum AC ad rectangulũ LI duplicatam habet proportionem laterum AB, ad LH vel BC ad HI ex 21. l. 6. ergo, & cylindri AC superficies ad superficiem cylindri LI habebit duplicatam proportionem lateris AB ad latus LH ideoq; altitudinis ad altitudinem, vel diametri BC ad diametrum HI, & ideo ex 43. lib. 6. peripheriæ ex BC ad peripheriam ex HI.



THEOR. VIII. PROPOS. XII.

Superficies Cylindricæ sine basibus, & diuersæ altitudinis, quorum bases parallelæ, & rectangula per axem ducta æquiangula habent proportionem compositam, ex altitudine, & peripheria.

SInt Cylindri CA, & IL, quorum rectangula per axem CA, & IL sint æquiangula. Dico eorum superficies habere rationem compositam ex altitudine HL ad BA altitudinem, & peripheria IH ad peripheriam CB. Probatur. Quia talia sunt rectangula illis æqualia, quorum laterum alterum altitudinem exæquet alterum peripheriam. Ideoque sicut illa rectangula ex prop. 23. lib. 6. Elem. proportionem inuicem compositam dicunt, laterum nempe ex altitudinibus, & basibus, quæ peripherias æquant: Sic cylindricæ superficies sine basibus compositam consequuntur proportionem ex altitudine, & peripheria.



COROLLARIVM.

HInc educes, quod licet cylindri sint obliqui, & basibus non parallelis, adhuc tamen prop. verificatur

verificatur, nam ostensum est prop.7.h. superficiem horum cylindrorum esse æqualem rectangulum, cuius vnum latus sit æquale peripheriæ circuli ad axem recti, & alterum ipsi axi, quare si axi in istis cylindris altitudinem mensuremus, & peripheriam circuli ad axem recti pro basi sumamus vera de ipsis euadet proportio.

EXPENSIO II.

De quadratione superficiei vngulæ cylindricæ.

QVadrationē vngulæ cylindricæ adinuenit inter insignia eius opera Ambrosius à Sancto Vincentio, quæ licet non admodum veniat in vsum; quia tamen singulari ingenio excogitata est hic eam tradere visum est.

DEFINITIO.

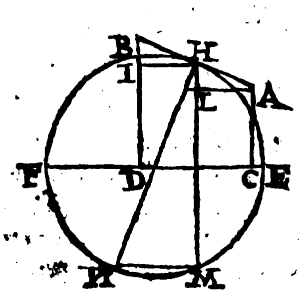
VNgula cylindrica est portio cylindri recta à plano aliquo abscisa semicirculo semiellipsi, & parte superficiei cylindricæ contenta.

Sic in fig. pr.15. ABM dicitur vngula cylindrica, quia continetur semicirculo ACB semiellipsi ADMLB, & parte superficiei cylindricę ACBMA.

THEOR. I. PROP. XIII.

Rectangulum ex contingente, & chorda à puncto contactus perpendiculariter in diametrum cadente æquatur rectangulo ex diametro, & eius portione intercepta à perpendicularibus extremo tangentis deductis.

SIt AB tangens, & duę perpendiculares AC, BD intercipiant portionem diametri CD, quæ ab extremis tangentis A, & B, descendunt, sitque chorda HM à puncto contactus perpendiculariter in diametrum EF cadens. Dico *rectangulum ex AB, & HM æquale esse rectangulo ex diametro EF, & portione CD est Pappi in collect. Math. lib.5.*



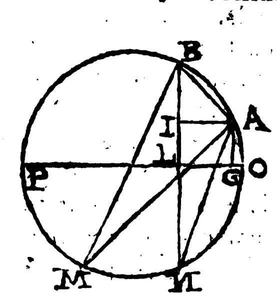
Quod vt ostendatur, ducatur diameter HN, & coniungatur MN. Erit triangulum HMN rectangulum, quòd sit in semicirculo ex propos.28. lib.3. Ducanturque ad angulos rectos chordæ MH, ab H recta HI, & AL; angulus itaque BHN, vtpote diametri, & tangentis ex propos.21.lib.3. est rectus; Rectus quoque ex effectione angulus IHM. Ergo ablata communi portione IHN ab æqualibus rectis remanebunt triangula HBI, & HMN æquiangula, ideoque erit HB ad HN, vt HI ad HM ex 4.l.6. Quare rectangulum compositum ex extremis HB, & HM æquabitur rectangulo confecto ex medijs HN, & HI. Et idem dicas de triangulo AHL ęquiangulo triangulo HNM eidem. Ideoque ob proportionalia latera rectangulum ex AH, & HM æquabitur rectangulo ex AL, & HN. Propterea que duo rectangula ex AL, & HN, & aliud ex HN, & HI simul, idest rectangulum ex FE, & DC æquabuntur duobus ex AH, & HM, & ex HB, & HM; idest rectangulo ex chorda HM, & contingente BA.

THEOR. II. PROPOS. XIV.

Rectangulum ex duobus sinubus, vt vno crure, & chorda interposita, æquatur rectāgulo ex chorda semicirculum complente, & portione diametri sinubus intercepta.

SInt duo sinus AG, & BL, inter quos sit chorda AB, sitque portio GL diametri à sinubus AG, & BL intercepta. Dico, quod si sinus in vnum latus componantur, & adhibeatur chorda pro alio latere rectangulum constitutum æquabitur rectangulo ex chorda AM complente semicirculum BAM, & diametri intercepta portione GL.

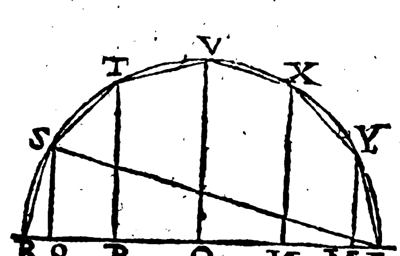
Quod vt ostendatur normalis AI, ducatur, & diameter BM, & coniungantur puncta AN, & AM; eritque ANM rectangulum triangulum, & æquiangulum rectangulo AIM; quia anguli M, & N super eundem arcum AB insistentes sunt ęquales.



Quamobrem ex lib. 6. Elem. prop. 4. AM erit ad IN, vt AB ad AI. Sed IN æquatur sinui BL, & AG, siquidem NL, & LB sicut IL, & AG æquantur, & AI ipsi GL: Ergo, vt AM ad BL, & AG, vt vna linea, sic AB ad GL. Vnde rectangulum ex AM, & GL ęquabitur rectangulo ex BL, & AG simul, & ex AB.

COROLLARIVM.

HInc nascitur rectangulum ex RL, & LS subtendente arcum residuum LVS, qui cum arcu SR efficit semicirculum, hoc inquam rectangulum ex LR, & LS æquari rectangulis omnibus simul nempe QR, & SR, & rectangulo ex RS, &



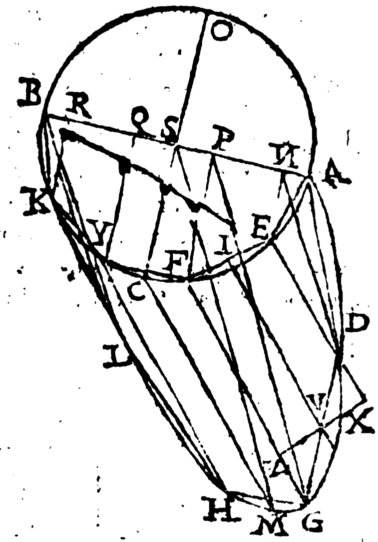
sinubus SQ, TP, vt vno latere, & etiam OV, & PT, vt vno, & SR pro alio, & NX, & QV pro vno latere SR alio existente, & MY, & NX pariter, vt vno latere, & alio eodem SR; dummodo omnes chordæ TS, & VT, & cæt. æquentur chordæ SR. Nam primo triangula LSQ, & QRS sunt proportionalia, estque LS ad SR, vt SQ ad QR, & ideo rectangulum ex extremis LS, & QR æquatur rectangulo ex QS, & SR medijs. Idem est de rectang. YM, & YL æquante rect. SL, ML. Sic in præced. rectangulum ex LS, & PQ æquatur rectangulo ex PT, & QS, vt vno, & TS, idest SR æquali pro alio, & rectangulum ex LS, & OP rectangulo pariter ex OV, & TP pro vno, VT pro alio deseruiente, idest RS; quòd LS chordæ VT sit complementum vsque ad semicirculum sicut est complementum chordæ SR, & sic de alijs vsque ad L cum omnes TS, VT, XV, & cæt. sint æquales ipsi SR. Quare singula rectangula ex sinubus, & chorda SR æquabuntur singulis ex chorda LS, & interceptis diametri portionibus QR, PQ, & cæt. sed hæc rectangula cum habeant idem latus LS ex 4 lib. 2. Elem. æquant rectangulum ex LS, & LR. Ergo omnia rectangula ex sinubus duobus pro vno latere, & chorda pro alio æquabuntur cùm duobus ex SQ, SR, & MY, SR rectágulo ex LS, & LR.

THEOR. III. PROP. XV.

Vngulæ supra definitæ eiusdem altitudinis, ac diametri plana inscripta simul sumpta erunt æqualia rectangulo à tota diametro, & chorda omnes arcus inscriptos subtendente dempto vltimo.

SIt circulus AOBC basis cylindri, & vngulæ superficies AMB, inscribanturque plana AED, & DEFG, & GFYH, & cæt. Dico hæc omnia plana æquari rectangulo, quod fit ex diametro, & EB; quę subtendit omnes arcus simul, qui planorum inscriptorum lateribus, vt BK, & cæteris subtenduntur vsque ad EX excludendo EA vltimum arcum.

Progress. 1. Itaque ostendendum est primò omnia latera ED, & FG esse dupla sinuum quibus perpendiculariter insistunt prout, & ipsa superficies vngulæ, ex def. insistit normaliter basi AOBC. Nam cum omnia plana triangulorum SCM, & NED, & cæt. sint recta sectioni AB Ellipsis, & circuli



vngulam claudentis, erunt omnes anguli æquales, vtpote inclinationis planorum, & ex propos. 6. tract. 22. quia coniungunt perpendiculares CM, & ED, CS verò, & EN sunt normales, etiam ND, & MS erunt normales diametro AB, ideoque parallelæ cum ergo triangula SCM, & NED parallelis constent erunt æquiangula, ideoque ex lib. 6. prop. 4. constabunt cruribus proportionalibus, ideoq; MC erit ad CS, vt DE ad EN; sed MC ex Thesi est dupla sinus, CS, vt æqualis diametro. Ergo etiam DE est dupla sinus EN, & sic dicas de alijs GF respectu FP, & cęt. licet triangula HYQ, & cæt. non sint delineata ad vitandam confusionem.

Progress. 2. Hinc verò ostendetur triangulum AED esse ęquale rectangulo sub AE chorda, & EN sinu: nam cùm DE sit basis normalis ipsi AE altitudo trianguli erit AE, & cum sit dupla lateris, & sinus NE rectangulumque habeat pro alio latere altitudinem AE; triangulum, vtpote duplæ basis, & eiusdem altitudinis ex prop. 41 lib. 1. Elem. æquabitur rectangulo ex AE, & NE, & idem dicas de alio triangulo B K, quod æquet rectangulum ei KB, & KR.

Progress. 3. Ostendendum est, deinde trapezia DEFG æqualia esse rectangulis ex sinubus NE, & PF, vt vno latere, & chorda EF constitutis.

Itaque DEFG trapezium est rectangulum ob angulos apud E, & F rectos ex Thesi, vnde diuisâ chorda EF in I bifariam, & ducta IV. necnon, & per V chordæ EF parallela XZ erit XDV triangulum rectangulum æquale ob angulos ad V verticem æquales triangulo VZG. Vnde suplente VZG defectum trianguli XDV trapezium GDEF ęquabitur rectangulo XZFE. Ideoque subduplum erit rectanguli ex DE, & FG tanquam vno latere, & EF pro alio constituti; siquidem latus excedens GF suplet deficiens latus DE ęquali linea GZ ipsi XD. Sed etiam rectangulum ex sinibus ex NE, & PF, vt vno latere, & EF eodem pro alio, est subduplum rectanguli ex DE, & FG pro vno, & EF pro alio, quod DE, & FG ostensæ sint in 1. progr. duplæ sinuum EN, & FP. Ergo trapezium rectangulum DEFG est æquale rectangulo ex sinubus EN, & FP simul, & EF, & sic discurras de alijs trapezijs respectu aliorum rectangulorum ex sinubus, & chordis.

Progr. 4. Modo ostendetur principaliter prop. Cum enim ex Coroll. præc. omnia rectangula ex sinubus, & chordis sint æqualia rectangulo ex diametro AB, & chorda BE ex prop. 14. h. Cor. Consequenter omnia trapezia prædictis rectangulis ex sinubus, & chordis æqualia erunt quoque rectangulo constituto ex diametro AB, & chorda BE, quæ omnes arcus subtendat excepto arcu AE.

THEOR. IV. PROPOS. XVI.

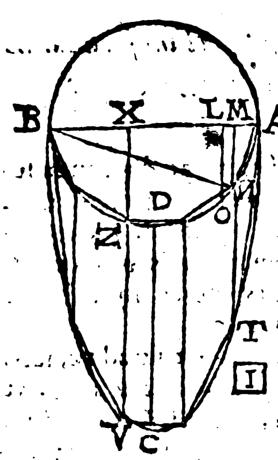
Quadratum ex diametro non potest esse maius Vngulæ superficie, cuius altitudo æquet diametrum circuli baseos, cui recta est.

SIt Cylindricæ vngulæ superficies ACB, quæ insistat perpendiculariter circulo AOB, & cuius altitudo DC æquet diametrum AB. Dico *hanc superficiem quadrato diametri non posse esse minorem.*

Nam si est vngula BAC minor, quam quadratum ex BA, assignetur aliqua quantitas I, in qua quadratum ex diametro vngulam excedat. Fiatque ex 2. Elem. prop. 16. rectangulum ex diametro, & linea AL V. g. quod sit æquale quadrato I; & consequenter rectangulum ex AB, & AL erit excessus, quo quadratum diametri superficiem vngulæ superat; ex L itaque puncto excitetur normalis LO, & deinde inscribatur aliquod polygonum regulare circulo, cuius vnum latus AN sit minus, quam chorda subtendens arcum AO, & deinde vngulæ trapezia, vt in præced. propos. inscribantur, vt ANT, & cæt.

Cum ergo rectangulum ex AL, & AB, & ex LB, & AB

AB integrent quadratu in ex AB ex 4. propos. lib. 2. Elem. Et rectangulum ex AL, AB sit æquale ex effectione superficiei, quà ponitur quadratum ex AB diametri superare vngulæ superficiem; erit itaque residuum rectangulum ex AB, & BL æquale superficiei vngulæ; Ideoque rectangulum AB, & BM maius erit vngulæ superficie, & tantò magis rectangulum ex AB, & BN: sed rectangulum ex AB, & BN æquat omnia trapezia inscripta ex præced. Ergo omnia trapezia inscripta essent maiora superficie vngulæ, quæ ea ambit, quod est absurdum. Non ergo quadratum ex AB diametro superat vngulæ superficiem.



COROLLARIVM.

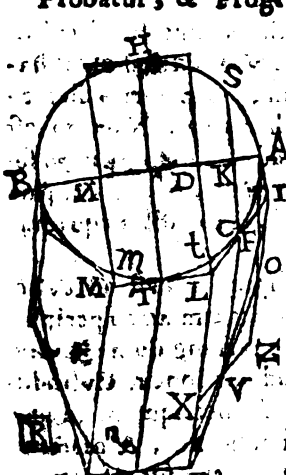
IDem dicendum de parte rectangulorum inscriptorum, idest rectangulis ATCVZ, & rectangulo AB, & AX. Nam rectangulum sub BN, & AX est æquale omnibus planis vngulæ inscriptis AZV, cùm singula inscripta in vngulari superficie AZV ostensa sint æqualia singulis rectangulis ex sinubus, & chordis intermedijs ex Cor. prop. 14. h. quæ ex 4. lib 2. æquantur rectangulo ex BN, & AX cum sint eiusdem altitudinis NB ex partibus alterius lateris AX; Vnde singula plana inscripta AZV æquabunt rectangulum ex AX, & NB facta. Ergo præced. constructione, idem valebit argumentum, & ostendetur Rectangulum ex AB, & AX non esse maius superficie vngulari AZV.

THEOR. V. PROPOS. XVII.

Omnia plana Vngulam vt supra, circumuestientia sunt æqualia quadrato ex diametro exceptis vltimis duobus triangulis.

SIt Vngula ABE, circumuestiantque eam plana AIO, & IOLP; & LMPQ, & cæt. rectangula ipsi basi circulari vngulæ, quę sit eiusdem altitudinis TE, ac diameter AB. Dico hæc omnia rectangularia trapezia æquari quadrato diametri AB excludendo extrema duo triangula apud A, & B, vt vnum ex ipsis est AIO.

Probatur, & Progr. 1. Ostendendo planum OILP rectangulo ILXZ æquari; siquidem cum plana circumscripta sint rectangula trapezium apud I, & L rectos angulos consequetur, vnde à puncto Y medio ducta parallela XZ lateri IL figura ILZX erit rectangulum, & in triangulis ZOV, & VXP erunt anguli X, Z recti, & ad verticem V æquales; Vnde, & triangula ex 17. lib. 1. Elem. Coroll. æquiangula erunt, & æqualia latera ZO, & XP. Quare triangulo VXP, quo trapezium ILOP abundat pro triangulo VZO, quo deficit à rectangulo XZLI reposito æquabuntur inuicem LIPO, & LIXZ, & idem dicas de alijs trapezijs.



Progr. 2. Deinde ostendendum est rectangulum ZILX æquari rectangulo ex CS, & IL. Nam in pr. 15. demonstratum est VC, vel XL esse duplam KC, & ideo æqualis erit duplæ CS; ergo rectangulum ex IL, & XL æquabitur rectangulo ex CS, & IL.

Progr. 3. Rectangulum verò hoc ex IL, & CS ostensum est prop. 13. h. æquari rectangulo ex AB, & AD. Ergo etiam trapezium IOPL æquabitur rectangulo BA, & AD; Et sic dicas de rectangulo LMPQ, quod æquetur rectangulo ex LM, & rH; & ideo rectangulo ex AB, & DN, & sic de alijs.

Progr. 4. Hæc autem omnia rectangula ex 4. lib. 2. ex AB, & DN, sicut, & ex AB, & AD æquantur quadrato ex AB, siquidem habent idem latus AB, & alterum sunt segmenta eiusdem. Ergo etiam plana circumscripta vngulæ æquantur quadrato AB, & remanent duo triangula, vt AIO, & aliud apud B, quæ cum nulla rectangula habeant correspondentia, quibus æquentur, abundant super quadratum AB.

THEOR. VI. PROPOS. XVIII.

Quadratum ex diametro non potest esse minus superficie vngulæ cylindricæ prædictæ.

PRobatur. Nam, si potest esse minus sit minus in præced. fig. quantitate R, totque plana vngulæ circumscribantur, donec triangula lateralia sint minora quantitate R: siquidem id tandem continget, cum multiplicatis planis circumscriptis in infinitum semper minora efficiantur. Igitur quadratum AB vna cum duobus triangulis erit minus superficie vngulari, sed AB quadratum æquatur omnibus planis circumscriptis ex præced. demptis triangulis: Ergo etiam illa vna cum triangulis erunt minora superficie vngulari, quam cingunt, quod est absurdum. Igitur superficies vngularis non erit minor quadrato AB.

COROLLARIVM.

HInc deduces idem intelligendum de parte superficiei vngularis nVAm: Nam omnia plana circumscripta vngulæ sunt æqualia ostensa singula singulis rectangulis ex chorda V. g. CS, & latere polygoni circumscripti IL; hæc autem æquant singula rectangula sub AB, & segmentis diametri, quæ æquant ex 4. lib. 2. Elem. rectangulum ex AN, idest ex omnibus segmentis AD, & DN simul pro vno latere, & AB pro alio. Vnde plana vngulæ parti A m n circumscripta simul æquabunt rectangulum ex AB, & AN dempto triangulo AIO. Fiat ergo, vt præc. propos. docuimus, & ostendetur rectangulum ex diametro, & segmento AN non posse esse minus superficie vngulæ A m n eodem argumento, quò vsi sumus anteced. propos.

THEOR.

THEOR. VII. PROPOS. XIX.

Superficies vngularis prædicta æquat quadratum diametri, & eius assignatæ portiones æquant rectangulum sub diametro, & segmento diametri, quod sinu portionem diuidente intercipitur.

PRobatur prima pars: Nam in prop. 16. ostensum est non posse esse maius, & prop. 18. huius non posse esse minus quadratum diametri ipsa vngulari superficie. Ergo illam æquabit.

Pro ostendenda secunda parte sit assignata portio vngulæ A m n, quæ determinetur in præced. fig. à sinu N m. Dico vngulæ portionis A m n superficiem esse æqualem rectangulo AB, & AN.

Probatur. Nam ex Coroll. prop. 16. non potest esse minus prædicta vngulæ superficie A m n, & ex pr. 18. Cor. non potest esse maius: Ergo ei erit æquale rectangulum ex AB, AN.

COROLLARIVM I.

HInc verò ellicitur primo rectangulo ex AB, & DN æqualē esse superficiem vngularem m t n x; Eo quia superficies A n m sit æqualis rectangulo AB, AN, & ideo etiam superficies A t x sit equalis rectangulo sub AB, & AD: Ablatis ergo æqualibus superficie vngulari A t x à superficie vngulari A m n. & rectangulum sub AB, & AD à rectangulo sub AB, & AN contento residuum t m n x vngulare restabit æquale residuo rectangulo sub AB, & DN contento.

COROLLARIVM II.

OMnia plana vngulam ambientia IOPL, & cæt. triangulis lateralibus demptis in fig. pr. 17. æquari superficiei vngulari. Nam illa prop. 18. huius ostensa sunt æqualia quadrato AB sine triangulis accepta: sed etiam vngularis superficies ostensa est æqualis quadrato AB; Ergo erunt superficies vngularis, & plana ambientia demptis triangulis æqualia.

COROLLARIVM III.

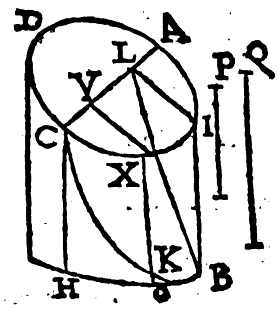
ET idem dicendum esse etiam de partibus, tum superficiei Cylindricæ, tum planorum contingentium V. g. planum contingens ILOP esse æquale superficiei vngulari, quam tangit I t E X, & pariter LMPQ æquari superficiei, quam contingit t m x n: eo quia superficies vngularis V. g. tmxn ostensa sit æqualis rectangulo sub AB, & DN contento, & eidem rectangulo ostensum sit æquale planum contingens eam LMRQ, quare æquabuntur inuicem superficies t m x n contacta, & planum contingens LMPQ.

PROBL. I. PROPOS. XX.

Vngularem superficiem prædictam secundùm datam rationem partiri.

SIt data vngularis superficies ABC diuidenda secundùm datam rationem P ad Q; fiat, vt Q ad P, ita AC ad aliud CY ex prop. 15. lib. 6. Elem. ducaturque sinus YX, & perpendicularis basi XK: & dico superficiem vngulę CXK esse ad superficiem vngularem totam ABC, vt P ad Q.

Probatur. Factum est Q ad P, vt AC ad YC, ideo *inuertendo* erit P ad Q, vt CY, ad AC: sed vt CY ad AC, ita est rectangulum sub AC, YC ad quadratum AC ex 1. lib. 6. & ideo æqualis superficies vngularis CXK rectangulo ex AC, & CY erit ad superficiem totam æqualem ex 19. h. quadrato AC, vt P ad Q ex prop. 16. lib. 5. Elem.



COROLLARIVM.

VNde patet superficierum vngularium segmenta esse ad inuicem in ea proportione, quà diametri baseos segmenta, cum ostensum sit YC esse ad CA, vt superficies vngularis portio XCK ad totam superficiem, & CL ad CA, vt portio ICKB superficiei vngularis ad totam, & ideo AC diameter erit ad CL segmentum *inuertendo*, vt tota superficies ABC ad portionem superficiei ICB: quare ex æquo YC erit ad CL, vt superficiei portio CXK ad portionem IBC.

COROLLARIVM II.

HInc etiam patet: Vngularem superficiem, cuius altitudo sit diameter eam obtinere rationem ad superficiem cylindri eiusdem altitudinis, quam diameter circuli ad perimetrum.

Nam superficies cylindrica est æqualis rectangulo ex diametro CA, & peripheria CIAD, at superficies vngularis est æqualis quadrato diametri CA, sed hęc duo rectangula cum sint eiusdem altitudinis diametri habent eandem proportionem, quam bases: Ergo habent eandem proportionem, quam diameter basis quadrati æquantis vngulæ superficiem ad peripheriam basim rectanguli cylindricam superficiem æquantis.

Insuper, & partes vngularis superficiei cylindricæ eodem arcu contentæ V. g. CXK, & CXOH habent eandem proportionem; quam portio diametri CY ad portionem peripheriæ CX. Nam ita est superficies CXK vngularis ad totam vngularem superficiem, vt rectangulum ex YC, & CA, cui pars æquatur ex dictis prop. 19. h. & Coroll. ad quadratum AC, cui tota æquatur.

Tota verò vngularis superficies est ad cylindricam superficiem, vt quadratum AC ad peripheriæ DAIC, diametrique AC rectangulum; Cylindrica verò superficies est ad portionem Cylindricam CXOH, vt peripheriæ, diametrique rectangulum est ad rectangulum ex arcu XC, & diametro CH, vel CA; Quare ex æquo ita erit superficies XKC

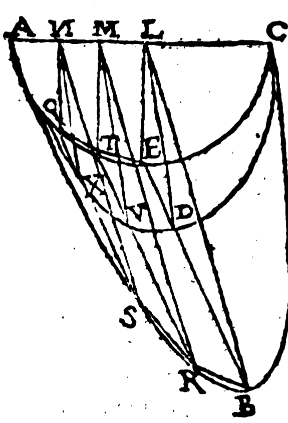
ad

ad portionem cylindricam CXOH, vt rectangulum ex AC, & CY ad rectangulum ex arcu CX,& diametro CA, quæ est eadem ob eandem rectangulorum altitudinem, quam AC segmenti diametralis ad arcum XY, qui superficiem cylindricam, & vngularem subtendit.

THEOR. VIII. PROPOS. XXI.

Suqerficies vngularis, cuius altitudo diameter ad superficiem vngularem quamcumque (dummodò rectangula basi circulari) est vt altitudo ad altitudinem.

Detur vngula ABC, cuius altitudo eadem, ac diametri CA rectangula basi,& alia,quęcumque ADC similiter rectangula,dico ABC superficiem esse ad superficiẽ ADC, vt altitudo EB ad altitudinẽ ED: Quod vt ostendatur, ducantur ad diametrum normales LE,& MT,& QN,& cæt. quibus aliæ normales per superficies vngulares ducantur EB, & TR, & QS,& aliæ si placet. Iunganturque puncta LB, & MR, & NS, Sicut etiam puncta LD, & MV, & XC. Erunt itaque omnia triangula LBE, & MVR, & MQS æquiangula inter se ex 27. lib. I. cum anguli apud E, T, Q recti sint, & anguli L,& M,& N sint inclinationis planorum ABC, ABC æquales ex prop. 18 tract. 22. Idem dicas de triangulis LED, & MTV, & NQX ob eandem rationem. Quadere, vt EB ad TR, sic EL ad MT, vt autem EL ad MT; ita est ED ad TV. Ergo ob prop. 16. lib. 5. ob eandem proportionem, quam dicunt eidem tertiæ EB erit ad TR, vt ED ad TV. Ideoq; etiam planum subtendens BETR erit ad planum superficiẽ TVED subtendens, vt BD ad DE ex propos. 14. tract. 29. cum sit trapezium eiusdem altitudinis, & sic dicas de omnibus alijs. Quapropter cum singula plana maiora inscripta ad singula minora sint vt basis maior ad minorem V.g. vt SQ ad XQ, quæ est eadem, ac BE ad DE; etiam omnia maiora ad omnia minora simul ex prop. 12. lib. 5. eandem obtinebunt proportionem, licet multiplicentur secundùm quamcumque multiplicationem possibilem, idest proportione basis BE, ad DE basim se respicient. At illa plana multiplicata, vt vt possunt, superficies vngulares implent, & æquant, ergo etiam superficies vngularis BAE erit ad vngularem superficiem AED, vt altitudo BE ad DE.



COROLLARIVM.

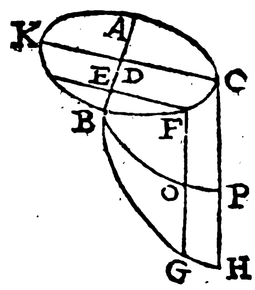
Hoc autem, quod dicitur de tota eodem argumento concludit de partibus: cum ATR parti vngulę plana omnia inscriptibilia ad parti ATV inscriptibilia plana eandem obtineant proportionem, vt RT ad TV ob rationem prædictam, idest, vt BE ad DE.

THEOR. III. PROPOS. XXXIV.

Qualiscumque superficies vngularis æqualis est rectangulo sub diametro basis circularis, & eius superficiei altitudine contento.

Sit superficies vngularis ACPB habens basim circulum BCAK. Dico eam esse æqualem rectangulo ex diametro BA, & altitudine CP.

Fiat enim superficies vngularis CAHB, cuius altitudo sit eadem ac diametri; Iam ostensum est in præced. superficiem vngularem CBHA esse ad superficiem vngularẽ CPBA, vt altitudo HC, idest diameter BA ad altitudinem PC: Quare etiam quadratum diametri BA, seu altitudinis HC æquale superficiei ACBH erit ad superficiem vngularem BPCA, vt HC altitudo ad PC altitudinem; sed vt HC ad PC, ita est quadratum HC ad rectangulum ex HC,& PC ob eandem altitudinem ex I. lib. 6. Ergo quadratum HC ad superficiem vngularem BPCA, & ad rectangulum sub CP, & BA eandem habet rationem altitudinis HC ad altitudinem PC: Ergo ex prop. 9. lib. 5. æquantur inuicem superficies BPCA, & rectangulum sub CP, & BA contentum.



COROLLARIVM.

Hinc etiam est, quòd si detur portio vngularis superficiei FOB, hæc sit æqualis rectangulo quod sub BE segmento diametri, & PC altitudine cõtinetur; sicut superficies APC æquatur rectangulo sub CP altitudine, & totobasis diametro AB. Nam posita superficie vngulæ æqualis altitudinis, ac diametri, erit superficies FBG æqualis rectangulo sub AB, & BE ex propos. 19. huius Cor. I. hoc itaq; rectangulum AB, & BE erit ad superficiem FOB, vt superficies GFB æqualis illi rect. ad superficiem eandem FOB; idest ex præced. huius Coroll. vt HC ad CP, vel æqualis AB ad CP; nimirum, vt rectangulum BE, AB ad rectangulum eiusdem altitudinis PC, BE; quæ est eadem, ac basium AB vel HG ad PC, quę est eadem ac superficierum GFB ad OFB: Rectãgulum itaque idem BE, & AB ad rectangulum PC,& BE, & ad superficiem FOB eadem ratione referetur, vt HC ad PC. Quare ex II. lib. 5. Elem. quòd idem ad vtrumq; eandem rationem dicat; quam HC ad PC superficies vngularis FOB,& rectangulum sub BE, & PC erunt æqualia.

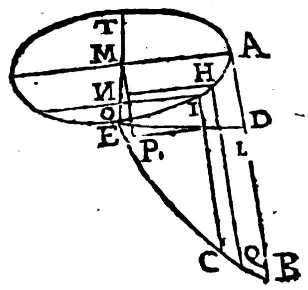
PROBL.

PROBL. II. PROPOS. XXIII.

Data superficie vngulari, cuius cylindri basis, sit circulus, & altitudo æqualis diametro, & data in ea aliqua portione; illi portioni æqualem in alia aliqua superficie vngulari inuenire.

Sit data vngula, vt vult propositio AEB, & in ea segmentum EIC, & oporteat super arcum AH portionem efficere alicuius superficiei vngularis, quæ datæ portioni EIC æquetur.

Ex arcu dato AH, & arcu portionis datæ EI duæ normales HN, IO ad diametrum TE agantur. Fiat deinde rectangulum ex MN æquale rectangulo ex EO, TE ex prop.45.lib.1. Elem. & alterum latus eius eueniat MP. Ducaturque parallela ipsi MA, perque punctum D, & diametrum TE agatur planum exhibens ellipsim DE. Ex H itaque deducatur HL parallela ipsi AD, & superficies ADHL æquabitur superficiei IEC.



Probatur. Et primo, quod rectangulum ex MN, & AD æquale sit superficiei ADHL. Superficies IQAH est ad superficiem AHDL ex prop.21.h. Cor. vt AB ad AD, hoc est ob eandem altitudinem, vt rectangulum BA, & MN ad rectangulum ex MN, & PM, sed superficies BQHA est æqualis rectangulo ex BA, & MN ex 18. huius Coroll. Ergo etiam superficies ex prop.12. lib.5. Elem. DAHL æquatur rectangulo ex MN, & PM.

Progr. 2. Cùm verò rectangulum MN, & PM ex constructione æquetur rectangulo TE, & OE, & hoc ex prop.18 huius Coroll. superficiei datæ CIE; sequitur, quòd superficies AHDL æquetur superficiei IEC.

EXPENSIO III.

De superficiebus conuexis, quæ conum ambiunt.

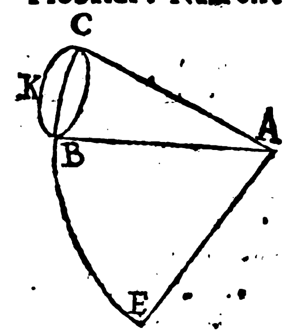
Oni superficies deseruit ad inueniendas quoque alias superficies, vt sphæræ, & sphæroidis Elliptici, & cętera. Vnde operę pretium erit eas diligentiùs inuestigare.

THEOR. I. PROPOS. XXIV.

Superficies conica recti coni circularis, (quod semper intelligitur) sine basibus, est æqualis sectori circuli, cuius radius sit coni latus, & arcus, sit æqualis circumferentiæ basis.

Sit conus ABC, cuius basis CKB. Dico *huius superficiem esse æqualem sectori circuli* ACE, cuius radius sit AC latus coni, & circumferentia CEB sit æqualis circumferentiæ basis conicę CKBC.

Probatur. Nam circumferentia CEB est æqualis ex hypothesi circumferentiæ CKBC, sunt autem tum vnius, tum alterius perpetuò facta qualibet diuisione ęqualia latera AC, & AE, cùm ergo latera tum coni superficiem diuidentia omni diuisione possibil, tum sectoris, & ipsæ subtensæ æquali numero diuisionum affectæ semper sint æquales, etiam omnia plana inscriptibilia, vel circumscriptibilia æqualia erunt. Sed hęc adeo multiplicata non excedunt, aut minus sunt superficie conuexa coni, vel superficie plana sectoris ABC, alioquin adhuc multiplicari possent; Ergo ipsæ superficies æquabuntur inuicem.



COROLLARIVM.

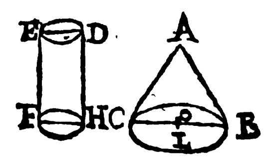
Hinc educitur, quod si fiat triangulum rectilineum sectori CAB æquale ex prop. 4. tract. 3. nempe quod basim consequatur dimidio circumferentiæ CBE æqualem, & latera lateri AC, hoc erit æquale etiam superficiei conicæ: Item si fiat rectangulum dimidio peripheriæ CE sectoris CAE, & altitudinis AC hoc item erit æquale superficiei conicę. Cum æquale sectori ACE existat ex prop. 4. tract.30.

THEOR. II. PROPOS. XXV.

Superficies conica recti coni est æqualis superficiei recti Cylindri, qui habeat eandem altitudinem, ac latus coni, & semidiametrum basis conicæ pro diametro suæ basis.

Sit conus ABC rectus, & detur Cylindrus DEFH rectus, qui habeat pro diametro DE semidiametrum OC, & altitudinem EF æqualem lateri CA. Dico superficiem coni BAC esse ęqualem superficiei cylindri HFDE.

Probatur. Nam ex Coroll. 2. Conus rectus in sua superficie est æqualis rectangulo facto ex latere æquali dimidiæ circumferentiæ, & altitudine æquali lateri CA. Dimidiata verò peripheria circuli BLCB est peripheria facta super diametrum DE, & altitudo æqualis lateri CA est EF ex con-



constructione. Ergo superficies conica BCA erit æqualis rectangulo facto ex latere æquali peripheriæ DE, & altitudine BF; sed huic ex prop.4. huius superficies cylindrica HFDB æquatur, ergo superficies cylindrica cylindri DBEH est ęqualis conicæ ABC.

THEOR. III. PROPOS. XXVI.

Superficies coni recti sine basi est æqualis circulo, cuius semidiameter sit media proportionalis inter semidiametrum basis, & eius latus.

Probatur. Cylindri superficies HFDB in præc. fig. est æqualis circulo, cuius diameter sit media proportionalis inter diametrum DB, & altitudinem EF ex prop.8. huius: Sed altitudo EF est æqualis lateri CA, & diameter DB ex effectione est æqualis semidiametro OC, superficies verò cylindri recti DEHF est æqualis superficiei coni recti BAC. Ergo circulus cuius diameter sit media proportionalis inter HF, vel OC semidiametrum. & inter altitudinem EF, vel latus CA æqualis superficiei cylindri erit etiam æqualis superficiei coni ABC.

COROLLARIVM.

Hinc patet quomodo superficies coni recti in circulum, & superficiem cylindricam transformetur, vel quomodo circulus, vel cylindrica superficies in superficiem conicam trasfundi possit.

Nam si superficies coni recti sit in circulum transferenda media proportionalis inuenta ex prop. 16. lib.6. inter radium, & latus coni; circuli quæsiti diametrum dabit.

Si verò in cylindri superficiem sit mutanda superficies coni semidiametro OC tamquam diametro fiat circulus, & cylindrus eiusdem altitudinis, ac latus coni in eo circulo pro basi situs habebit superficiem æqualem superficiei conicæ.

At è contrà fiet, si cylindri superficies in coni superficiem sit mutanda assumendo semidiametrũ pro diametro, & axem pro latere, quòd, & intelligitur de obliquis cum ostensum sit ęquari cylindris rectis eiusdem circuli, & altitudinis.

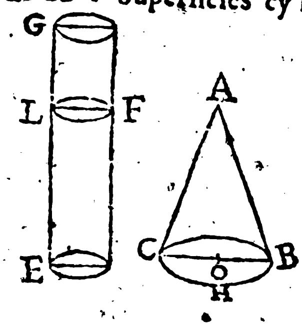
Quod si circulus in conicam, vel cylindricam superficiem sit trasferendus, tunc semidiametro eius duæ extremę propertionales inueniẽtur ex prop.16.Tract.16.& ex ijs fiat altitudo, & diameter cylindri, vel altitudo, & radius coni, & huius cylindri; siue coni superficies erunt circulo ęquales.

THEOR IV. PROPOS. XXVII.

Coni recti circularis superficies ad superficiem cylindricam rectam, cuius basis diameter æquetur radio baseos coni, eam consequitur proportionem, quam latus coni ad eius axem, seu altitudinem.

Sit conus ABC, & cylindrus FG, cuius basis FL, in quã diameter FL sit dimidiũ BO diametri: CB Dico ita esse superficiem coni ABC ad superficiem circompositam cylindro FG, vt latus CA ad altitudinem LG.

Fiat enim ęqualis altitudo cylindri lateri CA, & sit EL. Superficies cylindri FG ad superficiem



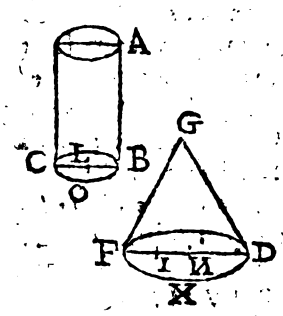
cylindri LE est, vt altitudo LG ad altitudinẽ EL, vt colligitur ex 10. h. sed superficies cylindri FE est ęqualis superficiei conicę BAHC ex dictis prop.25.h. & altitudo EL ex effectione ęquatur lateri coni CA. Ergo, vt est altitudo LG cylindri ad latus coni CA. Sic superficies cylindrica FG ad conicam BAHC.

THEOR. V. PROP. XXVIII.

Superficies coni recti habentis latus æquale diametro, est duplo suæ basis æquale.

Sit conus rectus FGDX habens latus FG ęquale diametro FD. Dico *eius superficiem esse duplam suæ basis*.

Probatur superficies coni FGDX est ęqualis ex



prop.25. huius superficiei cylindricę CA ęqualis altitudinis AB, ac latus FG, & super basim radium NF basis conicę pro diametro CB habentem: sed hęc est octupla suę basis COB; quia cum eadem altitudo, ac semidiametri BC faciet duplam ex dictis propos.9. h. altitudo, totius diametri faciet quadruplam. Vnde BA diametro coni ęqualis, & dupla BC faciet octuplam: basis verò coni FXD est quadrupla basis BC, cum sit in duplicata proportione diametrorum FD ad BC: Ergo erit subdupla superficiei cylindricę CA: Sed hęc superficies ex propos.25.h. ęquatur superficiei conicę cum sit super dimidium diametri, & eandem altitudinem, ac lateris coni consequatur. Ergo etiã basis conica FXD erit subdupla superficiei conicę FGDX, & sic superficies conica erit ipsius dupla.

THEOR. VI. PROPOS. XXIX.

Superficies prædicti Coni se habet ad suam basim, vt latus ad radium basis.

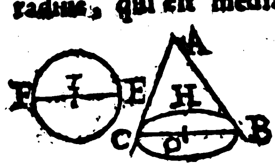
Sit in fig. pręc. conus DGF, cuius latus GF trianguli per axem sit ęquale diametro DF cylindrusq; AC, qui habeat lateri GF altitudinem ęqualem, & ideo diametro DF, & radiũ NF basis conicæ pro diametro basis suę BC, eritque superficies cylindrica COBA æqualis superficiei coni DGF connexę ex prop.27.h. illaque conica superficies DGF habebit proportionem ad duplum basis cylindri COB, quam altitudo BA cylindri ad radium cylindri BL. Siquidem supra ostensum est in Coroll. propos.9. h. Cylindri superficiem, quæ sit eiusdem altitudinis, ac diameter dicere eam proportionem ad duplum suæ basis, quam altitudo, seu axis ad radium, & ideo superficies coni æqualis cylindri superficiei eam proportionem dicet ad duplum basis cylindri, quā altitudo cylindri, seu latus coni ad radiū, sed radius huius LB est NI semiradius basis coni ex dictis, & basis ipsa cylindri est subquadrupla basis coni ex prop. 33. lib. 6. Elem. Ideoque duplum illius basis COB est æqualis dimidiæ basis coni DXF. Quare ita erit latus coni FG diametro DF æquale ad radium BL cylindri, vel semiradium basis coni IF; vt superficies coni DGF ad dimidiam basim DXF ipsius coni; Et ideo erit latus GF coni ad radium NF, vt superficies coni eiusdem ad totam basim suam DXF.

THEOR. VI. PROPOS. XXX.

* *Superficies coni recti ad suum circulum habet proportionem, quam latus ipsius coni ad radium ipsius circuli.*

SIt conus ABC, & circulus quicumque EF. Dico, quod ita sit superficies conuexa coni ad circulum EF; vt est latus AC ad OB radium.

Probatur, Habet enim superficies coni BAC ad circulum suæ basis BOC eam proportionem, quam latus AC ad radium OC suæ basis ex pr. 26. h. Quia radius, qui est media proportionalis inter latus, & radium basis coni facit circulum superficiei coni æqualē ex 26. h. ergo ex 21. Euc. Cor. circulus æqualis superficiei: erit ad circulum



basis, vtpote figuræ similes, vt CA latus ad cū radium sc. in duplicata ratione suorum diametrorū.

COROLLARIVM.

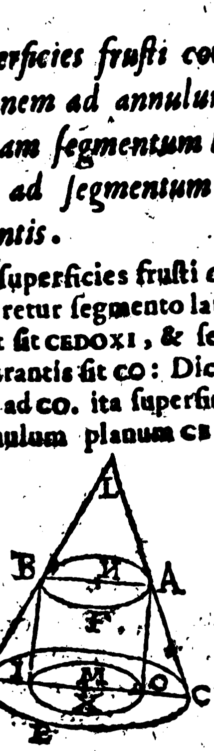
HInc q; est, quod superficies coni CAB sit ad quemcumque circulum FE, vt quad. ex media inter CA, & CO ad quadratum diametri FE, quod circulus ex media æquans superficiem coni CAB, ita sit ex 41. lib. 6. ad circulum FE.

THEOR VII. PROP. XXXI.

* *Superficies frusti conici eam habet proportionem ad annulum planum, cui insistit; quam segmentum lateris eam mensurantis ad segmentum annuli illum mensurantis.*

SIt superficies frusti conici AFBCED, quæ mensuretur segmento lateris AC, & annulus, cui insistit sit CEDOXI, & segmentum diametri illud mensurantis sit CO: Dico ita esse in proportione, vt CA ad CO. ita superficies frusti conici AFBCED ad annulum planum CEDOXI.

* Progr. 1. Probatur, Ita est est totius coni superficies CEDL ad totam suam basim CED, vt est superficies coni ALFB frusti coni ablata ad suam basim AFB ablatam. Ergo ex propos. 22 lib. 5. reliqua quoq; superficies AFB



CED erit ad reliquum annulum CED, OIX, vt conica superficies tota LCD ad totam basim CED, vel vt ALB superficies conica ablata ad basim ablatā AFB.

Progr. 2 Quod verò sit tota superficies conica CELD ad basim GED, vt superficies conica ALFB ad basim AFB.

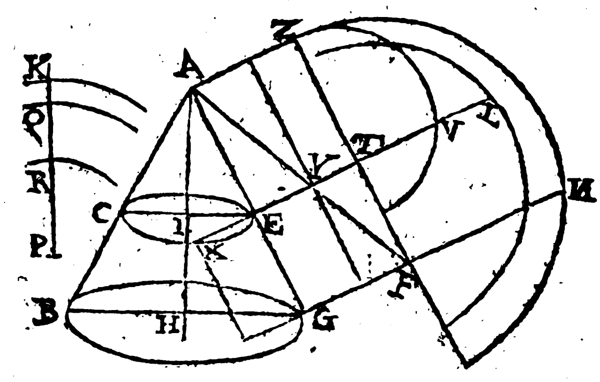
Probatur. Quia it est latus AL ad radium AN, vt LC latus ab radiū CM, quæ est eadem proportio ob parallelas ex 4. lib 6. propterea erit ex 16. lib. 5. eadem proportio superficiei CELD ad basim AED, quam superficiei ALFB ad basim AFB, cum sit eadem vni tertiæ proportioni AL ad AN, vel CL ad CM 30. h.

Progr. 3. Cum itaque LECD superficies sit ad CED basim, vt CL ad CM, & hæc sit, vt AL ad AN erit etiam, vt reliquum CA ex CL sublato AL ad reliquum CO ex CM sublato AN. Verùm iam ostensum est progr. 1. quòd, vt LCED superficies ad CED superficiem; ita est residua frusti coni superficies AFBCED ad annulum CED OXI. Ergo ex 16. lib. 5. vt superficies frusti conici AFBCED ad annulum CEDOXI ita est CA segmentum lateris mensurantis ad CO frustum diametri.

THEOR. VIII. PROPOS. XXXII.

Superficies conica frusti coni recti æqualis est circulo, cuius semidiameter sit media proportionalis inter semidiametros basium infimæ, & supremæ tamquam vna linea, & latus frusti coni.

SIt conus ABG, in quo basis infima GB, & suprema CE constituant frustum coni CEBG. Ex IE, & HG radijs vna linea fiat, & inter illas, & GE media proportionalis sit inuenta FL. Dico, quod si hoc radio describatur circulus PQ hunc esse frusti superficiei conicæ CEGB æqualem.



Probatur, & Progr. 1. Nam si inter AG latus, & HG semidiametrum media proportionalis inueniatur NF ex hac FN velut semidiametro constitutus circulus PX equabit superficiem coni BAG ex prop. 16. h.

Progr. 2. Fiat deinde rectangulum ex EI, & EA, quod sit AY, & aliud ex GH, & EG, quod sit EF, & tandem aliud ex EG, & EI, quod sit XG, vel OY, quod erit equale complemento YZ ex propos. 43. lib. 1. Elem. Ideoque tria rectangula AY, & EF, & GX, idest YZ equabunt rectangulum AF constitutum ex AG, & GH, vel æquali GF. Et Gnomon ZFGEY æquabit rectangulum FX nimirum duo rectangula alterum ex EG, & GH, & alterum ex EG, & EI, quod rectangulum GX æquetur rectangulo OY, idest complemento YZ. Progr.

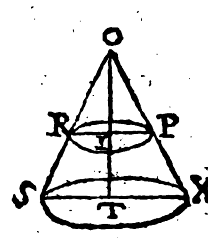
Progr. 3. Inueniatur autē media proportionalis inter ZT, & TY linea TV; & quadratum ex TV æquabitur rectangulo YZ, sic inuenietur media proportionalis TL inter FG, & TX nempe inter latus BG, & inter duos radios BI, & HG, & quadratum ex TL æquabit rectangulum FX, nempe ex dictis progr. 2. gnomonem illi rectangulo æqualem EFYZ. Ideoque duo quadrata TV, & TL æquabunt quadratum ex FN æquale rectangulo AF ex latere coni toto AG, & radio GH. Ratio est, quia illa duo quadrata ex TV, & TL æquant rectangulum AF quadratum quidem TV rectangulum YA, at quadratum TL gnomonem reliquum EFYZ, & quadratum FN est æquale rectangulo AF.

Progr. 4. Cum itaque sit circulus ad circulum, vt quadratum ad quadratum ex diametris, seu ex semidiametris ex prop. 41. lib. 6. Elem. Ideo si duo quadrata TV, & TL æquant quadratum FN, etiam circuli ex illis constituti TV, & TL quales sunt PR, & PQ, circuli æquabunt circulum FN, vel PK. Cum ergo circulus ex PK occupet totam superficiem coni GAB; circulus autem ex PR superficiem coni CAE, reliquus quoque circulus PQ æquabit reliquam superficiem frusti coni CBEG. Quandoquidem circulus PR, & PQ æquant, vt supradictum est circulum KP, qui totam superficiem coni sua planitie exequat.

THEOR. IX. PROP. XXXIII.

Similium conorum rectorum superficies sine basibus sunt in duplicata proportione altitudinum, & peripheriarum, seu diametrorum, aut radiorum.

PRobatur. Nam similes coni sunt illi, qui æqualibus angulis ad verticem continentur, vt OPR, & OXS. Quare cum triangula ad axem rectangula OIR, & OTS sint similia, erit OI ad IR, vt OT ad TS, & *permutando* OI ad OT, vt IR ad TS, & ideo vt OR ad OS, aut PR ad XS, & pariter, vt peripheria ex IR ad peripheriam ex TS ex 43. l. 6. sed coni superficies ęqualis est rectangulo sub vno latere, & dimidia circumferentia cōprehenso, & rectāgula similia sunt in duplicata ratione laterum homologorum Ergo etiam conicæ superficies erunt in duplicata ratione semicircumferentiarum, & laterum; sed ita est semicircumferentia ad semicircumferentiam, vt tota ad totam, & tota circumferentia ad totam circumferentiam, vt diameter ad diametrum ex propos. 43. lib. 6. & vt semidiameter ad semidiametrum, & perpendicularis axis ad axē. Quare duplicata proportio, seu laterum, seu axium, seu diametrorum, seu radiorum, seu circumferentiarum est illa, quam vnius coni superficies habet ad aliā superficiem alterius coni similis.



COROLLARIVM.

HInc est conos æqualium basium referri, vt altitudines. quòd cylindri ęquales ipsis, qui habent pro altitudine latus coni, & pro diametro radium, & ideo ęqualium basium referantur, vt rectangula sibi ęqualia, ex peripheria, & altitudine ipsorum, idest cum sint ęqualis peripherię, vt al-

THEOR. X. PROPOS. XXXIV.

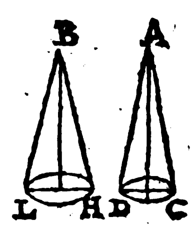
Conicæ superficies conorum rectorum similium habent proportionem compositam ex lateribus, & semiperipheria.

PRobatur. Quoniam talem proportionem etiam cylindricæ æquales eis supurficies inter se gerunt, nempe compositam, ex proportione altitudinum, & peripheriarum; altitudo verò cylindricæ superficiei, quæ æquet conicam est æqualis lateri coni, sicut peripheria semiperipheriæ ex propos. 24. huius. Quare etiam conicæ superficies habebunt laterum coni, & semiperipheriarum compositam proportionem.

THEOR. XI. PROPOS. XXXV.

Superficies conorum rectorum eandem altitudinem habentium se habent ad inuicem, vt periphæria, aut diametri.

SInt duo coni eiusdem altitudinis ACD, & BHL, erit triangulum per axem CAD ad triangulum per axem HBL, vt basis CD ad basim HL, sed basis CD diameter ad HL diametrum est vt semiperipheria ex CD ad semiperipheriam ex HL, & ideo, vt latus æquale semiperipheriæ ex CD rectanguli, cuius alterū latus, & altitudo sit AD ad semiperipherię ex HL æquale latus eius rectāguli, cuius altitudo LB eadem, quæ AD. Sed rectangulum ex latere ęquali semiperipherię CD ad rectangulum ex latere ęquali semiperipheriæ HL eiusdem altitudinis est, vt basis ad basim, idest vt semiperipheria ad semiperipheriam, vel vt peripheria ad peripheriam, vel ex 43. lib. 6. vt radius ad radium, vel diameter ad diametrum, ergo erit etiam superficies coni CAD ad superficiem coni HBL eiusdem altitudinis, vt radius ad radium, vel vt diameter ad diametrum, vel vt peripheria ad peripheriam basium, vel vt medietas ad ipsarum medietatem.



EXPENSIO IV.

De superficie Sphæroidis Elliptici.

QVamuis, quod viderim apud authores, nondum hæc superficies tetragonismo subacta fuerit, curabimus tamen pro nostris viribus eam ad planam superficiem redigere.

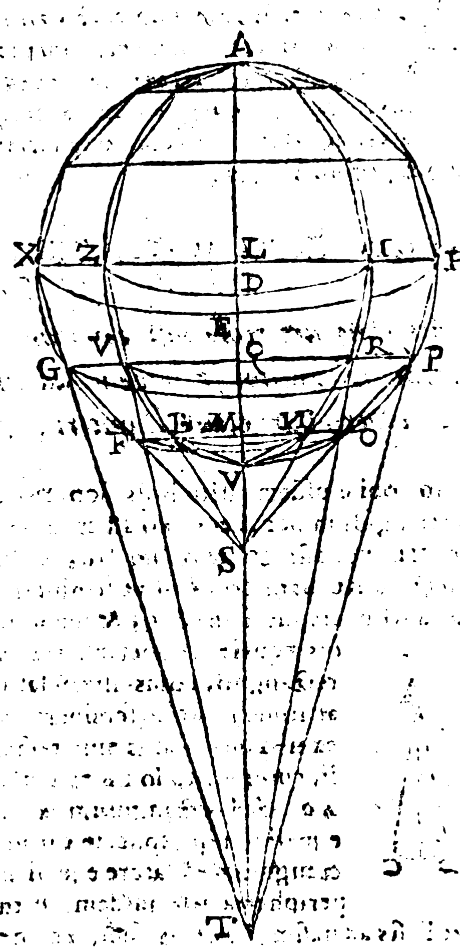
THEOR. I. PROPOS. XXXVI.

Sphæroidis Elliptici superficies ad superficiem sphæra se habet, vt superficies Ellipsis ad superficiem circuli.

SIt sphæra AHVX, & circulus maximus in ea, & sphę-

sphęroides in eo AIVZ, quæ, & exprimat Ellipsim sphęroidem generantem. Dico, quod vt superficies ellipsis AIVZ est ad superficiem circuli AHVX; sic sit superficies sphęroidis ad superficiem sphęrę.

Diuidatur AHVX circulus in sphęra maximus in partes æquales, & rectæ ducantur normales ad diametrum AV, & sint HL, & PQ, & OM, quæ secabunt ellipsim in I, R, N; eruntque applicatæ in ellipsi IL QR, & NM. Per partes ergo circuli HP, & ellipsis IR ducantur rectæ, quæ ex ostensis propos. 72. Tract. 24. conuenient in T diametro maiori producto.



Sic si ducantur rectæ FO, & RN, conuenient in diametrum productum maiore, & tandem OV, & NV in V, sic dicas de alia parte. Itaque omnia erunt triangula æquicrura HTX, & ITZ æqualis altitudinis, sicut, & PSG, & RTS, & cęt. quę si intelligantur circumuolui in sphera; & in sphęroide inscribent segmenta conorum in sphera quidem HEX, PG, & cæt. in sphęroide verò IDZR, & cęt.

Probandū itaque est in primis horum segmentorum sphęroide inscriptorum, & cęt. superficiem ZDRIY esse ad superficiem conicorū segmentorum inscriptorum sphęra XEHPG, vt superficies IRZY ad superficiem PHXG segmētorū, quæ circulo, ellipsiq; inscripta sunt. Spatia FQEL semiellipsis sunt ad spatia semicirculi LQPH, sicut RQNM ad POHM, & cęt. vt semidiameter IL ad semidiametrum LH ex prop. 14. Tract. 29. Ideoque dupla ipsorum YRZI ad HP, XG erunt, vt diameter IZ ad diametrum HX. Vt autem diameter IZ ad diametrum XH, sic est circulus IDZ ad circulum XEH ex prop. 33 lib. 6. Elem. Ita circulus EX RY ad PG circulum cum radij applicatarum ellipsi QR, & MN, & cæt. vt propos. 72. eadem cit. conic. sint ad radios circuli sinus PQ, & OM in eadem proportione, ac semiaxis IL ad semidiametrum LH. Vt autem circulus IDZ ad circulum HEX, sic est coni superficies eiusdem altitudinis IDZT ad coni superficiem HEXT ob eandem altitudinem ex prop. 35. h. & vt circulus EX RY ad circulum EX PG, sic est superficies coni RYT ad coni superficiem PGT ob eandem altitudinem, ergo vt superficies RYT coni ad superficiem coni HTX. Ideoque ablata superficies coni RTY erit ad superficiem coni PTG ablatam, vt superficies coni totius ITZ ad totam superficiem coni HTX, & ideo etiam reliquum superficies IRDZY erit ad superficiem HPXGE, vt tota ad totam, ideoque vt spatium planum IZYR ad spatium planum HXPG, cum etiam spatiorum, vt dictum est sit eadem ratio, quę IZ ad HX. Idem ostendes, & eodem prorsus argumento de segmentis RYNB, & POFG, quorum superficies circulares erunt in ea proportione, quod conueniant in eundem verticem, qua bases circulares, & ideo, qua diametri circulorū, & ideo, qua spatia diametris contenta YRNB ad PGFO, &c.

Cum ergo singulæ segmentorum conicorum superficies sphęroide inscriptorum; sint ad singulas superficies segmentorum conicorum sphera inscriptorum, vt singulæ superficies planæ ellipsi generanti figurę inscriptæ ad singulas superficies figurę inscriptę circulo, omnes quoque ex propos. 17. l. 5. erunt ad omnes in eadem proportione sc. conicæ superficies sphęroide inscriptæ ad omnes superficies conicas sphera inscriptas, vt omnes planæ superficies ellipsis ad omnes planas superficies circuli.

Quò posito inscribantur tot superficies conicę circulo, & sphęroide elliptica, quod possūt inscribi multiplicatis lateribus figurę, & ellipsi & circulo inscriptæ, quousque possunt multiplicari, hæc inscriptio omne spatium, quod inter curuam, & rectam est, occupabit alioquin si adesset locus, adhuc noua inscriptio posset institui contra hypothesim; Quamobrem cum omnis possibilis multitudo conicarum superficierum sphera, sphęroideque inscriptarum ęquent ipsam sphęræ sphęroidisque superficiem. Sicut, & possibilis multitudo laterum in multilatero circulo, ellipsique inscripto æquant ipsos circulum, & ellipsim; Erit spatium ellipsis ipsa ad circulum, vt superficies sphęroidis, ęquam generat, ad superficiem circuli; quod erat ostendendum.

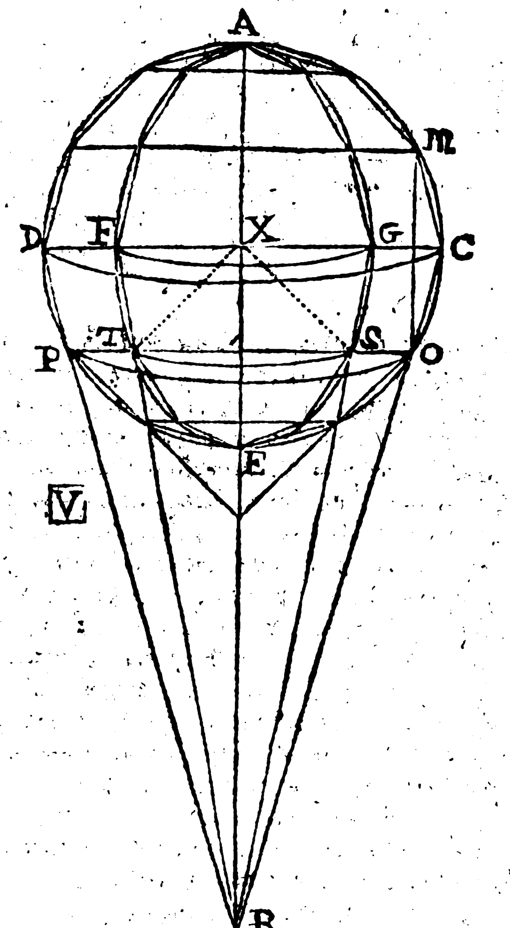
THEOR. II. PROPOS. XXXVII.

Superficies sphæroidis Elliptici est æqualis superficiei sphæræ, cuius radius media proportionalis sit inter axes maiorem, & minorem.

SIt sphęra ACED, & sphęroides ellipticam AFGE. Et inscribantur in eo corpora ex segmentis conorum conflata, vt in anteced. factum est, & figura solida sphęroide inscripta ad figuram solidam sphęra inscriptam, vt diameter GF ad diametrum CD, vel vt spatium Ellipticum AGFE ad circulare spatium CAED, quoad superficiem referetur.

Rursus supra ostensum est cum ageremus de planis superficiebus ex propos. 25. tract. 30. superficie figuræ circulo HIKL inscriptę esse ęqualem figurę tantundem laterum Ellipsi AGFE inscriptę eo quod HI diameter sit media proportionalis inter GF, & CD. Modo ante omnia oportet ostendere, quòd superficies quoque

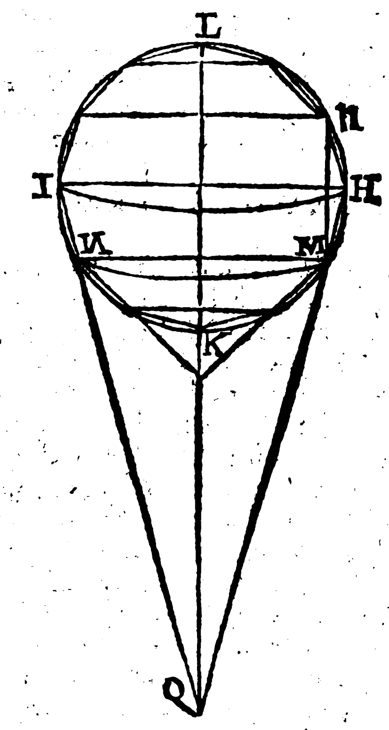
quoque ex segmento conico HIMN, & cęt. quod conuexum intelligas refertur ad CDOP segmentum conicum, vtpote, quod conuexum intelligendum sit, vt HIMN superficies plana ad CDOP superficiem planam, & sic de singulis alijs.



Nam HIQ conus habebit proportionem duplicatam ad conum CDR, quoad superficiem suæ basis ambitus HI ad basis ambitum CD, siquidem sunt coni similes recti, eo quod angulus HMN æqualis angulo HQL ob parallelas MN, & QL sit ęqualis angulo COM, idest ob eandē rationē angulo CRA, quod subtendat similem arcum HN, & CM cum ergo superficies faciant cum axe eundem angulum apud Q, vt apud R erunt similes coni CDR, & HIQ. Quod cum ita sit superficies coni CDR, & HIQ, vtpote in duplicata ex prop. 33. huius, ratione suarum circularium basium, & ideo diametrorum, dicent ad inuicem eam proportionem, quam GF, ad CD, siquidem ex effectione GF, HI, & CD sunt tres continuæ proportionales, idest quam spatium Ellipticum GFST ad spatium circuli CDOP, & ideo quam superficies globosa frusti conici GFST ad superficiem rotundam frusti conici sphęra inscripti CDOP ex præced. propos. 36.

Coni quoque superficies MNQ erit ad coni OPR in duplicata ratione chordę NM ad chordam OP, quę est eadem ex 35. lib. 6. ac HI diametri ad CD diametrum, & ideo habebit proportionem, quam GF ad CD, & quam cum sit eadem ex propos. 72. tract. 24. ST ad OP. Cum ergo sit totus conus HIQ ad totum CDR, vt ablatus MNQ ad ablatum OPR quoad superficiem, erit etiam residuum frustum conicum HI MN ad frustum conicum CDOP in superficie, vt tota HIQ ad totam CDR superficiem, & ideo in duplicata ratione HI ad CD, quę est GF ad CD, & quę vt dictum est superficiei frusti conici GFST ad superficiem frusti conici CDOP: Et ita argumentabęris de alijs segmentis conicis, vt vt multiplicitis.

Quare cum singulæ frustorum conicorum superficies sphæra LHKI inscriptorum se habeant ad singulas superficies conorū sphęra ACED inscriptorū, vt conicę sūpficies sphęroidi īscriptę ad easdem conicas superficies sphæra inscriptas, etiam omnes ex prop. 17. lib. 5. Elem. taliter erunt ad omnes. Quamobrem tota superficies frustorum conicorum sphæra LHKI inscriptorum se habebit ad totam superficiem figurę solidę conorum segmentis conflatæ sphęra ACED inscriptę, vt superficies figurę solidę ex frustis conicis in sphęroide Elliptica inscriptę ad eandem superficiem figurę solidę ACDE. Quare ex prop. 17. lib. 5. superficies figurę sphęra LHKI inscriptę ęquabitur figurę in sphęroide inscriptæ AGFE: cum eidem eandem obtineat proportionem: quam GF ad CD, vel quàm superficies Elliptica AGFE ad circuli superficiem ACDE.



Quod cum ita sit modo ostendendum est superficiem quoque sphęrę HKIL esse ęqualem superficiei sphęroidicę ACEF. Id autem ostenditur. Non enim est maior, aut minor superficies sphęrę LHKI superficie sphęroidali. Ergo æquabitur. Namq; sit maior superficies LKHI sphęrę. Tunc superficies LKHI dicet ad superficiem sphęrę ACED maiorem proportionem, quam superficies sphęroidis Elliptici AGFE; sit itaque V superficies illa, in qua dicit maiorem proportionem; ita quod si illa à superficie sphęrę LHKI absciderentur; tunc eandem proportionem diceret ad superficiem sphęrę ACED quàm superficies sphęroidis Elliptici AGEF. Inscribantur itaque tot segmenta conica in sphęra LHKI; donec differentia, quę inter superficiem sphęræ mediat, & inscriptam figuram sit minor quantitate V. Igitur figura inscripta sphęrę LHKI dicet maiorē proportionem ad superficiem sphęricam ACED, quam superficies sphęroidis elliptici AGEF, cum ad hoc, vt diceret eandē tota differentia V ipsi figurę inscriptę superficiei debuisset deficere. Quare tantò maiorem proportionem dicet superficiei inscriptę figurę conicę ADCE, & tantò dicet maiorem proportionem, quam figura inscripta sphęroidi, quę superficie sphęroidis minor est. Sed supra ostensum est dicere eandem. Ergo diceret eandem proportionem, & maiorem ad eandem figurę conicę inscriptę sphęrę ACED superficiem, quod est absurdum.

Quod

Quod si dicatur ad sphęricam superficiem ACBD superficies LHKI minori in proportione, quàm sphęroidalis superficies AGEF sit assignata differentia V, quę si deficeret sphęroidali superficiei, tunc diceret eandem proportionem. Inscribantur itaque in sphęroide tot segmenta conica, donec differentia, quę intermediat inter sphęroidis superficiem, & superficiem conicorum segmentorum inscriptorum sit minor superficie V. Igitur figura Ellipticę sphęroidi inscripta dicet maiorem proportionem ad superficiem sphęrę ACBD quàm superficies sphęrę LHKI, cum vt diceret eandem deberet illi deficere tota differentia V. Ergo multò maiorem dicet ad figurę conicę inscriptę eidem sphærę ACBD, quę minor est, & multò maiorem, quàm figurę ex segmentis conicis conflatę sphęrę LHKI inscriptę superficies, quę minor est. Sed supra ostensum est, quod dicebat eandem figura sphęroidi inscripta ad figurę conicę superficiem inscriptę sphęra ACBD, quam conicę figurę superficies sphęrę LHKI inscriptę. Ergo diceret eandem, & maiorem, quod est impossibile.

COROLLARIVM.

EX hoc doctrina clarè deducitur idem dicende segmentis sphęroidalibus V. g. de segmento STB, nempe quod eius superficies sit æqualis segmenti sphęrici NMK superficiei, cuius subtensa MN sit media proportionalis inter subtensam seu applicatam ST, & chordam OP: Eadem enim prorsus demonstratio valet, vnde eam non replicabimus. Igitur cognosces sectoris sphęroidalis superficiem XSBTX, siquidem illa constat superficie conica SXT, & superficie segmenti sphęroidalis STB; nempe æqualis superficiei segmenti MNK, sphæræ. Hic verò etiam deduces sphęroidalem superficiem AGEF, esse quadruplam circuli LHIK talis est enim superficies sphæræ HKIL, cui æquatur respectu sui circuli, cęterasque similes proportiones ex tuo ingenio venaberis.

EXPENSIO V.

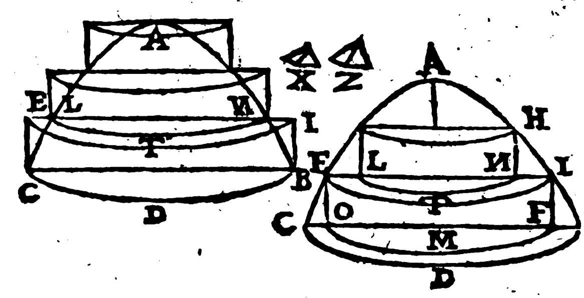
De superficie cuiuscumque corporis circularis ad axem suum recti.

CVm multa dentur corpora, quę neque conoidem parabolicum aut ellipticum imitantur, sed videntur omnino irregularia, videndum tamen est an illorum aliquo modo area inueniri possit, loquor autem de illis, qui axe super suam basim directè, normaliterque insistunt.

THEOR. I. PROPOS. XXXVIII.

* *Omne corpus, quod ex plano axem circa suum cirumuoluto formatur, habet planum per axem ad superficiem conuexam in ea proportione, qua basis diameter ad peripheriam basis.*

SIt corpus ex parabola constans rectum ad axē cuius superficiei plani per axem ducti nota sit quantitas. Dico, quod ex hac inueniri poterit etiam quantitas eius superficiei conuexæ. Nam planum per axem ita se habet ad superficiem conuexam, vt diameter BC ad peripheriam BCA.



Nam sic superficies BAC plana non est ad conuexam BACD, vt BC diameter ad BDC peripheriam. Erit ergo V. g. superficies plana BAC ad conuexam BACD in maiori proportione quantitate Z; tali modo, quòd si quantitas Z à superficie plana BAC tolleretur; tunc ea superficies plana BAC esset ad conuexam corporis dati BACD, vt BC diameter ad peripheriam BDC: Inscribantur itaque tot rectangula donec superficies eorum minùs differat à superficie plani per axem ABC, quàm quantitas Z ex prop. 1. Tr. 30. & sit hæc minor differentia quantitas X. Ergo quia rectangulorū EF, & EH, & cæt. inscriptorum series minus differt à superficie plani per axem BAC, habebunt maiorem proportionem ad superficiem conuexam corporis dati BACD, quàm diameter DC ad peripheriam BDC: Verùm, vt BC diameter ad peripheriā BDC, ita est FO diameter ad peripheriam FMO, & ita est rectangulum inscriptum EF ad superficiem frusti cylindrici OMFE cum sint superficies eiusdem altitudinis, at vt FO rectangulum ad MOFE superficiem cylindricam, ita est HL rectangulum ad NLH superficiem cylindricam ex prop. 1. lib. 6. cum sit eiusdem altitudinis rectangulum illi superficiei ęquale ex pr. 4. tr. h. Quare ex prop. 17. lib. 5. tota series rectangulorum ad totam seriem superficierum conorum conuexam erit, vt diameter aliquis V. g. FO, vel BC ad peripheriam aliquam puta FMO, vel BDC. Sed rectangulorum inscriptorum omnium superficies ponitur habere maiorem proportionem ad superficiem conuexam corporis dati BADC; quàm diameter BC ad peripheriam BDC. Et superficies eadem rectangulorum inscriptorum habet eandem proportionem ad superficiem ipsorum cylindrorum conuexam, quam BC diameter ad BDC peripheriam. Ergo cùm eadem planorum superficies rectangulorum inscriptorum ad conuexam corporis dati BADC habebat maiorem proportionem, quam ad cylindrorum conuexam superficiem ex 12. [illegible] 5. erit maior cylindrorum superficies, quam continentis corporis BADC, quod est absurdum.

Quod si ponas obtinere superficiē per axem BAC planā ad superficiem conuexam corporis dati BADC minorem proportionem: sit differentia quātitas Z, quæ si adesset, addita superficiei planæ: tunc esset vt diameter BC ad peripheriam BDC; Tunc circumscribantur rectangula adeò multiplicata, vt differentia X sit minor, quàm Z, quam obtinent à superficie plana BAC plani per axem ducti, & erit adhuc minor proportio rectangulorum circumscriptorum ad conuexam superficiem BADC corporis dati: quam BC ad BCD: Fiant ita, vt prius frusta cylindrica circa rectangula. Rectangulaque

ad

ad illorum omnium superficiem erunt, vt BC ad BDC. Cum itaque eadem rectangulorum superficies ad superficiem cylindrorum habeat eandem proportionem BC ad BDC, & ad superficiem BADC corporis dati minorem, quam BC ad BDC erit maior ex 12. lib. 6. superficies corporis dati BADC licet inscripta superficie circumscripta rectangulorum; quod est absurdũ. Cũ ergo superficies plani per axẽ dicat, nec maiorẽ proportionem, nec minorem proportionem ad conuexam superficiem, quam diameter BC ad peripheriam BDC; Dicet itaque eandem proportionem: quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

Itaque cum nota sit dictis pr. 33. Tract. 30. superficies plani ducti per axem conoidis parabolici, quæ est parabola, etiam superficies eius conuexa patebit sine basi considerata. Nam ita se parabola per axem ducta in conoide parabolico se habebit ad superficiem conuexam ipsius, vt diameter, seu applicata axi ad peripheriam circuli, quæ eo semidiametro deducitur.

EXPENSIO VI.

De superficie sphæræ mensuranda.

ARchimedes, dum sollidítatem sphæræ perquireret, hoc nobis indigne problema reliquit, quo sphæricam superficiem summa facilitate mensurare possemus, quod cum apud ipsum obscurè omninò tradatur, nos clariùs, quàm fieri possit explanare curabimus.

THEOR. I. PROPOS. XXXIX.

Chordæ parallelæ coniungentes latera æqualia figuræ circulo inscriptæ parium numero laterum, omnes simul tamquam vna ad diametrum eam habent proportionem, quam chorda vnum latus diametro coniungens ad ipsum latus.

SIt pr. 40. fig. duodecim V. g. laterum circulo inscripta. Dico, quòd chordæ BC, FE, HG, IT, ML coniungentes latera, & parallelæ eam habent proportionem ad diametrum AD, accepta tamquam vna linea, quam habet chorda CD subtensa omnibus arcubus semicirculi vno dempto ad ipsum latus CA subtendens arcum reliquum; quod vt ostendatur ducantur rectæ de vna ad aliam EC, HB, IG, & LI, quæ erunt parallelæ, vtpote æqualia latera coniungentes, & ideo omnia triangula AOB, OCB, FEQ, QFR, & cæt. erunt æquiangula, vnde ex El. l. 6. prop. 41. Cor. habebunt latera circa æquales angulos proportionalia, eritque vt BO ad OA, sic CO ad OP, & ita EQ ad QP, & sic FQ ad QR. Sic quoque ES ad SN, & IK ad KN, & cæt. Quare erit vna ad vnam, sic omnes ad omnes ex prop. 12. lib. 5. Ideo linea HY omnibus chordis BC, FE, GH, TI, ML extensa, ita erit ad totam diametrum AD, vt V. g. OB, vel OC ad vnam OA; Sed vt est OC ad OA, ita est CD coniungens latus diametro ad AC latus ex prop. 8. lib. 6. ob rectangulorum similitudinem. Ergo quam proportionem omnes CB, FE, & cæt. ennumeratæ quinque, velut vna V. g. YH ad diametrum, hanc habet CD chorda prædicta ad latus CA.

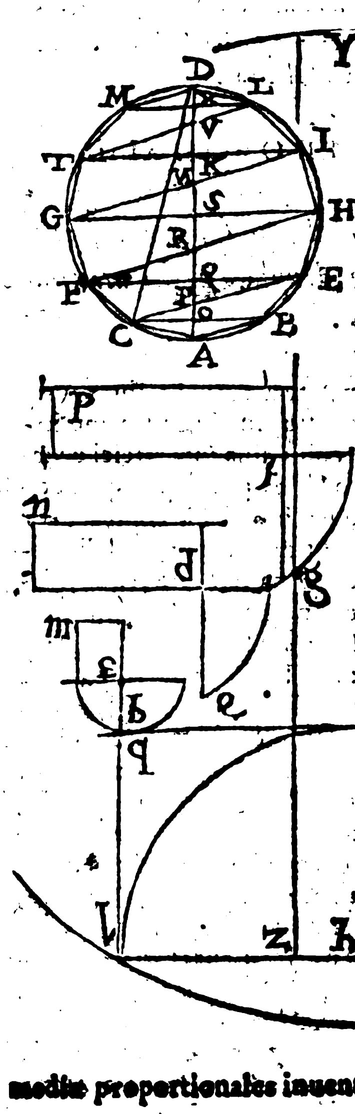
COROLLARIVM.

COllige ita, esse latus ex aliquibus chordis cum dimidia compactum V. g. CB FE, & dimidia HS ad diametrum interceptum AS, vt CD ad CA ratio est, quia dicunt eandem proportionem ex preced. propositione, quam OB ad AO, & eandem dicit similiter CD ad CA.

THEOR. II. PROPOS. XL.

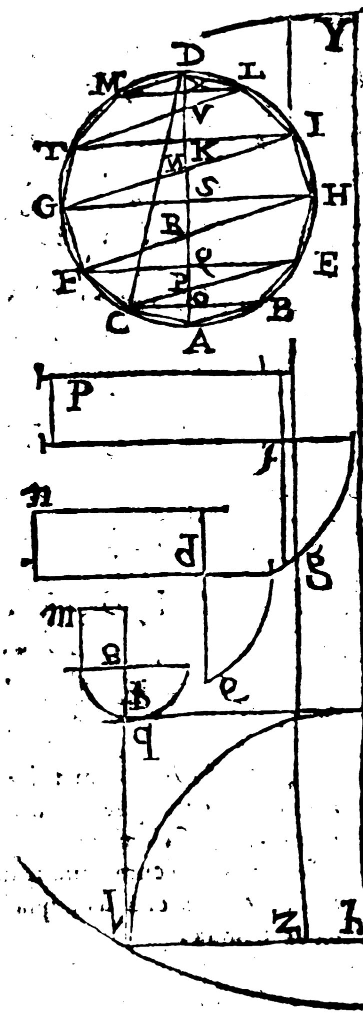
Corporis ex portionibus conicarum superficierum constantis in sphæra inscripti superficies æqualis est circulo; cuius semidiameter possit quadratum æquale rectangulo, cuius vnum latus omnes frustorum conicorum diametros æquet, & alterum latus ipsorum.

SIt figura præcedens, sed intelligatur globosa, & sit LMD apex coni, cuius circulus basis ML diametro constet; Sic ILTM frustum coni, cuius basis circulus diametrum KI, possideat, & sectio, item circulus ML diametro LM gaudeat, & sic essare de alijs.



Inueniantur autem circuli æquales superficiebus frustorum horum conicorum iuxta dictam propos. 32. huius; sitque proportionalis a b inuenta inter AB BO: inter OS rursus, & QR tamquam vna, & SS media proportionalis d e. Sic in EQ, & SH tamquam vna, & EH media proportionalis f g reliquę quoque tres inueniantur proportionales, quæ erunt tribus prædictis æquales, sicut ipsa tria rectangula, ex quibus prodeunt erunt æqualia, vt a m, d n, & f p. Rectangula autem ex quibus mediæ proportionales inuentæ, si in vnum rectangulum

gulum ex 4. lib. 2. Elem. componantur. Quia primum ex OB efficitur pro vno latere secundum ex OB eodem, & EQ tertium ex EQ eodem, & SH, pro alio semper BA deseruiente cum BA, BE, EN, & cęt. ex Thesi æquentur semper, ideo dum singuli sinus replicantur linea h y ex omnibus sinubus duplicatis extensa æquabitur omnibus chordis BC, FE EF, HG, & cæt. Et ideo omnia rectangula sub eadē altitudine lateris AB erunt æqualia rectangulo ex AB pro vno latere, & quinque lineis chordisq; BC, & EF, & cæt. tamquam alio latere compacto, vt est zy ex 4. lib. 6. si ergo inueniatur media proportionalis inter z h, & h y, quæ est l h, hæc quadratum constituet æquale zi, & consequenter omnibus rectangulis sex, quorum duo sunt a m duo d n, & duo f n, & ideo etiā quadratis æqualibus quibus ex d e; a b, & f g. Quamobrem, si ex inuenta proportionali h l tamquam radio constituatur circulus, hic circulus erit quoque æqualis omnibus sex circulis de duobus radijs æqualibus duobus lineę a b duobus lineę d e, & duobus lineæ fg; sed illi sex circuli ex pr. 32. h. sunt æquales superficiebus fructorū conicorū, omniū quæ figurā solidam in sphæra inscriptam componunt: Ergo, & circulus ex semidiametro h l, cuius quadrantē cōtinet quadratum h q illam superficiem æquabit.



COROLLARIVM.

QVia ex Cor. pr. 39. est CD ad CA, vt aliquę chordæ V. g. CB, & EF cum dimidia HS ad AS; quia probatum est in ipsa ita esse prædictas duas cum dimidia ad AS, vt BQ ad OA, & ideo rectangulo ex BC, EF, & dimidia HS tamquam vno latere, & ex AB pro alio latere quadratum æquale habebit latus, quod ~~assumptum pro~~ diametro describet circulum æquale superficiei corporis conici AHG inscripti portioni alicuius sphæræ.

THEOR. III. PROPOS. XLII.

Superficies figuræ solidæ in sphæra inscriptæ est minor quadruplo circuli maximi eiusdem.

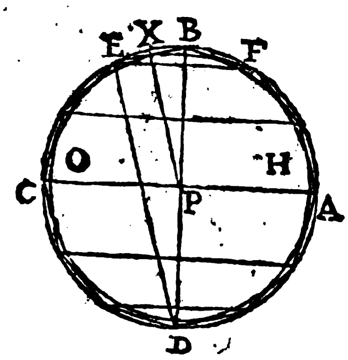
SIt figura duodecim laterum, vel talium, quæ quaternario numerentur in sphæra AHOD inscripta, datusque sit circulus eius superficiei æqualis descriptus diametro l h ex præced. & quia demonstratum est primo pr. ita esse h y compacta ex omnibus quinque chordis CB FE, & cæt. ad diametrum, vt est CD chorda ad CA latus; Si constituatur ex medijs nimirum AD, & CD rectangulum hoc erit æquale rectangulo ex extremis constituto AC, & h y ex propos. 17. lib. 6. Elem. vt duod. propos. huius Cor. ideoque quadratum hq ex h l æquale prædicto rectangulo z y erit etiam æquale rectangulo ex AC, & CD constituto; sed hoc est minus, quam quadratum ex AD. Ergo quadratum l h est minus quam quadratum diametri. Quare, & quadruplum ex h l quale est quadratum ambiens circulū, cuius radius h l, quod æquatur figuræ inscriptæ solidæ superficiei ex 40. h. erit minus, quā quadruplum quadrati ex AD; sed sicut se habet quadratum ad quadratum, ita circulus ad circulum, ideoq; circulus quoque, eius quadrans in h q æquans superficiē figuræ sphæra inscriptæ minus erit quadruplo circuli maximi, veluti est AHOD.

THEOR. IV. PROPOS. XLII.

Figuræ solidæ circa sphæram descriptæ superficies maior est, quam quadruplum maximi sphæræ circuli.

SIt sphæra ABCD circa quam sit duodecim laterum circumscripta figura solida ex frustis conorum, vt præcedens integrata quamobrem rectangulum ex chorda ED, BD diametro confectum æquabitur rectangulo ex EB latere, & linea æquali omnibus quinque chordis simul, quarum vna est EF, cui, & æqualis quadrati latus tamquam radio facit circulum æqualem superficiei figuræ solidæ sphæra inscriptę ex 41. h. sed hoc rectangulū ex DE, DB est maius, quā quadratum ex diametro sphærę comprehensę OH in fig. conica; quia habet latus BD maius; latus verò ED est æquale diametro OH, quòd ob parallelismum DE, PX sit duplum radij PX. Ergo rectangulum ex DE BD compactum erit maius quadrato ex diametro sphæræ comprehensæ OH. Quapropter, & si fiat quadratū æquale rectangulo à DE, & DB lateribus comprehenso erit quoque maius, quam quadratum ex diametro

metro OH, consequenterque quadruplum eius erit maius quadruplo quadrati ex diemetro OH sphæræ. Circulusque in eo inscriptus circulo quadruplo maximi circuli sphæræ, sed ille circulus maior quadruplo maximi sphæræ circuli est æqualis superficiei figuræ solidæ sphæra circumscriptæ, & in maiori sphæra inscriptæ, quia est æqualis quarta eius pars rectangulo ex DE EB, quòd æquatur rectangulo pro vno latere ex chordis quinque compacto, & pro alio ex EB, cuius quadrati latus



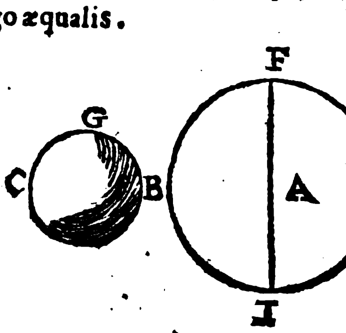
Pro radio vsurpatum circulum facit illius figuræ solidi circumscripti sphæræ superficiei æquale quale latus in præced. fig. est h l, quòd quadratū, quia æquale est rectangulo ex quinque chordis pro vno latere, & pro alio ex EB, quod æquatur DE, & DB rectangulo maius quadrato ex OH diametro, si quadruplicetur, erit quoque maius quadruplo quadrati ex OH, & ideo circulus in eo quadrato quadruplo maiori inscriptus, erit quoque maior circulo quadruplo maiori, quàm circulus ex OH.

Vnde, & fig. conicæ circumscriptæ superficies est maior quadruplo maximi sphæræ circuli ex OH.

THEOR. V. PROPOS. XLIII.

Quæcumque sphæræ superficies quadrupla est circuli, qui in ea maximus habetur.

SIt circulus BIF sphæræ maximo circulo BGC quadruplex. Dico, quod is circulus est æqualis superficiei sphæræ. Nam si talis non est, erit, aut maior, aut minor, sed nec maior, nec minor esse potest: ergo æqualis.



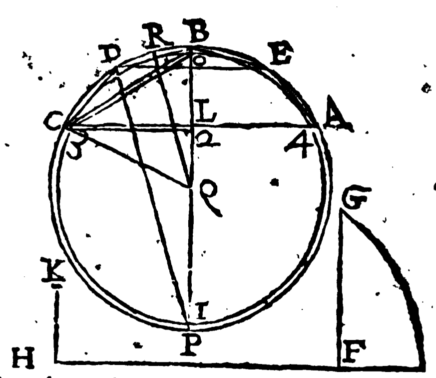
Nam si est maior, erit aliquis circulus alius æqualis superficiei figuræ solidæ circulo circumscriptæ, qui vel æquabit prædictum circulū, vel eo erit minor: siquidem si FIB affirmetur maior superficie sphæræ, & superficies omnis circumscripta sphæræ corporis solidi, sit quoque maior, dabitur aliqua superficies solidi corporis inter infinitas, quæ erit quidem maior superficie sphæræ, sed minor prædicto circulo IFB, si enim V. g. superficies corporis solidi 12. laterum est nimia, potest assumi 24. laterum, aut 48. aut 96. & sic in infinitum donec decrescat vsque quo fit minor, vel æqualis circulo IFB, cum ergo quælibet superficies corporis solidi sphæra circumscripti sit maior ex 42. h. quadruplo circuli maximi, foret etiam maior circulo prædicto IFB, quod esse nequit, cùm minor electa sit.

Sit rursus superficies sphæræ minor, IBF quadruplum circuli maximi BGC ipsius sphæræ. Dabitur itaque eodem modo circulus maior, quàm IBFB, qui æquabit aliquam superficiem corporis solidi in sphæra inscripti, siquidem si maiorem non det fig. 12. laterum potest assumi 24. laterum aut 48. aut 92. & sic infinitum donec fiat maior, quàm circulus IBF minor superficie sphæræ. Sed hic circulus est minor quadruplo maximi circuli sphæræ ex 41. h. ergo esset maior, & minor circulo FIB quod est absurdum, cum itaq; nec maior, nec minor esse possit, erit ei æqualis, & ideo superficies sphæræ quadrupla erit circuli CGB.

THEOR. VI. PROP. XLIV.

Portionis figuræ conicæ superscriptæ sphæræ superficies est maior circulo, cuius radius sit chorda à vertice portionis ad basim eius ducta.

SIt portio sphæræ 034. cuius vertex 0 basis 3 4. chorda à vertice ad basim educta 03, circa quā portionem sit descripta figura solida conica æquilatera AEBDC, & circa eam circulus ABCP. Deinde esto circulus, cuius semidiameter sit latus quadrati æquale rectangulo sub latere BD, & omnibus chordis latera figuræ coniungentibus, & dimidia basi contento, vt est latus FG, cuius quadratum æquat parallelogrammum FH, HK, cuius latus FH æquat ED chordam latera figuræ coniungentem, & CL semibasim, & alterum latus FH æquat BD, & ideo superficies corporis conici inscripti AEBDC.



Probandum est ergo, quod quadratum ex FG sit maius quadrato 03. & consequenter circulus, cui pro radio deseruit maior circulo, cui radius est 03. Quia ergo ex Cor. propos. 41. h. constat, quod FH sit ad LB, PD ad BD, ideo rectāgulum sub medijs LB, PD erit æquale ei, quod ab extremis comprehenditur rectāgulo FH, & BD, idest rectangulum ex FH, HK. Rectangulum verò hoc LB, PD est maius rectangulo ex 10 02. vt demonstrabo, cui rectangulo 10. 02. quadratum 03. est æquale, vt pariter infra ostendam, cum ergo rectangulum PD, & LB æquale quadrato GF, & ideo rectāgulo ex HF, HK sit maius rectāgulo 10 02. & quadrato 03. patet propositum, nimirum quod circulus ex FG radio factus æqualis superficiei figuræ circumscriptæ portionis sphæræ ex Coroll. prop. 40. h. erit maior, quā circulus ductus ex 03. chorda à vertice 0. ad basim 23. deducta, & ideo circūscripta superficies.

Duo itaque remanent ostendenda primo quadratum

dratum 03. esse æquale rectangulo 10. & 02. lateribus clauso; secundò rectangulum BL, PD esse maius rectangulo prędicto ex 10. & 02. & consequenter etiam quadrato 03.

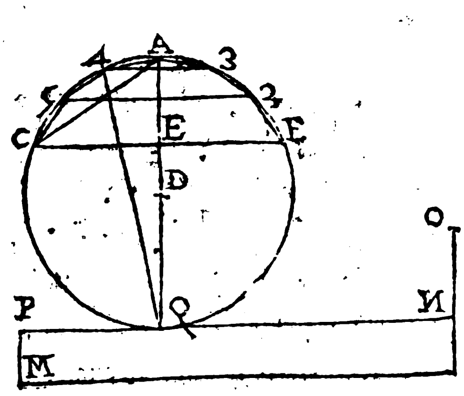
Primum sic ostendo ex pr. 35. l. 3. Quadratum 3 3. est æquale rectangulo 12. & 20. cui si addas quadratum ex 20. fiet totùm rectangulum 10. 02. æquale duobus quadratis ex 20. & 23. sed istis est æquale quadr. 03. ex. 11. l. 2. ergo hoc quadr. erit æquale etiam rectangulo 10. & 02. & ecce primum.

Secundum verò, quod hoc rectangulum 10 02. sit minus rectangulo LB, PD, sic demonstro linea LB est maior, quam 02. cum triangula BCL, & 023. sint æquiangula, & minor sit 23. quam LC, & 30. quam BC, & ideo etiam 02. minor erit, quam LB, alterum verò latus PD est æquale 10. lateri. Quia enim BR est medietas lineæ BD, & QI medietas diametri IB, ideo erit BR ad BD, vt BQ ad BI, & ideo etiam erit ita QR ad PD: quare PD erit etiam dupla lineæ QR, quæ est semidiameter minoris sphæræ, & ideo PD eius diameter, & æqualis 10. quare rectangulum PD, BL æquale in latere PD maius in latere LB, rectangulo 10 02. erit ipso 10 02. absolutè maius, quod est secundum.

THEOR. VII. PROPOS. XLV.

Portionis figuræ conicæ solidæ sphæræ inscriptæ superficies est minor circulo, cuius semidiameter sit linea à vertice portionis ad basim eius deducta.

Sit superficies portionis sphæræ BAC linea à vertice ducta ad basim BC sit AC: corporis conici inscripti sint æqualia latera B 2. & 23. 3 A, & cæt. quę rectis coniunguntur 25 34. Fiat rectangulum latere constans omnibus chordis, & radio basis æquale, nimirum rectis 2. 5. 3. 4. & EC, & pro latere habeat A 4. & sit MN, quibus lateribus inueniatur media proportionalis, & sit NO circulus, itaque radio NO erit æqualis toti superficiei illius corporis solidi sphæra inscripti ex Cor. prop. 40. huius. Quia verò ex propos. 39. Cor. eadem proportio est omnium chordarum in portione existentium cum dimidia, vt est PN ad BA segmentum diametri interceptùm, quam Q 4. ad latus 4A ideo rectangulum ex medijs Q 4, & EA erit æquale rectangulo MN ex extremis ex pr 17. l 6. El. nempe A 4, & omnibus chordis cum dimidia, quæ linea est PN, hoc autem rectangulum est minus quadrato AC, vt ostendam, ideoque etiam MN, & ideo quoque quadratum ex NO, cum hæc tria inuicem sint



æqualia; & ideo, si ex AC fiat circulus, tamquàm radio erit maior, quam circulus factus ex radio NO, qui ęquatur superficiei fig. conicę inscriptę ex Cor. pr. 40.

Sic verò demonstro quadratum AC esse maius rectangulo ex Q 4. & EA lateribus extructo. Nam est æquale rectangulo ex QA, & AE confecto; Sed hoc rectangulum est maius rectangulo Q 4. EA, quod habeat latus QA maius, quàm Q 4: Ergo etiam quadratum ex AC rectangulo illi maiori QA, AE æquale erit maius rectangulo Q 4. AE; quod autem quadratum AC sit rectangulo QA, AE æquale, patet. Nam est æquale ex pr. 11. l. 2. quadratis EA, & EC: at quadratum EC est æquale rectangulo QE, EA ex 45. lib. 3. cui si addas quadratum EA fiet vnicum rectangulum QA, AE ob eandem altitudinem EA æquale duobus quadratis ex EA, & EC, & consequenter quadrato AC; Cum ergo quadratum AC sit æquale rectangulo ex QA AE; erit maius rectangulo MN, & rectangulo Q 4. AE, & quadrato ex NO; Vnde, & circulus illo radio AC descriptus erit maior circulo descripto ex radio NO.

THEOR. VIII. PROPOS. XLVI.

Superficies cuiuscumque portionis sphæræ minor dimidia est æqualis circulo, cuius radius est chorda à vertice portionis ad basim deducta.

Sit eadem fig. quæ superioris propos. BACQ, & portio eius BAC minor dimidia sphæra. Sitq; chorda à vertice sphęræ deducta AC, ex qua tamquam radio fiat circulus. Dico hunc circulum esse æqualem sphæræ portionis BAC superficiei.

Probatur. Nam si non erit ęqualis, erit aut maior, aut minor; sed nec vnum, nec aliud esse potest. Ergo erit ęqualis circulus ex AB superficiei sphęrę.

Probatur, quod maior esse nequeat. Nam si maior est, circumscribatur ipsi portioni conicum corpus, vt propos. 44. huius factum est, adeo multiplicatis lateribus, vt eius superficies sit quidem maior sphęra, vt semper est, sed tamen minor circulo ex AC, qui maior ea superficie sphęrica prędicatur; tuncq; circulus AC descriptus contra ostensa propos. 44. huius erit maior superficie conici corporis circumscripti, quod est absurdum.

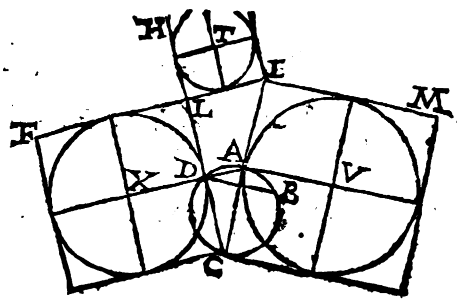
Probatur quoque, quod non possit esse minor; tùnc enim poterit describi in sphęra corpus conicum adeo lateribus multiplicatis, vt sit minor quidem eius superficies superficie portionis sphęrę; sed maior circulo ex AC, qui superficie portionis sphærę minor dicitur, & ita sequetur contra ostensa in præc. propos. quod superficies circuli AC possit esse minor, quam corporis inscripti conici superficies, quod absurdum item est.

Cum ergo circulus ex AC radio, nec maior, nec minor esse possit superficię segmenti sphęrici BAC, ipsi erit æqualis, vt asserit propositio.

THEOR. IX. PROPOS. XLVII.

Superficies cuiuscumque portionis sphæræ maior dimidia est æqualis circulo, cuius radius est chorda à vertice portionis ad basim deducta.

Sit sphęra ABCD, eius portio maior dimidia sit BCD. Ducatur diameter AC perpendicularis sectioni BD; deinde duæ chordę AD, DC. Fiatque ex diametro CA, tamquã semidiametro circulus; & v hic enim erit quater maior circulo maximo sphæræ datæ, qui est ABCD; quia etiam quadratum, in quo concluditur est quadruplo maius, vt patet in quadrato CM, cum habeat proportionem lateris

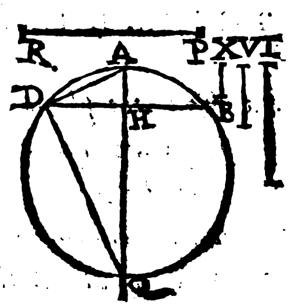


duplicatam, eritque ęquale duobus circulis ex AD radio, & DC radio confectis. Nam est quadratum CM ęquale duobus quadratis IH, CF: quare, & circulis ex centro T, & centro X inscriptis in illis ex centro V descriptus circulus erit æqualis. Circulus autem IH est ęqualis superficiei portionis sphęrę BAD, vtpote chorda AD, tamquam semiradio descriptus cum IL sit dupla AD ex 4.l.6. ob duplam CI ipsius CA. Ergo circulus X ęqualis, cum T, circulo alteri V, & ideo toti superficiei sphęrę, erit ęqualis se solùm residuę superficiei portionis sphęrę BCDA.

PROBL. I. PROPOS. XLVIII.

* *Datam sphæram, sic secare plana superficie, vt portionum superficies similem cuicumque portioni datæ retineant proportionem.*

* Sit sphęra data BADQ, & semidiameter AQ; sitque proportio data, quam vnum ad duo scilicet X ad I. Inueniatur duabus X, I media proportionalis V, diuidaturque diameter AQ ex Cor. 1. prop. 13. lib. 6. iuxta proportionem, quam habet X ad I, & ducatur à puncto diuisionis H normalis HD, & per H agatur planum BD. Dico sphęræ superficiem esse diuisam in proportiones datas.



Probatur. Nam ducta AD, QD ex præced. pr. 46. & 47. superficies portionis BAD est æqualis circulo cuius radius est AD: item superficies sphæricæ portionis BQD est æqualis circulo, cuius radius est QD. Quia itaque triangula sunt ęquiangula ADH, HDQ erit AH ad AD, vt HD ad DQ, & *permutando* erit AH in proportione ad HD, vt AD ad DQ; vt autem AH ad HD, sic est HD ad HQ ex Cor. prop. 16. lib. 6. quare erit AH ad HD, sic X ad V, quia etiam V est media proportionalis inter X, & I, & cum HD est media proportionalis inter AH, & HQ, quę ex constructione sunt in eadem proportione, vt X ad I, & ideo, vt X ad V lineas, sic erit AH ad HD, & AD ad DQ, & ideo vt AH ad tertiam HQ, vel X ad I ita ex 21. lib. 6. Cor. quadr. AD ad quadr. DQ, vt autē quadr. AD ad quadr. DQ; sic circulus inscriptus ad circulum inscriptum; vt autem circulus inscriptus in quadrato AD ad circulum inscriptum in quadrato DQ, sic quadruplum circuli AD ad quadruplum circuli DQ: Sed quadruplum circuli inscripti quadrato AD est æqualis superficiei portionis sphæricæ BAD, & quadruplum circuli QD quadrato inscripti est ęqualis superficiei portionis sphæricæ BQD. Ergo ex 16. lib. 6. vt X ad I, sic sphęricæ portionis superficies BAC ad sphæricæ portionis BQD superficiem.

PROBL. II. PROPOS. XLIX.

* *A sphæra superficie portionem abscindere æqualem superficiei circuli dati; dummodo semidiameter circuli diametro sphæræ sit minor.*

* Sit datus in fig. propos. præced. semidiameter circuli PR, & ex propos. 1. Elem. 4. accommodetur in data sphæra maximo circulo BADQ ducto priùs diametro AQ à puncto Q, & sit V. g. QD, ducatur deinde DB planum normale ad AQ dico BQD esse portionem sphæræ, quæ habet superficiem æqualem circulo, cuius semidiameter PR.

Probatur. Quia PR effecta est chorda QD: chorda vero QD vsurpata pro radio describit circulum æqualem circulo ex PR, quod sit ei æqualis, & item æqualem superficiei portionis sphęræ, DQB quam secat BD basis, vt supra ostensum est.

TRACTATVS XXXII.

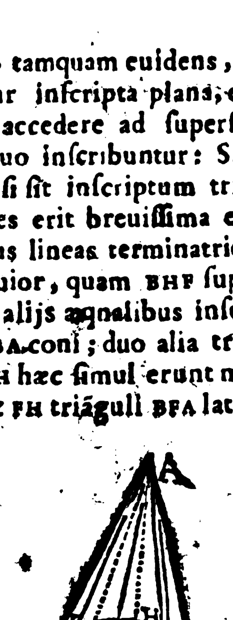
De superficiebus corporum in planum redigentis.

PRoiectio superficierum corporearum, quę in planum extenduntur, aliquibus videbitur forte non omninò Mathematica, cùm per puncta, per quæ habili manu lineæ flexæ ducuntur superficies eiusdem rationis, & quantitatis, ac illæ, quæ circumambiunt corpora describantur: Verùm si istæ consideret, quod & Ellipticæ, Parabolicæ, Hyperbolicæque superficies, ita delineantur, sicut, & Quadratrices, & Asymptoticæ lineæ sic descriptæ in præcedentibus fuere: non infitiabitur rigorosam esse hanc superficierum corporearum in planum extensionem, maximè, quia fundatur omnino in Orthographia, quæ certè Mathematica descriptio est. Verum tamen est, quod singulis proiectionibus ostensiones non adferemus cùm eas supra tract. 25. satis produxerimus.

EXPENSIO I.

De superficiebus cylindricis in planum extendendis.

PRæassumo tamquam euidens, quo magis multiplicantur inscripta plana, eorum superficiem magis accedere ad superficiem corporis conuexi, in quo inscribuntur: Siquidem in Cono recto BAI si sit inscriptum triangulum BAF, eius superficies erit breuissima ex def. 7. tract 3. quæ inter eius lineas terminatrices interiaceat, ergo erit breuior, quam BHF superficies coni, & idem dicas de alijs æqualibus inscriptis: Si verò in segmēto FBA coni; duo alia triāgula inscribātur BAH, & AFH hæc simul erunt maiora, quā BAF, siquidem BH, & FH triāguli BFA latera sunt maiora



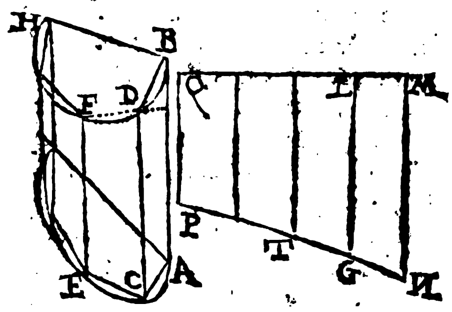
simul, quam BF, triangula verò BAH, & AFH sunt maiora, quam BAF, quòd sint æqualia, & terminent in maiorem altitudinē, quam BAF. Quare simul dicent maiorem proportionem ad BHAF superficiē coni, quàm triangulum BFA ex 8. l. 5. & idem dicas de alijs BAQ, AQT, & cæt. æqualibus. Sed adhuc erunt minora superficie coni cum superficies triangulares inscriptæ, vtpote planæ sint breuissimæ inter lineas BA, & AQ V. g. non autem conicæ, globosæ inter easdem lineas BA, & AQ, & alias conclusæ. Quare semper magis fit accessus ad æqualitatem, quò magis multilaterum inscriptum facies multiplicat, cum semper maiorem proportionem globosæ superficiei, cui inscribitur dicat.

THEOR. I. PROP. I.

Si sint trapezia tot plana, quæ altitudinem trapeziorum cylindro inscriptorum æquent, & latera eiusdem longitudinis obtineant, quam inscripta cylindro: hæc omnia simul æquabunt superficiem multilateri corporis cylindro inscripti.

PRobatur. Nam ex propos. 13. tract. 29. trapezia æqualis altitudinis, & basium æqualium sunt inuicem æqualia. Cum itaque trapezia DA DE, & cæt. inscripta Cylindro sint æqualis altitudinis, & basis ex thesi, ac MG; LT, & cæt. trapezia plano extensa. Consequenter singula singulis erunt æqualia. Propterea que ex 18. lib. 5. omnia simul trapezia Cylindro inscripta, idest superficies multilateri in ABEFEH æquabitur superficiei extensæ MNQP.

PROBL.



PRORL. I. PROPOS. II.

Cylindri concaui ab alio cylindro secti rectangulè superficiem, partesque eius proijcere, & deinde illam in planam extendere.

SIt datus Cylindrus concauus, cuius basis, seu annuli dimidiũ sit CABDFH sectus à duabus superficiebus cylindricis, quæ proiectæ ex 9. prop. tract. 26. sint KMN, & OPQ, inter quas interceptus in sectione AB in figura III videre licet, cylindrus intelligatur. Et primò partes cylindri interceptæ sint proiciendæ, atque adeo tota eius superficies. Ducatur circulus medius, & vtcumq; diuiso aliquo eorum V. g. in part. 6. ducantur radij, seu radiorum portiones FLA, I 2 3, & à punctis, in quibus circulos secant, demittantur perpendiculares ad BC, quas distinctionis gratia ab extrinseco semicirculo profectas trahemus continuas, vt 3 4, & à medio punctatas, vt 2 5. ab interno interruptas 1 6. & sic ab alijs punctis quoq; 10 11, 12. & B, G, D, & vlterius producemus vsque ad 7. 8. 9. nempe vsque dum secent duos circulos KMN, & OPQ, quibus cylindri secantis insistunt superficies, inter quas, superficies cylindri secti intercluditur. Et KONQ erit cylindri superficies proiecta, tum quoad totum, tum quoad singulas partes.

Probatur. Nam KMN, & OPQ sunt cylindri ad planum recti superficies proiectæ, quoniam ex pr. 8. tract. 26. superficies omnis perpendicularis plano in lineam transit, cum sit eadem, ac superficies proiectrix, & ideo in plano sit sectio superficiei proiectricis. Talis est autem superficies cylindri secantis, cùm ponatur orthogonalis plano. Vnde in lineam transibit. Sectio verò eius cum plano circulus est aut ellipsis; ergo proiectio eius talis erit. Rursus si in cylindrica superficie secta partes lineis parallelis axi distinctæ intelligantur, cùm axis plano orthographo parallelus sit omnes erunt parallelæ ex propos. 6. & æquales ex 5. prop. tract. 26. distantiæ verò earum ad inuicem mensurentur arcu normali, & sint I F, IO I, & cæt. ideoque distantiæ eorum proiectæ ex prop. 8. tract. 26 erunt partes diametri 23 19. & aliæ. Vnde PM 6 9. & aliæ erunt partes proiectæ quoad latitudinẽ, & distantiã ab inuicẽ. Sed etiã quoad longitudinem. Nam cum sint parallelæ plano orthographo æquales erunt illis, quas KMN, & OPQ secantes cylindricæ superficies detrũcant à superficie cylindrica originaria secta DFH. Siquidem, vt diximus KMN, & OPQ proiectricium superficierum sectiones sunt. Vnde 6 M P 9 erit superficies cylindri DFH proiecta, & sic de alijs partibus dicas, vnde totus P partes tali modo proijciuntur, & iam apparatus erit completus necessarius ad superficiem quæsitam inueniendam.

Quare seorsim ducatur recta RT, & in ipsa circuli interni, (si superficies interna dessideretur) partibus FI, I 10 & 10 D partes æquales assumãtur, vel certè ipsa linea ST per quadratricem, vel per computum, vt supra docuimus, vel practicè minimas partes arcus FI, I 10. & 10 D trãsferendo, & deinde in tot numero partes, quot arcus G, 10. I F, diuisus est, diuidatur, ducanturque perpendiculares 13 15. 14 16. R 17. T 18. deinde assumatur interuallum 19. M, & transferatur à linea TR, & sit T 23. & 22 6; sit 13. 24. sic 27. 28, mensuret 14. 25. & tandem D 29. distantiam donec R 26. perque hæc puncta flexa ducatur 26. 25. 24. 23.

Idem fiat de alijs punctis in arcu OQ repertis. Nam assumptis interuallis 19. P transferatur in T 18. sic 22. 9. in 13. 15. sicque alia interualla 27. 30. in 14. 16. & D 31. in R 17 perque puncta reperta flexa ducatur 17. 16. 15. 18. quæ terminabit superficiem internam 26 23. 17. 18. quadrantis cylindri D 10 I F, & idem fiat de superficie externa assumendo distantias à linea BC ad arcum KM, & ad arcum OP, sed in lineis continuis à punctis extrinsecis A 3 12 proficiscentibus.

PROBL. II. PROPOS. III.

Superficies coniunctiuas eiusdem Cylindri perquirere.

SI annulus solidus esset diuersis segmentis compositus, vt solent portarum arcus lapidei, quæritur, quænam esset superficies ea, qua coniungeretur lapis ad lapidem.

Sit igitur exquirenda superficies, secundum quam segmentum 31 FA, segmentò 3 I 12 10. coniungitur, quia 13. 15. pertinet originatiuè ad punctum I. Ideo illi lineæ deberet applicari. Nam illa dat longitudinem illius interuam 24. 15. Ab hac ergo linea 13. 15. mensuretur interuallum I. 2. & sit 13. 37. & interuallum 2 3. & sit 37 36, ducanturque perpendiculares 37 35. & 36 34. ad lineam RT. Mensuretur exinde distantia 21. 5. à puncto 37. vsque ad 33. & 20 4. à puncto 36 in 32. & ducatur flexa portio Ellipsis 32. 33. 24. Rursusque accipiatur interuallum 21. 8. & 20. 7. & transferatur in 37 35, & 36. 34. & per puncta 34. 35. 15. flexa ducatur, quæ erit portio Ellipsis, & erit superficies 32. 24 34. 15. quæ quæritur, nempe ea, secundùm quam segmentum A 3 14 coniungitur cum segmentó 3 1 12 10.

Probatur verò primo propositio antecedens. Nam altitudo TR ex effectione est æqualis arcui normali D 10. 1 F; latitudo verò T 18. & ceteræ mensuratæ linea T 18. & ceteris vsque ad R 17. est æqualis latitudinis 19. P vsq; ad D 31. erit superficies 23. 18. 26. 17 altitudine quidẽ æqualis quadrãti DF, latitudine verò superficiei 19 P D 31. Vnde ex prop. L. h. æquabitur multilatero superficiei Cylindri inscripti inter superficies, alteram cuius sectio B 19 alteram cuius sectio OP intercepti.

Ita dicas de superficie RT 26. 23. Nã altitudine quidẽ normali æquat quadrãtẽ D 01 I F latitudine verò latitudinem D 29 M 19. Quare æquabitur multilateri superficiei inter superficies plan am

cuius,

cuius sectio D 19. & curuam cuius sectio KM. Quare si hęc minor RT 23. 26. subducatur ab illa RT 17. 18. remanebit superficies inter media æqualis superficiei intermediæ inter superficies cylindricas, conuexas MNQ, KPO interceptę multilateri Cylindro inscripti: vnde iam multilaterum, si sit adeo multiplicatis lateribus inscriptum, vt superficies eius sensibiliter non differat à superficie cylindri etiam superficies 26. 23. 17. 18. à cylindrica superficie, quę flectitur in arcum DF; continetur verò inter circulos, vel inter superficies, perpendiculares arcubus OFQ, KMN, æqualis erit.

Secundò idem probatur de superficie coniunctiua. Nam altitudo quidem 13. 36. est eadem, quæ I. 3. longitudo, verò inter arcus KN, & OQ contineri debet eo in situ; quo lineæ 5. 8. & 4. 7. per illa puncta transeuntes intercipiuntur inter prædictos arcus; tales verò sunt ex effectione 34. 32. & 35. 33.

PROBL. III. PROPOS. IV.

Cylindri concaui superficiem internam inuenire à superficie angulari secti rectangulè.

Sit idem, qui superiùs Cylindrus concauus, seu cylindri quadrans BAFD, diuisus, vt supra, & lineæ similiter ductæ I 40 44. & 2 41 43. & cæt. quę secent lineas angulares VPX, & ZYM, super quas, superficies erectę intelligantur perpendiculariter ad axem cylindri, & erit portio cylindri proiecta præced. Et iam apparatus erit adornatus; vt ex eo ex̄esio superficiei cylindricæ, quæ intercipitur inter latus VPX, ZYM, & superficiem concauā quadrātis cylindri D I IO F texit, diduci que. &.

Sit linea RTS, quæ exprimat sectionem BC Sitque portio I. F quadrantis extensa super eam; & sit T 13. at I. 10. æquet 13. 14. & cæt. perpendicularesque ad RS, vt superiùs ductæ sint, vt 3. 46. 49 sic T 18. 50. & cæt.

Deinde sumatur distantia 19. P; & sit translata in T 18. rursùs 22. 40. & sit 13. 46. Ita 27 51. & æquet 14 47. & tandem D 52. & æquet R 3. quibus punctis repertis ducatur flexa per illa 55 47. 46 18. Idem fiat de alijs interuallis alteriùs angularis lineæ ZYM, nempe de interuallo 19. Y, qui erit T 50. & 22. 44. & erit 13. 49. itaque si per puncta 54. 48. 49. 50. ducatur flexa, erit vndique terminata superficies 53. 18. 54. 50 quæ erit ea, quæ cylindri quadrantem interius texet.

Probatur verò, vt supra. Siquidem altitudo est TR, quæ est eadem ex effectione, quæ lineæ circularis FI 10. D, at latitudo superficiei RT 18. 53. eadem, quæ D 19. P 52. Rursúsq; latitudo RT. 54. 50. eadē, quæ D 19. Y 95. ablata itaque prima longitudine, ab hac postrema remanebit 53. 18. 54. 50. ęqualis longitudini 52 P 95 Y; quę intercipitur inter lineas angulares; cum autē superficies interna cylindri quadrantis sit latitudine quidem æqualis 52 P 95 superficiei, cum inter superficies VP, ZY curuis insistentes intercipiatur, longitudine verò quadranti FD, erit quoque æqualis longitudine, & altitudine superficiei 18. 53. 54. 50.

At si quis vellet superficies coniunctiuas eodem modo operabitur; latitudines enim erunt eędē 13. 37. 36. à quibus ducendæ parallelæ 56. 58. & 57. 59. & deinde distantia 21. 42 transportanda in 37. 56. sicut, & 20. 41. in 36. 57. & deinde ducenda est recta 46. 56. 57. Sic translatis interuallis 21. 43. in 37. 58. & 20. 45. in 36. 59. ducenda est recta 59. 58. 49. & sic habebimus superficiem coniunctiuā 59. 57. 46. 49. æqualis superficiei, cuius altitudo 3 2 1, longitudo verò inter parallelas 40. 44. & 41. 45. intercipitur. De qua eadem ratio, quæ superiùs militat.

PROBL. IV. PROPOS. V.

Cylindri circularis concaui superficiem internam inuenire à superficie gemina cylindrica secti plano perpendiculariter insistentis, sed non ad axem recti.

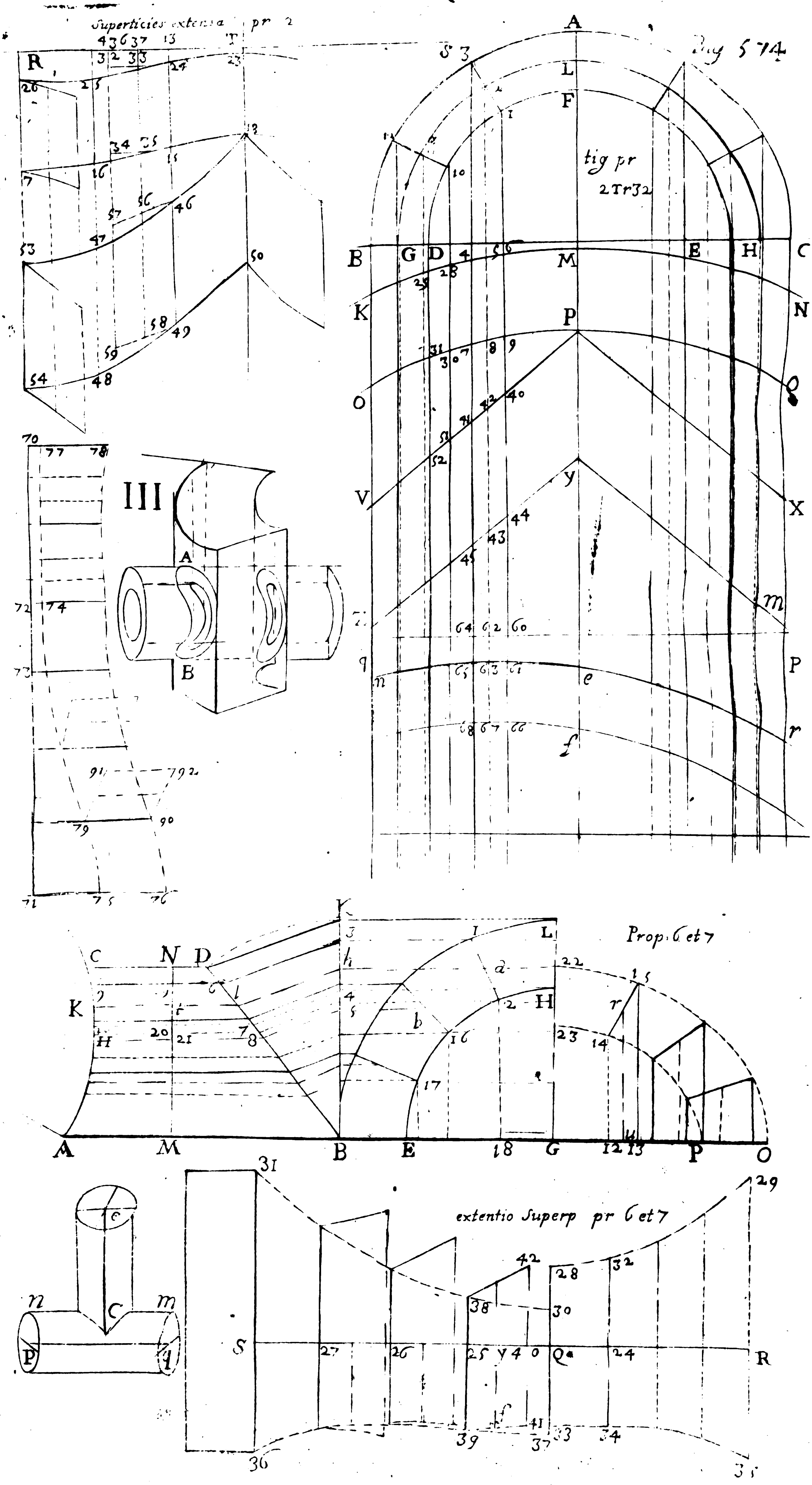
Sit superficies sectionis, vt supra cylindri secti BAFD non rectangula ad axem, ita quod axis A e non incurrat in axem cylindri secantis. Deduces, vt supra normales à dato quadrante BDAF à punctis I 2 3. & cęteris, vt supra deductæ, vltrà rectam p q planę superficiei cylindrum secantis seu eius vestigiū, nempe sectionis BACEFD, quam seorsim in linea 70 71. extendes cum singulis eius partibus IF, quæ sit 73. 72 & cæt. accepta postmodum distantia 96. 61. transferes in 72. & 74 & sic de cęteris partibus originarijs ab F I, I IO. & IO D arcus FD efficies & hæc regula in cęteris omnibus extendendis planis superficiebus, tum interna circulari, tum coniunctiua seruabitur, vt ex ipso exemplo potes percipere, & ita superficiem 77. 78 75. 76. obtinebis; sicut & coniunctiuas, quarum vna est superficies 79. 90. 91. 92.

PROBL. V. PROPOS. VI.

Cylindri Elliptici concaui internam superficiem hinc obliquè à superficie plana secti inde rectangulè à cylindrica; in planum proijcere.

Sit semicylindrus Oualis, seu Ellipticus ABCD, cuius oporteat superficiem in planum proijcere, & quia cylindrus Ellipticus potest secari à plana superficie tali modo, vt sectio sit circulus, hęc talis sit, & circuli interni sit datus quadrans EH, & externi BL, semidiameterque totus ab externa superficie pertingens DB ęquali semidiametro GL, vel GB. Sit verò ab alia parte detruncatus à superficie cylindrica, cuius sectio sit ad axem cylindri perpendicularis, vt est videre seorsum in cylindro e c, qui superficie cylindrica m n detruncatur, ita quòd axis p q sit orthogonalis axi eius e c; superficies verò e licet rotunda non sit, tamen ipsi axi e c ad angulos rectos est.

Diuidatur itaque circulus, seu exterior PL, seu interior EH, & trahantur portiones radiorum LH I 2. & cęt. & ab illis punctis L, I, & 2 H, & alijs ducantur parallelę vsque ad BK parallelam radio GL vt sunt LK, I 3. & alię continuę ab extrinseco ambitu, & punctis eius L, & I & alię parallelę pūctatę à punctis intrinseci ambitus, vt sunt H 4 2 5. & cęt.


Superficies extensa pr 2
Pag 574
fig pr
2 Tr 32
III
Prop. 6 et 7
extentio Superp pr 6 et 7

& cęt. A recta deinde DK centro B, interuallo BK, ducatur arcus, qui occurrat lineę CD altitudinis dati cylindri elliptici G 22. in D, & trahatur DB, quę erit ęqualis BK, vtpote radius, & ideo radio LG; & deinde ducatur DK, & à ceteri punctis 3. 4 5. & alijs parallelę prędictę DK educatur vt sunt continuę 3 6. & cęt & punctatę 4 7. 8 5. &c. & tandem ab istis punctis ducantur parallelę lineę DC, vt sunt 6 9. 7 10. 11 8. & cæterę, quę erunt lineę in superficie coni existentes: sed proiectę in plano CADB, & ideo cylindrus erit proiectus, cuius basis ad axem rectangula erit 23. 22. P O proiecta in lineam NM ex propos. 8. Tract. 26. & obliqua BLEH proiecta in DB, & cylindri secantis superficies in lineam curuam A 31 C, quia omnes istę, vtpote normales plano orthographo ACDB in lineas transeunt ex 8. prop. aut 16. tract. 26. prop. I. Lineę verò, quę in superficie conica distingunt partes lineis parallelis interceptis exprimentur, vt ex demonstratione prop. I. colligere potes; vel ex 6. tract. 26.

Postmodum ducatur GQ perpendicularis ad MN, vel GL, quę erit semidiameter maior sit constitutus, & positus, vt BG, vel GL.

Interuallo itaque perpendiculari H 2. & LI super diametrum GO erigantur perpendiculares 12 14, & 13 15, & cęt. quę distent à GH, vt est distantia perpendicularis H 2. vel I L, & sic fiat de cęteris punctis internis 16 17. & etiam externis correspondentibus, & habebimus semidiametrum maiorem ellipsis GO similiter truncatum, & diuisum, prout est diuisus BG à perpendicularibus, quarum vna est 18 2. Transferantur itaque altitudines externę superficiei MN in G 22. & M 19. in 13 15. & cęterę, tum internę M 20. in G 23. & M 21 in 12 14. & cęterę punctatis, & parallelis interceptę super punctatas perpendiculares correspondentes 12 14. & cęt. per puncta verò 23 14. & cętera in illis existentia deducatur ęquabili manu curua, nam hęc erit ellipsis interna, quę cylindri axi rectangula est: Deinde per puncta extrema in lineis continuis reperta vt 22. 15. & cęt. ducatur rursùs æquabili manu linea curua. Nam hęc ellipsis extrinseca erit, quę axi cylindri item rectangula est.

Quod ostenditur, aut ex propos. 13. tract. 26. quia ibi asseruimus proiectionem ellipsis ellipsim esse, vel ex propos. 72. tract. 24. de conicis. Nam perpendiculares sinus, vt 18 2. & cæteri deuecti in lineam BK redacti fuere per parallelas ad eius diuisionibus, similiter sectum minorem semidiametrum MN externum, M 20 internum; Quare G 23. 12 14. interni, sicut, & externi G 22. & cęt. quilibet suę portioni in MN correspondenti æquales lineę erunt similes sinubus originarijs 23 G ipsi GH vt 12. 14. ipsi 18. 2. Quare isti sinus 12. 14. G 22. erunt applicatæ ad partes easdem diametri GO, vel GP; & ideo per eorum extrema transibit ellipsis, cui O 23. minor diameter est.

Itaque habemus iam. In Cylindro ACBD ambitū axi orthogonalem: tum intrinsecum 23. 14. P tū extrinsecum 22. 15. O: Quare si per minimas particulas in lineam rectam vtrumque ambitum proiciamus; ita vt QR sit ęqualis intrinsecę 23 14 P, & QS sit ęqualis lineę 22 15 O extrinsecę ellipticę habebimus longitudinem ambitus cylindri in planum extensam, saltem quàm proximè, faciemusque singulas partes singulis; quam proximè ęquales Q 24. flexę 23 14. & cęterę cęteris; sicut, & Q 25. flexę Ellipticę 22. 15. & alię vsque ad S alijs ęquales, vt sunt 25 26. 26 27. & 75 S perque singula diuisionum puncta perpendiculares ducantur 28 Q, & 29 R, & cęterę intermedię, sicut, & S 31. Q 30. & cęterę interpositę; quas singulas singulis correspondentibus in cylindro CDAB faciemus aquales tali modo. Quia QR est ambitus 23 14 P, cuius diameter M 20, & quęlibet latitudo eius, vt Q 24 correspondet cuilibet ambitus 23 14 P V. g portioni 23 14 linea quoque Q 28 erit ea, quę secundùm longitudinem transit per punctum 23. quę est 20 7. linea in cylindro ACBD. Vnde 20 7. longitudo transferetur in lineam Q 28 à linea QR punctoque Q vsque ad 28. & sic de alia punctata fiat; assumpta enim eius longitudine 2 1. 8 transferatur in 24 32 & sic successiuè de alijs. Deinde longitudo residua punctata 20 10. transferatur in Q 33. & 21. 11. in 24 34. & sic de alijs, perque extrema puncta 28 32. & cęteris vsque ad 29. ducatur ęquabili manu flexa 28 32 29. sicut, & per puncta 33 34. & alia vsque ad 35 flexa ducetur, & erit superficies interna extensa 28 29 33 35. Cylindri prędicti CDAB, cuius ambitus interior 23 14 P radius maior GP minor M 20. axis AB, patet verò quòd cętera pars semicilindri eiusdem ab hac, quæ est quarta pars non differet.

Eodem modo superficies externa extendetur. Nam ND transferetur in Q 30. at 19 6. in 25 38. & sic de alijs. Pariter 19 9. in 26 39. & sic in Q 37. & sic de alijs notatis. Ergo omnibus punctis normalium, tùm hinc, tùm inde lineę QS coniunctis flexa 30 38 31. sicut & alijs 37 39 36. habebimus superficiem extrinsecā pro sui parte dimidia semicylindri CDAB, cuius sectio plana cognita BLHE expressa per lineam DB. & ad aliam partem, cuius sectio est cylindrica expressa per arcum AC, & ambitur exterior plani ad axē recti 22 15 O.

Probatur verò, quod talis sit. Nam eiusdem altitudinem, nempe quartam partem ambitus per lineam QS expressimus, & lineę flexę longitudinem terminantes V. g 30 38 31. & 37 39 36. per datas lōgitudines duximus, nempe per 30 Q ęquales longitudini ND, & Q 37 ęqualis longitudini 19 9. & sic dicas de alijs; quare ex ostensis prop 2. deductis à prop. I. superficies 28 29 33 35 ęquabitur superficiei cylindricę internę prędictis superficiebus interceptę, sicut etiam superficies 30 31 36 37 erit ęqualis externę prędictis superficiebus abscisę.

PROBL. VI. PROPOS. VII.

Superficies coniunctiuas eiusdem semicylindri plano distendere.

QVia Cylindrum prędictum concauum fingimus, diuersisque quasi doliorum asseribus coagmentatum, ideo si quis etiam ipsarum iuncturarum superficiem vellet agnoscere, id faciliter fiet.

Nam earum superficierum crassitudines, seu latitudines habemus expressas in lineis 22 23. 14 15. & alijs, quę vtramque ellipsim intrinsecam, & extrinsecam connectunt, longitudinemque tum intrinsecam, tum extrinsecam in superficiebus nuper inuentis. Sit ergo inuenienda superficies iuncturę 14 15, hęc erit longitudinis extrinsecę 38 39. quare à puncto 25. super lineam SQ ver-

jus,

ſus, quam volueris partem transferes interuallum 14 15. quod erit 25 40: ductaque linea 41 42. habebis quoque terminum extrinſecum, nempe longitudinem 24 32. vel 21 8. quod interuallum transferes in 40 42. duceſque 38 42. & erit terminata ab hac parte ſuperficies quæſita. Rurſus transferes 24 34. vel æqualẽ 21 11. in 40 41. At quia ſuperficies iſta quatenus terminat in cylindrũ CA nõ facit ſectionẽ lineã rectã, ideo terminus huius ſuperficiei coniunctiuæ, quã pręſtare volumus linea recta non erit, ideoque aliud punctum medium, per quòd linea flexa ducatur inueniendum erit: Ideo diuiſa linea 2 1 in a ducatur parallela, alijs lineolis continuata a h, deinde h l, deinde l k: habebimuſque longitudinem t k. Deinde diſtantia pũcti a 22. à linea LG aſſumpta trasferemus à G in u, & ducta perpendiculari u r dabit punctum r, diſtantiam ergo iſtam 14 r transferemus in 25 y, ductaque y f transferemus diſtantiam t k nuper inuentam in y f, habebimuſque tria puncta 39 f 41. per quæ ducta linea curua terminabit ſuperficięm coniunctiuam 38 42 39 41. Et ſic ages in alijs ſimilibus.

Ratio verò, & euidentia operationis ex ratione prop. 1. huius ſatis innoteſcit; patet vero ex prop. 22. tract. 25. lineam curuam 39 f 41. ellipſis non eſſe portionem.

PROBL. VII. PROPOS. VIII.

Semicylindri concaui, & rotundi ſuperficiem hinc obliquè à ſuperficie plano ſecti, inde à Cylindro item axi obliquo, in planum extendere, & repreſentare,

Sit datus Cylindrus ABCD, qui ſeeetur, vt oſtenditur ſeorſim, nempe à ſuperficie plana a b, & à cylindri f e ſuperficie, quæ ambę obliquè ad axem c d ſecent, ſeu æquidiſtanter, ſeu non, verſùs tamen eaſdem partes, ita, vt linea a b maximę declinationis ſuperficiei planę ſit in eodem plano ac axis f e, & detur eius ambitus ad axem rectus, cognitus nempe circulus, cuius diameter exterior ſit XE, & interior ſit XF.

Diametro itaque XF fiat circulus LMH, & diametro interiori XF alius eodem centro G, inſuperque addatur alius circulus intermedius, vt placet, diuiſoque altero eorum in quotlibet ſegmenta, ducantur radij M N, 2 1, & alij, & à punctis, in quibus circulos ſecant ducantur parallelæ, tùm diametro LH, tùm diametro GM, à punctis quidem intrinſeci gyri propter diſtinctionem continuę, vt M B & 2 10 à medio punctatæ, vt 3 11. 4 5. & 3 7 ab interno lineolis continuatæ, vt 1 12, 1 9, & producantur, quantùm ſat eſt.

In plano deinde LHPQ, ducatur OR, quæ rapreſentet maximam obliquitatem planæ ſuperficiei, cum axe GS, & rurſùm PQ, quæ item rapreſentet obliquitatem ſuperficiei cylindricæ ſecantis, cuius cylindri ſemidiameter ſit TS.

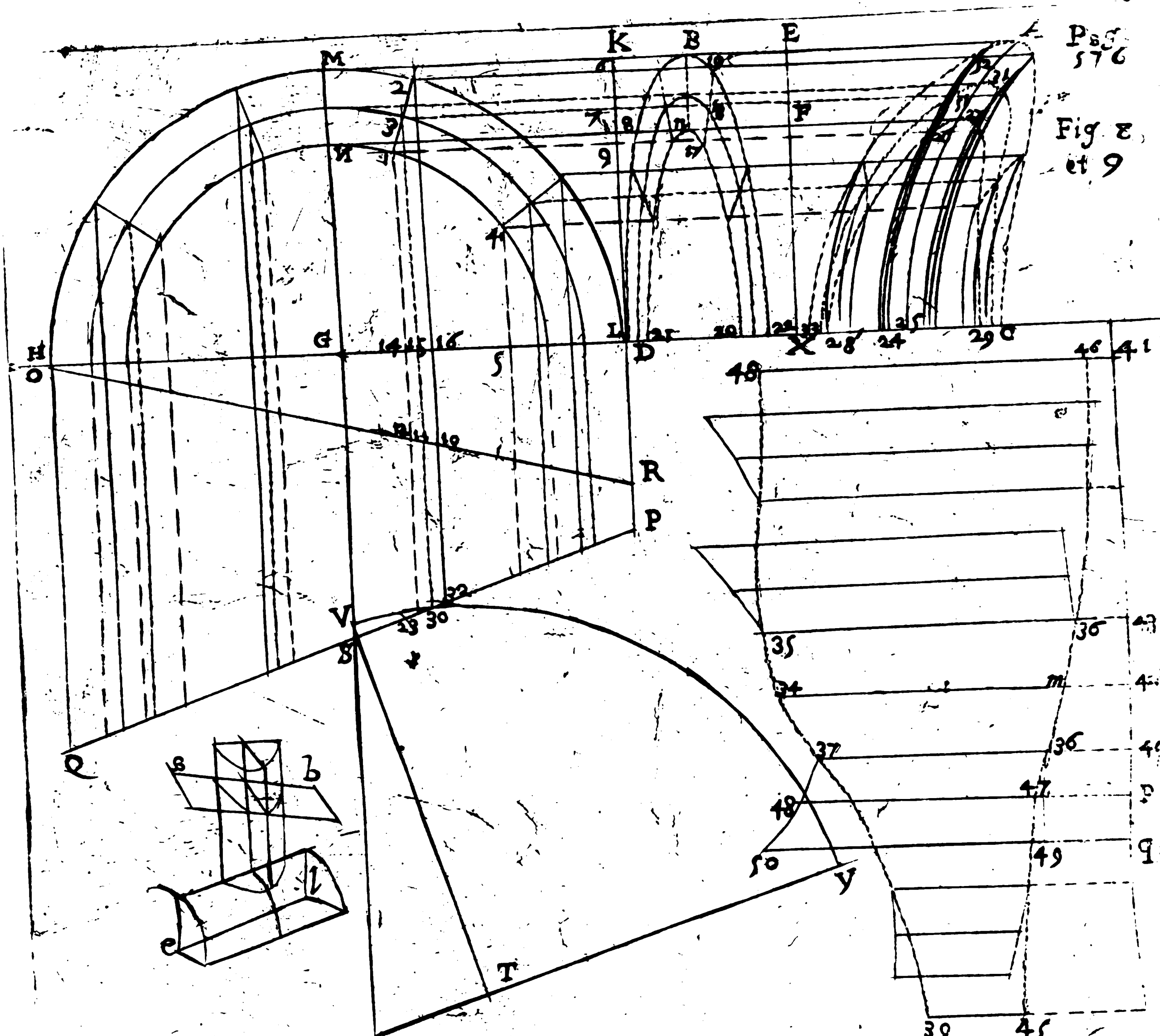
Diſtantiæ itaque, vt 14 12 intrinſeca, 15 11 media, 16 10. extrinſeca aſſumantur, & super parallelas in ijſdem lineis, quibus oriuntur lineæ aſſumptarum diſtantiarum transferantur: nimirum 14 12 in lineolis diſtinctam 1 9 17. à pũcto 9 vſque ad 17. diſtantia 15 11. in lineam punctatam 3 7 18. à puncto 7. vſque ad 18. & ſic 16 10. in lineam continuam extrinſecam 2 6 10. à puncto 6 vſque ad 19. & ita agatur de ceteris; quibus omnibus translatis per puncta in ſingulis parallelis ſignata, quę intrinſeco ſemicirculo naſcuntur duces flexã 20 n. 17 21. quę erit dimidiata ellipſis: Deinde aliam per puncta ſignata in parallelis à medio gyro profectis punctatis, & tandem omnibus maiorem D B 22 per puncta ſignata in parallelis à gyro extrinſeco exortis, quę erit extrinſeca Ellipſis. Coniunges deinde tres ellipſes lineis curuis per puncta tria vnum in lineolis deductis alterum in punctatis tertium in continuis reperta 17 18 19. quę imitabuntur, & ſtabunt loco ſegmenti radij 2 3 1. Quod autem prædictæ circumferentiæ ſint ellipſes, patet ex tr. 25. pr. 22. vbi ſectionẽ cylindri obliquam ellipſim eſſe oſtẽdimus, & pr. 13. tr. 26. par. 1. Et etiam, quòd longitudines 16 10. & 15 11. & cæt. translatæ ſint proportionales ob earum paralleliſmum in triangulo LOHR non completo; quare vt eſt HL ad H 14. ita eſt OL ad 14 12. deducta diſtantia HR ab vtraque, & ſic de alijs, vnde ex prop. 72. tract. 24. Coroll. deſcripta erit ſemiellipſis, & proiectus ſemicirculus LMH; & alij interiores.

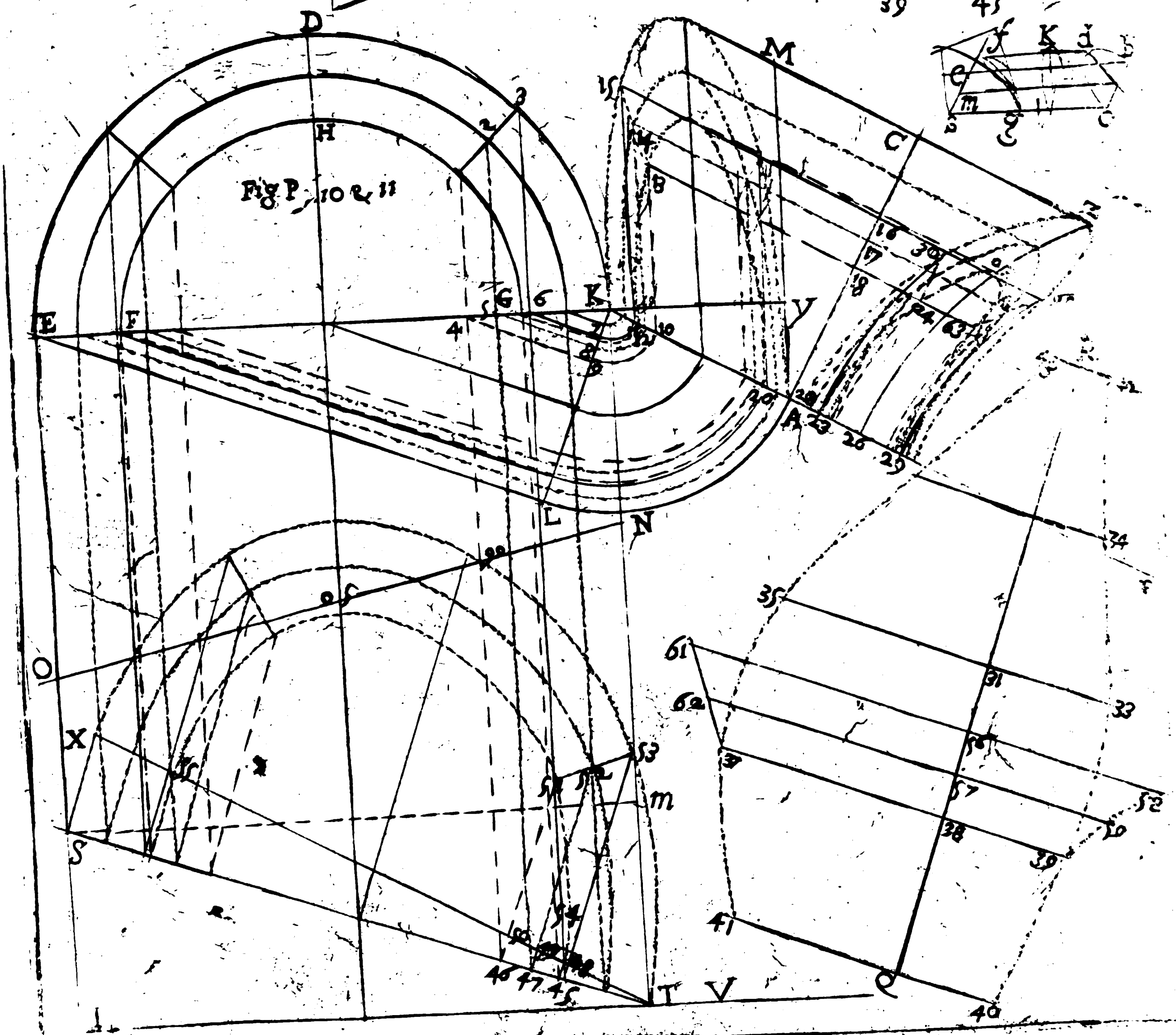
Sed modo vertamus opus ad deſcribendas orbitas; quas cum cylindri ſuperficie obliquè ſecti facit ſemicylindrus propoſitus: Sciendumque eſt quaſlibet ſuperficies parallelas axi in obliquo cylindro ex TS rad. non efficere ſectiones circulos licet cylindrus ſit circularis, ſed ellipſes ex prop. 22. tract. 25. Et quia omnes eundem angulum faciunt cum axe cylindri ſecantis omnes erunt ęquales ex eiuſdem prop. Coroll. ideoque oportebit priùs dato diametro cylindri ſecantis inuenire ſaltem quartam ellipſis, cuius ſemidiameter minor eſt TS, vel TY, nempe ſemidiameter circuli, qui cylindro ſecanti baſis eſt, & alter TV, prout TV parallela axi SM cylindri ſecti tranſeundo obliquè per centrum T augeſcit. Qua ellipſi deſcripta ex repertis axibus TS, & TV. Fiat modulus ex papyro, ſeu aliqua alia materia, vt non tibi ſint deſcribendæ tot ellipſes æquales, quot opus ſunt. Deinde aſſumpta diſtantia 14 23. & alijs linearum parallelarum deductarum, menſuretur ab L verſus Z ſuper lineã LZ, & ſit L 24. Sic G S ſit L 25. applicato dein modulo TVY, ita vt linea VT cõgruat lineæ ZL, & punctum V puncto 24. deducatur ellipſis 26 24. ſic applicato rurſùs modulo ſuper eandem lineam eodem modo, ſed ita, quod punctum V congruat puncto 25. deducatur portio ellipſis 25 A, & ita fiat de cæteris, & vbi protractæ ellipſes ſecant parallelas lineolis ductas 27 N, & 26 I, & cęteras à ſemicirculo intrinſeco deuectas ea puncta notentur, & per ea deducatur orbita 28 27 26 29. Sic fiat de lineis punctatis deſumendo diſtantias 15 30. & GS, & cęteras, at transferendo illas ob L verſus Z, & deinde ſingulis punctis eodem modulo elliptico applicato alię portiones ellipſium trahantur, & per puncta quibus parallelas, vt 4 31. flexa ducatur: Iterumque idem fiat de diſtantijs in lineis continuis deſumptis 32 16. quod interuallum cum cæteris in lineis eiuſdem generis deſumptis transferatur ab L verſùs Z. Et applicato eodem modo modulo TVY portiones ellipticę ducantur, & vbi ſecant parallelas continuas, vt MA per ea puncta, vt per A orbita ducatur quę erit 33 A C. Et tandem ipſæ orbitæ, & puncta per quæ deducta ſunt lineis, vt 27 31 A, & 26 51 52. quę etiam flexæ erunt, coniungantur.

Itaque portiones ellipſium, vt 24 26. & aliæ diſce-

Pag. 576

Fig. 8 et 9





discedentes à distantijs 14 23. eadem quę L 24. in plano parallelo axi SG eodem, qui L 25. proiectę occurrunt lineis 1 26. & alijs, & puncta, quibus illę 1 26. & similes occurrunt superficiei cylindricę decernunt. Vnde, & longitudines exhibent 14 23. non quidem in plano: sed in sua naturali eleuatione, quę est lineę 9 26.

Iam verò omnis apparatus concinnatus ad superficiem, tum extrinsecam, tum intrinsecam extendendam.

Ducatur linea recta 40 41. & singulę partes circuli interni per eam extendantur, vt IN ęqualis lineę 42 43. cęterę cęteris partibus, & ab ijs punctis erigantur perpendiculares, vt 42 34. 43 35. & alię. Deinde sumatur distantia à linea LK ad quodlibet punctum in lineolis parallelis repertum, vt 9 17. & transferatur à puncto 44. in 36. & punctum 9 26. in eadem lineolis contexta, & transferatur super eadē 44 37. & sic fiat de omnibus alijs punctis in ijsdē parallelis discontinuis repertis. Et iam in perpēdicularibus 44 37. 42 34. & 43 35. & alijs hinc vsq; ad 46 38. inde vsq; ad 45 39. cōsequemur puncta, per quę ducta flexa 46 36 45. & 39 34 48. dabit superficiem concauam interuam cylindri propositi 46 45 48 39.

Si verò superficies externa in planum proiicienda sit, id non alio modo peragemus; sed puncta in lineis continuis, quę proueniunt à semicirculo extrinseco quęrenda V.g. in lineis MA, vt BK, 6 19. & alijs eiusdem generis.

Patet verò assignatam superficiem esse intrinsecam cylindri, quia altitudines, vt 42 44. sunt semicirculi intrinseci in partes octo ęquales diuisi, cuius vna pars IN, à perpendicularibus 44 37. & alijs, in quas distincta est superficies prędicta: Longitudines verò patet esse V. g. lineę 14 12 23. sed cum additamento, quòd elliptica curuitas cylindri secantis superaddit. Hę curuitates ellipticę ab ellipsi deductę V. g. curuitas 24 26. à puncto L distans, vt 14 à 23. prouecta vsq; ad altitudinē 26. superaddit aliquid, & fit longior linea 9 26. quam 24 L, & consequenter, quàm 14 23. Ideoque desumpta longitudo 27 8. dabit longitudinem superficialem, eo in puncto 42 34. à quâ detracta longitudo 42 m ęqualis longitudini 8 n relinquit longitudinem cylindricę superficiei eo in puncto m 34. ęqualem longitudini n 8. & sic de alijs punctis.

PROBL. VIII. PROPOS. IX.

Superficies coniunctiuas eiusdem semicylindri plano extendere.

SIt iunctura 1. 2. 3. plano extendenda; quia 36 37. superficiei intrinsecę extensa ad eam ex ordine pertinet, hanc superficiem coniunctiuam ei addemus; Sumpto itaque interuallo 1 3. & 3 2. transferatur, & eodē interuallo parallelę eidē 36 37 ducantur 47 48. & 49 50. Deinde sumatur interuallum 7 18. in punctata, & 19 6 in continuata, transferaturque 19 6. in q 49. & 7 18. in P 47. ducaturque linea, quę flexa per tria puncta transeat 36 47 49. Deinde assumptis distantijs 7 51 transferatur in P 48. & 6 52. in q 50. & per tria puncta ducatur flexa 37 48 50. eritque iunctura 36 49 37 50. quę per 1 3 2. transit. Eodem autem pacto propositio ostenditur, ac precedens.

PROBL. IX. PROPOS. X.

Superficiem semicylindri inuenire, dato eius ambitu ad axem recto, qui secetur à superficie plana, nec axi, nec plano per axem, & per diametrum ducto rectangula; ab alia autem parte conica superficie secetur, cuius coni axis ipsius axi rectangulus sit.

DIffert hæc propositio ab antecedenti. Nam plana superficies secans erat plano per axem cylindri secantis ad rectos angulos; at verò hęc superficies plana nequaquam, vt est videre seorsùm: nam cylindrus a e c d b secatur à cono g a e f, & planum secans c b d plano g b per axem u m cylindri transeunti non est perpendiculare, vt est l i K, quod prę supponitur cognitum, nempe esse circulum (posset verò, & esse ellipsis, vt, & in praced. propos. etiam poterat esse ellipsis) Axis tamē coni g f est ad angulos rectos axi m u. Sit ergo circuli cylindri interni semidiameter AB, & externi AC, ex quibus interuallis duo circuli ducantur KDE, & GHF diametro extrinseco AC intrinseco AB, aliusquemedius.

Diuisisque, vt supra illis circulis KDE, vel GHF radijs 1 2 3 deducantur perpēdiculares 1 4 lineolis 2 5 punctis 6 3 continua deductæ. Dato verò quod ad alteram partem magis distet à KE recta ad axem superficies quantùm est MT ad punctum K ducatur æqualis LK, & à punctis 6 5 4, & omnibus alijs à perpendicularibus 1 4. & cæt. notatis in diametro KE ducantur parallelæ, & et normales 6 7. 5 8. 4 9. & catere. Deinde ducta AK; vtcumque fiat angulus CAM: quo planum num secans obliquè AM declinat à plano CA secante axem rectè, & facto centro in K lineæ arcubus 9 10. 8 12. 7 11. deducantur ad AK & à punctis quibus secant 10 12. & 11. & alijs erigantur parallele ad AM, vt sunt 10 13. 12 14. 11 15.

Assumptis verò altitudinibus 1. 4. & alijs transferantur super AC ab A, & 1 4. sit A 18. & 5 2. sit A 17. & 6 3. sit A 16. & sic agatur de omnibus alijs altitudinibus, seu sinubus, & per puncta signata parallelæ ducantur 15 16. 14 17. & 13 18. & cetere, occurrent enim primò ductis punctatæ punctatis, continuę continuis, & interruptæ lineolis interruptis: Per puncta itaque vbi se continuæ secant ducatur ellipsis A 15 K, & per puncta vbi punctatæ se tangunt, ducatur ellipsis 20 14 21. & per puncta vbi interruptæ se secant vltima, minorque ellipsis ducatur 19 13 21. Erunt autem hę flexę dimidiæ ellipses ex 22. tract. 25. quia planum secans obliquè ad axem cylindrum facit sectionem ellipsim. Coniunganturq; tandem puncta 13. 14. 15. & similia, & iam erit parata constructio, quæ ad sectionem planam spectat.

Sit deinde axis coni IV, cuius basis circulus, & superficiei secantis vestigium NO: A singulis punctis V.g. 90. assumantur rectangulè distantię ab axe IV, & facto centro in P, ducatur arcus 23 24. sicque fiat de cæteris punctis V. g. assumpta puncti 95. distantia rectangulè ab axe IV cons NO eodem centro P ducatur circuli arcus 26 27. &c.

Puncta verò pertinentia ad idem genus linea-

 rum

rum nectantur flexis, vt ducta est 29 27 24 23. nectanturque puncta 24. 30. flexa, que portiones ellipsium erunt ex 6. tr.23. siquidem sunt plana secantia cylindrum per axem 3.2.1. secundum eam sectionem, quam secando conum in eius superficie relinquunt. Iamque est proiectus cylindrus in XMZ 39 A, & portio coni, quæ ab ipso secatur in 28 30. Z 60 29. Et obliqua superficies secans obliquè in K 15. A, vt ex 12. tract.25. par.1. colligi potest.

Hoc apparatu præstito, iam superficies interna eodem modo, ac superior in planum distenditur. In Linea seorsim ducta QR circuli intrinseci partes transferantur, quarum vna est IH translata in 31 38. & per puncta diuisionum rectæ perpendiculares ducantur 33 35. 39 37. & cęt. Assumpta deinde distantia à linea AC ad quodlibet punctum pertinens ad superficiem intrinsecam linearũ discontinuarum vt 18 13. transferatur in 38 37. deinde assumpta distantia 18 63. transferatur in 38 39. & sic agatur de alijs ad ellipsim intrinsecam 19 13 10, & orbitam alteram 29. 27 24. pertinentibus. Habebimusque puncta 40 39 33 34 42. & cætera, per quæ flexa æquabili manu trahenda; sic & habebimus puncta 41 35 43. & alia, per quæ similiter flexa ducta totam superficiem extrinsecam cylindri propositi exhibebit 40 41 42 43. Extrinseca verò eodem pacto fiet assumendo puncta ad extrinsecam orbitam, & ellipsim spectantia.

Sed si quis ipsam sectionem, & semiellipsim; qua planum secat cylindrum datum in sua naturali magnitudine exoptet; id consequetur hoc modo. Ad ST à punctis 6.4.5. & cæteris perpendiculares ad KB ducatur, nempe 4. 46. 5 47. 6 45. & cęt. ab istis verò punctis ad sectionis lineam ST perpendiculares rursùs ducantur, vt 45 48. 47. 49. 46 50. & quantum sufficit ad aliquatenus maiorem altitudinem, quàm AM: assumpto deinde interuallo AY transferatur in SX ad eam partem, quà magis sectio ST accedit ad KB, & ducatur XT. Deinde altitudines 10 13. 12 14. 11 15. transferantur quælibet in lineam eiusdem generis, & correspondentis, & fint 48 53. 49 52. 50 51. Sicque fiat de alijs, & per puncta in lineis eiusdem generis æquabili manu ellipsis ducatur V. g. per puncta pertinentia ad lineas continuas ducatur ellipsis X 53 T, & aliæ per alia, vt meliùs vides, & habebis superficiem X 53 T 54 51 55. ortam à sectione obliqua cylindri, & est ellipsis: sed cuius diameter XT est ex coniugatis non à generatione, quod autem talis sit, patet quod ST partes proportionales KB lineæ partibus, obtineat, & applicatas item vt 50 51. etiam proportionales ob parallelas 15 16. & cæteras, quibus detruncatur, & terminatur, vnde ex prop. 72. Coroll. tract.24. ellipsis erit, quod, & potest ostendi ex prop.22. tract.25.

PROBL. X. PROPOS. XI.

Superficies coniunctiuas eiusdem Cylindri reperire.

HOc fit eodem modo, ac superiori. Nam ducuntur parallelæ per puncta 56. 57. ad interuallum à linea 39 37. quæ est 1. & 2. rursusque inter 2. & 3.

Sic verò terminabuntur interualllum 15 18. transportabitur in 56 58. & 17 14. in 57 60. & per puncta 37. 62. 61. ducatur flexa 37 62 61. Sicque præstabitur ad aliam partem; nam interuallum 16 60. transferatur in 58 56. sicut, & 17 61. in 57 59. & per tria puncta flexa ducetur 39 58 39. & erit superficies coniunctiua 58 59 37 61. idemque ages in alijs.

PROBL. X. PROPOS. XII.

Semicylindri superficiem à perpendiculari eiusdem rationis, sed Cylindro secti, & data sectione plana declinante, & inclinata, alio modo in planum proijcere.

IN præced. pr. Cylindri ambitus circularis axi rectus præsupponebatur cognitus; hic autem ipsa sectio plana præsupponitur cognita, at verò ambitus cylindri, seu semicylindri conquirendus est, & posset quidem eodem modo exquiri, ac præcedens, sicut, & præcedens probl. hoc modo in opus deduci, sed doctrinę abundatioris gratia.

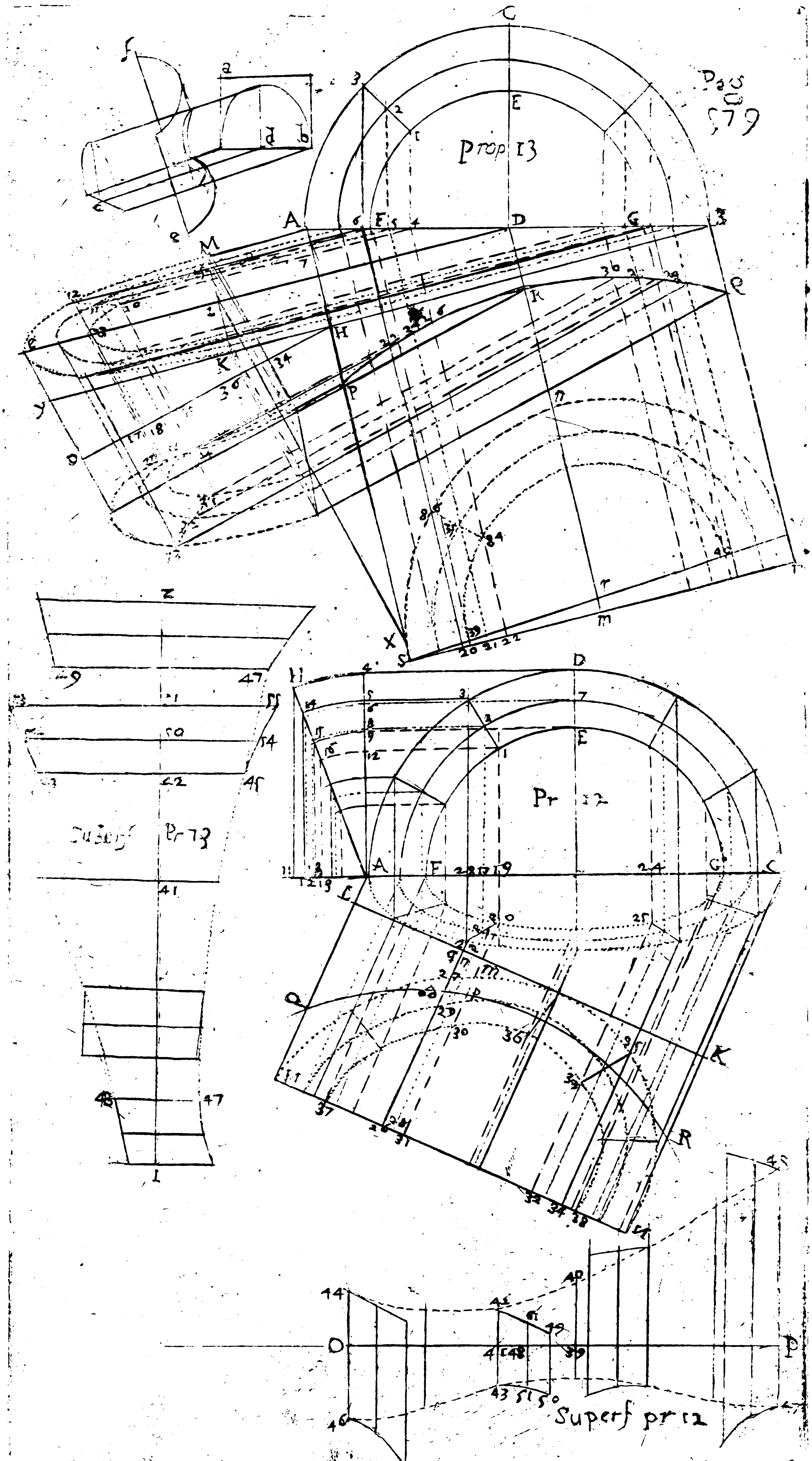
Sit data sectio conica plana circularis ABDCGEF, & inclinatio ad planũ per axem ductum exprimatur per lineam AH inclinatã ad AC; declinatio verò per LK ad AC non æquidistantem.

Per puncta 1. 2. 3. quibus radij de more ducendi secant tres circulos, (vt in alijs factum) ducantur parallelæ ad diametrũ AC, vt sunt D 4. 7 6, 3 5. 2 8. & cæterę vsq; ad A 4 & facto centro in A, iterum deducantur arcubus ad AH, vt linea AH representans sectionem sit æqualis secundùm omnes diuisiones lineæ A 4. & ab omnibus punctis, in quibus secatur ab arcubus prædictis perpendiculares, vt sunt continua H 11. & 14 12. punctata 15 18. & lineolis producta 16 13. & aliæ cadant.

Deducantur rursùs ab ijsdem punctis 7. 2. 1. & alijs similibus perpendiculares ad AC, quæ, & producantur vlteriùs 1 19 20. 2 21. & 3 22. Assumpta verò distantia A 13. interruptæ perpendicularis 16 13. à puncto A, transferatur à puncto 19. vsque ad 20. & 24. vsque ad 25. sic distantia A 18. in 17 21. & ad aliam partem quoque, & distantia A 13. in 23 22. & sic de cæteris distantijs, hinc inde illas transferendo, vt in prima factum est: Per puncta verò pertinentia ad eiusdem generis lineas, vt per F 20. 25 G, & alia, flexa curuetur, & erit proiecta ex tract.24. pr. 72. vel ex 16. prop.16. tract.26. par.1. semiellipsis, sicut, & per cætera puncta aliæ ellipses ducentur, deinde quælibet tria puncta, vt 20. 21. 22. nectantur rectis.

Ab istis verò punctis omnibus perpendiculares ad sectionem obliquam declinantem LK agantur, & producatur quantùm sufficit, deinde assumpta distantia 12 14. originata à puncto 3 transferatur super lineam habentem eandem originem à linea MN, & sit 26 27. & sic ad aliam partem 34 35. sic altitudo 18 15. proueniens à 2. transferatur super lineam 21 28. habentem eandem originem, & sit 28 29. Idem fiat de altitudine 13 16. & trãsferatur in 31 30. lineam originatam ab 1. & idem fiat ad aliam partem qualis est 32 33. & sic de omnibus alijs fiat eandem distantiam hinc inde transferendo, perque puncta pertinentia ad idem genus linearum flexæ ducantur, quæ, & erunt ellipses, vt constat ex Coroll. 2. propos.72. tract.24.

quia


Prop 13
Pr 12
Superf Pr 13
Superf pr 12

quia tum LK secta proportionaliter est, vt AC ob parallelas; sicut, & altitudines II H, & cæteræ sunt altitudinibus BD, & cæteris proportionales: quare erunt descriptę tres ellipses, quæ exprimunt Ellipses axi rectangulas existentes, quod requiritur, vt superficies expetita in planum distendi possit.

Ducta itaque seorsim lineâ OP, sit superficies interior extendenda. Semiellipsis 37 30 36 33 38. cum suis omnibus partibus in lineam ipsam OP extendatur, quo facto per puncta ad illam perpendiculares ducantur, vt 39 40. 41 42 43. Sumatur deinde interuallum m 20. & transferatur in 41 42. deinde interuallum m P, & transferatur in 41 43. & sic fiat de cæteris omnibus interuallis linearum interruptarum, quæ pertinent ad intrinsecum circulum FEG, & ab illius punctis originem trahunt interclusis inter ellipses F. 20. 25. G. & KL, sicut, & inter QPR cylindrum proiectum, & eandem LK, & inuenies perpendicularium 43 41 42. & cæterarum longitudines. Quamobrem per puncta extrema 44 42 40 45. ducta flexa, & alia simili linea per puncta 46. 43. 47. & cætera, istę duæ terminabunt superficiem cylindri internam 44 45 46 47. quæ exquiritur.

De superficiebus verò coniunctiuis non multa dicenda cum latitudo 30 27. vt est 41 48. altitudo verò q 22. det altitudinem 49 48. & q 60. det altitudinem 48 50. Vnde ducta per puncta 42 49. recta, & flexa 43 51 50. dabit superficiem coniunctiuam 42 49 43 50.

PROBL. XI. PROP. XIII.

Semicylindri superficiem in planum proijcere, cuius sectio plana declinans, & inclinata nota sit, seceturque Cylindro ad aliam partem rectangulo ad axem.

Sit semicylindri nota sectio plana effecta, quæ sit circulus, seu annulus planus ACBGEF: Sitque linea declinationis BH, at inclinationis LX, vel angulus DLX. A portionibus radiorum 1. 2. 3 & cæteris ducantur perpendiculares; ab extrinseco quidem circulo continuę, à medio punctatæ ab intimo interruptæ, vsque ad AB, vt 1 4. 2 5. 3 6. & à punctis, in quæ incidunt, ducantur perpendiculares lineæ AH, vt sunt 4 7. 5 8. 6 9. & producētur vsque dum sufficit. Ducta deinde parallela KM, ipsi AH assumantur altitudo 4 1. & feratur in 7 10. sicut, & 5 2. & collocetur in 8 11. & 6 3. & transportetur in 9 12. & sic fiat de cæteris alijs interuallis, transferendo ea super illas lineas, quę originem ducunt ab ijs punctis, quæ interualla transferenda terminant, vt ED in L 13. Per hæc autem puncta, quæ ad idem genus linearum pertinent V. g. interruptarum ducatur orbita 14 13 10 7. & sic per alia puncta reperta, tum in punctatis; tum in continuis, vt extrinseca K E 12. M; quæ erunt semiellipses, quòd AH proportionaliter diuisa sit, vt constat ex Coroll. 4. propos. 72. conicorum tract. 24.

Ducta verò NO perpendiculari ad lineam inclinationis LX ad illam perpendiculares ducantur ab ellipsibus, iam descriptis, & à singulis earum punctis ab ijs, quæ in continuis sunt continuę, & ab ijs, quæ in punctatis punctatæ, & tandem ab illis, quæ in interruptis sunt interruptæ, quales sūt 10 19. 11 18. 12 17. & producatur quantùm sat est.

Deinde ab ijsdem punctis, quę sunt in diametro AB perpendiculares ad BH producantur 6 20. 5 21. & 4 22. & cęterę omnes, seruata earum differentia ob confusionem vitandam, quę transibunt per arcum PRQ cylindri perpendiculariter erecti ex thesi super LNX. A pūctis igitur, per quę transibunt, duces perpendiculares ad LX, vt sunt 26 27. vel 28 33. 29 32. 30 31. & vbi occurrunt lineis parallelis ad LX, notentur puncta, prout quælibet lineam eiusdem generis inuenit, ita 31. punctum pertinet ad interruptas 31 30. & punctum 32. ad punctatas 32 29. sicut, & 33. pertinet ad continuas 33 28. Per puncta itaque, quæ in lineis eiusdem speciei inueniuntur flexę ducantur orbitæ, quæ ellipses non erunt, cum non sit secans superficies, cuius vestigium PRQ, plana.

Tandem deducendæ sunt ellipses, quæ cylindri axi perpendiculares sunt, ad quod in opus deducēdum ducta recta SB assumatur interuallū 34 35. & sit VT, ducaturq; SV, nam si AB ponatur orizontalis, vel eius vicaria KM linea BH, cuius loco stat SV, se eleuabit magis à plano versùs B, quàm versùs H, quantum est spatium VT: A puncto autem 34. versùs O assumantur omnium linearum parallelarum interualla, & transferantur in lineas correspondentes ab ijsdem punctis primitiui arcus originatas, tum extrinseci, tum medij, tum intimi. Sic interuallum 34 O à D prouenientis p lineas E O, DE, transferatur in lineā ab eodē puncto profectam D, & sit m n. Sic 34 19 in lineam 22 84. prouenientem à 4. sic 34 18 in lineam 21 35. profectam à 5. & tandem 34 17. originatam à puncto 6. in lineam 20 86. ab eodem puncto 6. ab initio propagatam, & idem agendum de cæteris, & tandem per pūcta ad idem genus linearum pertinentia ducatur Ellipsis 39 84 40. & per alia puncta extima S 86. n. V, & cætera ellipsis extima 5 86. n. V, & ita fiat in ducenda media, deinde tria singula puncta rectis copulentur, vt 36 35 84. eritque totus apparatus ad superficiem extendendam necessarius confectus.

Quod autem 39 84 40. & cæteræ sint ellipses patet. Nā diametro 39. 40. sunt applicatæ, cūsit 39. 40. diameter proportionaliter sectus, ex 13. l. 6. vt AB, & ipsæ altitudines, sint quoque proportionales altitudinibus primitiuis, qualis vna est 7 10. æqualis 4 1 ob parallelas per HO deductas, vnde HO secta est, vt YH in triangulo HOY.

Istis itaque omnibus præparatis, vt superficies interna dati cylindri in planum distendatur, trahatur linea ZI, & super eam quęlibet pars semiellipsis 39 84 40. extendatur, vel potius subtensæ rectæ ipsi minimę, quàm fieri possit 39 84 & cæterę cæteris, perque puncta 41. 42. & per cętera perpendiculares ad ZI ducantur, quorum terminationes exquirendæ sunt. Quia ergo pertinet ad intrinsecam superficiem à linea HO assumatur distantia 19 10. & sit 42 43. translata, iterumq; 19 44. & sit 42 45. sicque in alijs fiat distantias à linea HO ad ellipsim intrinsecam 15 10 14. & ad orbitā intrinsecā 44 31 91. & p pūcta inuenta 49. 43. 48. & cęt. flexę ducantur. Nam constituent superficiem intrinsecam 49 48 47 45. Quòd ostenditur eodem argumento, ac prop. 2. h. ex principijs propos. 1. huius.

Si verò superficies coniunctiuas exoptemus distantia 86 35. & 35 84. à linea 45 43. mensuretur, & sit 42 50. & 50 51. perque puncta 50 51

Dddd 2 per-

perpendiculares ducantur, quæ terminabuntur transferendo distantiam 18 11. in 50 52. & 17 12. in 51 53. ducendoque rectam 53 52 43.

Rursúsque transferendo interualla 18 54. & in 50 54. & 17 27. in 51 55. ductaque flexa 55 54 45. habebimus exoptatam superficiem 53 43 55 45.

Nota, quòd, si cylindrus circularis secans sit iacens non perpendicularis plano, cui insistit datæ sectiones V. g. 28 33. erunt rectæ, quod si iaceat, & eius curuitas secto cylindro obijciatur rectangulè erunt circuli æquales à linea PX ducendi si sit obliquus, tunc ellipses eędem omnes ęquales ducendæ sunt ex prop.22.tract.25. quod si non sit circularis, at ellipticus omnes erunt ellipses ęquales ex prop.22. Coroll. Tract.25. quod si non sit cylindrus: sed conus iacens, tunc circuli omnes erunt diuersi; at si obliquè iaceat, tunc omnes erunt ellipses diuersę, sed similes ex prop.4.tract. 25. Si verò conus sit perpendicularis, vt in hac propositione supposuimus cylindrum, tunc sequenti modo agendum est.

PROBL. XII. PROPOS. XIIII.

Cylindri superficiem, qui à cono, cuius axis sit ad eius axem normalis, secetur superficiebus intrinseca, & intrinseca parallelis inuenire.

Sit conus, cuius vertex A, & trianguli per axem latus AB, cuius basis circulus, qui secet cylindrum, cuius sectionem planam faciat annuli quadrans DEIF; Coni verò crassitudo sit CB eadem; que HV circulorum centro X ductorum, radij XV, & XH equalibus MC, & MB. Diuiso itaque triplici quadrante IF. & ED, & cæt vt in alijs factum est in quaslibet partes V.g. in tres ducantur radij I 2. 3. & cæteri, ab istisque punctis parallelę ducantur diametro HD, ideſt 1 4. 2 5. & 3 6. & cæt. sicut, & aliæ parallelæ radio HE, quæ sint 3 7. & 2 8. & 1 9. & alias ab extimi quidem circuli diuisionibus continuę, à medio punctatæ ab intimis interruptę distinctionis gratia, quarum postremarum longitudines à linea A M assumantur, vt 10 7. & interuallo 10 7. centro X arcus ducatur 13 6. vsque dum occurrat lineę 6 3. quę ab eodem puncto 3. natalia ducit, ita de linea 11 8. quo interuallo centro X ducatur 14 5. & cæt.

Per singula ergo puncta, quibus fiunt intersectiones i læ arcuum istorum, vt 13 6. & parallelarum 3 6. quæ ab eodem arcu originem trahunt flexa ducatur 15 6 16 17. & erit in planum subiacens, & in basim ipsam coni proiecta, extrinseca orbita, quam cylindri superficies occurrendo superficiei coni efficit, sic 13 5 18. erit proiecta orbita intermedia, flexa autem 14 4 19. orbita intima ab ambitu F 11. superficiei cum superficie coni causata. Quæ regula etiam obseruanda est in proiiciendo gyro, qui in superficie coni interna imprimitur, sumendo interualla normalia inter lineam M A, & singula puncta in CL reperta, vt sunt 10 20. & centro X ducendo arcus 21. & 22.

Patet autem hæc proiectio, nam circulus ille, qui transiret per 10 7. parallelus basi est: quare ex prop.9. tract.26. in circulum cuius arcus 13 6 æqualem proijcietur. Distat verò à sectione ipsa per axem coni ducta, & cylindri quantum est subtensa 10, 3. vel distantia inter axem DH, & parallelam 36. ergo 6. erit punctum 3. commune vtrique superficiei coni, & cylindri proiectum, quæ se in arcum D 3 E curuat, & ita fare de alijs.

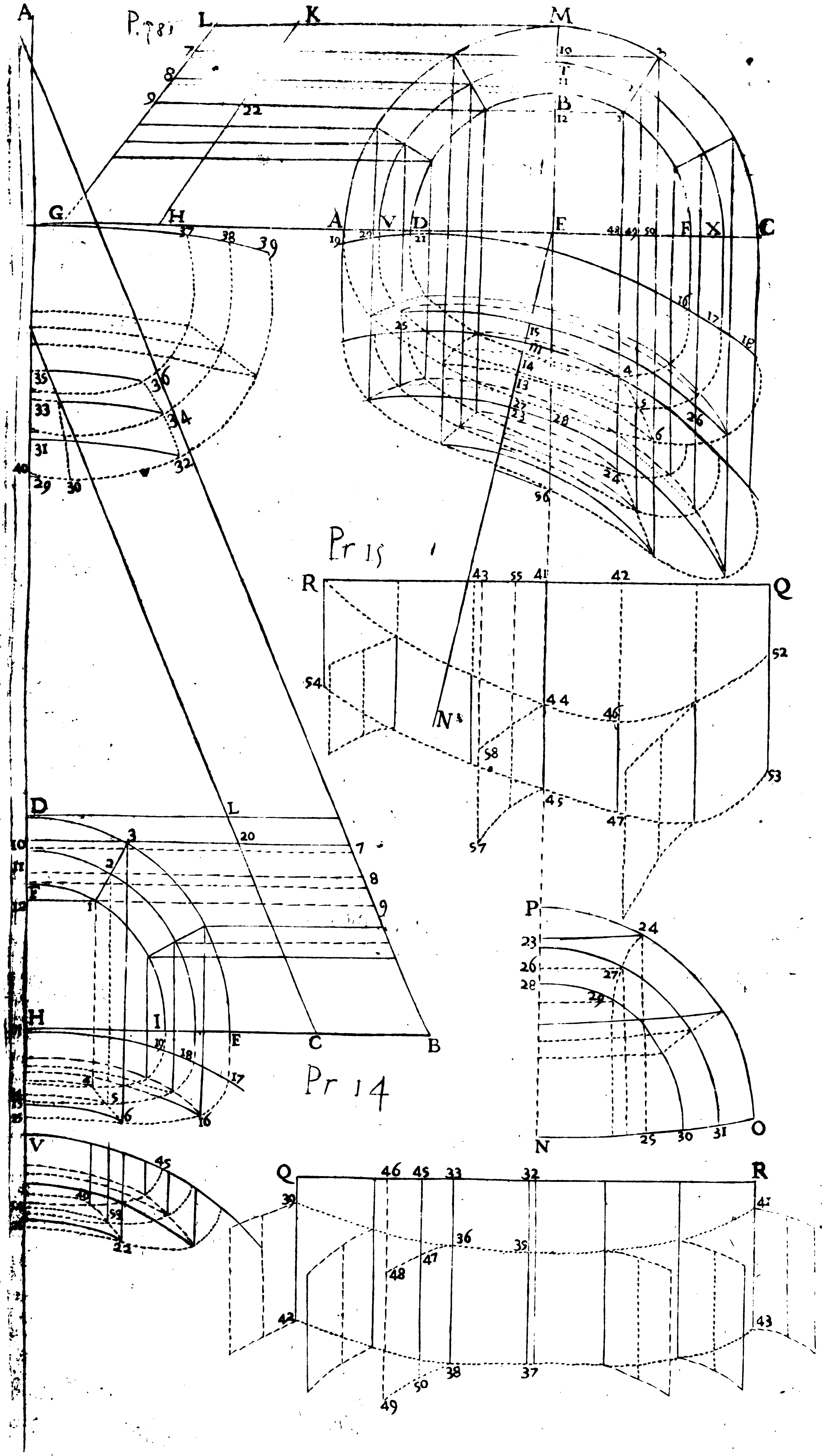
Nunc sit proiicienda quoq; superficies illa, quæ coni intercipitur inter superficiem extimam, & intimam cylindri. Accipiatur interuallum AB, & centro M ducatur arcus NO. Sic interuallo A 7. centro M arcus trahatur 23 24. & fiat eiusdem longitudinis, ac arcus 13 6. quod potest fieri ducendo parallelam ad eandem distantiam PN à diametro HD, qua ducta est 3 6. abſq; sensibili errore, sed exactiùs assumēdo singulas partes 13 6. & trāsferendo illas in arcum 23 24. & idem fiat de omnibus alijs punctis. Rursusque interuallo A 8. à centro M ducetur arcus 26 17. & eadem mensura determinabitur, & ita habebimus singulorum orbitarum conica superficie factarum proiectionem, nempe extimæ quidem D 3 E superficiei proiectionem P 24 O intermediæ 23 27 31. Intimæ verò FI proiectio erit 28 29 30. & consequenter totius superficiei conicę inter vtramque superficiem cylindricam intercepta proiectio erit superficies P O 30 28.

Probatur ex prop.2. tract.31. Nam arcus à vertice coni ductus, & eiusdem longitudinis, ac arcus basis, vt est arcus 23 34. subtendit superficiem æqualem superficiei coni, qui arcu basis eiusdem mensuræ 3 6 determinatur, quare cum arcus 13 6. decernat in basi punctum 6. proiectum decernet etiam in superficie conica punctum, 24. quod circulus D 3 E cylindri se intersecando cum circulo coni, cuius diameter 10 7. parallelo basis imprimit in ipso cono, & sic de alijs: cum ergo habeamus plurima puncta in superficie coni à conicis circulis effecta, dum secant circulos extimos cylindri DEI, semper vbicumque secet cylindrū, sibi ipsis æquales ipsum gyrum impressum in superficie coni P 24 O delineare poterimus, & sic alios quoque intermedium, & intimum, qui superficiem illam concludunt, vnde eam habebimus in plano extensam P O 30 28.

Oporteat postea delineare superficiem cylindri inter superficies conicas extimam AB, intimam CL interceptam. Ducatur itaque linea RQ, quæ rapresentet sectionem HE, in ea quæ extendatur circulus F 11. intimus, cuius superficiem delineare volumus interclusam inter CL, & BA, singuliq; eius arcus pariter transportetur V.g. FI in 32 33. ducatur postea à singulis punctis 32. 33. & cæt. normales 32 37. & 33 38. & aliæ. Inque eas à linea QR distantię transferantur H 14. in 32. & 35. & H 42. in eādem in 32 37. sic 34 4. transmigret in 33 36. & 34 40. in 33. 38. & sic de alijs. Deinde puncta à flexa 14.4.19. desumpta flexa vinciat 39 35 41. & à flexa 42 40 45. desumpta pūcta, alia curua vniat 42 38 37. & habebimus superficiem 39 41 42 43. extensam, quam exoptamus.

Patet probatio ex cęteris modis, quos supra declarauimus, cū eodē modo, priùs operati fuerimus.

Si tandem superficies coniunctiuas quis exoptet, quarum sectio est 1. 2. 3. interceptas inter superficiem extimam, & intimam coni eodem modo operabitur, ac in cæteris. Translatis .n. distantiis 1 2. & 2 3 in 33 puncti 1 rappresentatiuo in 45. & à 45. in 46. deducātur normales 45 50. & 46 49. deinde à punctis 45. in 47. transeat interuallum 51 5. & 46. in 48. interuallum 52 6. rursúsque ab iisdem punctis 45


P.781
Pr 15
Pr 14

& 46. transportetur distantia 51 53. & 52 22. & fiut 45 50 & 46 49. punctaque flexis nectantur & habebimus superficiem 96 48 49 38. coniunctiuam pertinentem ad coniunctionem 1 23. & sic operare in alijs, omnesque consequeris.

THEOR. II. PROPOS. XV.

Cylindri superficiem inuenire, qui à coni gemina superficie non parallela secetur ad eius axem perpendiculari, & axis coni axi Cylindri non occurrat.

DIffert hæc propos. à præced. quia ibi fingebatur axem coni super axem cylindri insistere normaliter: hic autem nequaquam, sed extra cadere licet normaliter plano per axem cylindri occurrat.

Sit semiannulus cylindri AMC DBF, qui coni secetur gemina superficie externa GL interna HK, cuius basis circularis, diameter EN, vel EG, & distãtia sectionum superficierum coni in basi n m: & axis cylindri ME axi coni super N insistenti non occurrat.

Primo proiciemus superficies coni à cylindro interceptas; Quod vt efficiamus iuxta morem diuidemus semicirculum DBF in partes libitas, & ducemus normales 1 4. 2 5. & 3 6. diametro AC, & ei parallelas 7 3. 8 2. & 1 9. & alias similes ab alijs intersectionum punctis. Distantiæ verò singulę ab axe BM coni ad superficiẽ LG accipiantur nempe 10 7. & eo interuallo ab N centro ducatur arcus 3 6. donec occurrat normali 6 3. ab eodem puncto 3. interualli 3 7. nascenti. Sic interuallũ 8 11. dabit arcum 14 5. & 9 12. interuallum 15 4. sic ML dabit arcum 27. & 28. sumitatis 28. punctum, & si id agatur de omnibus alijs punctis obtinebimus singula puncta arcuum DBF, & AMC, & intermedijs ipsorum proiecta, per quæ ducta flexa 21 4 16. rapresentabit coni sectionẽ cũ extima cylindri superficie, cuius sectio AMC, proiectã.

Sic 19 6 18. eiusdem conicæ superficiei cum intera cylindri, cuius vestigium DBF, & 20 5 17. eiusdem cum media. Eodem modo, quoque traslatis interuallis 12 22. & cæteris, quæ inter axem BM, & superficiem coni internam intercipiuntur centro N describemus arcum 23 24. donec secet normalem 1 24. & dabit punctum 24. alięque distantiæ eiusdem rationis parient arcus alios punctorum aliorum indices, quorum qui pertinet originatiuè ad intimum circulum flexa vinciantur 25 24 26. erit intersectio cylindri superficiei cum intima coni proiecta.

Libeat itaque nunc exprimere superficiem coni inter geminas superficies extimam, & intimam cylindri interclusam. A vertice coni, qui vertex in fig. expressus non est ob angustiam paginæ singula interualla accipiantur vsque ad singula puncta à parallelis 3 7. 2 8. & alijs impressa qualia sunt 7.8.9. & cęt. ducemusq; ijs singulis interuallis centro X primò arcum 29 30. in quẽ translatus arcus 27 28. exhibebit punctũ sumitatis. Ita arcus 13 6 transportetur in arcum 31 32. & 14 5. in arcum 33 34. sic arcus 15 4. in arcum 35 36. & sic de alijs, habebimusque puncta, per quæ flexę ducantur, nempe per eam, quorum mensuræ sumptæ sunt ab arcubus intrinsecis, vt 15 4. quæ faciunt flexam 21 4 16. ducatur flexa 35 36 37. & aliæ flexæ per alia correspondentia puncta consequemur, superficiem 35 37 39 40. coni interclusam inter superficies cylindri intimam, & extimam, quod promissum fuit.

Sit rursus exhibenda superficies illa intima cylindri, quæ interclusa est inter superficiem extimam GL, & intimam HK, cuius semiambitus est DBF arcus. Ducatur recta RQ, in eaque circulus DBF extendatur ita quod singulæ partes singulis correspondeant V. g. B I parti 41 42. & aliæ æquentur alijs, à singulisque punctis perpendiculares ducantur 41 45. & 43 57. & reliquas, inque singulas à linea RQ singulæ intercapedines transferantur, quæ inter CA lineam, & singula orbitarum 21 4 16. & aliarum proiecta puncta intersunt V. g. 48 4. transeat in 41 46. & E 51 in 41 44. & sic de alijs, perque puncta R 44 46 52. & alia ducatur flexa. Item 48. 24. transportetur in 42 47. & per inuenta puncta omnia 54. 45. 47. 53. & cætera alia flexa ducatur, & erit tota superficies quæsita R 54 52 53.

Si verò cupias coniunctiuas superficies V. g. radij BTM interualla BT, & TM transferes in QR, & erunt 41 55. & 55. 43. à quibus duces normales, & sicut E 51 exhibet distantiam 41 44. sic E 56. dabit 43 57. aliæque à singulis orbitis, alias quibus coniunctiuam superficiem obtinebit 57 58 44 45 pertinentem ad iuncturam MB.

EXPENSIO II.

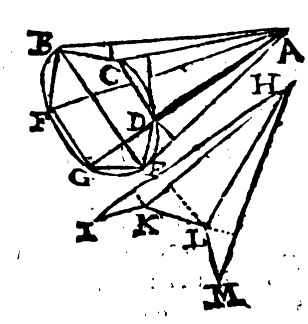
De superficiebus conorum diuersimodè sectis in planum extendendis.

EGimus satis de Cylindri superficiebus nunc ad Conorum paulò difficiliores superficies stylus conuertendus.

THEOR. I. PROP. XVI.

Si sint tot triangula plana, quæ altitudinem triangulorum quocumque cono inscriptorum æquent, & basim eiusdem longitudinis consequantur hæc omnia simul æquabunt multilateram figuram cono inscriptam.

SIt conus ABCE, in quo sit inscripta Pyramis multilatera, cuius latera sint ACB, & ACD, &



ADE.

ADE. Dico; quod hæc figura inſcripta ABCDE æquabitur figuræ planæ HIM ſit conflata tot triangulis, quot sũt in ipſa figura inſcripta cono ABCDE, & quę ſint æqualis altitudinis, & baſis, vel habeant latera ſingula ſingulis æqualia.

Patet: Nam ſingula ſingulis erunt æqualia ex Cor. pr. 40. vel ex 23. l. 1. vnde ex 18. l. 5. erũt quoq; tota ex illis triangulis conflata nempe figura plana HMLKI, & ABCDE inſcripta inuicem æqualia.

THEOR. I. PROPOS. XVI.

Coni concaui ſuperficiem externam, & internam inuenire, cuius baſis data rectangula axi, atque circularis ſit.

Sit quadrans coni, ſeu annuli eius ABCD data baſis, Coni verò internũ triangulum ſit GFC, & externum GED: craſſitudoque eius corporis, & ſoliditas ſit FCDE; quę animo concipiatur inſiſtere annulo ABCD, oporteatque ſuperficiem internam; externamque inuenire, quam proximè.

Diuidatur arcus BD in quotcumque partes V.g. in quinq; & ducantur radij G 13. & G 12. G D; & alij.

Interuallo FC, ſuper lineam 1. 2. ducatur arcus 3. 4. fiatque 2 3. æqualis arcui 5 6. ſicut, & 2 4. æqualis arcui C 5. ducanturq; lineę 1 3. & 1 4. Hęcque erit ſuperficies interna, quæ radijs continetur G 6, & GC, nimirum quinta pars ſemiconi. Ducta deinde perpendiculari C 7. ad latus FC, ſumatur 7 D, & transferatur in 2 8. ſumpto deinde interuallo DE transferatur ab 8 in 9. & centro 9. ducatur portio arcus 10. 11. quæ ſit æqualis arcui D 12 13. ducanturque lineæ 9 11. & 9 10. eritque ſuperficies 9 11 10. extrinſeca, & ea quę continetur radijs G 13. & G D; nimirumquinta pars extrinſecæ ſuperficiei ſemiconi, vel decima totius coni. Superficies vero coniunctiuæ erunt omnes eædem FCDE, at verò ſectio eadem, quæ annulus planus ABCD.

Quod verò res ita proximè ſe habeat, demonſtrabitur de ſuperficie externa 1. 3. 4. & eadem ratio erit de interna. Nam cum conus ſit rectus, ex hypotheſi, omnes lineæ ductæ ab apice ad baſim erunt æquales lineæ FC, vt ſunt ex effectione 13. 1 2. 1 4. latitudo verò eſt effecta eadem, quam arcus C 6. ergo cum ſuperficies dimidij coni ſit æqualis ſectori, qui diametro latere FC conficitur ex prop. 24. tract. 21. & arcu æquali licet ex maiori ſemidiametro FC ductus circumferẽtiæ A 6 C, & arcus 3 4. ſit factus æqualis quintæ parti ſemicirculi A 6 C, etiam ſuperficies 1 3 4 erit proximè æqualis quintę parti ſuperficiei conicę.

PROBL. II. PROPOS. XVII.

Dato dimidio arcu in ſuperficie angulari datæ altitudinis, coni ad illum terminantis ſuperficiem inuenire.

Sit data altitudo coni BA, eiuſq; ſemitriangulũ CBA, qui ſecetur angulata ſuperficie ſuper planum CDHA perpendiculariter inſiſtentis in lineis CD, & DH. Arcus verò datus ſit CE, ſeu annulus GCFE, & oporteat reperire ſuperficiem coni in illum arcum CE terminantis.

Diuiſo annulo GCEF, in quot libuerit partes, & ductis lineis diuiſionum 2. 1. & cæteræ demittantur parallele ad BD continuæ 1 3. ab intrinſeco circulo, & 2 4. punctata ab extrinſeco 5 deinde iungantur DA A 3. & A 4. & cætera omnia puncta à perpendicularibus notata iiſdem diſtinctionibus adhibitis linearum diuerſimodè ductarum.

Facto deinde centro in D ducatur arcus A 5. ita poſito pede circini in 3. ab eodem puncto A ducatur A 6. ſic in 4. poſito circino ducendus arcus A 7. & ſic de cæteris, quæ puncta coniungenda ſunt rurſus primis ſuis punctis; vnde profecta fuere; ſic punctum 5. puncto E iungetur, at 6. puncto 1; punctum verò 7. puncto 2; quod ſit exortum à 4. pũcto à circulo extrinſeco prouenięte, & ſic alia vt eſt punctum 7. rurſus ad eiuſdem circuli punctum eodem ordine reſtituantur. Iamq; præparatum erit, id quod requiritur ad ſuperficiem requiſitam conficiendam.

Seorſũm ergo ducatur LM, & in ea notetur interuallum 5 E, & ſit LM: deinde ſumpto interuallo E I centro M ducatur arcus; rurſuſque ſumpto interuallo 6 I. centro L ducatur arcus ad eaſdem partes. Nam punctum 8. in quo ſe interſecant erit illud, per quod ducenda eſt linea L 8.

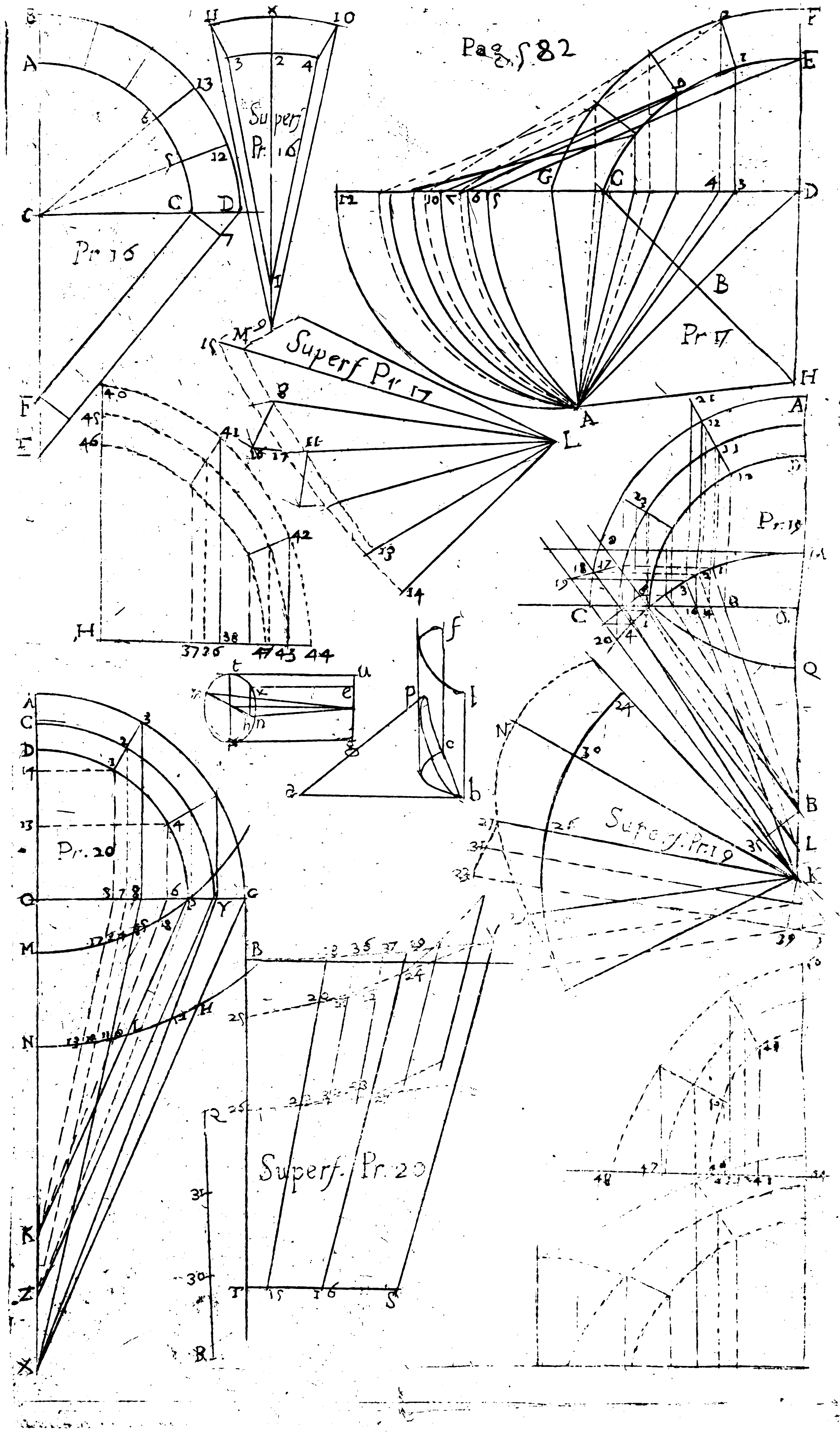
Rurſus ſumpto interuallo 1 9. poſitoque pede circini in 8. ducatur arcus, deinde ſumpto interuallo 10 9. poſito pede circini in L ducatur ad eaſdem partes arcus, & vbi ſecat præcedentem in puncto 11. ducatur L 11. & ſic de cęteris fiat vſque ad C 12. quæ transferetur in L 13. eodem modo, ac cæteræ. Deinde per hæc puncta M 8 11 13. ducatur parumper flexa; hæc enim terminabit ſuperficiem L M 13. intrinſecam coni, qui in arcum CE finit.

Superficies verò L 15. 14. eſt extrinſeca eadem arte delineata.

Probatur. Quia latitudinem quintæ partis ſuperficiei datam 1 E habet, quæ eſt M 8. deinde longitudinem conſequitur, quam Hypotenuſa haberet in ſuperficie coni interna deducta à vertice vſque ad 1: ſiquidem eſt illa, quæ ſubtendit, tùm lineam altitudinis 13, tùm longitudinis 3 A, qualis ex effectione eſt 6 1 æqualis L 8. & ita dicas de linea 5 E; Cum ergo L M 8 triangulum habeat, ſua latera eiuſdemlongitudinis velut; quam triangulum in ſuperficie coni interna deſcriptum, erit id æquale quartæ parti ſuperficiei ipſius ſaltem proximè, & ideo ex prop. 16. h. etiam tota figura plana L M 13. æquabitur multilatero coni inſcripto, quod ſi erit ex multiplicatis lateribus quantum fieri poteſt conflatum neq; ad ſenſũ differet.

Si autem aliquis exoptet ſuperficies coniunctiuas; is vnius accipiat exemplum, ex qua cæteræ inoteſcent: Sit itaque deſcribenda ſuperficies coniunctiua, qua F E 1 2 coniungitur cum ſegmento 2 1 9: Accipiatur interuallum 1 2. & centro 8 deſcribatur arcus; deinde accepta longitudine 7 2 centro L deſcribatur arcus verſus eaſdem partes; ſeque interſecabit cum priùs ducto in puncto 16. vbi ergo ſe interſecat, ducatur à puncto 8. recta, & rurſus ad lineam 8 L parallela 16 17, Nam hæc deducta vſque ad L ſuperficiem coniunctiuam dabit, eam verò non terminamus prope punctum L. Quia non admodum deſeruit, & facilè quiſque ex ſe inuenire poterit.

PROBL.


Pag. 582
Superf Pr 16
Pr 16
Superf Pr 17
Pr 17
Pr 19
Superf. Pr 19
Pr. 20
Superf. Pr. 20

PROBL. III. PROPOS. XVIII.

Coni recti circularis, cylindri superficie concaua secti, superficiem in planum proijcere.

Sit datus conus rectus, vel eius semitriangulum intrinsecum OBI, extrinsecum verò CKO, qui sit circularis basis, cuius quadrans ID interne, externæ verò CA, seceturque cylindro, cuius portio circuli MI, & cuius superficies imaginanda est plano IBO perpendiculariter insistere velut cblpf secat a p c b in fig. seorsim facta.

Diuiso itaque annulo CIAD, in quot libuerit partes ducantur, à punctis, quibus portiones radiorum, vt 10. 12. secant perpendiculares ad CO, sintque 10 13. discontinua, à punctis interni circuli 11 14. punctata à punctis medij; & 12 16 continua ad extrinseco circulo, & vbi secant OC, ad discontinuas à vertice intrinseco B ad punctatas ab L, ad continuas à vertice coni extrinseco K, ducantur rectæ, vt sunt B 13. L 14. & K 16.

Productis itaque lineis in quadrante AOC, quæ à vertice B proficiscuntur vsquedum incidant in arcum IM à punctis, in quæ cadunt 1. 2. 3. erigantur perpendiculares ipsi AO, seu parallelæ lineæ CO, quæ sint 1 17. 2. 18. 3 19. perque puncta 17. 18. 19. ducatur flexa, & idem agatur in alijs similibus, & hic apparatus erit sufficiens ad superficiem internam, superficiesque coniunctiuas describendas.

Verùm ad hoc, vt etiam superficiem extrinsecam arcuatã, clausã duabus superficiebus CA, & ID intrinseca, & extrinseca coni facias. A punctis 3 2 1 parallelæ OA diametro ducendæ, nos duximus solum à punctis 3. & 4. quæ à circuli extrinseci punctis originem ducunt, quæ parallelæ sunt 3 21. & 4 23. sed aliæ quoque à cæteris similibus punctis in arcu IM repertis ducendæ sunt, si volumus, ne dum CA, sed medium, & intrinsecum ID arcus delineare. Quibus confectis erit adornatum machinamentum ad superficies extendendas.

Interuallo itaque BI super lineam K 30. seorsim ductam describatur arcus 24. 25. super quem à linea K 30. transferantur minimæ partes quadrantis ID V. g. 30 26. sit æqualis D 10. cæteræque cæteris, & per puncta 26. 24. 25. & alia rectę ducantur, vt est K 30. & K 26. quæ terminabuntur sumpto interuallo B 8. & translato in K N, sic B 17. & translato in K 27. sic sumpto interuallo B 6. & translato in K 29. & BI in K 25. & tandem ducta flexa, N 27 29 25. erit N K 25 superficies interna quartæ parti coni dati ęqualis.

Ita autem inueniemus superficies coniunctiuas ad interuallum 10 11. & 11 12. ducemus rectas 31 32. & 33 34. æqui distantes à linea 26 K sumpta deinde distantia B 18. posito pede circini in K ducatur arcus, qui secet 31 32 in puncto 31. & rursùs interuallo B 19. posito centro in K describatur arcus, qui secet 33 34. lineam in puncto 33, & per puncta 27. 31. 33. ducatur flexa: Rursus ducatur à puncto K perpendicularis K 39. & à B altera 35 B, & sumpto interuallo a puncto 35. vsque ad K transferatur in 39 34. & vbi terminat su puncto 34. ducatur recta K 34. & habebimus superficiem coniunctiuam 27 K 33 34.

At si quis exoptet habere sectionẽ, quã facit conus in cylindro ipso. Super lineã H 44. ab H trãsferatur p particulas assumptus arcus 20 M. & sit M 44. rursusque ercus M 3 per minimas particulas assumptus erit N 38. & arcus M 4. & sit N 43. & tandem arcus M 20. & sit N 44. à quibus punctis excitentur perpendiculares, quales sunt 43 42. 41 38. H 40. Sumpta verò distantia 21. trãsferatur in 41 38, & 4 2 3. in 43. 42. perq; ea puncta ducatur flexa 40 41 42 44. quæ non erit ellipsis, cum cylindri sectio non sit plana, sed quoddammodo eam imitabitur, sic ducetur media 45. 43. & extima 46 47. vt satis constat ex schemate.

PROBL. IV. PROPOS. XIX.

Superficiem Coni concaui circularis in planum proijcere secti à superficie conuexa Cylindri ad axem perpendicularis.

Hæc propositio, vt precedens operi consignabitur, nisi quod arcus MI contrariò modo est collocandus, vt arcus IQ.

PROBL. V. PROPOS. XX.

Coni in rectam terminantis superficiem à superficie cylindrica gemina sectam in planitiem consignare.

Hunc conum descrip. prop. 8. tract. 25. vt in eius fig. videri potest; probauimusque ibi eius sectiones basi, rectæ axi, æquidistantes esse ellipses, & qualem rapresentat conus m r n t g k u seorsim factus.

Sit ergo talis conus, cuius basis sit circulus, seu eius vicarius quadrans PD, & triangulum per axem OPK, quem rapresentat m n k in figura seorsim facta; Diuiso itaque quadrante DP in quaslibet partes ducantur radij, seu portiones radiorum quarum vna est 1 3. & à punctis, in quibus secant quadrantes extrinsecum AG intrinsecum DP, & medium CY parallelæ 1 14. & 4 13. & cæt. & normales 1 5. 2 7. 3 8. & 4 6. & cęt. ducantur ipsi PO, quæ normales incident in puncta 5. & 6. sectionis OG basis cum triãgulo OPK. Ab ijs ergo punctis ad verticem coni K rectæ ducantur, & sint K 5. & 6 K. A punctis verò 7 8. & sicut P, Y, & alijs similibus pertinentibus ad circulos medium, & externum prædictis parallelæ quales sunt 7 10. ipsi 5 K, & Y 12 ipsi PK cum ad puncta X, & Z assumpta tendant, vt fecimus in preced. propos. Istæ itaque secabunt arcum MP, & NH exprimentes vestigium superficiei cylindricę conum secantis. Iamque omnis apparatus erit completus ad superficies, quas volumus, tum coni, tum cylindri, tùm coniunctiuas delineandas.

Seorsim itaque ducta linea QR transferatur in eã per minimas partes arcus D 4 P, & sint partes D 1, & 1 14, & 4 P ęquales tribus R 30, & 30 31. & 31 Q, & cæterę, cęteris; si adsint. Ducatur deinde seorsùm linea BT, quæ exprimat t u in fig. coni, & ei normalis T S quę exprimat g u, in eam transferantur omnes sinus versos D. 14. & sit T 15. deinde 14 13. & sit 15 16. & tandem DO, & sit TS. Assumpto autem interuallo 5 K centro puncto 15. ducatur arcus versùs B, & interuallo R 30. ducatur arcus centro B, & vbi se decussant

cussant arcus, ducatur recta 18 15. Rursus interuallo 6 K centro 16 ducatur arcus, & interuallo 30 31 centro 18 ducatur alius arcus, & vbi se decussant in 19, puncto ducatur recta 16 19. idem que fiat interuallo PK, centro S, & rursus interuallo 31 Q centro 19. & ducatur S V, perque puncta intersectionum arcuum B 18 19 V flexa curuetur, & tota superficies BVTS erit superficies coni propositi, qui in lineam definit.

Ad quod ratione confirmandū, sciendum est, quòd omnes lineç in superficie huius coni t g à peripheria basis m t n r ad lineam g u, in quem terminat ductæ sunt parallelæ plano, sicut tu à vertice ducta plano m n k parallela est, vnde pars e k. in ipsa linea coni terminatrice est sinus h y, & e u eius residuum, & ideo e k parallela, & inter parallelas æquabitur ipsi sinui hy. Et quod t u ducta à vertice coni, & sectio rectanguli per axem est quoque rectangula lineæ terminatrici u g. Vnde superficies coni quatenùs in g u terminat, erit rectangula: Ideo TB representans t u est rectangula lineæ TS representanti u g, & singulę partes in ea sunt æquales singulis sinubus basis, vt 15 S sinui 5 1, vel o 14 ex effectione. Et quia h k æquatur ipsi y e, ideo 15 18 fecimus æqualem rectæ 5 K; quia itaque flexa B 18 V æquatur arcui DP, & angulus T rectus est, vt est angulus u. ideo B 18 T 15 æquabitur superficiei coni æqualibus lineis rectis sub æquali angulo, & arcu contentę saltem proximè.

Modò sit describenda superficies illa, quę intercipitur inter duas superficies MP, & NH cylindri secantis conum. Accipiatur interuallum 5 17, & transferatur super lineam 18 15 à puncto 8 vsque ad 20. sic 6 18 à puncto 19 vsque ad 24 super lineam 16 19, sic MO super lineam TB, quæ sit B 25. & per puncta 25. 20. 24 V flexa ducatur. Rursus interuallū MN transferantur in 25 26. & 17 13 in 20 23. sic 18 9 in 24 27. & tandem PL in V 28; perque puncta 26. 23. 27. 28 flexa ducatur 26 27 28. & iam superficies 25 V 28 26 erit illa, quæ inter duas superficies cylindri secantis intercipitur.

Quod patet. Nam cum lineæ 5 K, & aliæ sint parallelæ, & æquales lineis 18 15. & alijs. si cogitentur in cono ipso, vt y e parallela ipsi h k. superficiesque nempe basis coni, & cylindri secantis sint rectangulę ad planum OGK. trianguli per axem, representati per triangulum m n k intercepræ quoque portiones 5 17. & 18 6. erunt æquales illis, quæ in superficie coni sunt inter basim coni, & superficies cylindri interceptæ, quod est dicendum de alijs. Quapropter 8 15. & 18 20. eo quòd illis 5 17. & alijs æquales sint, mensurabunt intercapedinem æqualem illi, quæ inter basim coni, & superficiem cylindri intercluditur. Sic 25 26, 20 23 equales 17 13 sibi parallelis intercapedinem, quę inter vtramque superficiem cylindrorum reperitur mensurabunt.

Iam si velimus superficies coniunctiuas sumpto interuallo 1 2. & 2 3 arcus DP, CY, & AB trahantur parallelæ ipsi 18 15 lineę 21 32. & 22 33. accepto verò interuallo 7 34 transferetur in correspondentes lineas 36 21. & interuallum 8 35. in 22 37. & ducatur 20 21 22 flexa per puncta 20. 21. 22 sic spatium 7 10 in 36 32. & 8 11 in 32 33. perque puncta 23 32 33 flexa ducatur; & erit superficies 20 22 23 33 coniunctiua in radio 1 3.

Ratio huius operationis potest colligi ex præcedentibus, vnde eam non afferemus.

Tandem superficies cylindri, quę inter vtramque superficiem coni est, ita exprimetur. Extendatur arcus NH in lineam 48 44, & singulę eius partes N 13. & 13 9. & 9 L extendantur in ea 44 41. & 41. 43. & 43 46. & à singulis erigantur perpendiculares ęquales singulis sinubus 41 49 æquetur sinui 5 1. & 43 50 sinui 6 4. & 44 51 sinui OD, perque puncta 46. 50. 49. 51. flexa ducatur, & erit sectio superficiei coni in cylindrica superficie, cuius ambitus NH; ita ducantur aliç vt patet in figura, & erit tota superficies 48 60 51 46. ea, quæ quæritur.

PROBL. VI. PROPOS. XXI.

Coni obliqui rotundi superficiem inuenire à Cylindri superficie ad axem non perpendiculari secti.

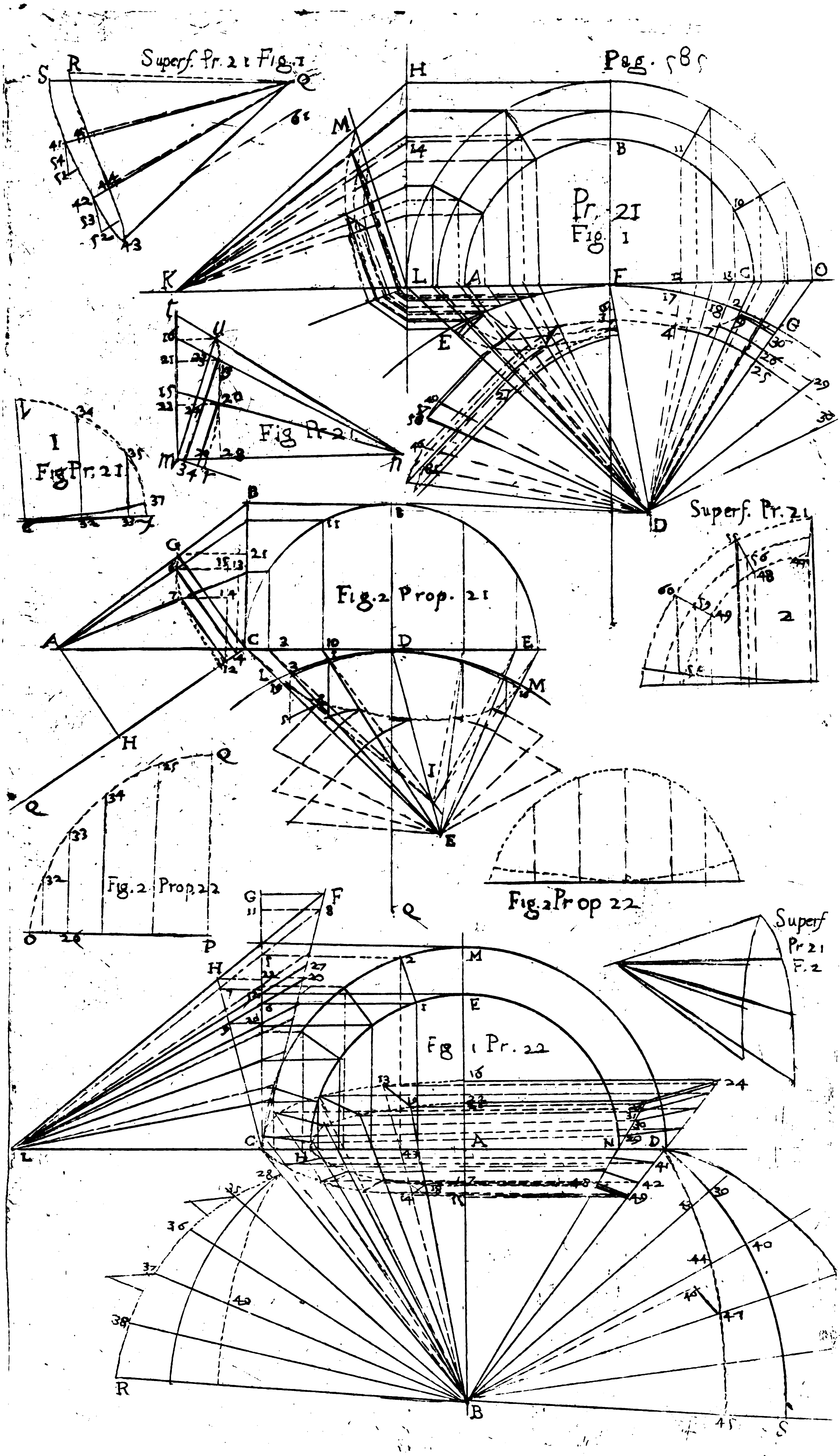
SIt data basis coni circulus ABC, coni verò triangulum scalenum ADC: Arcus verò superficiei cylindricę secantis EFG; super quem intelligatur cylindrica superficies: sed inclinata, quantùm est linea ML à linea perpendiculari LH. Ad vitandam verò obscuritatem, quantùm fieri potest, loquemur primò de apparatu necessario ad superficiem intrinsecam describendam.

In quadrante itaque BC factis, vt libet diuisionibus 10 11 ducantur perpendiculares 12 11. & 10 13. & à vertice coni D educantur rectæ D 12. & D 13. & BC, & DF.

Deinde seorsim in rectangulis lineis m t, & m n altitudines perpendicularium transferantur, vel etiam potest fieri ad alteram partem, vt in triangulo K L M fecimus pro quadrante sinistro AB: quia enim conus est scalenus, ideo ambæ partes in apparatum necessariò accersendæ sunt cùm superficies quartæ partis sit differens ab alijs quartarum superficiebus Longitudo itaque m n sit eadem, quæ DF, & altitudo m 15 eadem, quæ 13 10. sicut & m 16. eadem, quæ 12 11. & tandem m t eadem, quę FB, & ducantur ab n rectę n 15. & cęterę. Ducta deinde u m, quç faciat eundem angulum, ac est angulus MLH, erit inclinatio cylindri, ducatur m r illi perpendicularis; deinde sumptis distantijs punctorum 17. 18. 2 à linea OF, sed rectangulè ad earum distantiam ducantur parallelæ 3 19. & 4 20 vsque dum secet quęlibet suam correspondentem lineam; sic linea 3 19. quę distat tantùm ab m u quantū puncta 12. 17. ad lineam n 19 producenda est, quòd m 16 sit eadem, ac altitudo 12 11. & cęt.

Hoc autem confecto assumantur rectangulè distantię punctorum, vt 19, & aliorum à linea t m, vt u 16. & transferatur à linea FO etiam rectangulè ab F versùs 3. deinde distantia 21 23. & transferatur iterum ab F versus 3. deinde interuallo PF, quo descriptus est arcus EFG inferius posito super lineam EP à puncto 6 apud 3. ducatur arcus, qui secet lineam D 12 in 4. & rursus distantia 24 22 eodem modo reperiatur punctum 7. sed translata distantia m X dabit punctum 9. Deinde per puncta reperta 3. 4. 7. 9. in plano FDO ducatur flexa, quę erit id, quod de cono absumit pendentia ipsius cylindri: Siquidē omnes axi mu parallelæ in cylindro pendente, si sint æquales, pendent ęqualiter, & ęqualem lineam perpendiculares à verticibus cadentes intercipiunt, quę ad basim coni normalis fit.

His


Superf. Pr. 21 Fig. 1
Pr. 21
Fig. 1
Fig Pr. 21
I
Fig Pr. 21
Superf. Pr. 21
2
Fig. 2 Prop. 21
Fig. 2 Prop. 22
Fig. 2 Prop 22
Fig 1 Pr. 22
Superf
Pr 21
F. 2

His ita peractis centro D à puncto 4. ducatur arcus 4 25. ſicuti à puncto 7. arcus 7 26. à puncto 3. arcus 3 27. ad partem ſiniſtram, & ab iſtis punctis 26. 25. 27. perpendiculares ad DG, & DE excitentur. Deinde ſumpta altitudine perpendiculari u 28 transferatur à 27 in 31. & ducatur D 31. rurſùs altitudo 19 28. transferatur in 25 30. & ducatur D 30. tandem altitudo 28 20 aſſumpta perpendiculariter tranſportetur in 26 29. & ducatur D 29. quæ datę D 4. vel quæ eadem D 25. & altitudinis 25 30. erunt Hypotenuſæ, & longitudines ſuperficiei conicæ in illo ſitu.

Hoc peracto ſeorſim ducta b f, transferatur ſuper eam ambitus 3. 4. & 4. 7. 7 9. vt ſunt e 32. 32 33. & 33 f; atq; erectis perpēdicularibus e l, quæ ſit eiuſdem altitudinis, ac m u, & 32 34 ęqualis lineæ 3 19. iterumque 33 35. quæ æquetur 4 29 per puncta l 34 35 f curua ducetur, quæ imitabitur ſuperficiem, quam in ipſo cylindro obliquo conus ſecans efficit. Sumpto verò interuallo r x, & alijs inter m 4. & m x ſimiliter ſumptis transferemus in f 37. & alias lineas; ducemuſque arcum e 37. quò ob pendentiam cylindri minor eſt ſuperficies l e f.

Iam verò tempus eſt, vt ſuperficiem internam deſcribamus. Sit linea QR æqualis lineæ D 36 minor, quam DG, quæ ſecat circulum cylindri FG, aſſumatur deinde interuallum D 29. & centro Q arcus portio deſcribatur, rurſuſque interuallum 37. 35. ex orbita l f, & centro R alia portio circuli occulti deſcribatur, vbi ergo ſe ſecant in puncto 45. ducatur linea 45 Q: Rurſùs aſſumpto interuallo D 30. centro Q circuli portio deſcribatur, denuòque ab orbita l f interuallum 34 35 aſſumatur, & centro puncto 45 circuli arcus deſcribatur, & vbi ſe ſecant in 44 à Q ducatur recta; Iterum ſumpto interuallo D 31 ex Q centro arcus fiat; centro verò 44 alius arcus interuallo l 34 interſecet punctum 43: Per extrema itaque harum linearum ducetur flexa R 45 44 43. & erit quarta pars conicæ ſuperficiei deſcripta: Non alio verò modo alterius quartæ ſuperficies deſcribetur aſſumptis longioribus interuallis rectarum D 46. D 40. & DE interuallisq; curuarum 47 48. & 48 49. & 49 50. quas ſeorſim deſcripſimus in fig. notata n. 2.

Si verò ſuperficies coniunctiuas, quis cupiat dignoſcere, is aſſumpto interuallo 48 56 deſcribat portionem gyri centro 42. & aſſumpto interuallo D 57 deſcribat aliam portionem circuli centro Q, qui ſe interſecabunt in puncto 53. & idem fiat de interuallo 55 56. & de interuallo D. 58. qui ſe interſecabunt in puncto 52. per quæ reperta puncta ducatur flexa 52 53 42 & parallela 52 61. & hæc erit ſuperficies coniunctiua comprehenſa numeris 42 51 61. quæ verſus 61 terminabitur, vt placet, & ſic dicas de alijs.

Scias tamen hunc modum non eſſe præciſum. Vnde ingenijs ſcrupoloſis. Minùs fortè probabitur, licet quoad vſum, aut ſaltem, vt plurimum inſenſibiliter differat ab exactiſſimo. Qui talis erit. Sit Conus ACB, qui ſuper axem ED trianguli ſcaleni, & ſuper planum CEF ad rectos collocatus ſit angulos.

Sitque cylindri ſecantis latus GC, & radius DQ, quò eius peripheria DL ducta eſt, & ei GC rectāgula linea CH, quæ baſim cylindri exprimet, & cadet à vertice coni normalis AH, quæ eam terminet, transferaturque CH, ſuper DB, & ſit DI, & ab hoc centro recte punctatę ducantur ad punctum 10. & ſimilia, quibus perpendiculares cadunt; vt 10 11. & ab iſtis punctatis aſſumatur rectangulè ad CF interuallum à puncto, quo ſecant LDM lineæ I 10. & aliæ, non autem à punctis in quibus ſecant lineæ 10 E, & cæteræ, ratio eſt, quia illæ non ſunt in plano, quo ponitur eſſe linea HC, ſed ſunt in plano AC; planum itaque CFI exprimit baſim cylindri, in quò eſt HC linea, at vero CFE planum triangulare coni, in quo AC axis, & vertex A. Hæc verò interualla transferantur in CH V. g. ſit 10 I æqualis C 4 & 2. 3. æqualis C 12. tota verò conſtructio G 12 C, fiat vt priùs. Ductis poſtmodūm paralleſis ad CB à punctis 4. & alijs nuper ſignatis, vt 4. 13. aſſumatur interuallum rectangulè ad eas puncti G à CB, quod erit 21 G, & 6 à 4 13, quod erit 6 13. & 7 14 puncti 7 à linea 12 15. transferanturque V. g. 7 14 in 2 5. nempe in lineas tranſeuntes per punctum 2 perpendiculares ad CF, & ſint 2 5. & interuallo DQ poſito pede circini in centro Q cylindri interuallo Q 5 arcus ducatur, qui pertingat vſque ad lineam E 3. ſitq; arcus 5 8. eritque punctum 8 in orbita 15 8 16. quia tantùm remouetur à linea ſuper 2 perpendiculariter, vt 2 5. vel quantùm eſt 7 14. vnde circulus cylindri, vel ſaltem portio Ellipſis, quę parum differet à circulo qualis eſt 15 D 16. tranſibit per 5. & per lineam CE in 8. vnde punctum 8. tantùm remouebitur à linea CF, quantùm remouetur punctum 7. à CB perpendiculari. Si verò aliquis velit etiam exactiùs rem proſequi non trahet arcum 5. 8. ſed puncto 5. applicabit normam factam iuxtà ellipſim 15 D 16. ad perpendicularem DQ, quæ faciat angulum mixtilineum 15 D, Q ſingulis punctis V. g. puncto 5. & vbi ſecabit 3 E in puncto 8 illud punctum 8 erit in orbita 15 8 16. cætera verò omnia executioni mandabuntur, vt priùs.

PROB. VII. PROPOS. XXII.

Dati coni concaui ſuperficie planâ, ſed axi non perpendiculari ſecti, ſuperficiem inuenire.

Hæc ſuperficies axi non rectangula, vel poteſt pendere verſùs apicem coni, vel in auerſam partem: ſed quo quo modo pendeat, eadem eſt operatio; ita conus poteſt eſſe, vel cuius baſis ſit circulus, vel cuius ſit ellipſis; ſed quæcumque illa ſit eadem etiam eſt praxis.

Sit ergo datus conus BCD, cuius axis AB, & ſemibaſis CMD, & HEN, planum verò pendens CH, vel CF lineis exprimatur. Ducantur radij, vel eorum portiones I 2. & cæteri; deinde à puncto C ducatur perpendicularis ad CD recta CG, ad quam ducantur perpendiculares 2 5. & I 6. & aliæ ſicut, & ad lineam CD ducantur perpendiculares I 9. & 2 4. & aliæ à vertice verò L diſtante à C vt idē vertex diſtat ab A per puncta, in 5, 6, & alia, quę ppēdiculares cadunt rectæ ducantur, & vltra producantur quantùm ſat eſt V. g. ab L ducatur linea L 5. & L 6. & aliæ; ſicut, & à B producatur linea B 3. & B 4. quantùm ſat eſt.

Lineæ itaque à puncto L productæ ſecabunt CH planū pendens in oppoſitū apicis L in punctis 10. & 8. horum itaque punctorum aſſumetur diſtantia perpendicularis, vt 11 8 à linea G C, & tranſferetur ſuper lineam correſpondentem rectangulè, ſic diſtantia rectangula puncti 13 à linea CD ſignati in linea B 4 13 erit æqualis lineæ 8, 11 & 8 puncti 14. distantia rectangula à CD erit æqualis distantiæ rectangulæ puncti 7. à 12. & sic de reliquis, vtpote puncti 18 à CD erit æqualis distantiæ 9 20. & puncti 19 à CD distantiæ 10 21. & cęt. Per hæc autem puncta signata in lineis, quæ procedunt à B ducantur flexæ C 13 16. & H 19. 22. & Ç P 26 16. erit positio, seu situs, quem in plano CBD describunt circuli PEN, & CMD ad planum pendens CF producti, sic C 14 15. & H 18 17 flexę, portionesque ellipsium erunt; quas conus semicircularis in plano producit detruncatus à plano CH.

Productis autem lineis BN, & BD, ad eas à punctis prædictis V. g. 13. 19. & alijs eiusdem generis producantur perpendiculares ipsi BE, ab ellipsibus, quidem internis H 18 17. & H 19 22. quę terminent in BN productam, ab ellipsibus verò extrinsecis C 13 16. & C 14 15. quæ terminent in BD item productam, sic punctum 19 producetur vsque ad 23. punctum verò 13. vsque ad 24. quę & simul poterunt coniungi linea 23 24. sicut, & puncta 19 13. linea item coniungi quibunt, vt puncta originaria, à quibus prodeunt 1. & 2. coniuncta sunt. Istis itaque peractis iam omnis apparatus adaptatus erit, vt ex eo erui possint exoptatæ superficies.

Si ergo conus sit scalenus, priùs oportebit describere totam ellipsim, at si non, ellipsis quadrantem O 25 Q tali modo. Axis AH ellipsis P 19 22 in lineam rectam extendatur, & sit OP, singulaque puncta, vt 19. 22. & alia, quæ in ipsa sunt in linea PO notentur, & punctum 22 sit V. g. punctum P, & punctum 13 sit 26. & cæt. ab istis verò punctis perpendiculares erigantur, vt 26 25. eiusdem altitudinis; ac punctum 10. à linea CD, quod interuallum rectangulè sumatur; & sic agatur de alijs punctis, prout originem ducunt à punctis correspondentibus in arcu HIB, sic distantia puncti 27 rectangula à CD erit eadem, ac PQ, & sic de alijs, quibus peractis per puncta extrema O 25 Q, & alia ducatur flexa, quæ erit portio ellipsis: quę exposcitur, & quam conus datus productus vsque ad planum CF signat in ipso: siquidem latitudines adipiscimur per partes axis 22 19 translatas in OP, & altitudines per distantias punctorum 27. & 10. & cæt. à linea CD translatas in rectas 26. 25. & PQ, & alias.

Hac itaque ellipsi erecta, sic deinde superficies interna extendetur: Sit linea B 28. seorsim sumpta æqualis lineæ BN assumatur interuallum B 29. & centro B describatur arcus; rursùsque interuallo O 32 in altera fig. 2. centro puncto 28. in linea B 28 arcùs describatur, & quò se decussant arcus in puncto 35 ducatur recta B 35. sic sumpto interuallo B 30 describatur arcus centro B, & rursus interuallo 32. 33. describatur arcus centro puncto 35. & quò se decussant in puncto 36. ducatur recta B 36. sic fiat quoque interuallo B 31. & interuallo 33. 34 ad uenandum punctum 37. & de interuallo B 23. & 34 35 ad nanciscendum punctum 38. & sic de alijs, vsque ad punctum B.; perq; extrema puncta B. 38. 37. 36. & cæt. vsque ad 28 flexa ducatur, quæ superficiem dimidiam dimidij coni integrabit, eritque eodem modo altera dimidia pars facieda cũ hęc pro alio dimidio coni obliqui deseruire nequeat, at si conus sit rectus sufficiet hæc quarta pars cùm omnes quartæ sint æquales.

Verùm aduertendum est quoque in conis rectis alio modo absque ellipsi O 25 Q posse describi superficies proposita. Sit ergo describenda superficies exterior, quam à cono LFC detruncat planum exorsum linea CH. Interuallo BD describatur arcus DS, & interualla M 2. & alia quadrantis C M transferantur in DS; sitque M 2 æqualis arcui D 39. & alia alijs; ad singulaque puncta ducantur rectæ velut B 39. vel B 40. & cęt. Deinde interuallũ B 41 transferatur super lineam B 39. & sit B 41. sicut, & interuallum B 42. & sit B 44. & sic de alijs vsque ad 45. perque puncta D 43. 44. 45. & alia, flexa trahatur, quæ terminabit superficiem extrinsecam defficientem à perpendiculari sectione B, D, 45.

At si quis superficies coniunctiuas exoptet, sumpto interuallo B 48 versùs 47 centro ipso B ducatur arcus; deinde sumpto interuallo 48. 42 centro 47 arcus describatur, & quo se decussant in puncto 46 recta ducatur B, 46. & alia 47. 46. eritque superficies B, 46. 47. ea, quæ exposcitur.

COROLLARIVM.

QVod si lineæ CH, vel CF essent flexæ; eodem modo operandum esset V. g. si essent superficies cylindricæ, quarum axis in plano iaceret, maximè si conus esset rectus, at si conus esset scalenus eodem modo, ac in propositione 21. huius de cono scaleno docuimus erit agendum.

PROBL. VIII. PROPOS. XXIII.

Coni concaui quacumque superficie axi perpendiculari secti, seu conus sit rectus, seu scalenus, seu rotundus, seu Ellipticus superficiem in planum extendere.

SIt triangulum per axem conum exprimens ABC, & eius semibasis ADB, qui quacumque superficie secetur EFG ipsi plano triangulari CAB, & axi CE perpendicularis; oporteatque eius superficiem in planam proijcere.

Diuisa eius grassitie tribus circulis descripta in quotlibet partes ad centrum radij ducantur, vt est 1. 2. 3. & vbi se decussant cum circulis intimo, medio, & extimo ad AB perpendiculares ducantur 1. 4 2. 5 3. 6. deinde à vertice coni C rectæ ad puncta 4. 5. 6. ducantur, quales sunt C 4. & C 5. & C 6. quæ secabunt superficiem FEG in punctis 7. 8. 9. centro ergo V. g. 4. Interuallo 4 C ducta portione circuli occulta notetur in AB punctum 12. & ducatur 3 12. Sicque centro 5. interuallo C 5 notetur punctum 11, nec non eodem modo in centro 6. interuallo C 6 notetur punctum 10. & ducatur 1 12. & 1. 10. & idem agatur in omnibus alijs punctis, in quibus radij, seu portiones radiorum tres semicirculos secant. Iamque apparatus erit adornatus ad superficiem in planum extendendam.

Super ergo AC, seu si libeat super aliam æqualem seorsim ductam centro C interuallo 14 15 ducatur arcus, rursusque centro A interuallo B 15. alius arcus describatur; & vbi se intersecant in puncto 16. ducatur linea 16 C; rursus centro C interualli 12 1 ducatur arcus, & deinde centro 16. interuallo 15 1 alius arcus signetur, & vbi se decussant in puncto 17. recta ducatur 17 C, & eodem modo sumpto interuallo 13 D ducatur recta

18 C;

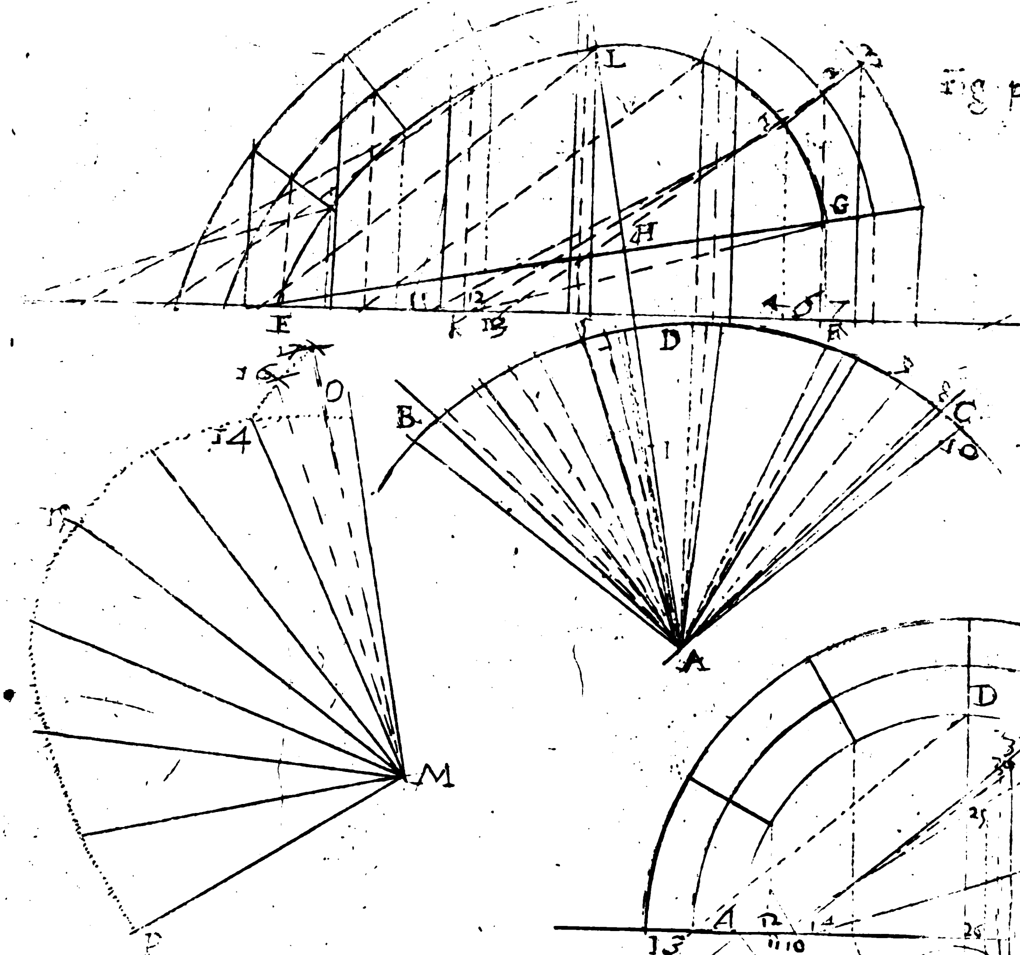
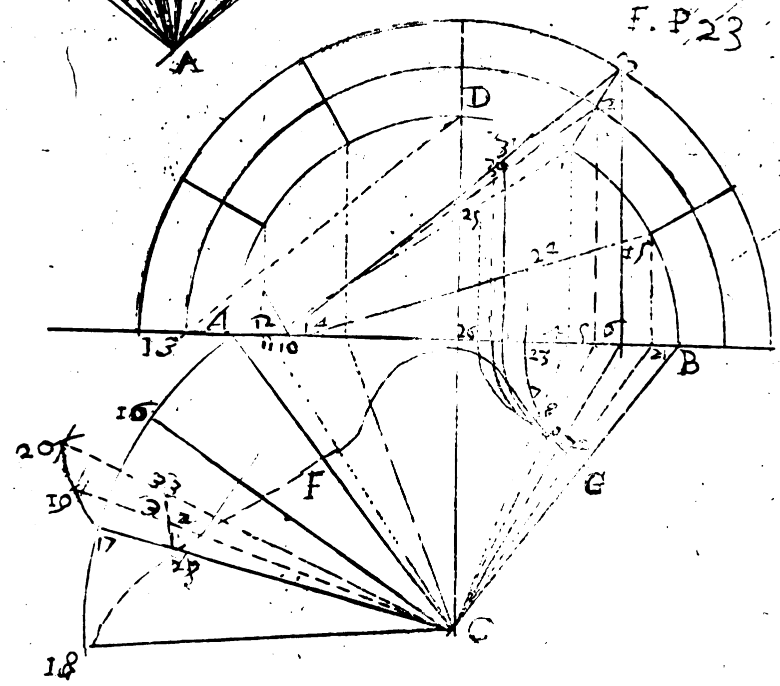
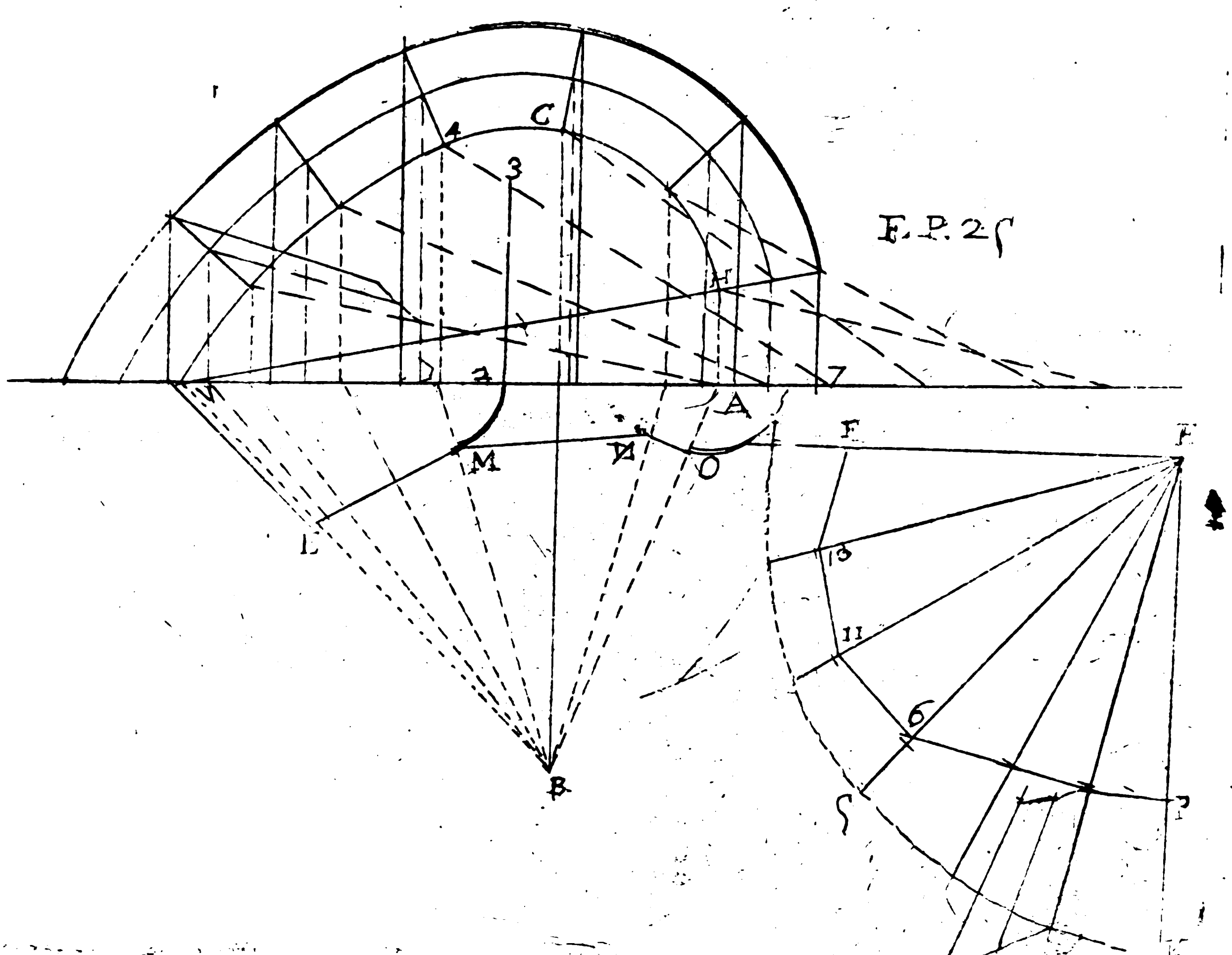


Fig prop 24.



F. P 23



F. P. 25

18 c; tandem per puncta 18. 17. 16. A ducatur flexa, quæ in cono recto, & circulari, vt in hoc circulus erit, at ea erit in alijs ambitus quicumque. Itaque coni superficies, quæ A 16 18 c continetur est illa: quę quartam partem coni operit.

Superficies autem coniunctiua eodem modo fiet, nam adhibitis interuallis 11. 2 centro c ducetur arcus, & 1 2 à centro 17. ducetur arcus, qui se interfecabunt in puncto 19. & ducetur recta c 19. Iterumque adhibito interuallo 10. 3 centro c arcus ducetur, & 2 3 interuallo, centro 19. alius arcus ducetur, qui se intercipient in puncto 20. & describetur recta c 20. deinde puncta 17. 19. 20. flexa coniungentur, & superficies 17 20 c erit coniunctiua coni integri.

Modo via subtractionis inquirenda est superficies, quæ secatur à superficie FEG, quod vt fiat cētro puncto 21. interuallo 21 22 ducetur arcus, qui secet AB in 23. & ex eo puncto erigatur perpendicularis 23 24. & sic fiat de alijs punctis, quibus perpendiculàres 1 4. & E D, aliæque si sint plures incidunt, & ductis arcubus, vt 7 26. erigatur à puncto 26 perpendicularis 26 25. & cæt.

Deinde intsruallum 14 24 transferantur à c in 27. super lineam c 16. æqualem lineæ 14 15. & interuallum 12 25. in lineam c 17. ęqualem lineæ 12 1. & fit c 28, & sic de alijs, perq; puncta ducatur flexa 29. 28. 27. F, & erit superficies, quęsita 29. FC detruncata à cylindro irregulari, seu regulari, cuius positio, seu situs est FEG.

Nec alio modo superficies cōiunctiua inuenietur. Nam centro facto in puncto, quo perpendiculares aliorum circulorum medij, & extimi cadunt V, g. in 5. interuallo 5 8 ducetur arcus versùs BA, & ex eo perpendiculares erigentur ad Hypotenusas 11. 2. & 10. 3. deinde interualla V. g. 11. 30. & 10. 31. transferentur in lineas c 19. & c 20; notabunturque puncta c 32. & c 33. perque ea ducetur linea 28 32 33. eritque superficies 28 c 33 coniunctiua, quæ exquiritur.

PROBL. IX. PROP. XXIV.

Superficiem coni concaui, cuius basis lenticularis, seu semilenticularis, seu cuiuscumque alius figuræ, secti à superficie cylindrica in planum proijcere.

Sit angulus ABC, cui insistat conus aliquis, qui cylindri superficie secetur ad illud planum ABC perpendiculari, vt BDC, oporteatque inuenire superficiem illius coni, qui tamen habeat basim ad libitum electam quamcumque, & triangulum quodcumque, sed tamen tale cuius per axem angulus aliquis sit BCA datus, extendatur arcus super rectam EF, ita vt æquales, aut ferè æquales sint EF, & BDC, & à puncto F erigatur perpendicularis FG, & ad quamlibet longitudinē aperto circino à puncto E ducatur versus G arcus, qui secet FG, eritque recta EG diameter basis coni ad libitum electa, super quā fiat quadrans GL centro H, & centro I super eandem lineam alius arcus EL, eritque basis cuiusdam coni integrata ex diuersorum circulorum portionibus, ipseque conus non propriè conus; sed potius ex portionibus conorum cōpactus: huius ergo coni sit inuenienda superficies.

Ductis radijs, seu radiorum portionibus V. g. 1. 2. 3. & cæteris ad centra circulorum à punctis, in quibus tres circulos secant intimi, extimi, & medij, quales sunt 1. 2. 3. perpendiculares ad EF demittantur pro vt sunt 1 4. & L 5. sic 2 6. & 3 7. & cęt.

Deinde interualla in arcum BDC transferantur; ita vt F 6. sit æqualis arcui c 8. & 6 7 æqualis arcui 8 10. & 6 4 æqualis arcui 8 9. & cæt. Exinde à puncto A ad singula puncta 10. 8. 9. & cæt. in BDC rectæ ducantur singulæ singulis perpendicularibus correspondentes, quarum longitudines transferantur quęlibet ad perpendicularem sibi correspondentem, & ab ea super FE mensuretur: sic A 9 mensuretur à puncto 4. quo cadit 1 4 orthogonalis, vt sit 4 11 æqualis rectæ A 9. ducaturque 11 1; sic A 8 transferatur in 6 12. & ducatur 12 2. & tandem à puncto 7 mensuretur distantia 10 A, quæ sit 7 13. & ducatur recta 13 3. & sic fiat de omnibus alijs punctis, & iam apparatus fabricatus est ad superficiem exoptatam reperiendam perquisitus.

Ducta ergo seorsùm linea MO ęqualis KG nascenti ex AC, à puncto F in K mensuratę, centro M interuallo 11 1 describatur arcus occultus; rursusque internallo GI centro O alius arcus describatur, & vbi se decussant in puncto 14 ducatur recta M 14. & ita fiat de alijs; donec ad vltimam peruenias MP; quæ erit æqualis rectę AB. Itaque si per harum linearum extrema puncta flexa ducatur P 15 14 O erit superficies quæsita PMO coni, cuius basis globosa ELG.

Si verò requiras superficies coniunctiuas, eadem arte requiri queunt. Mensurabitur itaque linea 12 2. & centro M ducetur portio arcus; rursusque interuallum 1 2. & centro 14. ducetur arcus, qui se interfecabunt in puncto 16. ad quod linea producetur à centro M; quæ sit M 16: eodemque modo interuallo 13 3 centro M ducetur arcus, rursùsque interuallo 1 3 centro 14 arcus ducetur, qui se intercipient in puncto 17. ducetur itaque linea M 17. deinde per puncta 14 16 17 flexa 14 17. trahetur, & erit superficies quęsita M, 14 17.

PROBL. X. PROPOS. XXV.

Coni cuiuscumque irregularis, & à quacumque superficie secti orthogonaliter plano insistente, superficiem inuenire.

Modus, quo hoc problema in opus demandatur idem est, ac duorum præcedentium problematum. Nam priùs inuenitur superficies coni irregularis VAB plano insistentis cùm hac tamen differentia, quod cum V A sit recta non est necesse eam extendere, vt iussimus in arcu præcedentis propositionis BDC; sed super ipsam VA erigenda perpendicularis AH, & cætera, deinde omnia exequenda, vt in antecedenti propositione; quibus omnibus obseruatis extenditur superficies EIK; Deinde fingamus hunc conum esse detruncatum à superficie cylindrica angulari irregulari LMNO, quæ plano VAB perpendiculariter insistat: ad hoc, vt superficiem coni detruncatam in planitiem dillatemus, eadem obseruabimus, quæ propositione 23. huius latè descripsimus. Nam centro I interuallo IM ducemus arcum M 2, exque puncto 2 excitabimus perpendicularem 2 3. quæ terminabitur in lineam 4 7 æqualem lineæ E 5. Assumpta itaque longitudine 7 3, mensurabitur à puncto E super rectam E 5. & erit E 6: Puncta itaque F, 6. P, & alia simili ratione inuenta erunt ea, per quæ transibunt rectæ F 10. & 10 11. & aliæ, eritque superficies terminata FEP, quæ exposcitur.

Ita etiam, vt in prop. prædicta superficies coniunctiuæ prodibunt; nec est necesse rem vlterius verbis prosequi, cum ipsa figura satis, superque id, quod proponitur, demonstret.

Ratio verò harum operationum, quas in istis tribus problematibus postremis docemus consistit in eo, quòd reperiamus omnes hypotenusas procedentes à vertice dati coni, & terminantes in superficiem, quæ finguntur, vel ponuntur conura rescindere: Harum verò Hypotenusarum latitudines adipiscimur, quod in datum arcum, & nobis cognitum terminent, quorum partes ad libitum distinximus, quæ partes, & earum subtensarum, seu hypotenusarum distantiam determinant, & hoc sufficiat cuilibet inerudito intellectui.

EXPENSIO III.

De superficie sphærica, eaque diuersimodè secta varijs modis in planum extendenda.

Faciliores extensiones priùs venabimur, exinde difficiliores, vt ordo doctrinæ seruetur. Faciliores sunt, in quibus sphera per parallelos secatur, quam in quibus per circulos maximos vnde prius agemus de superficiebus planis æquantibus superficiem sphæræ in partes sectam à parallelis circulis.

PROBL. I. PROPOS. XXVI.

Sphæricam superficiem in annulares superficies planas distribuere.

Sit quadrans sphæræ, quod sufficit ACB, cuius superficies in planum projcienda sit in annulares superficies distributa.

Diuidatur CB quadrans in quotquot partes libeat V. g. in quatuor, & producta AB per primam diuisionem 2. à pũcto C occurrat diametro producto AB versus D recta C 2 D: Sicque fiat depunctis 2 3 producta per eos linea 2 3 E; sicque de punctis 3. 4 ducta recta 3 4 F, & sic de alijs, si adsint.

Habebimusque latera conorum rectorum, quorũ axis V. g. coni CAD erit axis AD, basis semidiameter AC; vnde superficies erit CA 25 in orbem flexa, quæ circa eum vertitur ad altitudinem A 5, quę est eadem, ac corporis ex annulis solidis compacti in sphæra inscripti, vt est corpus K; cuius annulus solidus MNPQ est idem, ac portio superficiei conicæ NPQM coni NRM.

Sic dicas de cono 52 E, cuius semidiameter baseos est 2 5., axis 5 E, vertex E latus 2 E. Vnde superficies 5 2 3 6 si intelligatur circa conum gyrata semidiametro 5 2 efficiet superficiem communem tum cono 52 E, tum corpori sphæræ inscripto annulis solidis compacto; cuius vnius annuli superficies operiat planũ 2 5 3 6. Patet verò ex demonstratis Archimedis Tr. 18. prop. 9. quod superficies hæc parùm differat à superficie ipsius sphæræ, cum, & multilaterum ipsi circulo inscriptum parum differat à circulo maximè si multilaterum inscriptum plurimis lateribus constet, vt propos. 43. Tract. 21.

Iam verò notum est ex prædemonstratis sectorem circuli, cuius semidiameter sit latus coni, & circumferentia æqualis circumferentiæ ipsius coni esse æqualem superficiei ipsius coni exclusa basi ex propos. 24. Tractatus 31. Quare etiam portio annuli plani diametro eodem descripti erit æqualis annulo circa conum descripto, dummodo habeat eandem altitudinem, & eandem circumferentiam quo supposito.

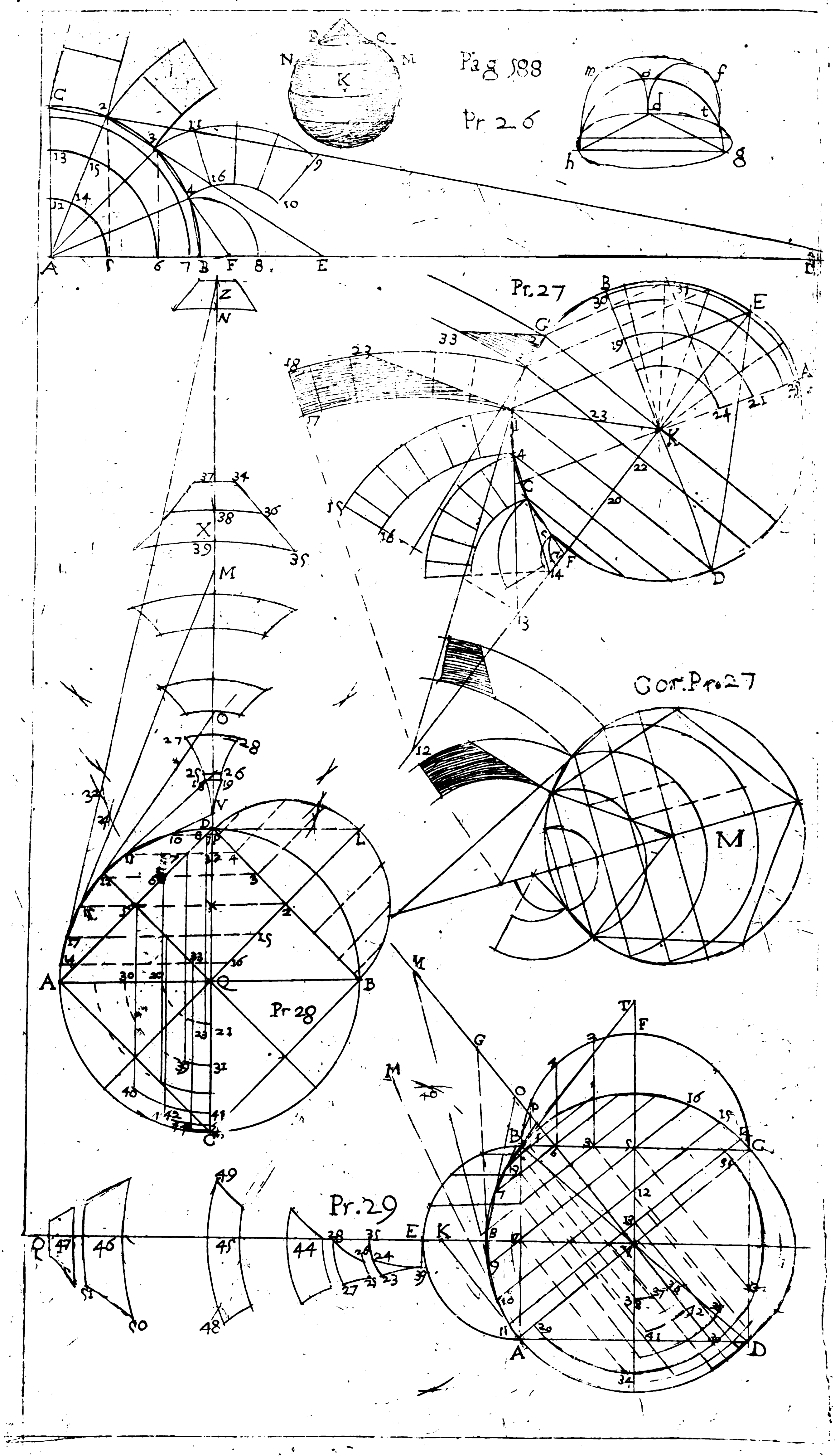
Centro B interuallo B 4 describatur sector 148 itaque peripheria 4 8. æqualis basi quadranti iste erit æqualis superficiei conicæ quartæ parti coni 7 4 B. Sic centro F interuallo F 3 describatur rursùs circuli sector 3 9 F; sitque peripheria 39. æqualis quartæ parti peripheriæ ipsius basis iste sector erit æqualis superficiei coni 3 6 F; sic, & sector 4 10 F eadem ratione erit æqualis superficiei coni 4 7 F, ablatis ergo istis æqualibus superficiebus coni 47 F, & 4 F 10 sectoris; hæc à sectoris superficie 39 F, illa à coni superficie 36 F remanebunt superficies coni residua 3 6 4 7. & sectoris 3 4 10 9 æquales.

Remanet itaque docendum, quomodo sectoris peripheria fiat æqualis peripheriæ basiali coni semidiametro 7 4. vt est A 5 fiat circulus, ita semidiametro 6 3. vt est A 6; istique circuli diuidantur in quotlibuerit partes, quoad fieri possit minimas, vt 12 14. & 13 15. illæque transferantur in peripherias 3. 9 & 4. 10, sitque æqualis 13 15 parti 3 11. & 12 14 parti 4 16. & sic de alijs, donec sint numero æquales, quæ in quadrante 13 15 6. & in peripheria 13. 11. 9 sic, & illæ, quæ sunt in ambitu 12 14 5. ac quæ in 4 16 10. æquabunturq; phisicè, & sensibiliter peripheria 13 15 6 ac 3 11 9 pariq; modo quadrans 12 14 5. ac ambitus 4 16 10. Si ergo omnes semiannuli superficiales circa conos in annulorũ planorum portiones projciatur, quæ eis sint æquales habebimus quadrantem sphęræ superficiei in annulos planos, seu eorum portiones proiectam, vt erat agendum.

PROBL. II. PROPOS. XXVII.

Sphæricam superficiem à triangulari superficie sectam in annulares superficies projcere.

Docebimus in sequentibus eadem ratione subnixi diuidere sphæram, & eam in tales annulares planas superficies protjcere, quæ rursus circumuolutę ipsi sphærę, & in formam sphæricam redactę emisphærium eius in triangulum diuidant, V. g. si sphęra triangulari superficie plano perpendiculari h d m, & h o g, & d f g secetur, inuenire superficiem residuam, & ab ipso triangulo sphærico comprehensam h d g m o f. Facto circulo ABCD, diuisoque in quadrantes; in eo inscribatur triangulum EDI, & ab aliquo eius angulo, vt ab E ducta recta EX vltra circulum quantùm sat erit. Diuidaturque quadrans FG, in quot libuerit partes, & per puncta terminantia rectæ agantur, vt s 3 versus


Pag 588
Pr 26
Pr.27
Cor. Pr. 27
Pr 28
Pr. 29

versùs 12. sic 3. I vsque ad 12, sic 1 4 vsq; ad 13. sic 4 C vsque ad 14. sic C 5 vsque ad 7; nempe ad lineam EKF 11. Deinde modo superiùs descripto fiant portiones annulorum planorum V g. 1 4 15 16, & alias, quæ singulę ab F vsque ad I terminabuntur modo superiùs descripto, vt satis vides, eruntq; superficies, quæ sphæricũ segmentum DIF extra triangulum EDI remanens operiunt.

Modo accedamus ad superficiem inuestigandam, quæ intra tertiam partem trianguli DKI remanet. Ducto itaque arcu I 17. & mensurato semidiametro 20 I super K 19 erit quadrans 21 19 circumferentia basis coni 20 I 12: quam minimis partibus assumptam mensurabimus super K 17 & à centro 12 trahemus lineam 17 18. & puncto 3 eodem centro ducemus arcum 3 18. & esset superficies, quæ aperiret conum 22 3 12 quoad partem 22 3 1 20. sed volumus solùm eam partem, quæ operiat 22 23 20 I.

Assumpto itaque 22 3 mensurabimus super K 25. & ducemus quadrantem 25 30. Deinde super eundem KA mensurabimus lineam 22. 23. & erit K 24. trahemusque à puncto 24 rectam 24. 31 perpendicularẽ ad AK, quæ occurret arcui 25. 30 in puncto 31. eritque arcus 30 31, quem subtendit 22. 23. quem mensurabimus à puncto 18 vsque ad punctum 32. & ducetur recta I 32. eritque superficies nigra I 32 18 17. quæ quæritur operiens solum partem 22 23 I 20.

Rursùs mensurabimus 32 18 super arcum 3 33. & ducemus G 33. rectam, eritque reliqua superficies K 22 23 planum operiens.

Patet verò, quòd reliquæ duę partes in triangulo EDI sunt istis æquales: Vnde replicatæ superficies 2 3 33. & I 32 18 17. & assumptæ sexies totum triangulum æquabunt in superficie sphæræ à triangularibus superficiebus secantibus relictum. Vnde tum superficiem portionis sphærę DIF, & reliquarum EAD, & EBI, tum trianguli EDI remanentis inuenimus.

COROLLARIVM.

IDem poterit fieri etiam si sit quadratum, aut pentagonum, vel quælibet alia figura: quę sphæram secet, vt patet in figura M apposita, quæ nullis literis adornatur.

PROBL. III. PROP. XXVIII.

Superficiem sphæræ à quatuor superficiebus in quadrum positis circulo maximo perpendicularibus sectam; intraque eas comprehensam, inuenire.

SIt Circulus ABCD, exprimatque sphæram, in quo sit quadratum eisdem literis insignitum, quod demonstret vestigia superficierum plano, & circulo ABCD incumbentium, sitque reperienda superficies sphęrica, quæ ab illis superficiebus clauditur.

Super latus DB fiat semicirculus DLB, & diuidatur in quotlibet partes, ducanturque perpendiculares à diuisionibus factis L 2. & ex illis punctis signatis in latere BD ducantur parallelę ad diagonalem BA, vt 2 5, vel 3 6. sic 4 7. & P 8. & continuentur vsque ad circulum in 10. 11. 12. 13. Deinde alię quoque ad libitum ducantur prædictis parallelæ, vt 15 17. & 16 18.

Producta deinde altera diagonali CD vsq; ad N ad eam per puncta rectæ ducantur V. g. 14 17 N, & 17 13 M, & 13 12 O, & cæt. deinde super eandem diagonalem CN, vel aliam rectam sicubi facto centro in D interuallo D 10. ducatur arcus 18 19. & à puncto 8 ducta ad 8 P perpendiculari, occurrat quadranti 20 21 radio I 10 descripti; assumaturque arcus 23. 21. & mensuretur à linea DO in vtramque partem super arcum 18 19. postea assumpto interuallo LD tangentis DL in puncto D vbi DB terminat vsque ad ei normalem QL, centro 18 arcus deducatur, & rursus centro D alius arcus, & vbi cõueniunt, in pũcto 24 ducatur arcus 18 D, & idẽ fiat ad aliam partẽ, ducendo arcũ 19 D & erit 18 19 D portio prima superficiei quæsitæ. Eodem deinde modo centro D interuallo V 10 describatur arcus 25. & 26. fiatque æqualis arcui 18 19. vel duplus arcus 23 21. rursùsque interuallo V 11 eodem centro arcus describatur 27 28. Ducta deinde 7 29 parallela ad DC occurrentẽ arcui 30 31 ex semiradio 32 11 in puncto 29. & assumatur arcus 29 31. & mensuretut à linea OD hinc, & inde, & sit arcus 27 28 duplus arcus 29 31. Deinde interuallo LD tangentis DL in puncto D facto centro in punctis 27 25 duo arcus ducantur, & quo se decussant in puncto 32: facto centro, ducatur arcus 25 27, & sic fiat ad aliam partem, eritque superficies secunda sphærica imminens plano 7 4 8 P, & sic fiat de alijs; donec peruenias ad 5 2; vbi cum iam non ampliùs circulo DLB occurrant, sed maximo, ideo rectis poterunt terminari. Verùm si aliquis harum superficierum terminationem exactiorem exoptet, poterit tria puncta reperire, vt videre est in arcu 34 36 35 posita superficie Z iuxta superficiem X ad hoc, vt totius superficiei X Z simul tria puncta habeamus, eodem enim modo, quo reperta est distantia 37 34 ex arcu 40. 41. & 38. 36. ab arcu 42 43, & 39 35 ex arcu 44 45 eodẽmodo, & punctum 36 intermedium inter 34 & 35. & alia quęcumque intermedia puncta cuiuslibet alterius superficiei reperientur.

PROBL. IV. PROPOS. XXIX.

Superficiem sphæræ à quatuor superficiebus in quadratum oblongum positis, & plano circulari perpendicularibus sectam in planum proijcere.

HÆc praxis parum differt à præcedenti. Talisque est. Facto circulo, & diametris se decussantibus secto, descriptoque in eo parallelogrammo ABCD, super vtrumque latus semicirculi describantur AEB, & BFC, à quorum altero, vt à BFC in partes æquales diuiso demittantur perpendiculares quales sunt F 5. 2 3. & 4 6. & aliæ, & punctis, in quibus secant 6. 3. 5 deducantur parallelæ 16. 9 diametro AC, quibus, & aliæ addantur pro libito 10 12. & 11 3. Per centrum autem V ducatur recta perpendicularis ipsi diametro AC; quæ sit VG, ad quam per bina puncta in arcu A 8 B signata, à lineis nuper ad illum immissis ducantur rectę 11 10 M, & 10 9 N sic 9 8 G, & 8 7 O, & tandem 7 19 P; quibus interuallis ducantur arcus

facto

facto seorsim centro super lineam EQ in B V. g. interuallo I 19. ducatur arcus 23. 24. deinde 25. & 26 arcus interuallo P, 19 hinc arcus 27. 28 interuallo P 7. & sic de alijs, vt fecimus in antecedenti, vel semper eodem centro E adhibito, vel si spatium deficiat, vtlibet sumpto.

Ex inde in singulas chordas suus semicirculus super AC erigatur V. g. diametro chorda 11 14 sic 10 15, sic 9 16. & sic de alijs velut vnus ex ipsis est circulus 29 30 31. diametro chorda 9 16 deductus; deinde à singulis punctis, in quibus prædictæ chordæ latera secant B 17. & B 5. sicut, & 5 V, & 17 V perpendiculares ad AC excitentur velut sunt 6 V 30. sic 3 32, sic 5 33; sic 17 34. & cæt. quæ quælibet ad suum circulum terminent; qui super eam chordam, à qua discedunt lineæ effecti sunt, quibus habitis.

A puncto 35 in linea EQ mensuretur arcus 36 37, & sit 35 24; deinde arcus 36 38. & sit arcus 35 23 mensuretur, deinde super E 39 linea ipsi EQ normali ab E deducta distantia I B facto centro in puncto 39. & exinde in puncto 24. interuallo BT tangentis in puncto B vbi 5 B terminat, & centro puncto 39. duo arcus describantur, & quò se intersecant in puncto 40 facto centro ducatur arcus 24 39. & sic fiat ad aliam partem: sed interuallo adhibito AK tangentis in puncto A, & vbi in puncto 50 arcus se secant, arcus ducatur 23 24. eritque 23 24 39 prima superficie quæsita. Eodem verò modo prorsùs, vt arcus 23. 24 terminatus est, terminabitur quoque arcus 25 26. At arcus 27 28 terminos præbebit arcus 42 41, cui subtenditur recta 4 6, & quia linea EQ stat loco lineæ GV 30; ideo vt arcus 42 41 terminat in ipsam 30 G. Sic & arcus 27. 28. Postmodum ducentur arcus 26. 28 interuallo B T, & arcus 27 25 interuallo AK, & in antecedenti prima superficie factum est, & erit 27 25 26 28 superficies secunda. Ita quoque efficiemus superficiem 44. Sic & superficiem 45. cuius arcus 48 49 æquabitur arcui 33 30 34. quem linea 17 5 subtendit, & hinc superfinies residuæ 46. & 47 eodem quidem modo quoad arcuum longitudines determinabuntur; sed latera V. g. 50 51. vel rectis terminabuntur, vel tribus punctis repertis: si superficies illa sit latior. Verùm præsuppono istas superficies adeo esse paruæ latitudinis, vt arcus 50 51 per tria puncta repertus vix differat à linea recta. Vnde securi linea recta pro curua possit vsurpari absque scrupulo sensibilis erroris.

PROBL. V. PROPOS. XXX.

Superficiem sphæricam à quatuor superficiebus in quadratum positis plano alicui circulari sphæræ orthogonalibus in planum proijcere alio modo, ac in præcedentibus factum est.

Sit sphera circulo ABDC expressa, & literæ quadratum quoque notent, at AB; BD; DC; CA latera sint vestigia superficierum secantium sphæram perpendicularium ipsi circulo ABCD. In quadrato alij circuli concentrici inscribantur V. g. GHFE, & alij arcus IK, & LQ quot quot placet à quibus, vbi secant BC, ducantur eidem BC perpendiculares veluti G 5. 2 6. 3 7, 4 8; L, 9. & I 10. perque puncta, in quibus secant arcum BD ducantur rectæ, quæ secent productam AD; sic per puncta 10. 9 ducatur recta 10 9 11. & per 9 5. recta 9 5 12. sic per puncta 5 6 recta 5 6 13. & cæt. & vt supra fecimus in 26. pr. h. reperiatur superficies sphæricæ, quæ inter circulos concentricos veluti GFEH, & 2. 15. 14. extenduntur qualis est superficies 5. 6 16. 17. & reperiantur aliæ, & ita totum spatium circulo GFEH circumsceptum superficiebus suis, nempe 5 16 17 6 6 21. & 7 22. & 7 8 si quater sumantur erit opertum.

Ad hoc autem, vt reperiamus superficies angulo BFH interclusas; ducta seorsùm linea, electoque in ea sicubi puncto N, assumatur arcus B 10. & à puncto N mensuretur, & sit NO, deinde sumpta intercapedine 11 10 centro M per O arcus 22 23 arcui 19 18 æqualis, factoq; centro in puncto 23. & rursus in N ducantur duo arcus interuallo tangentis BX in puncto B vsque ad X in lineam normalem FX, & quo se decussant arcus in puncto 24. facto rursùs centro eodem interuallo ducantur 23 N, & idem fiat ad aliam partem ducto arcu 22 N, eritque superficies 22 23 N prima anguli, quę quæritur. Deinde rursùs centro M aliquo in linea M N interuallo 11 10. ducatur arcus 25 26 æqualis eidem 22 23. & rursùs eodem centro M; sed interuallo 11 9 ducatur arcus 27 28. Fiatque æqualis arcui 21 20; ducantur deinde arcus 28. 26. & 27. 25. vt ductus est arcus 23 N, & eodem interuallo, & erit secunda superficies, quæ requiritur 27. 28. 25. 26, & sic tertia quoque reperienda erit. Spatia autem A 20 C implebuntur, vt supra factum in pr. 27. h. vt satis constat ex figura ipsa.

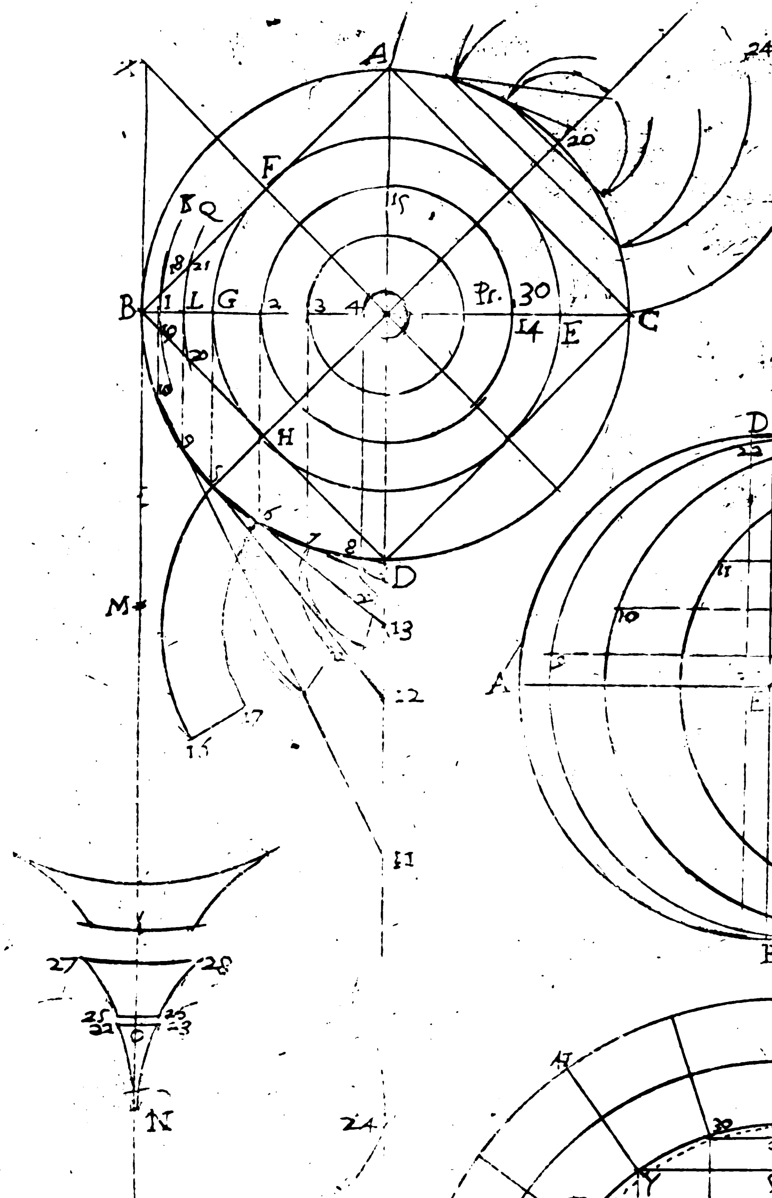
PROBL. VI. PROPOS. XXXI.

Sphæricam superficiem angularibus duabus superficiebus eiusdem plano circulari perpendicularibus sectam in planum proijcere.

Sit sphęrá expressa per circulum ABCD, sintque vestigia angularium superficierum DE, & EC angulum quemcumque facientia in E; sitque propositum reperire superficiem sphæricam, quæ ab illis superficiebus concluditur.

Trahantur rectæ parallelæ ad libitam distantiam, prout commodiùs fuerit 1 2. & 3 4. & 6 5. vel plures vsque ad radium ED, & rursùs aliæ ad eandem distantiam ab EC, qua distant ab ED primo ductæ, vt 6 9 7 10. 8 11. quæ pertingant saltem occultæ ad semicirculos super priores parallelas tractos, nempe 8 11 ad 6 11 5, sic 7 10 ad 3 10 4. sic 6 9 ad 1 9 2.

Postmodùm vt fecimus supra per puncta 6 F ducatur ad EC productam recta 12 F 6. & cæt. & ducantur arcus V. g. 6 13 centro 12 interuallo 12 6. & alij omnes. Fiat autem arcui 6 11. arcus 6 13 æqualis, & ducatur F 13 recta, quæ licet in sphæra curua sit, non tamen in multilatero, inscripto, & erit superficies F 6 13 prima, quæ quęritur, quę operit planum F 6 14. Eodem autem arcui 6 11, fiat quoque arcus 6 15. & arcus 3 16 arcui 3 10; ducaturque recta 15 16. Et erit secunda superficies 15 16 6 3. quę imminet plano 14 17 6 3: Eidem verò arcui 3 10 fiat æqualis arcus 3 18. at arcus 1 19 arcui 1 9. & ducatur 18 19.



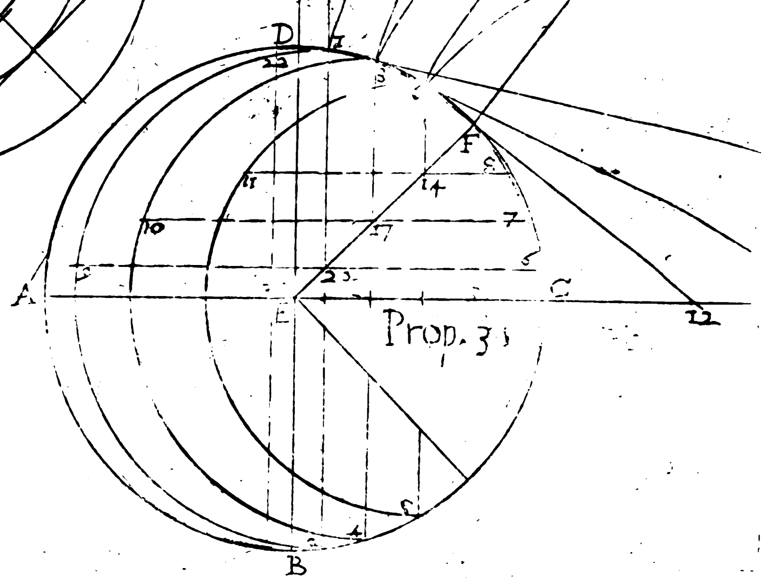


Fig. Prop. 34

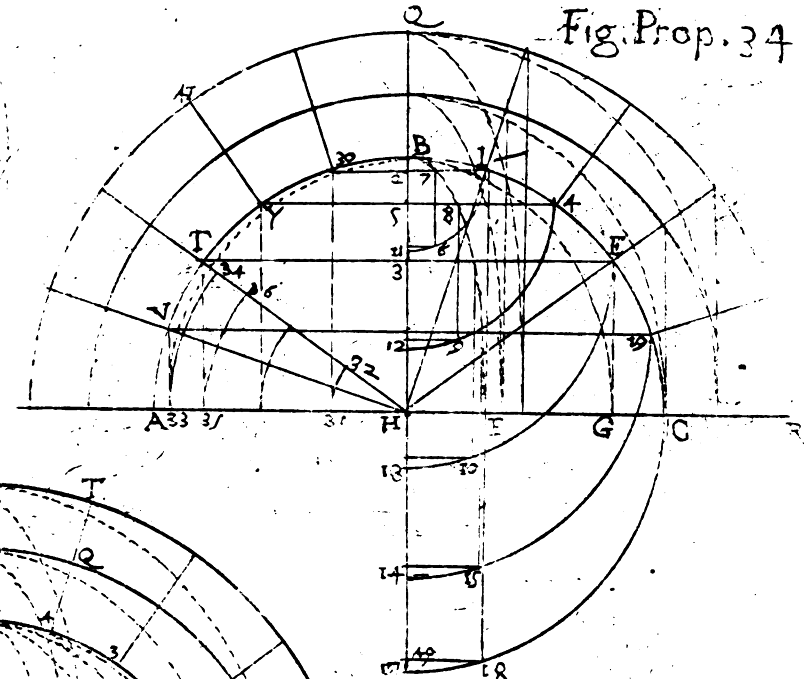
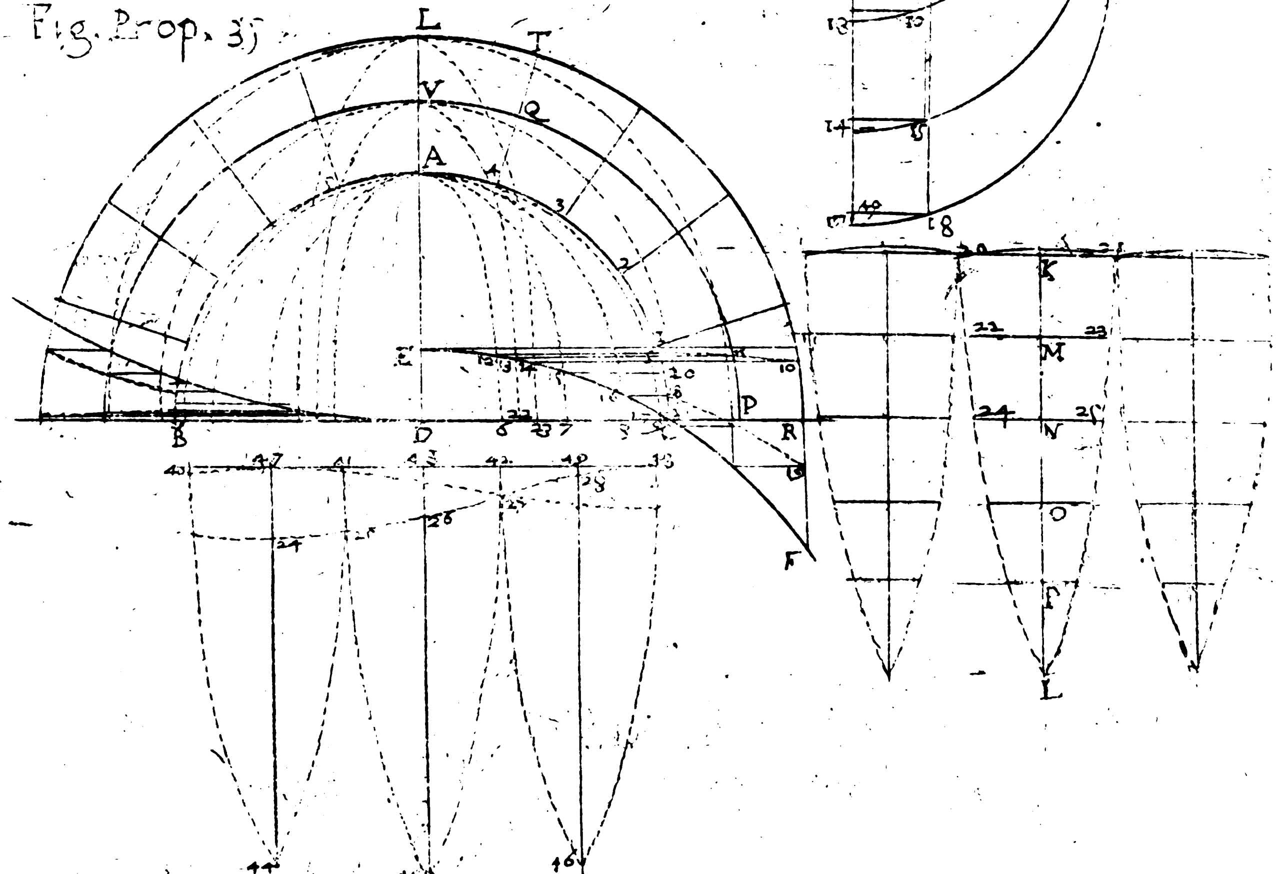


Fig. Prop. 35



19. eritque superficies 1 3 18 19, quæ in sphæram flexa operiet planum 20 17 1 3. pars verò residua superficiei 20 21 D 1 erit (cum præsupponatur minima circularis) veluti superficies cylindri diametrum ED habentis. Vel fiet æqualis Trapezio 1 23, cuius latus D 23 æquatur arcui DA, & latus D 24. arcui 1 9.

THEOR. I. PROPOS. XXXII.

In quacumque corpore sphærico, Elliptico, seu etiam Parabolico, & Hyperbolico corpus planis superficiebus constans inscribi potest.

Sit corpus aliquod, aut sphæricum, aut Ellipticum, aut Parabolicum, seu Hyperbolicum. Dico, quod corpus in illo multis superficiebus constans inscribi potest: Secetur in fig.p.33.per aliquem axem multis planis AFB, & AGH, deinde parallelis maximo ipsorum BLC, & MFGN, & cæt. ductis verò subtensis FG, & BH, per eas agatur planum FGBH, & ita fiat de omnibus alijs vndequaque & erit corpus inscriptum corpori exhibito.

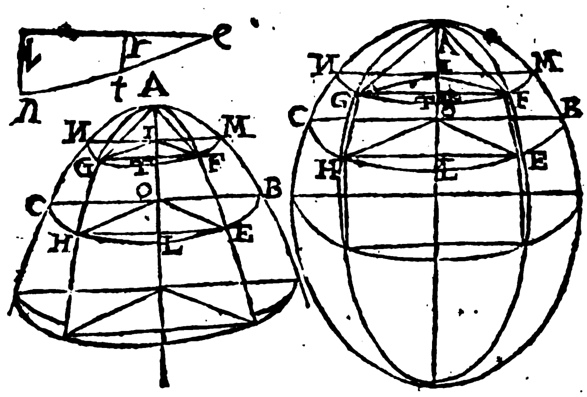
Probatur. Nam tunc dicitur aliquod corpus inscriptum alicui alteri corpori, cum omnibus suis angulis solidis tangit corpus, cui inscribitur, sed omnis superficies inscripta tangit corpus circumambiens suis angulis, quod transeat per F, G, & B, H extrema, quę in superficie exhibiti corporis sunt. Ergo etiam omnis angulus solidus, qui angulis planis constat in superficie corporis dati terminabit: Vnde erit inscriptum corpus multis superficiebus constans in corpore conuexo exhibito.

Quod autem per FG, & BH superficies ductę sint planæ, constat ex eo, quod BG, & EH sunt parallelæ ex eo, quia plana parallela MFGN, & BLC, aut circuli sint in sphæra, aut etiā ellipses, vt in sphęroide, & conoide omnes verò ellipses parallelæ similes sunt ex II. tract.25. & ex prop.40.lib.6. omnes quoque circuli. Quare erit applicata OH ad IG, vt OE ad FI ex prop.54. Tract.24. & ex prop.43.lib. 6. quare ex 4. lib. 6. cum triangula GIF, & HOE sint æquiangula, etiam FG, & EH erunt parallelæ laterum proportionalium.

THEOR. II. PROPOS. XXXIII.

Si sit aliquod corpus sphæricum, vel Ellipticum, aut etiam Parabolicum, vel Hyperbolicum; in quo inscripti alicuius corporis omnia triangula; quæ inter plana per idem punctum secantia continentur, cognosci possint, etiam tota superficies corporis inscripti obtinetur.

Sit corpus sphæricum ABC, & secetur diuersis circulis (intellige verò si sit Ellipticum de Ellipsibus per idem punctum quomodocumque ductis, at si sit Parabolicum, vel Hyperbolicum de parabolis, seu Hyperbolis per axem ductis, vt ex Defin. tract.25. constat) V. g. circulo ALE, & AGH, & cæt. inter quę sit inscriptum aliquod corpus polygonum, quod posse fieri supra demonstrauimus: habeaturque nota normalis AT sicut TG arcum, & eius subtensam, & deinde AG, & ideo subtensam ipsius: si ergo super basim r e ipsi TA æqualem faciamus triangulum, cuius singula latera e t, & t r sint ęqualia triangulo ATG, patet ex prop.23.lib.1. esse triangula æqualia. Deinde sit trapeziū FGEH. Ducaturq; planum HF normale plano TL, & sectio quoq; EL normalis erit. Tunc cū iam habeamus notam TG, & GH ex pręsupposito, &



angulum rectum, si extendamus r e, & fiat r l æqualis ipsi TL æquabitur triangulum TGL triangulo t r l: ducta per imaginationem subtensa l t ex prop.22.lib.1. Quare si data LH, & GH super l t fiat triangulum l n r hoc erit æquale triangulo LGH, vnde trapezium f l r n æquabitur trapezio TLHG. Vnde patet, quod etiam si non ducatur l t idem tamen potest præstari habitis punctis L, & H in plano, quæ sint l, & n.

PROBL. VII. PROPOS. XXXIV.

Sphæricam superficiem in planas superficies per circulos maximos diuisam extendere.

Hæc est huius expensionis pars secunda, in quà conabimur sphęricam superficiem in planas proijcere, quæ tamen non parallelis, vt in prima parte præsupponatur diuisa, sed circulis maximis.

Sit ergo sphęra ABC, circulis maximis secta, quę se decussent in centro B, & quia ex propos.13.tract. 29. circuli eleuati à plano situm consequuntur in ipso plano, qui non est; circulus; sed ellipsis, cuius semidiameter maior est ipse radius, at minor subtensa arcui, quo dictus circulus ab ipso plano eleuatus distat à vertice. Ideo, si aliquis arcus distet à vertice quantum est arcus BI formabitur in plano ellipsis BF, cuius semidiameter maior est radius BH, & chorda 2 1. subtendens arcum BI semidiameter minor; Sic dicas de circulo, qui sit eleuatus à plano quantum est CE, nam subtensa E 3 minor semidiameter erit ellipsis in plano eius situm exprimentis: quare erit ellipsis BG.

Ellipsibus ergo prædictis descriptis ex tract.24 propos.27. vel instrumento, vel saltem ellipsis quartam partem BG, quæ sufficit, super singulos V.g. sinus 1, 2 fiet quadrans circuli, sic super 4. 5. & E 3. & cæt. qui erunt 1. 6. 11. & 4. 9. 12. & E, 10. 13. à punctis verò; quibus sinus secant ellipsis ambitum BF V. g. à puncto 7 erigatur parallela ad radium BH, vsque quò secet quadrantem 1 6 11 super sinum ipsum erectum in puncto 6. sic à puncto 8 alia parallela 8 9 ad BH ducatur, donec secet quadrantem 4 9 12 in puncto 9. & cæt. quibus

bus

bus præstitis erit parata constructio ad superficiem extendendam. Fiat ergo ellipsis 33 Y B facta ex axe 40 H, & HB, in qua puncta subtensarum arcus 18 17. & 14 15. & cętera, quale vnum ex ijs est punctum 40. ex præc. reperiuntur, transferendæque essent partes, in quas secatur à radijs Y 41. & cæt. sed cum sensibiliter illæ partes non differant à quadrante ATB, vel CEB; ideo transferantur illæ partes.

Seorsim igitur agatur linea KL, & singulæ partes quadrantis BC transferantur in eam, nimirũ M, & 14. & 4 E, & cæt. quæ sint KM, & MN, & cæt. p quæ puncta notata K, M, N, O, P, ducantur ad LK perpendiculares, quæ fiant æquales hinc, & inde lineæ KL distantijs normalibus, quæ intercipiuntur inter radium BH, & parallelas, quæ sunt 7. 6. 8. 9. & cæt. ita vt K 20. & K 21 æquetur lineę 40 18. sic M 22 æquetur interuallo 14 15. sicut, & eidem M 23 sit æqualis, linea verò N 24 ęquabitur interuallo 10 13. & pariter ipsi recta N 25. & sic de cæteris: per puncta verò 20 22 24. & alia vsque ad L sicut, & per puncta 21 23 25 vsque ad L flexæ duæ ducantur, & habebimus superficiẽ 20 21 L, quæ erit quinta pars dimidij hemisphęrij, & planum situmque HEC, cæteraque æqualia operiet.

Id verò ex 33.h. satis euidenter constat. Nam latitudo 21.20 æquatur subtensę ar cui CE, longitudo verò quadranti CB, singulæ quoq; partes, vt 21 23, vel 24 25 subtensis arcubus parallelorum, qui repræsentantur, in quadrantibus E 10 13. aut 14 15. 19 similiter æquantur; quæ partes parallelorum inter circulos maximos intercipiuntur; quorum vnus repræsentatur per lineam flexam, & quartam ellipsis B 8 F, alius verò subintelligitur ad aliam partem ductus.

Si vero quis cupiat superficies, quæ iuncturas coniungunt, si sphæra sit alicuius grassitiei, iam per se clarum est, annulum planum, vel eius quartam partem FQCR eam præbere.

Poterit etiam alio pacto superficies 20. 21. L, & promptiùs inueniri: nam ductis perpendicularibus T, 35; V, 33. & alijs ducantur arcus 33 34. & 35 36. & alij, qui à duobus radijs A H, & T H intercipiantur: Deinde diuisa linea KL in partes æquales partibus quadrantis BA, & ductis, vt supra lineis 20. 21. & cæt. fiat 21 20 arcui AT, & 22. 23 ęqualis arcui 33. 34. sic 24 25 arcui 35 36. & cęt. Nam ferè eadem puncta habebimus, vt priùs, sed modus non est adeo perfectus, & deficit à veritate, licet expeditior.

PROBL. VIII. PROPOS. XXXV.

Sphæricam superficiem circulis maximis diuisam in planas proijcere superficies, à cylindrica superficie plano eiusdem circulari perpendiculari sectam.

SIt sphęra ABC; oporteatque reperiri superficies eius secta à cylindrica superficie, cuius vestigia sunt, vel conuexę GD, vel concauę ECF.

Proiecta itaque in planum superficie sphęrę, vt superiùs, cuius partes sint 40.44.41. & 41.45.42. & tandem 42. 46. 43. quę circumoperiant sphęram quantum est arcus C, 5, ducantur quoque quartę ellipsium, prout requirit eleuatio, cuiuscumque circuli maximi, sic ducentur singulę ellipses, idest, Ellipsis A 6 pro circulo eleuato ab horizonte arcu C 4; Ellipsis A 7 pro circulo C 3. Ellipsis A 8 pro circulo eleuato arcu C 2, & tandem A 9 pro arcu C 1, & si plures diuisiones placitum erit in quadrante AC distinguere plures etiam describentur ellipses pro vniuscuiuscumq; circuli maximi per illas diuisiones ducti eleuatione, & ab ijs punctis, quibus prędictę ellipses secantur ab arcu ECF, vel GD ducantur rectę parallelę ad diametrũ BC, quales sunt E 11 12 5; 15 20; 16 18; & 7 21

Et si cupimus etiam superficies coniunctiuas, si sphęra sit alicuius grassitiei, & orbis, tunc etiam ducantur ellipses, quę sint iuxta elauationem illius circuli, cuius desideratur ea superficies coniunctiua, sic si desideretur superficies, quę coniungit G B 4 T cũ CB 4 T. Ad eleuationẽ per punctũ PQ circuli trãseuntis describatur ellipsis V 22. & ellipsis L 23 circuli transeuntis per punctum R T; & à punctis 13. 14. in quibus secantur ab arcu EF, ducantur parallelę ad DB: quę sint 13 11 pertingens ad quadrantem medium, cuius V 22 est ellipsis, & 14 10 pertingens ad quadrantem LR, cuius 23 L ellipsis est, & iam erit omnis apparatus constructus ad superficies, tum coniungentes, tum obuoluentes sphęram ritè terminandas.

Et vt incipiamus à coniunctiuis 5 11. 10. ducatur flexa 5, 11. 10. & erit superficies AL 5 10. quę quęritur; sic si per puncta 18 P 19. quę proueniunt ab ellipsibus trium arcuum coniunctionis 2 ducatur flexa 18 P 19 erit AL 18 19 superficies applicanda loco, & situi 2. & sic si alię exposcantur.

Transeamus ad superficies ipsius sphęrę, & globi: Accipiamus itaque interuallum CI, quod transferatur à linea 40. 43. super rectam 47. 44. & fit 47 24. sic interuallum C 5, & transferatur in 41 25; Sic C 20. & transferatur in 48 26. sic C 18. & transferatur in 42 27. sic tandem C 21. & transportetur in 49 28. & per puncta signata 24; 25; 26; 27; 28; 43 flexa ducatur, quę terminabit superficies 24 25 44. & 25 45 27. & tandem 27 46 43; quę octauam partem simul sphęrę exęquant.

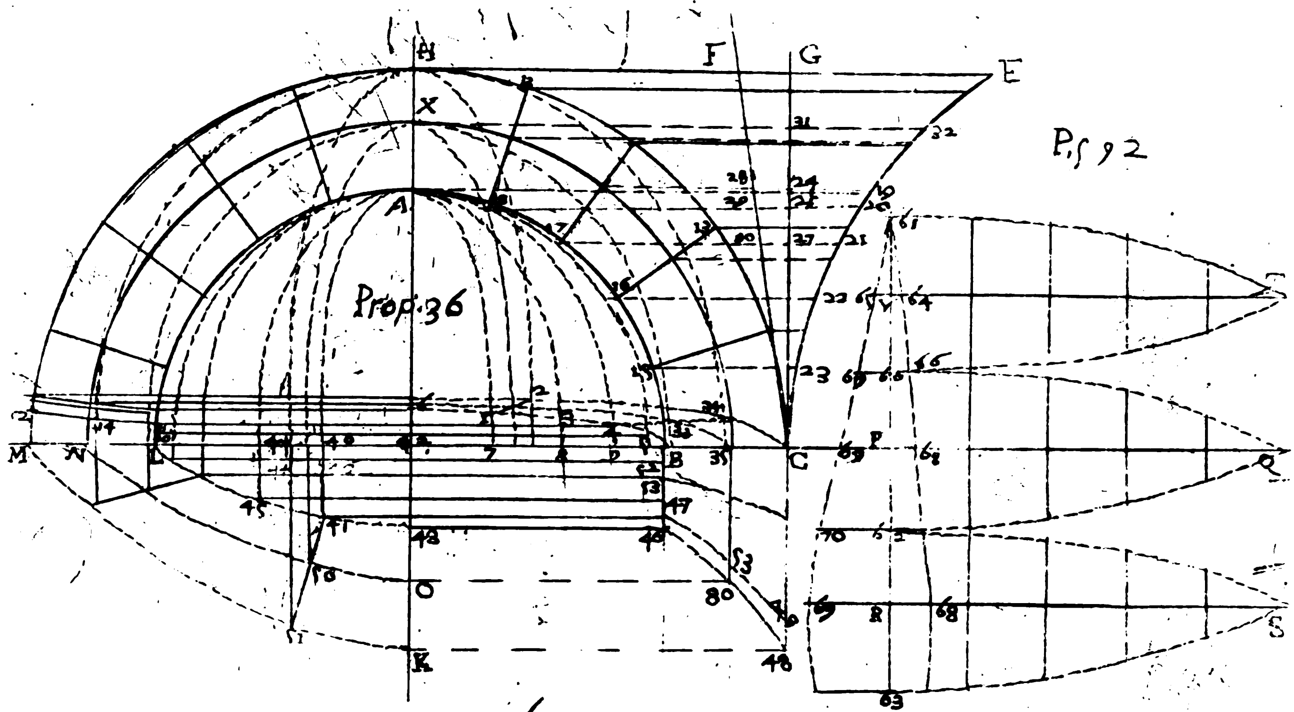
THEOR. IX. PROP. XXXVI.

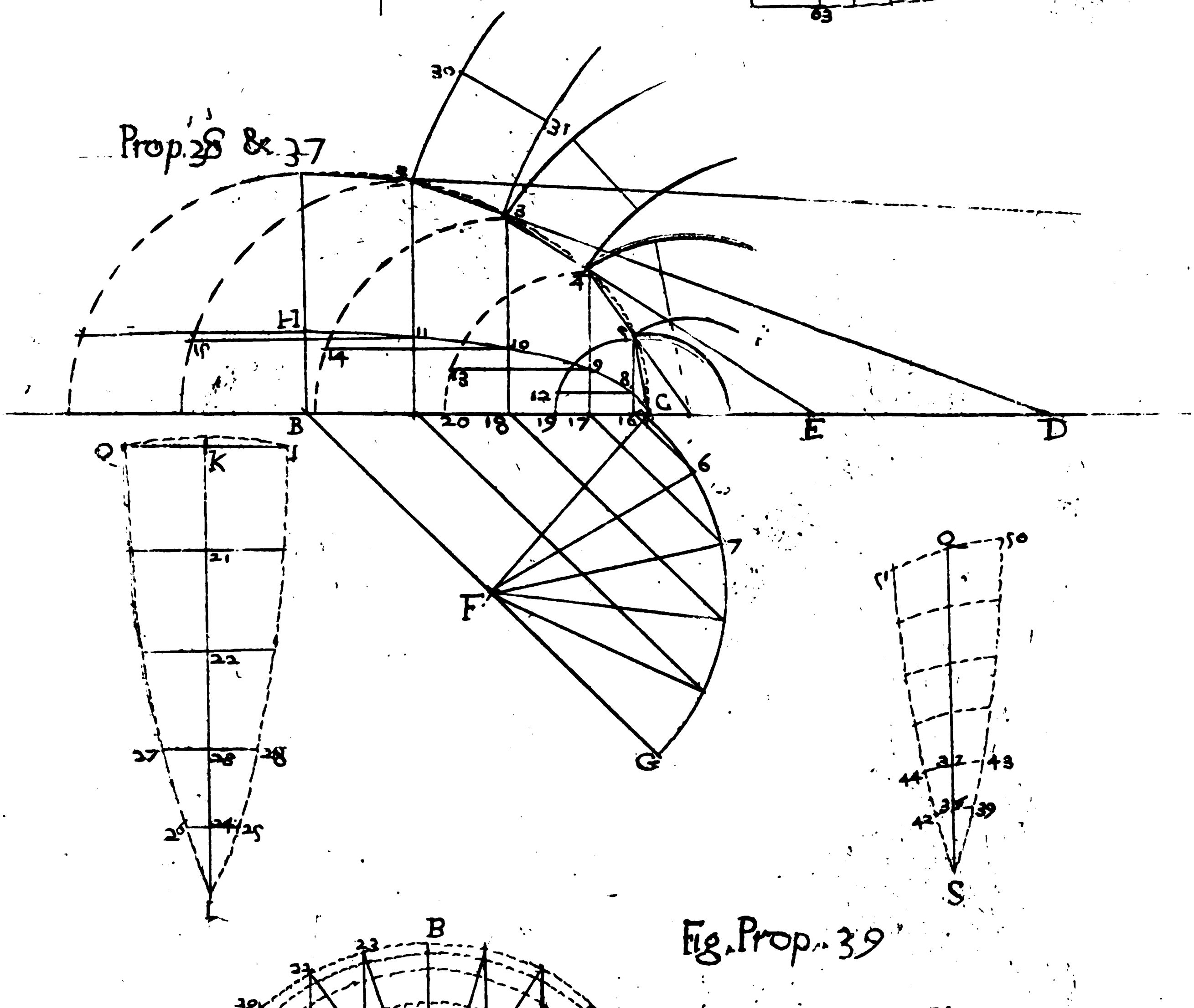
Superficiem sphæricam circulis maximis diuisam in planas superficies proijcere à superficie cylindrica sectam, cuius axis sphæræ axi sit parallelus, vel à superficie plana Orizonti non perpendiculari.

SIt sphęra, vel semicirculus eam repræsentans LAB: sitque diuisus quilibet quadrans in quoq; quot partes erit voluntas, vt in partes 18. 17. 16. 15. & singularũ describẽtur ellipses punctatę vt pr. 34. h. Sit verò superficiei cylindricę secantis curuitas CE, vel planę pendentis angulus FCG, & CC perpẽdicularis. Ductis verò à singulis partibus, tum intrinseci ambitus AB parallelis ad BL, veluti 19 A, 18 20. 17 21. 16 22. 15 23. & si etiam superficies coniunctiuę exoptentur à circulo medio, & extrinseco lineę eiusdem rationis producantur, & ellipses eorum circulorum, vel quartę earum exarentur, quę ad eam coniunctionem pertinent.

Igitur assumpto interuallo 24 19 nascente ab A transferatur, & fit 42 43. sic 25 20 super ellipsim

sim


Prop.36
Ps 92
A
B
C
E
F
G
H
K
L
M
N
O
P
Q
S
X


Prop.38 & 37
B
C
D
E
F
G
H
K
L
O
Q
S

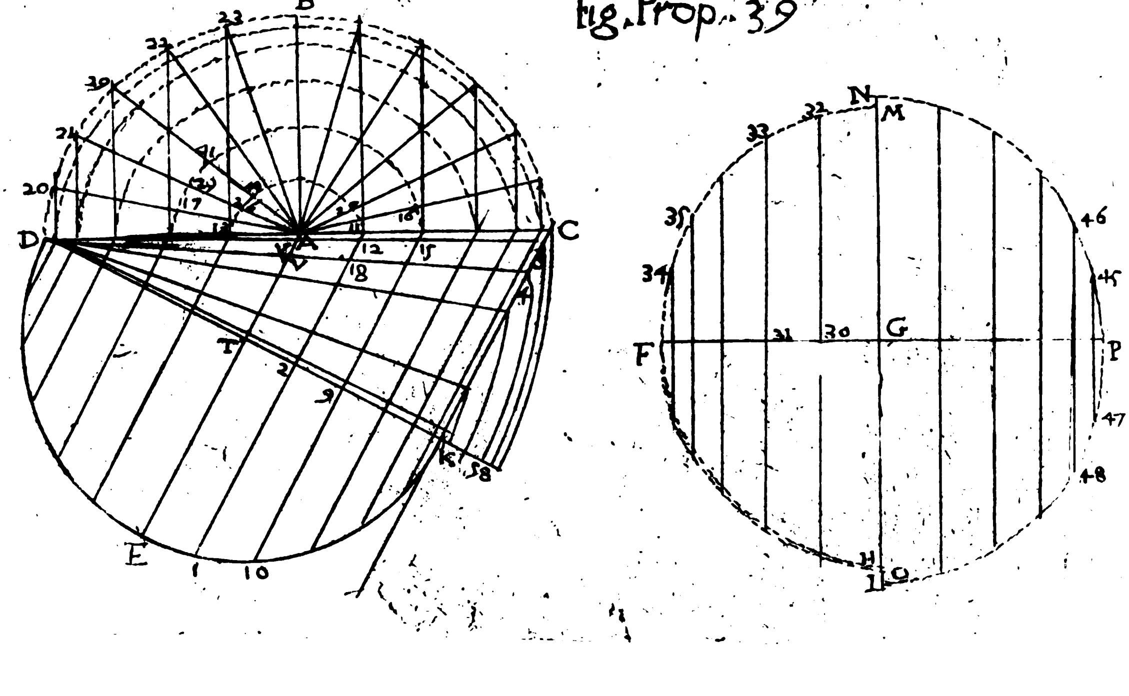


Fig. Prop. 39
B
C
D
E
F
G
M
N
P
T
V
K

ſim A 40 productam perpendiculariter ad LB in 41 transferatur, & ſit 40 41, idem fiat de diſtantia 27 21, & ſit 44 45. & ſic de alijs vſq; ad L: Deinde ducatur flexa L 45 41 43; quę pertinet ad deſcribendam ſuperficiem ſemiſphęrę LAB ſectam à cylindrica CE; quod ſi & coniunctiuę ſuperficies exoptentur, idem erit agendum, ſic transferretur G 2 in 42 K, & alia puncta reperientur, & ducetur flexa M 51 K. Sic, & 31 32 interuallũ transportabimus in 42 O; & alijs eodem modo tranſlatis ducemus flexam N 50 O.

Si vero agatur de eadem ſphęrica ſuperficie deſcribenda; ſed à ſuperficie plana pendente ad partes internas, vt CF; centro C internallo quolibet puncto in FG, vt C 24. ducemus arcus 24 28. & 25 29. & cęt. deinde transferemus interuallum normale 24 28. in 42 6. ſic 29 25 in 7 1, ſic 27 30 in 8 3. & cęt. & ducemus quartam ellipſis 6 1 3 4 5 B, & ita medias, & extrinſecas quoq; pertinentes ad circulum mediũ, & extimum ellipſes indagabimus, quas flexa iungemus 4 34.

Cùm enim CF ſit ſectio ſphęrę, & ideo circulus patet ex 13. tract. 25 eius proiectionem ellipſim fore in quacumque ſphęra, ſeu ambitus maioris, ſeu minoris.

Hęc verò puncta, per quę prędictę ellipſes ductę ſunt, reducemus ad quadrantem AL, vel AB, prout commoditas poſtulabit rectis lineis ad LB parallelis; ſic reducemus linea 5 10 punctum 5 in 10. & punctum 4 in 11. Sic quoque faciemus de punctis in flexa L 43 repertis, productis tamen quadrante BA in 46. X 35 in 80. & HC in 48. rectis ad LB perpendicularibus; ducemuſque parallelas 43 46. 41 47. & cęt. Omniſque pręparatio erit adornata, quâ ſuperficies exoptatę poſſint deſcribi.

Quod igitur pertinet ad ſuperficies coniunctiuas ita erit agendum: Sit ergo deſcribenda ſuſuperficies coniunctiua orbis alicuius, quę à plano FC ſecetur, & ea ſit 16 13, quæ in plano exprimitur linea punctata 4 33 34; tranſlato itaq; interuallo ellipſis B 33 in arcum N 14. & 35 34 in M 12 habebimus tria puncta 12 14. 11. per quę flexa ducta 12 H erit ſuperficies 12 11 H A, quę quæritur coniunctioni 13 16 applicanda.

Sic ſi exoptetur ſuperficies coniunctiua pertinens ad iuncturam 18. 13. ſed orbis à cylindrica ſuperficie CE ſecti diſtantiæ puncti 50. & 51 à linea LB normaliter ſumptæ transferantur in 35 53. & C 49. & per tria puncta flexa ducatur 47 53 49. & erit ſuperficies, quæ deſideratur A H 53 49.

Sed iam tranſeamus ad ſuperficiem ipſam ſphęræ in ſuperficies planas reducendam. Itaque ductis feorſim lineis VT, PQ, & RS deſcribantur ſuperficies 60 T 61. & 60 Q 62. & 62 S 63; vt iam docuimus propoſ. 35 huius; quibus modo erit illud addendum, vel ſubtrahendum, quod ſuperficies ſecans, vel cylindri, vel plani requirit: itaque pro ſuperficie ſecta à plano pendente CF; punctum 61 erit punctum L, vt interuallum V 64 erit arcus L 10. & punctum 60. 66 erit arcus L 11. & cæt. per quæ flexa ducta 61 64 66 68 68 eas ſuperficies terminabit, ad quartã partẽ hemiſphærij à ſuperficie plana pendente ſecti ſpectãtes.

Sic ſi velimus addere id quod addit ſuperficies cylindrica ſecans CE, erit punctum 61 idem quod punctum B, at interuallum V 65, idem B 52. & 67 60 idem interuallum, quod B 53. & cæt. vſque ad interuallum R 69 idem quod B 46; Per quæ puncta flexa ducta 61 65 67 69 70 69. dabit ſuperficiei quartã partẽ operiẽtes 61 T 67. & 67 Q 70. & 70 S 69 hemiſphęrij; cum parte addita circulo CC orthogonali, tamquam ſi eſſet cylindrica ſuperficies CGF addita ſphæræ. At ſi velimus quod ſit ſphęrica, eodem modo agemus, ac in ſuperficie 61 R 68 ablata. Primò enim centro C omnia interualla in linea CG inuenta, vt CG, & C 31. & C 24. vel C 25. & alia arcubus in CB deducemus, diſtantiaſque 24. 19. à punctis, in quibus arcus ſecant CF vſque ad CG normalem; ſingulas; ſed normaliter aſſumemus: transferemuſque normaliter in ellipſes V. g. A 40 41 prolungatas: non per lineas rectas, ſed per propriam orbitam; hęcque puncta parallelis, vt 41 40 non in lineas rectas B 46. ſed in arcus productos AB, X 35. & HC, punctorumque, in quę parallelæ incidunt ab MC linea normaliter aſſumptæ transferentur normaliter quoque in lineas 70 62. & alias. Sed quæ ſint curuę, vt ſunt 60. 66. Q. & ſi fortè incipiant ſeiungi, vt faciunt 62 S, & 62 Q eas in ſingulis replicando, ita vt diſtantia 62. 70 ſit notata, tum in 62 S, tum in 62 Q productas. Interualla autem, quæ in RS, & alias rectas incidunt ſolum vnica notatione contentæ erunt V. g. 42 43 notabitur in R 69. 44. 45 in P 69: & ſic ſuperficiem 61 R 69 ſuperadditam dimidio hemiſphęrio, quæ ſit pars alterius hemiſphęrij conſequemur.

EXPENSIO IV.

De ſuperficie conoidis Hyperbolici Parabolici, & ſphæroidis Elliptici, annulique ſolidi in planas ſuperficies extendenda.

SPhęræ ſphęroides ſuccedit, cuius cum ſit frequentiſſimus vſus viſum nobis eſt eius ſuperficiei extenſionem non eſſe prætermittendam, maximè quia quaſi eodem modo, ac ſphæra eius ſuperficies in planum vrgetur, & conoidum quoque Hyperbolicorum, Parabolicorumque ſuperficies extendere ex eius proiectione addiſcamus.

PROBL. I. PROPOS. XXXVII.

Superficiem Sphæroidis, & Hyperbolici vel Parabolici conoidis ſectam circulis circulari plano per axem ducto parallelis in planas ſuperficies proÿcere.

SIt Corpus Ellipticum, ſeu Parabolicum, ſeu Hyperbolicum ABC: diuidaturque in quodlibet partes A 2; & 2 3. & cæt. & producto axe BC in D, per partes prædictas rectæ ducantur, quæ ſint 2 3 D, & 4 3 E, & cęt. Centris deinde D, & E, & cęt. ducantur arcus 2 30 interuallo D 2. & 3. 31 interuallo D 3. qui terminentur iuxta prędicta de ſphęricis ſuperficiebus propoſ. 27. & erit præſtitum, quod proponitur.

PROBL. II. PROPOS. XXXVIII.

Eandem corporum prædictorum superficiem in planas superficies distendere sectam secantibus maximis Ellipsibus, quæ in ipsis deduci possint.

Sit idem corpus quodcumque ex dictis AEC, cuius circularis plani quadrans sit CFG, cuius diameter CF æquat diametrum minorem BA. Superficies verò diuidentes, & secantes ipsam basim CFG imprimant sectiones, & earum vestigia FC, & F 6. & F 7. & cæt. diuidentes basim circularem CFG in partes æquales, & conuenientes in puncto F, & se inuicem veluti faciunt in sphæra circuli maximi in axe FC secantes: Cum autem interualla æqualia sint; assumantur quodlibet interuallum, vt 6 16. & transferatur super BA, & sit HB; fiatque portio ellipsis, seu quarta eius EHC datis diametris BH, & BC, vel si corpus sit parabolicū, seu hyperbolicū dimidiata Hyperbola, seu parabola describatur data altitudine BC, & applicata BH, quę sit H 10 C. Siquidem Tract 26. prop. 15. & 18. probauimus parabolam inclinatam, vel hyperbolam, hyperbolā similiter describere, vel parabolam sua in plano situatione: Ducantur deinde à punctis, in quibus secat perpendiculares prędicta situatio H 10 C rectæ parallelæ axi BC, quæ sint 8 12. & 9 13. & 10 14. & cæt. centro deinde 16. & interuallo quālibet perpendiculari V. g. 16 5 ducatur arcus 19 12. 5 sic centro 17 interuallo 4 17 ducatur arcus, & sit 20 13 4. & cæt. & sic apparatę erunt delineationes, quæ ad superficiem describendam necessariæ sunt.

His itaq; cōparatis ducatur seorsum linea QI, & ei perpendicularis KL, super quā partes omnes circumferentię AC trans ferantur, & sit K 21 equalis parti A 2. sic 21. 22 ęqualis parti 2. 3. & sic aliæ alijs vsque ad L, ita vt tota KL æquet totum ambitum AC; perque singula puncta nimirum 21. 22. 23 24 ducantur parallelæ ad Q I. Assumatur deinde arcus 19 12. & transferatur hinc inde, sitque ei æqualis 24 25. & 24 26: Sic arcui 20 13 fiat æqualis 23 28. & 23 27. sic fiat de alijs; perque puncta I. 26. 27. & alia vsque ad Q ducatur flexa, & rursus per puncta L 25 28. vsque ad I, & erit superficies Q I L quinta pars superficiei, quę operit spheroidem BAC, nempe quartam partem dimidię sphęroidis, vel totius conoidis.

PROBL. III. PROPOS. XXXIX.

Corpus Ellipticum in planum proijcere sectum Ellipsibus se inuicem superantibus.

Sicut corpus Ellipticum potest maximis Ellipsibus secari, & ideo inuicem æqualibus, vt in præcedenti propositione, sic, & ellipsibus, quæ à maxima ellipsi deficiāt, & tandem in circularē eius basem se constrigant, vel si maximus ambitus, qui corpus ipsum circundet sit circulus aliæ ellipses paulatim in minimam ellipsim decrescent, & hoc euenit quando ellipses partientes corpus ellipticum non sunt ipsi circulo elliptici corporis perpendiculares, sed maximę, vel minimę ellipsi, quę in dicto corpore describantur.

Sit ergo ellipticum corpus, vel quod sufficit eius dimidium BDC; diuidaturque quarta eius pars in quot partes libuerit, & ducantur à centro A rectę A 20. & A 21. A 19. & cęt. describanturque deinde ellipses dato diametro minori AB, & successiuè alio maiori, & maiori, vt A 23, deinde A 22. & cæt. Prima itaque ellipsis erit OFH, vel eius quarta pars dato diametro minori AB, qui sit FG, & maiori A 23. quæ sit HG, secundæ item pars FO dato diametro eodem minori AB eode ac FG, & diametro A 22 eodem ac FG; Tertiæ quarta pars erit FM dato diametro maiori 21 A, & eodē semper minori, & idem agatur de diametro 20. & describetur ellipsis FN. Eruntque descriptę Ellipses, quæ corpus Ellipticum ex 10. Tract. 25. diuidunt. Super AB verò circulus DEK est, & ellipsis descripta super DC maiori axe ipsa est ellipsis primo proposita, cuius quarta pars est CB.

Istis omnibus Ellipsibus descriptis, Ellipses etiam describendę sunt, quę oriuntur à planis Ellipsium parallelè ipsi DBC ellipsi maximę, circulū, cuius diameter AC, secantibus, & in partes equales diuidentibus, & transeuntibus per sinus, & sectionum vestigia AT, & 2 I. 10 9. & cęt.

Cum itaque istę ellipses sint parallelę erunt inuicem similes ex 11. Tract. 25. quare poterunt describi, vt diximus prop. 72. Tract. 24. diuidendo DA, A 20. & A 21. &c. in partes proportionales ipsi DK, quod factum est duplando semidiametros singulos A 20. & A 21. & alios, vt fiant diametri, & accommodando illos in triangulo DCK. Sic mensurata dupla 20 A in D 8 ducetur arcus 83, & trahetur D 3 ad punctum 3. in quo secat latus KC, sic dupla A 21 dabit longitudinem D 5. & arcus eo interuallo ductus 5 4 signabit punctum 4. ad quod ducetur D 4 & sic de alijs. Porrò triangulum DCK habet pro duobus lateribus diametrum DC Ellipsis maximum, & minimum D K angulum K rectū claudentibus. A partibus, itaq; diametri circuli T 2. & 29 &c. parallelę descendāt, diuidentq; D 3, & D 4 in partes proportionales ex prop. 13. l. 6.

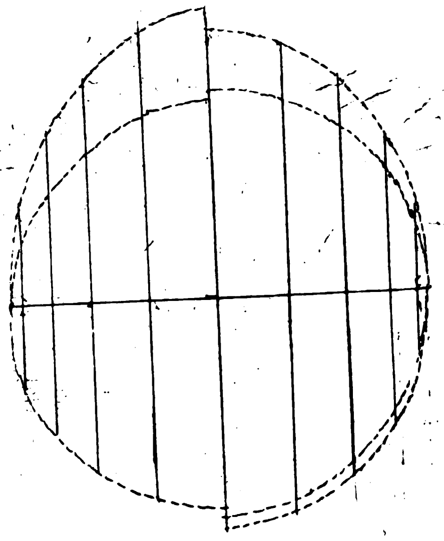
Singulę itaque partes proportionales in singulos correspodentes semidiametros transferantur sic pars 12 Y transferatur in A 13. & Y 15, in A 17. perq; puncta singulis in diametris impressa transeat flexa, quę constituet ellipsim 17. 29. 16. & ita agatur de alijs. Tandem in ellipsibus priùs factis inueniantur sectiones istarum posteriorum ellipsiū, & quia transeunt per sectiones T E, & 2 2. &c. ideo partes T 2. & 29. &c. transferātur in ęqualem diametrum FP, & sint O 30 & 30 31. & cęt. ducāturque parallelę 30 32. & 31 33. & cęt. abscindentque ab ellipsibus portiones orbitarum æquales illis, quę intercipiuntur ab ellipsibus parallelis 17 29 16. & alijs similibus, & erit constructio preparata ad superficies elliptici corporis in planum proijciendas.

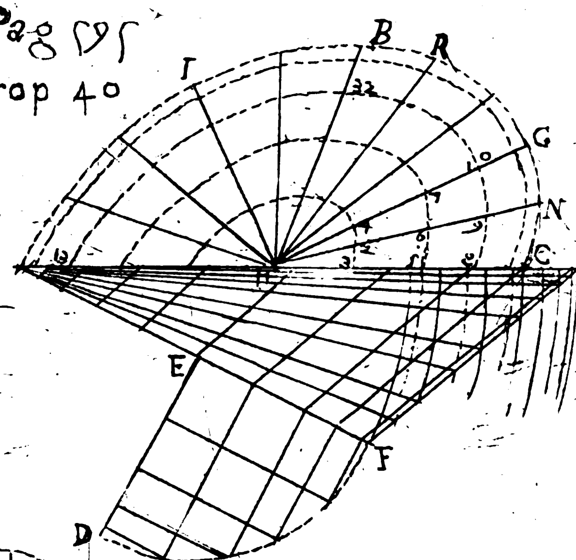
Sit itaque extendenda superficies, quę operit 20 A 19. Seorsim linea ducta Q S, ab aliquo puncto S, ellipsis FM facta super diametrum A 21 ellipsium inæqualium extendatur, sitque QS æqualis ellipsi FN, singulęque partes singulis V. g. F 34 parti F 36. & 34 35 parti 36 37. & cęt. Postea accepto interuallo 47 P ducatur arcus centro S, sic 13 26 in fig. priori ducatur alius arcus, & punctum in quo se secant sit 39. sic sumpto ab ellipsi NP interuallo P 45 ducatur centro S arcus, rursusque interuallo 26 40 alius arcus, & punctum in

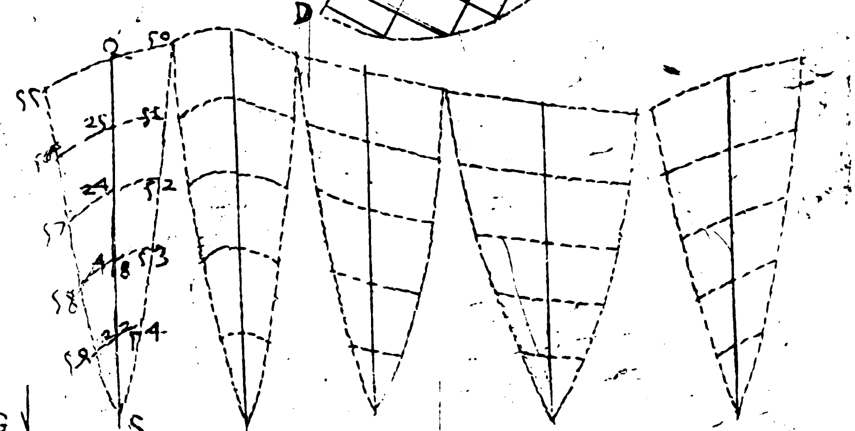
quo

Pag 595

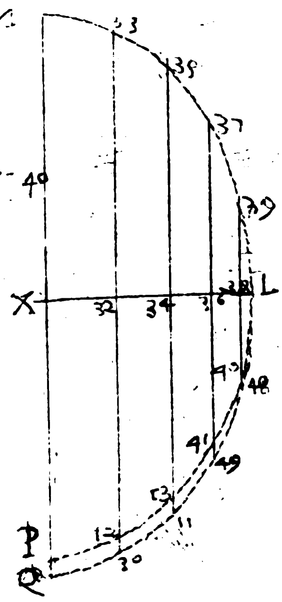
Prop 40

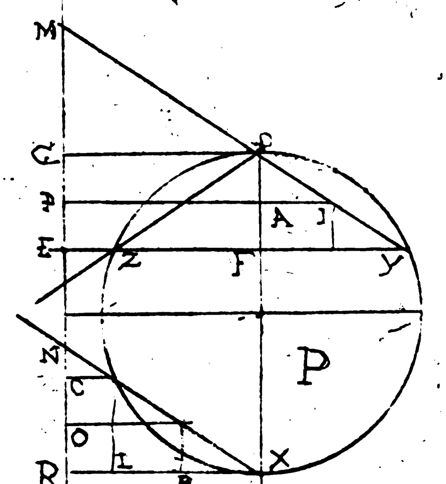




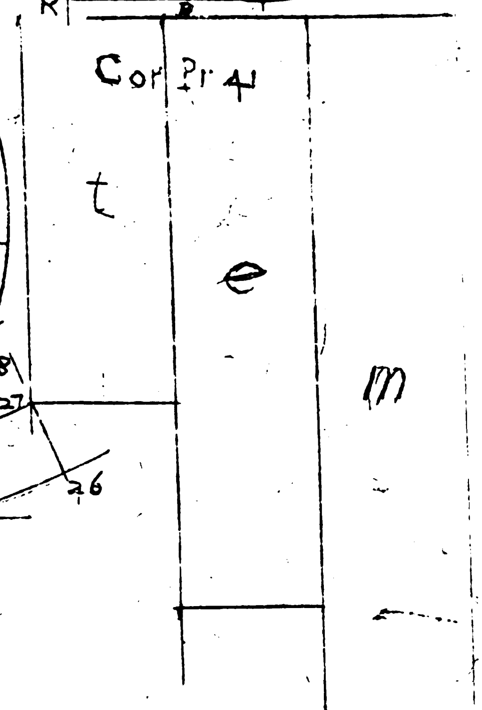


Pr 40

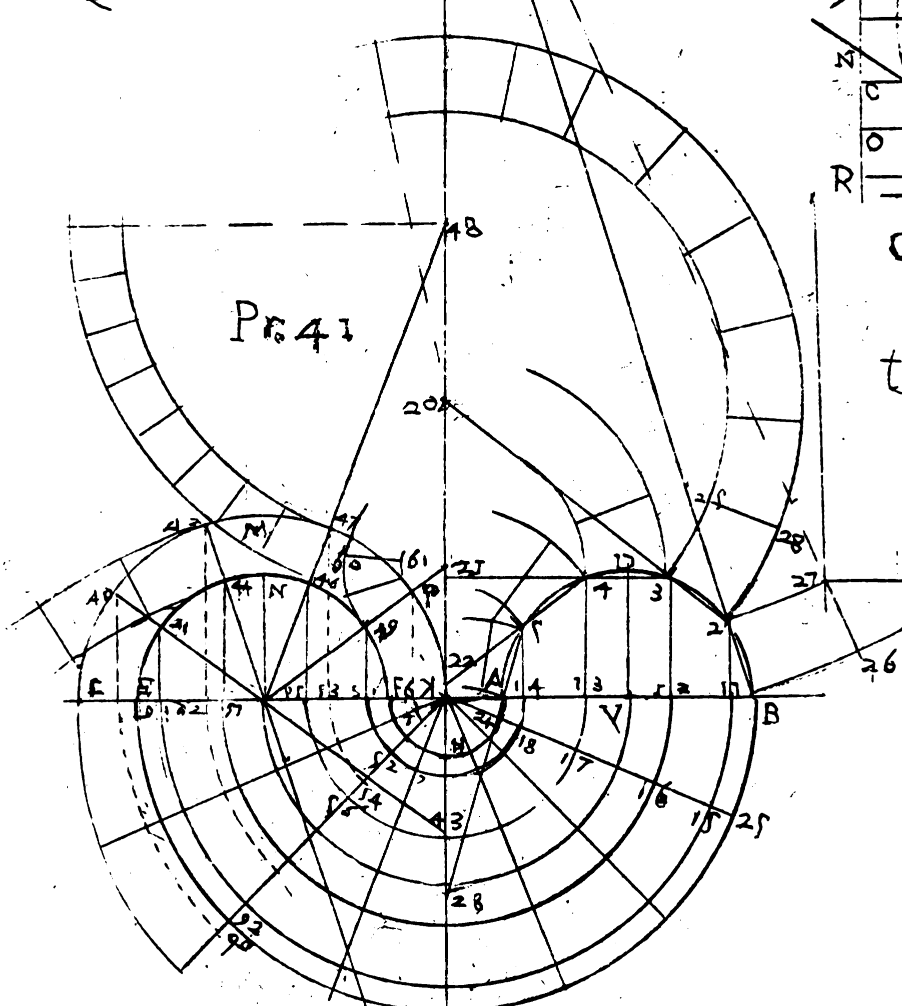




Cor Pr 41



Pr 41



quo se arcus intersecant sit 42. Pari ordine sumpto interuallo 46 45 centro 39 arcus ducatur, & interuallo 19 41 centro 37. ducatur alius arcus, & punctum intersectionis sit 43. Postea centro 42 interuallo 47 48 arcus ducatur, & interuallo 29 17 alius arcus, & punctum, quo se secant, erit 44. & sic successiuè ages in alijs, & inuenies que pūcta plurima, p quę ducta flexa s 51 Q 50 sicut, & per puncta 51 Q 50 concludent superficiem quęsitam 51 s 50. quę inter duas ellipses, quarum radij sunt A 20 A 19 intercipitur, si ergo idem agas de cęteris 19 A 23 habebis superficiem quartę partis corporis Elliptici in planum extensam. Hanc tamen propositionem quoad planitiem corporis sphęroide inscripti, non omnino mathematicam esse agnoscimus, quia angulus, quem facit planum per subtensas ellipsibus parallelis V. g. ambitibus 17 29 41. & 13 26 40. & cum planis ellipsium, cuius axes sunt inęquales V. g. cum ellipsi transeunte per HN axem non sunt recti, vt reposcitur ex prop. 34. Verùm adeo pręcisam, vt error sensibilis multiplicatis diuisionibus, quantum fat est, contingere non possit, cùm multiplicatis ellipsibus inęqualibus parū à recto differre possint anguli effecti à plano ellipsis arcus ellipsium parallelarum bifariam diuidente.

PROBL. IV. PROPOS. XL.

Ellipticum quodcumque corpus, in planas superficies extendere.

PRęcedens propositio est communis omnibus corporibus ne dum quorum circulus basis est, sed etiam, quę vndequaque elliptica sunt, & quoad latitudinem, & quoad altitudinem, imo, & omnibus corporibus, etiamsi per axem non sectis etiam ouatis, & huiusmodi; pro qua re hic damus exemplum corporis elliptici ABC, sed per axem nō secti originē ducentis ab ellipsi FED, quę fit p axē minorem HI ducta, quę maximā ellipsim per axem maiorem HG obtineat KML. Sit itaque describenda superficies, quę operiat portionem HGC. Datis ergo semidiametris EF ellipsis per axem minorem HI ductę, & HC describatur ellipsis KLP, deinde dato eodem diametro EF, & NH describatur ellipsis KML; Diuiso autem in partes, in quas FE diuisus est diametro KL ducantur ab illorum punctis terminantibus parallelę ad eorum circumferentias, & sint 32 33. 34 35. 36 37. sic ad alias ellipses 32 12. 34 13. vel 32 30. & 34 11.

Ducta itaque seorsùm recta QS in illam transferatur ellipsis LQ ęquando partes partibus, vt fit s 22 parti L 48, sic 22 23 parti 48 49. sic 24 25 parti 11 30. & cęt.

Postmodum, vt in pręcedenti fecimus sumpta distantia 2 4 describatur arcus centro 22 puncto, deinde centro S interuallo L 39 describatur rursùs arcus, & vbi se decussant in 22 50 punctum imprimatur. Sic centro puncto 23 interuallo 6 7 describatur arcus occultus, rursùsq; interuallo 39. 37. cētro pūcto 50. alius arcus occultus ducatur & vbi se secāt sit punctū 51. Sic reperies pūcta notata 52. 53. 54. & per illa flexa curuabitur, & ita etiam ducatur flexa 55 s sumptis interuallis à partibus L 40. 40 41. ellipsis LP, & à centris 59. 58. 57. 56. 55. pro arcubus ducentis. Et pro arcubus à centris 22. 23. 24. 25. trahendis, sumptis interuallis 2 3. 6 5. 9 8. & cęt. & tandem per puncta tria 55 Q 54 alia ducatur flexa, & erit superficies 54 s 55. quæ desideratur, cui si fiant pro alijs interuallis quatuor, quæ remanent, similiter alię superficies V. g. pro parte ELHG, & cęt. habebimus quinque superficies, quæ corporis ABC dimidiam superficiem operient, cui ęquales, similesque erunt, quę aliud dimidium circundabunt.

PROBL. V. PROPOS. XLI.

Cylindri in annulum flexi superficies inuenire planas.

SIt huius cylindri planum AHF, BCE, semicirculus autem ADB; oporteatque superficies reperire planas eius rotundę, & circumflexę superficiei ęquales.

Diuidatur semicirculus ADB, in quot libuerit partes V. g. 5. perque puncta terminatiua rectæ ducantur vsque ad perpendicularem CHG, vsque quo necesse erit, extensam; sitque prima B 2 G, secūda 2 3 20 tertia, 3 4 21, quarta 4 5 22 quinta 5 A 23. Facto autem centro puncto, in quo secant, vt in G interuallo GB ducatur arcus B, 26; & rursùs eodem centro interuallo G 2 ducatur arcus 2 27. & sic fiat de alijs, pro vt supra docuimus, agentes de sphęris propos. I.

Vt autem terminentur, ducantur perpendiculares 2 11; 3 12. & cęt. & à centro K ad singulas extenso circino ducantur arcus B 25. & 11. 15. & 12 16. & 13 17. & cęt. vsque ad A 24. deinde mensuretur arcus B 25 super arcum B 26. sic arcus 11 15 super arcum 2 27. & ducatur linea 26 27 ad centrum G: omnino enim per centrum G transire debet, & erit superficies 2. 27 B 26. quę iminet situi 11 15 B 25.

Rursus arcui 11 15 adęquabitur arcus 2 28. & arcui 16 12 arcus 3 29. ductaque recta 28 29 versùs centrum 20 terminabit superficiem 3 29 2 28. quę iminet situi 16 12 11 15. & ita de alijs, quibus replicatis quinquies quantum numerus partium arcus BCE requirit, erunt tot, quot semiannuli quadrantem AHCB operient.

Sed si quis optaret hunc annulum concauum, & vellet cognoscere superficies coniunctiuas, quę partes secundum annuli crassitudinem copulant, id pręstitimus ad aliam partem sinistram. Ducto itaque semicirculo ENF alius semicirculus ducetur LMK, quorum interuallum MN crassitudinem annuli ostendet; quibus in quinque partes diuisis per earum partium puncta terminantia ducentur rectę ad perpendicularem CHG; talis est LEK, & 40 41 43. atque 42 44 45. & 46 47 48. & 49 50 21. Facto autem centro in puncto 21 ducatur arcus interuallo 49 21. & rursus arcus 50 21; Sic facto centro in puncto 48 arcus ducetur interuallo 48 45. & rursus alius 48 47. & sic de cęteris qui arcus ita terminabuntur.

Ducentur enim perpendiculares à punctis, à quibus educti sunt, nempe 51 49. 47 53. & alijs ad LK, & à punctis; in quę cadunt centro A arcus describentur, vt 6 7. & 51 52. & 53 54. & 55 56. & cęt. qui arcus transferentur in arcus priùs ductos, sic arcus 6. 7 æquabitur arcui 50. 61. sic arcus 51 52 arcui 49 62. & ducta recta 62. 61 ad centrum 21 dabit superficiem, quæ requiritur coniunctiuam grassitudinis F K 59. 50 cum altera grassitiei parte 49. 50. 46. 47. & sic agendum in

 alijs,

alijs, vt ex delineatione satis, superque constat.

Ratio verò huius propositionis est eadem ac exposs. 3. de superficiebus sphærarum in planum redigendis per superficies segmentorum conicorum: siquidem CB V.g. circumducta secundùm circulum BCE efficiet conum ex defin. 1. tract. 24. quare 2 B erit segmentum conicum, vnde, & superficies inter eius ambitus 2 27. & B 26 ex prop. 24. tract. 31. comprehensa erit superficies frusti conici: Siquidem certum est ex prop. 24. tract. 31 sectorem diametro CB ductum, cuius peripheriæ portio æquetur circulo BCE æquari superficiei coni, & sectoris illius partes partibus superficiei conicę; ideo etiã sectoris portio B 26 G ęquabitur coni portioni, cuius ambitus B 25. & latus BG, & sic dicas de sectore 2 G 27. quod ęquetur superficiei coni, cuius latus 2 G, & ambitus II 15, quo dempto à sectore BG 26 remanet superficies 2 B 27 26 æqualis residuo conicæ superficiei, cuius arcus inferior sit B 25. & superior II 15. & altitudo B 2. Id autem dicendum est quoque de alijs.

COROLLARIVM.

Hinc intelligi potest, quod superficies annulum circũuestientes tantò sunt maiores, quę sunt vltra XD diametrum perpendiculari MN parallelum, quantò minores sunt, quæ sunt citra DX, vt in figura P: Nam si sumatur DY æqualis arcus, & signetur in XT, & ducatur XTN erunt parallelæ MY, & NX ex proposs. 27. lib. 3. Cor. 1. Quare cum NM, & XD sint parallelæ, MD, & NX erunt æquales, ex 33 lib. 1. Quare MY superabit NX linea DY quantùm NT deficit ab NX æquali linea TX.

Ducantur verò à punctis medijs subtensarum I, & H lineæ NM normales IP, & OH, & quia sunt triangula æquiangula DIA, & XHB, vtpote effecta à parallelis ex prop. 4. lib. 6. erit DI ad IA, vt HX ad BX, verùm DI æquatur lateri HX, ergo AI æquabitur ipsi BX. Igitur OH æqualis ipsi BR tantùm deficiet ab RX æqualis ipsi PA quantùm PI accrescit super PA. Si ergo MY intelligatur circumuolui, & fieri conus, sicut NX, erit EY semidiameter, & RX, vt DY, & TX altitudines frustorum æqualium superficierum conicarũ, & LX, & FY annulorum planorum altitudines, & circuli RB ducti, & PI radij intermediæ peripherię latitudinę plani annuli bifariam, & circulariter diuidentis. Rectangula autem erecta ex latere ipsorum mediorum circulorum æquali ex 13. tract. 30. & altitudine, sunt annulorum planitiei æqualia. Quare cum ita sint circumferentiæ, vt diametri, & diametri se superent ea ratione, vt quanto RB est minor, quam RX, tantò sit maior PI; etiam rectangula æqualis altitudinis LX, vel FY annulorum, sed circumferentiarum, quarum vna ducitur radio RB altera PI se superabunt eodem modo. Nempe si fiat rectangulum e ex LX, & ex circumferentia ducta radio RX, & rectangulum t ex LX, & circumferentia ducatur radio DH, & rectangulũ m ex circumferentia ducta radio PI, & LX, vel FY, cum se referant, vt altitudines ob æquales bases ipsis FY, & LX, & ideo inuicem, idest vt peripheriæ, nempe vt diametri ex 33. lib. 6. erit maius m, quàm e tantùm, quantùm minus est t, quàm e; quare, & annuli probati ęquale prop. 12. tract. 30. illis rectangulis tales erunt.

Quare, & segmenta conorum, quæ constituuntur ex peripherijs æqualibus ex 24. Tr. 31. nempe frustum conicum ex circumferentia æquali circumferentiæ ductę radio EY extimæ, & ex radio DG intimę, sicut, & frustum ex TX constituitur ex peripheria æquali ex CH intimæ, & ex radio RX extimæ, vnde ex Coroll. proposs. 12. tract. 30. erunt eiusdem altitudinis ac rectangula N, & T, & ęqualis basis inuicem TX, vel DY; vnde respectum rectanguli e, & ipsius altitudinis DY tantùm decrescet frustum ex XT quãtum augetur frustum ex DY; Quod & debes fateri de frusto DZ, vtpote, quod sit latus coni æqualis cono NX.

TRAC-

TRACTATVS XXXIII.

De inſcriptione, & circumſcriptione Solidorum.

ANtequam ad ipſorum corporum trutinandam ſoliditatem accedamus, oportunum fuit inſcriptionem corporum quinque regularium in ſphæra, & omninò neceſſarium quorumcumque corporum in globoſis deſcriptionem attingere, vtpote quod talium corporum cubatio maximè ab hac inſcriptione dependeat; Et quia ſimul agitur de proportione laterum corporum inſcriptorum benè pręcedit ſoliditatis cognitionem ipſa laterum doctrina; cùm priùs ſe ſe offerant intellectui latera cognoſcenda, quàm ipſa ab eis comprehenſa ſoliditas.

EXPENSIO I.

De principijs.

PRiùſquam ipſam rerum ſoliditatem attingamus priùs definitiones, quæ ad corporum ſolidorum conſtitutionem faciunt; oportet exponere.

DEFINITIO I.

S*Olidum eſt, quod longitudinem, latitudinem, & craſſitudinem habet.*

DEFINITIO II.

S*Imiles ſolidæ figuræ ſunt, quæ ſimilibus planis multitudine æqualibus continentur.*

DEFINITIO III.

Æ*Quales ſolidæ figuræ ſunt, quæ ſimilibus planis multitudine, & magnitudine æqualibus continentur.*

DEFINITIO IV.

S*Olidus angulus eſt plurium, quam duorum planorum angulorum in vnum punctum inclinatio.*

Sic ſuperficierum PBE, & PEF, & BPC, & PCF in punctum P inclinatio vocatur angulus ſolidus. Vt in fig. Def. 6.

DEFIITNIO V.

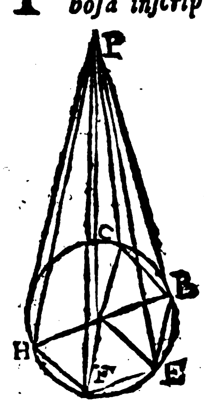
P*Yramis eſt figura ſolida, quæ planis pluſquam duobus continetur ab vno plano ad vnum punctum conſtituta.*

Quare ſi angulus ſolidus P habeat ſuperficies ſuas, quibus clauditur ab aliquo plano, V. g. CBEFH incipientes, & in punctum P terminantes, pyramis dicetur, quæ, & trium planorum, & quatuor, & quinque, & ſic in infinitum ſicut, & ſolidus angulus poteſt conſtitui.

Et hinc eſt, quod ſi ſolido alicui angulo ſubſternatur baſis plana, quod illa ſuperficies tot lateribus terminatur, quot planis angulus continetur; cum enim ſuperficies, & plana angulum continentia baſim planam ei ſubtenſam terminet, tot rectas lineas habebit terminantes, quot erunt ipſorum planorum ſectiones in baſi factas.

DEFINITIO VI.

F*Igura ſolida planis ſuperficiebus conſtans in globoſa inſcripta dicitur cum, vel anguli ſuperficierum, vel ſolidi tangunt alterius ſuperficiem.*



Sic figura ſolida PBEFHC in cono inſcripta dicitur, quia omnes eius anguli tangunt conum, nempe anguli ſolidi, vt BE FP, & ſuperficierũ V. g. ſuperficiei BPE ſecundũ lineã cùm FPE. Sufficit autem pro diuerſitate corporum cõuexorum, vel quod anguli ſuperficierum, vel quod anguli ſolidi tangant.

EXPENSIO I.

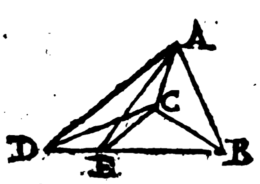
De solido angulo.

ANtequam solida ipsa pertractemus, de solido angulo est agendum, cum enim similitudo solidorum, ne dum à proportione laterum. Sed & ab angulorum solidorum æqualitate dependeat si non cognosceremus anguli solidi naturam, neque solidorum proportionem percipere possemus.

THEOR. I. PROP. I.

Etiam, si solidus angulus tribus tantùm angulis planis contineatur, duo quilibet angulis reliquo sunt maiores.

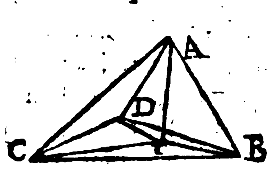
*PRobatur. Nam si aliquis angulus planus in angulo solido ABCD est maior, vel æqualis duobus reliquis. Assignetur, & sit BAD, à quo dematur angulus BAE æqualis angulo BAC; remanetque reliquus EAD, vel maior, quã DAC, vel æqualis. Remaneat primo æqualis angulo CAD; Fiat latus EA lateri CA æquale; substernaturq; basis plana ECDB, & fiet ex 22. primi triangula æqualia; nimirũ EAD triangulo ACD ob latus idem AD, & æqualia crura EA, & AC, cũ sint anguli DAE, DAC dicti æquales. At BEA triangulo BAC ob latus idẽ BA & crura EA, & AC æqualia cum sint anguli apud A effecti æquales. Quare basis quoque BC esset æqualis basi BAE, & basis ED basi CD. Non fieret ergo triangulum BCD basis anguli solidi. Nam ex 20. primi oportet duo crura trianguli reliquo esse maiora omnifariam sumpta, & sic pyramis triangularis non daretur, quæ basim triangularem habet, & verticem tribus angulis planis contentam, & hinc neque BD maior esse potest BC, & CD cruribus eadem ratione. Vnde nec angulus BAD potest esse maior angulis BAC, & CAD.



THEOR. II. PROPOS. II.

Omnis solidus angulus sub minoribus, quàm quatuor rectis angulis continetur.

*SIt angulus solidus ABCD. Dico angulos eius planos BAD; DAC, & BAC, vel si plures sint esse minores quatuor rectis. Quod, vt probetur; determinentur omnia latera AB, & AD, & AC, & substernatur basis BDC, in quam à puncto A in sublimi cadat ex prop. 10. Tr. 22. perpendicularis IA, & ab angulis B, D, C ad eius contactũ I ducantur BI, & ID, & IC, eruntq; anguli tres DIC, & DIB, & BIC æquales quatuor rectis in plano BDC perpendiculari ad IA Cor. 1. pr. 12. lib. 1. Sed ex propos. 21. præcitati tract. angulus DAC ab obliquo plano effectus est minor, quàm DIC, & sic BAD minor, quàm DIB, & pariter BAC minor, quàm BIC. Ergo omnes simul erunt quatuor rectis minores.

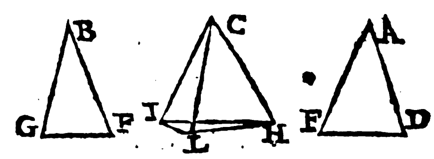


THEOR. III. PROPOS. III.

Si fuerint tres anguli, quorum duo, vt libet assumpti reliquo sint maiores, poterit ex illis angulus solidus constitui.

*PRobatur ad hoc, vt constituatur angulus solidus necesse est, vt basis plana illi angulo possit substitui, quæ saltem triangularis sit: Sed si anguli 2. sint maiores reliquo, habebũt etiam duas bases maiores reliqua: Ergo ex illis tamquam ex lateribus planum triangulare constitui poterit, quod angulum solidum substernat.

Quod verò duo anguli maiores reliquo simul sumpti habeant etiam bases simul sumptas maiores reliqua ostenditur.



Sint anguli tres A, B, C, quorum duo A, & B reliquo C sint maiores. Dico etiam bases DE, & GP simul sumptas reliqua HI esse maiores. Nam primo si vnus ex duobus ipsorũ est maior, vel æqualis ipsi ICH constat, & basim sub æqualibus cruribus contentam, vel esse æqualem ex 22. primi, vel esse maiorem ex 24. eiusdem, & ideo addita altera basi ambas reliqua esse maiores.

At si ambo anguli seorsim sumpti sunt minores angulo reliquo factis omnium angulorum æqualibus cruribus, & suis basibus DE HI, FG ductis, in triangulo reliquo HCI detruncetur angulus LCH æqualis angulo A; remanebit angulus residuus LCI minor altero EBG, cùm duo A, & B hoc toto HCI præsupponantur maiores ex Thesi.

Basis verò HI basi DE, & LI basi minor erit eò, quòd HL sit æqualis DE ex prop. 22. primi ob latera æqualia HC, & CL lateribus DA, & AE, & angulum comprehensum ab ipsis æqualem, at basis LI ex 25. lib. 1. minor basi FG ob angulum minorem LCI angulo FBG, & latera æqualia LC, & CI lateribus FB, & BG. At basis HI est minor cruribus HL, & LI ex 20. lib. 1. Ergo HI erit minor basibus DE, & FG simul sumptis. Vnde ex illis angulis angulus solidus constitui poterit.

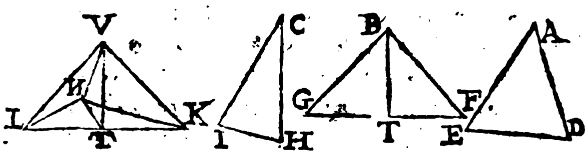
PROBL. I. PROPOS. IV.

Ex tribus angulis planis, quorum duo quomodocumque assumpti reliquo sint maiores, solidum angulum constituere; oportet autem illos tres angulos quatuor rectis minores esse.

*SInt tres anguli in fig. A, B, C minores quatuor rectis, & quorum duo, vt vt assumpti reliquo sint maiores, & fiant ei crura æqualia subductis basibus DE, FG, & HI. Electo verò quolibet triangulo, ad eius basim V. g. ab basim FG in triangulo FBG ducatur perpendicularis BT. Deinde ex basibus

basibus DB, FG, & HI constituatur triangulum KNL, & diuiso KL, vt est æqualis basis, FG in T, ducatur NT, fiatque triangulum NTV ex perpendiculari TB crure BA, & basi NT, cuius latus TV perpendiculariter insistat lateri KL, & secet in NT ex prop. 21. Tract. 22. Deinde iungatur KV, & VL. Dico quòd sit factus angulus solidus constans tribus angulis planis datis A. B, & C.

Probatur. Nam, quòd ex tribus basibus possit triangulum constitui, constat ex hypothesi, in qua supponitur duos angulos fuisse datos maiores reliquo; Quare, & bases, vt prop. anteced. probatum est; Quòd autem ex tribus quoq; nimirum perpendiculari TB latere BA, vel quolibet illi æquali, & NT possit triangulum componi.



Probatur. Nam aut NT est maior, quàm TL, vel minor, vel æqualis. Sit primò maior. Quia ergo ex TV, LV, & LT cōponitur LVT triangulū, LV, & LT erunt maiora latera, quā VT, vnde tantò maiora erunt TN maius ex Hyp. quā TL, & NV ęqualis ipsi VL sc. ipsi AE, vel ęqualis GB, Aut NT erit minor, quā TL, at TV, & LV sunt maiora, quam TL, ergo tantò maiora latera erunt ipsa NT, & NV æqualis ipsi VL reliquo NT, Aut erit ęqualis NT, & LT, & ita si TL, & LV est maior, quā VT, etiā maior erit NT cū ipsa NV ęquali VL, quam TV, vnde ex ipsis NT, TV, & NV poterit componi triangulum NVT. Quod verò ita super NT constituendum sit, vt TV cùm KL faciat angulos rectos docuimus prop. 21. tr. 22. intersectionum.

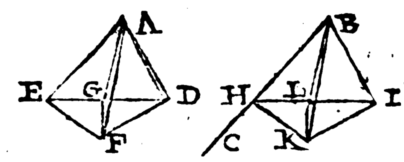
Quod tandem omnes anguli ad V nimirū KVL, & KVN, & NVL sint ęquales, singuli singulis assignatis C, B, A, ostenditur. Nam basis KN est æqualis ex constructione basi HI, & crus NV item ex constructione cruri BA, & ideo æquali HC. Crus quoque alterū KV est ęquale itē cruri FB. Quod ostenditur, nam TV crus perpendiculare ex cōstructione est æquale perpendiculari TB, & KT cruri FT, & anguli apud T comprehensi à dictis cruribus ęqualibus ex cōstruct. ambo recti; Ergo ex pr. 22. lib. I. basis KV basi FB, & æquali IC erit æqualis, vnde triangulum KNV erit æquale triangulo HCI, & triangulum KTV triangulo FBT, & altera medietas TVL alteri medietati TBG, & crus LV cruri GB, vel æquali EA secundi trianguli. Basis verò NL basi DE ex hypothesi est ęqualis, & crus NV cruri BA, vel æquali DA. Ergo triangulum ex 23. l. I. NVL triangulo DAE æquale, & sic omnia triangula KVN & NVL, & KVL singula singulis assignatis erūt ęqualia; quare, & anguli ad V singuli singulis B, A, C æquales erunt.

PROBL. II. PROPOS. V.

Ad datam rectam lineam, eiusque punctum, angulum solidum constituere solido angulo dato æqualem.

Sit angulus solidus A, cui costituēdus sit ęqualis angulus solidus B in data linea BC. Ad triangulum planum ADE ab aliquo puncto lineę AF V.g. ab F deducatur perpendicularis FG, & per G punctum transeat recta DE.

Deinde ex BC detruncetur BH, æqualis AE, & ad punctū B ex pr. 24. l. I. constituatur angulus planus IBH æqualis angulo plano DAE; fiant verò æquales IB, & AD, connectaturque IH, & in HI sumatur segmentum æquale segmento GE, quod sit LH, ducaturq; BL, & à puncto L educatur plano triāgulo IBH perpendicularis LK, æqualis ipsi GF, connectaturque recta BK. Dico *angulum solidum* B *tribus planis contentum* IKB, *&* IBH, *&* BHK *esse æqualem angulo solido dato* A.



Probatur, quia angulus IBH est æqualis angulo DAB, crusque BH cruri AE, necnon, & crus IB cruri AD, ex prop. 22. lib. I. basis IH erit æqualis basi DE, totumque triangulum IBH toti DAE æquale. Cùmque LH ex effectione sit æquale segmentum parti GE, erit etiam LB ex proposi. eadem 22. lib. I. æquale crus cruri GA; ast LK est æquale ex constructione cruri GF, & comprehendunt crus BL, & LK angulum rectum ex def. 2. tr. 22. intersectionum, erit quoque ex prop. 22. eadem lib. I. basis BK basi AF æqualis; sic quia crus IL, vtpote residuum ex LH sit æquale residuo cruri GD, & LK cruri GF ex effectione equale, angulusq; cōprehensus rectus sit, erit basis IK basi DF æqualis ex dicta propos. 22. lib. I. & eadem ratione KH basis basi FE: Cùm itaque triangulum IBK habeat latera singula singulis lateribus trianguli FAD æqualia, erunt IBK triangulum DAF triangulo, & KBH triangulo FAB æquale ex propos. 23. lib. I. sed iam ostensum est triangulum IBH triangulo DAE æquale; Ergo omnes anguli plani cōstituti ad verticem B singuli singulis erunt æquales angulis planis apud A, & sic angulus solidus B angulo A solido erit æqualis.

COROLLARIVM.

Hinc autem non erit difficile constituere, & angulum solidum pluribus superficiebus, quàm tribus contentum. Quia potest diuidi in tot angulos tribus superficiebus constantes, & illis exhiberi queunt alij anguli solidi æquales, qui deinde simul compositi ęqualem angulum solidum pluribus, quàm tribus superficiebus constantem efficiant.

EXPENSIO III.

De descriptione Tetraedri in sphæra, & proportione laterum ipsius ad diametrum.

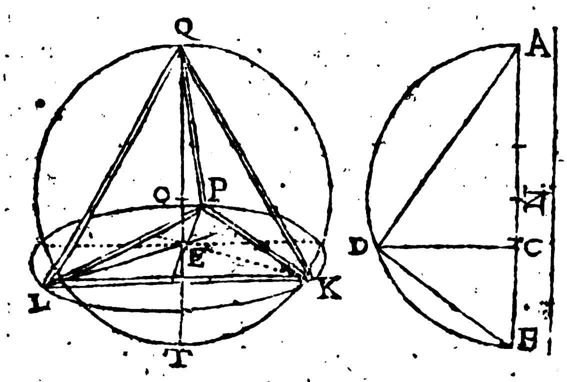
Tetraedrum est pyramis quædam quatuor superficiebus æqualibus, & similibus contenta habens quatuor solidos angulos tribus angulis planis clausos, & latera sex, de qua volumus ex Euclide docere, quomodo inscribatur sperę, & quęnam sit proportio laterum, quibus continetur ad diametrum ipsius sphærę.

PROBL.

PROBL. I. PROPOS. VI.

Tetaedrum construere, & data sphæra complecti, & demonstrare, quod sphæræ diameter potentia sesquialter sit ipsius lateris pyramidis.

SIt datus sphæræ diameter AB, qui diuidatur in tres partes, & sit tertia pars CB, facto deinde semicirculo centro Z super diametrum datam AB, à puncto C erigatur perpendicularis vsque ad circulum CD. Deinde alio in plano ad distantiam CD centro E fiat circulus, in quo triangulum æquilaterum describatur PKL, & à centro E ducantur radij EK, & EL æquales radio EP, & consequenter lineæ CD: super verò hoc planum erigatur normalis EQ æqualis rectæ AC, & connectantur extrema QL, & QK, & QP, & erit facta pyramis requisita.



De qua primò ostendendum est consequi omnia latera æqualia pro quo

Supponendum est ex prop. I. Tract. 20. lineam KL crus trianguli æquicruris posse deseruire pro latere quadrati; quòd erit triplo maius; quàm quadratum ex semidiametro KE, deinde ostendendum est DA posse deseruire pro quadrato triplo maiori, quàm CD, quæ est æqualis semidiametro EK, & ideo esse æquale cruri LK trianguli LPK circulo inscripti, cui DC est radius. Hoc autem ostenditur, quia ex Cor. p. 16. l. 6. AC, & CD, & CB sunt tres proportionales, & ideo quadratum ex prima AC, & media CD se respiciunt eadem proportione ex Cor. pr. 21. lib. 6. qua linea AC prima tertiam CB. Vnde simul composita quadrata ex lineis AC, & CD ad alterum ipsorum ex latere CD eandem dicent proportionem, quam compositæ lineæ AC, & CB, ad ipsam simplicem CB: sed quadrata hæc duo sunt æqualia quadrato super AD ex II. lib. 2. Ergo illud quadratum AD ad quadratum CD eandem proportionem obtinebit, quam duo quadrata AC, & CD ad vnum CD, & quam AC, & CB lineæ ad simplicem lineam CB, & consequenter hoc quadratum AD erit triplò maius, quàm quadratum CD, cùm etiam AC, & CB simul faciant lineam triplò maiorem, quàm sola CB.

Vnde probatur pyramidem constitutam potiri lateribus inuicem æqualibus. Nam omnia sunt æqualia lineæ AD, & quidem tria latera KQ, & QL, & QP: quia triangula ipsis insistentia; vt KEQ sint æqualia triangulo ADC. Quòd habeant duo latera KE ipsi CD, & EQ ipsi AC æqualia, & angulum rectum ad E, & C claudant ex constructione. Latera verò KL, & KP, & LP, quòd sint latera quadrati triplò maioris: quàm KE æqualis lineæ CD sicut ostensum est progr. I. AD esse latus quadrati triplo maioris, quàm CD. Vnde cum quadrata ex LK, & DA eidem quadrato ex CD eãdem triplam prodortionem dicant, erunt inuicem æqualia. Quare, & crura inuicem æqualia: nimirum AD, & KP, & alia crura PL, & LK.

Probatur secunda pars, quod sphæra complecti possit. Nam producta diametro EQ in T donec fiat æqualis diametro AB; sicut totum est æquale toti, ita medietas ez erit æqualis medietati OT. Sed hæc gyrata transit per vertices AD trianguli ADC. Ergo, & transibit per vertices KEQ, & PEQ, & ELQ triangulorum æqualium prædicto ADC.

Probatur tertia pars quod sphæræ diameter possit deseruire pro quadrato sesquialtero, *nempe* vna vice, & dimidia maius quadrato, quòd fieret ex pyramidis latere. Nam ex Cor. 2. pt. 8. & 22. l. 6. constat quadratum AB correspondere in proportione ad quadratum erectum super AD, vt AB ad CA: quòd AB, AD, & CA sint tres continuè proportionales, sed AB, & vna vice, & dimidia maior, quam AC, quod sit partium duarum; illa vero trium ex constr. Ergo tale quoque erit quadratum AB; nempe trium partium ad quadratum AD duarum: AB verò est diameter sphæræ; at AD latus pyramidis, vt ostendimus.

COROLLARIVM I.

HInc enascitur diametrum sphæræ posse efficere quadratum quintuplo maius, cum dimidio, quam semidiameter ambientis circuli trianguli basis.

Nam ostensum est diametrum sphæræ TQ vna vice, & dimidia in suo quadrato esse maiorem, quàm pyramidis lateris KL quadratum, ita vt si lateris quadratum sit 9. illud sit 6, & vt in supposit. lateris quadratum, excedit radij XB quadratum triplò, ita quod si quadratum lateris sit 6. hoc sit 2. Ergo quadratum diametri sphæræ QT ad quadratum radij KE se habet vt 9. ad 2. nempe quatuor vicibus illud continet cum dimidia.

COROLLARIVM II.

SEcundò perpendicularem à vertice pyramidis ad basim demissam esse duas tertias partes diametri sphæræ. Quia EQ est æqualis rectæ AC, & diameter TQ est æqualis rectæ AB. At AC ex constructione duas tertias partes rectæ AB comprehendit, & ideo quadratum diametri ad perpendicularis quadratum erit, vt 9. ad 4. nam proportio 9. ad 4. est duplicata 3. ad 2. vt videre est in istis numeris 9. 6. 4.

EXPENSIO IV.

De descriptione Octaedri in sphæra, & eius laterum ad diametrum proportione.

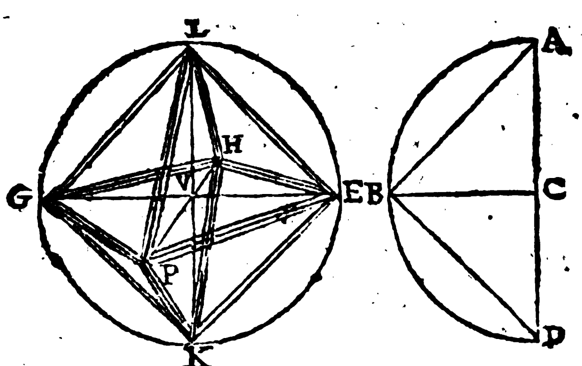
OCtaedrum est corpus octo triangulis æqualibus similibus, & æquilateris constans, quæ efformant sex angulos solidos quatuor æqualibus angulis planis comprehensos, vt in fig. sequentis propos. satis apparet, & latera duodecim obtinet; quæ angulos æquales viginti quatuor planos efformant.

PROBL.

PROBL. I. PROPOS. VII.

Octaedrum constituere, & sphæra complecti, & demonstrare, quod sphæræ diameter potentia sit dupla lateris ipsius Octaedri.

SIt AD datæ sphæræ diameter, quæ in C puncto bifariam sectus sit; erectaque perpendiculari CB, facto centro in C semicirculus describatur; comungãturque AB, & DB rectis, eritque factum semiquadratũ ADB, quod sufficit. Seorsim autem aliud quadratum fiat EHPG, cuius latera EP, & PG, GH, & HE lateri AB sint æqualia, & diametri EG & PH diametro AD æqualia. A puncto verò V excitetur perpendicularis KVL, sintque portiones VK, & VL æquales AC, connectanturque eorum extrema octo rectis EL, & PL, & PK, & cæt. Dico primò esse constitutum Octaedrum.



Quod probatur ostendendo omnia eius latera æqualia: quia triangula tum iacentium superiora, tum inferiora ad centrum V. g. EVK, & LVP, & cæt. sunt æqualia ob æqualia crura EV, & VH, & VL ex effectione, & angulum rectum ad V; Vnde bases erunt æquales EL, & EP, & cæt. sicque omnia triangula superficialia, vt ELP, & cæt. æqualia latera possident, scilicet bases triangulorum ad centrum, & ideo æquales angulos ex 23. lib. 1.

Probatur secundò, quòd sphæra complectatur. Nam radij EV, & VG, & VL sunt æquales rectæ AC ex effectione; Ergo circumferentia quælibet interuallo VG centro V per eorum extrema transibit.

Probatur tertiò, quòd eius lateri sit duplus in potentia diameter EG, quia ex 11. lib. 2. æquat in ELG rectangulo ex 28. lib. 3. quadratum basis EG quadrata laterum æqualium EL, & LG, vnde quadratum EG erit duplum quadrati lateris LG.

COROLLARIVM.

HInc educitur, quod si in eadem spæra descriptum sit Octaedrum, & Tetraedrum latus Tetraedri sua potentia comprehendere lateris octaedri potentiam, idest quadratum, quod potest efficere vna vice cum tertia parte, nam quadratum lateris pyramidis est 4. qualium 6. est quadratum diametri, & octaedri lateris quadratum talium partium 3. pyramidis lateris quadrati erit 4. earundem partium, octaedri vero lateris quadratum 3. nempe Pyramidis latus comprehendet latus octaedri potentiã semel, & insuper $\frac{1}{3}$ ipsius lateris octaedri.

EXPENSIO V.

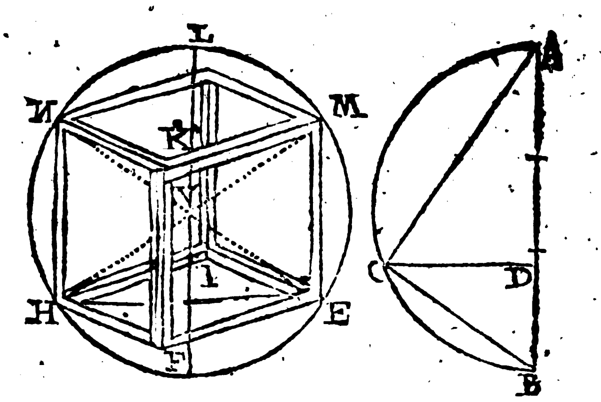
De Cubi in sphæra descriptione, & eius lateris ad diametrum ratione.

CVbus est figura solida sex superficiebus quadratis æqualibus constans, habens angulos solidos octo tribus planis angulis rectis conclusos, & latera duodecim.

PROBL. I. PROPOS. VIII.

Cubum constituere, & sphæra complecti, & demonstrare, quòd sphæræ diameter potentia sit tripla lateris ipsius cubi.

SIt sphæræ diameter quicumque AB; diuidaturq; in tres partes, & sit tertia pars BD, & à puncto extremo D excitetur perpendicularis, quam abscindat in C semicirculus super AB, connectanturq; AC, & CB.



Seorsum verò in aliquo plano fiat quadratum EFHI, cuius latera sint æqualia rectæ CB & ab angulis eius excitentur perpendiculares ipsis lateribus æquales, quorũ exprema L, M, K, N rectis connexa efficient cubum EHML de quo loquitur prop.

Nam, quod sit cubus patet. Etenim ex effectione habet omnia latera æqualia, cum enim erectæ, vt KF sint perpendiculares plano, erunt quoq; parallelæ, vnde, & angulos rectos efficient cum lateribus in plano extensis FE, & c. ex prop. 7. Tract. 22. Quia verò sunt æquales latera quoque suprema M K erunt parallela, & æqualia lateribus EF, & perpendiculares lateribus erectis, vt FK: quare cũm omnia latera sint æqualia, parallelaque, & omnes anguli recti cubus constitutus est.

Prob. secundò, quòd sphæra cõplecti possit. Quia dimidia omnium diagonalium, vt MH sunt æqualia, cum ipsæ diagonales sint æquales. Vnde facto centro in communi eorum puncto medio V poterit ad interuallum VH describi circulus. Qui transibit per extremos angulos V. g. per H, & N, & cæt ita etiam alius per L, I, & cæt.

Probatur tertia pars. Nam diameter sphæræ MH continet in suo quadrato duo quadrata lateris EM æquali quadrato lateris sibi æqualis EF, & diagonalis EH: diagonalis verò EH continet quadrata lateris EF, & FH ex 11. lib. 2. ob angulum rectum EFH. Ergo quadratum diametri continet tria quadrata trium laterum æqualium ME, & EH, & EF, quare vni eorum triplum est.

Est autem MH æqualis AB diametro. Quia quadratum AB ad quadratum CB, est quoque triplum. Siquidem est ad quadratum ex CB, idest ME, vt AB ad DB prima ad tertiam proportionalem ex Coroll. prop 21. lib. 6. quę AB tripla est ad BD. Quare erit quadratum AB triplum quadrati CB, & ideo ęquale diametro MH, cuius quadratum triplum est quoque quadrati EP, idest CB ęqualis lineę.

COROLLARIVM.

Hinc autem habetur diametrum cubi, seu sphęrę posse efficere quadratum ęquale quadrato lateris cubi, & quadrato lateris pyramidis. Nam cùm; quadratum diametri sphęrę eiusdem contineat pyramidis quadratum vna vice, & dimidia erit vt 9. ad 6. & cùm idem contineat lateris cubi quadratum tribus vicibus erit, vt 9. ad 3. Quare composita hęc duo quadrata partium 6. & partium 3. efficient quadratum partium 9, quale est quadratum sphęrę, seu cubi: Vnde AC erit latus Pyramidis, & CB cubi, cuius diameter sit AB.

EXPENSIO VI.

De inscriptione dodecaedri in sphæra, & eius laterum ad diametrum proportione.

Dodecaedrū est corpus duodecim pentagonis ęqualibus ęquilateris, & ęquiangulis constans, simulque angulos solidos 20 comprehensos angulis planis tribus, & latera 30. consequitur.

PRORL. I. PROPOS. IX.

Dodecaedrum constituere, & sphæra complecti, & demonstrare, quòd dodecaedri latus irrationalis est linea, quæ vocatur Apotome.

Cvm dodecaedrum duodecim facies habeat, & cubus 12. latera hinc est, quod construatur delineando super vnum quodque latus, dodecaedri aliquam superficiem. Fiat itaq; quadratum b y basis electę ad placitum cubi, circa quem dodecaedrum constituendum est, seceturque eius semilatus r o secundum extemam, & mediam rationem in puncto n, ducaturque linea, m e, & u t perpendiculares, abscindatur n m, & g t ęqualis maiori segmento n o, deinde coniungatur t r, & extendatur. Nam dico pro. 1. progress. quod impingit in punctum m.

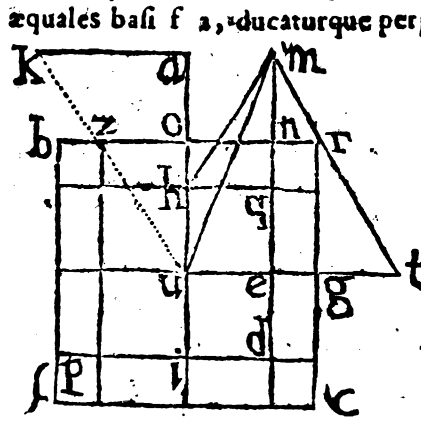
Probatur. Nam quia semilatus o r est sectum extrema, & media ratione, ita est r o, vel r g ad t g, maius extremum, vt n m, idem maius extremum ad minus r n; sed talia quoque erunt lateta triangulorum t g r, & n r m, quia erit ob angulū rectum apud n, & g, & angulos ad verticem apud r, & m æquales, ita r g ad t g, vt n m ad n r. Ergo t r debebit transire per punctum m. Nam si transiret aliunde, non haberet eandem proportionem, quam habet r g ad t g siquidē si trāsiret supra, vel infra, esset maius, aut minus illud crus trianguli r n m, quā n m, & ideo linea n m, licet maior, aut minor, quā n m eidem r n eandem proportionem diceret, quam r g ad t g, quod esse nequit ex 7. lib. 5.

Progress. 2. Dico t m in r esse lineam sectam secundùm mediam, & extremam rationem, quod pari modo ostenditur. Quia eadem proportione referuntur t r ad m r, qua t g maius segmentum ad n r, vel e g minus. Ergo *componendo*, vt t r ad t r cum m r, sc. t m: sic t g ad t g cum e g, idest z e, vel æqualis n e tota linea extrema, & media ratione secta, sc. e g ad t g, quæ est, vt m r ad r t, cum sit, vt n r ad g t; quare cū minus extremū m r se habeat ad maius t r, vt maius ad totam t m, quadratum maioris segmenti ex prop. 11. lib. 6. erit æquale rectangulo minoris segmenti, & totius, vnde extrema, & media ratione secta erit.

Dico Progress. 3. Quod si ducta h m ex a, & e m fit triangulum rectangulum u a x, *quod* basis u x æqualis erit lateri quadrati r b; *quod* sic probo. Nam est æquale eius quadratum ex 47. lib. 1. quadratis crurum a u, & a x: hæc verò duo quadrata sunt æqualia quadrato lateris r b; Ergo quadrata lateris r b, & cruris u x æqualia sunt, & consequenter ipsa latera æqualia.

Probatur minor, nempe quadrata linearum a x, & a u esse æqualia quadrato lateris r b. Nam quadratum u a est æquale quadrato n b p d cum d n, & e m, ex constr. sint æquales; Quadratum verò ex a k, quadrato ex m h, quod ęquale est quadratis ex m q, & q h; Quadratum verò ex q m est æquale quadrato g r o u, & quadratum q h æquat q e u h, quæ sunt ęqualia gnomoni r d f, siquidem ex hypothesi quadrata duo e q u h æqualia existunt rectāgulis duobus y i, & i f, quod sint quadrata maioris segmenti n o. Rectangulū verò q o est æquale rectangulo d g, vt patet, & rectangulum r e est pars quadrati r u. Vnde totus gnomon r d f secundum singulas partes ęquat quadratum r u habens latus u o, vel q m, & quadratum lateris q h; quę duo quadrata ęquant quadratum basis m h, vel a k, & hæc cum quadrato u a, vel æqualis b n æquant quadratum basis u k, & ideo erit æqualis lateri r b.

Dico Progress. 4. Quod si ex toto latere r b, & maiori eius segmento n z: Fiat triangulum isoscelles f z 3, & in puncto 4. & 8 secentur eius latera extrema, & media ratione, idest fiant 4 f, & z 8 æquales basi f z, ducaturque perpendicularis Q 3. & ei perpendicularis per puncta medię sectionis 4 8 æqualis hinc inde à puncto V medietati lateris f 3, quod secabitur in puncto 4. extrema, & media ratione, minusque segmentum erit x 4. Nam ducta f b, parallela perpendiculari 3 Q, & b 3 basi f z parallela. Erit primo y 5 dimidium segmentum maius, vtpote æquale dimidio f Q, deinde probo 5 4 esse aliud dimidium minoris segmenti 43. & ideo duplum ipsorum ęquari ipsi 3. f vel x 6. In triangulo b 3 f, ita f 3 est ad 4 f, vt basis b 3. ad parallelam 54. sed vt tota f3 ad maius segmendum f 4 ita est f 4 maius segmentum ad minus 43, ergo vt est f 4 maius segmentum ad

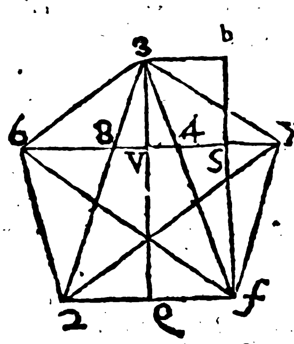


43, minus ita est b 3. basis ad 5 4 sibi parallelam: sed b 3 est ęqualis semibasi f q, idest maioris segmenti f 4 medietati, ergo 5 4 erit ęqualis medietati minoris segmenti 43, vnde cum dupla 4 f fiet tota linea ęqualis lateri 43. & cũ dupla vs æquali 4 f tota x 6 ęqualis lateri quadrati r b in 1. fig.

Progress. 5. Et hinc patet, quod possit fieri pentagonum ęquilaterum, & æquiangulum ex 11. lib. 4. quia f 3 2 triangulum est quale reposcit prop. 10. lib. 4. cuius basis f 2 sit segmentum maius lateris 23. extrema, & media ratione secti. Nam quia 46 ęquat f 2 parallelã, & f 2, æquat f 4 erit 46 f 2 parallelogrammum ęquilaterum. Vnde diagonali f 6 angulus 4 f q erit diuisus bifariam, & ita erunt tres anguli ęquales f 32. 3 f 6. & 8 6 f. & ita fare in parallelogrammo x 8 f 2. Vnde omnes anguli erunt æquales, cum ostendentur ęquales angulo f 32. Latera quoque ęquabuntur. Quoniã iam tria 2 f, & f x, & 26 in parallelogrammis 28 f x, & 46 2 f super eandem basim existentibus ostensa sunt ęqualia: Vnde remanet de duobus x 3. & 36. Quod patet, nam segmentum 38. ex dictis progr. 4. ęquat segmentum 86. Vnde, & anguli 638. & 368. subtensi ex prop. 14. lib. 1. æquabuntur, ęquales autem sunt f 32, & 86 f ex dictis. Ergo toti anguli 436, & 36 f ęquales erunt, sed inuicem 3 f 6 ęquat f 3 2. Ergo reliqui æquales trianguli 3 f 6 reliquis inuicem ęqualibus trianguli f 3 2; quare erit ęquiangulũ, & isosceles; sed f 3 est idem in vtroque triangulo. Ergo ex 4. lib. 6. f 6 ęquat 3 2. & 36 latus f 2. & eadem dicas de triangulo 3 x 2.

Dico progr. 6. Quod si ducatur m u hęc erit ęqualis in prædicto quadrato semidiametro cubi, cuius latus sit r b. Nam erit eius quadratum triplo maius, quam quadratum semilateris cubi r o. Cumq; quadratum diametri cubi sit triplò maius, quam quadratum lateris ex prop. 10. h. Coroll. etiam semidiametri erit triplo maius, quàm eius semilateris; Vnde u m tripla potentiã r o ęquabit semidiametrum cubi, cuius semilatus est r o.

Quod autẽ sit triplo maius u m basis quadratũ, quam semilateris o r ostenditur. Nam est ęquale quadrato ex e m, vel ęquali n d, & quadrato ex e u facto in rectangulo triangulo m e u, hæc verò duo quadrata simul sunt triplo maiora, quã quadratũ ru ex semilatere r o; quoniã primò u b est iam æquale quadrato u r secundò si aliam partem accipiamus d o, cum occupet idem spatium quadrato e h quadrati r m, & rectãgulo h n erit idem quadrato u r, at cum e i quadratum æquetur rectãgulo e r etiam parallelogrammum d o æquabitur quadrato



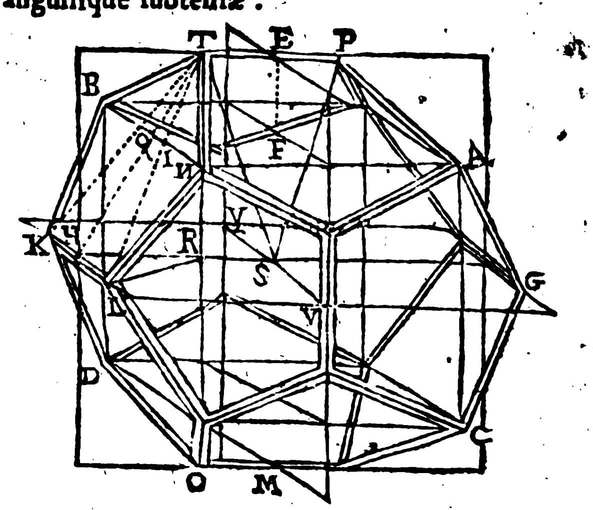
u r. Tertio u p est æquale rectangulo u n, cui si addamus quadratum alterius cruris e u æquale reliquo rectangulo r e quadrati prędicti r u fiet quãtitas omnis p e r u quadrato tertiò æqualis. Iam ergo ter adæquauimus duobus quadratis ex cruribus e m, & e u quadratum r u factum ex semilatere r o. Vnde, & quadratum u m istis duobus ex m e, & eu æquale erit triplo maius, quã quadratũ ex r o; Vnde erit semidiameter cubi, cuius semilatus r o.

Istis præsuppositis fiat cubus ABCD, secenturq; eius singulæ superficies bifariam planis, seu rectis GH, & cæt. quæ plana excedant plana cubi excessu n m, vel quantùm est segmentum n o; quod interuallũ notetur, quoq; à linea E versùs T, & sit ET. Sic fiat vtrinquè omnibus superficiebus à pũcto, in quo se decussant V. g. ab E in P ab M in O, ab H in L, & K, & cæt. Deinde coniungantur puncta KB, & LN, & NT, & TB, eritque factum pentagonum, & si idem fiat singulis duodecim lateribus cubi, vt factum est in latere NB. Dico factum esse dodecaedrum.

Progress. 7. Quod vt ostendatur multa singulatim sunt demonstranda, & primò, quod pentagonum TNBLK sit in eodem plano. Nam sic non esset eadem figura, cùm non esset in eadem superficie. Nam ducta HT, quæ transeat per Q definet in T ex progr. 1. Ergo erit in eodẽ plano cũ latere cubi ex pr. 2. tr. 22. vtpote, quia, cum eo in Q se secat; linea verò LK lateri NB parallela est ex effectione, propteraque erit in eodem plano cum illa.

Quare, & latera TN, & NL, & cæt. prædictas coniungentes erunt in eodem plano, totumque pentagonum LNTKB in eodem plano erit ex pr. 2. T. 22.

Progress. 8. Probatur quod sit pentagonum æquiangulum, & æquilaterum. Nam, si ducantur TL, & TK, & NB sunt inuicem æquales, & se inuicem secant extrema, & media ratione. Vnde sunt lineę ęquianguli, & æquilateri trianguli lateribus, angulisque subtensæ.



Demonstroque primo TL esse æqualem NB. Nam ducta TR perpendiculari plano RLK, ductaque RL, hęc erit æqualis lineæ h m, vel a x, cum sit basis trianguli RHL æqualis triangulo h q m ob LH ęqualem h q, & RH ipsi q m. At RT lineę u a ex constructione; angulusque apud R rectus. Quare, & basis TL erit æqualis basis u x vel r b, & consequenter lateri cubi NB ex 3. prog. & 5. & eadem probatio est de linea TK: Deinde probatur, quod se secant extrema, & media ratione in I. Nam ex 2. prog. TH, vel NT, sic cũ latere NB se secat in Q: Ergo etiam TL, cum enim NB sit parallela lateri KL ita erit TH ad TQ, vt TL ad TI, sed TQ est minus segmentum ex prædicto progr. Ergo etiam TI, & consequenter IL maius. Cùm ergo NB sit æqualis lineæ TL, & diuisa bifariam Q, parallelaque lateri LK, ipsa quoque secabitur secundum mediam, & extremam rationem, minusq; segmentũ erit NI ex 4. progr. Quare ex 5. pentagonum æquilaterum, & æquiangulum constituetur. Quod si replicetur singulis in lateribus cubi, cum in omnibus sit capacitas, constituentur duodecim pentagona conficientia Dodecaedrum.

Progress. 9. Probatur. Quod sphæra possit amplecti. Nempe, quòd omnium horum pentagonorum anguli tangant sphæram amplectentem. Nam supra ostensum est progr. 6. m u esse æqualē semidiametro, quę nectit punctum m cum centro cubi u. Quod punctum distat, tum ab a, tum ab n secundùm interuallum maioris segmenti; talis autem est linea PS, & TS, & cęt. quę angulos pentagoni cum centro nectunt, nam P, & T ex constructione distant à medio E, tum à superficie cubi quantùm est maius segmentum dimidij lateris extrema, & media ratione secti, & sic dicas de omnibus alijs, vt considerare est, quod etiam verificabitur de angulis, qui cubi angulis coincidunt cum, & cubi sit semidiameter.

Probatur quarto, quod latus horum pentagonorum sit Apotome, nam sphęrę diameter cum latere cubi est rationalis linea solùm potentia, vt supra ostensum est, cum triplum maius quadratum, quam latus possit efficere, & ideo ei sit, vt numerus ad numerum. Cum ergo latus cubi rationalis linea sit maius segmentum KL latus ex propos. 47. lib. 9. erit Apotome, vt ibi ostensum est.

COROLLARIVM I.

Hinc ellicitur, quod si latus Cubi coniungatur cum maiori segmento ex propos. 47. lib. 6. element. efficietur minus segmentum, & latus cubi assumet sibi vices maioris, vnde fit, quod si aliqua linea secetur secundum mediam, & extremam rationem maius segmentum poterit deseruire pro latere cubi, segmentum autem minus pro latere dodecaedri.

COROLLARIVM II.

Secundo ellicitur, quòd linea coniungens sex opposita latera parallela, qualia PT, & MO, sic LK alteri apud G, sic quòd est apud V alteri apud Y, vt est linea GH, vel BM, secta sit secundum extremam, & mediam rationem cum contineat ex construct. latus cubi, & maius segmentū nēpe medietatem hinc medietatē inde, vt est FB, qua cubum excedit.

EXPENSIO VII.

Icosaedrum sphæra inscribere, simulque omnium corporum regularium proportiones exponere, & numerum eorum demonstrare.

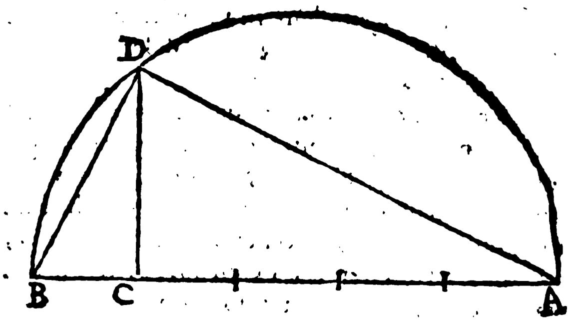
Icosaedrum viginti triangulis planis cōstat ęqualibus, & similibus obtinens angulos solidos 12. quinq; angulis planis constantes, & latera 30.

PROBL. I. PROPOS. X.

Icosadrum constituere, & sphæra complecti, & ostendere, quod Icosaedri latus irrationalis linea sit.

Facilior est hæc propositio, quàm præcedens, licet corpus pluribus superficiebus circumseptum sit. Ad hoc ergo, vt Icosaedrum constituamus; detur diameter alicuius sphæræ, quā illud volumus amplecti, & sit AB, & diuidatur in 5. partes, vnaquæque ex ipsis sit CB, à quo puncto C erigatur perpendicularis, quæ terminet in circulum in D; Ducanturque AD, & DB.

Nam dico AD posse quintuplum magis, quàm DB. Ratio est, quia quadratum totius AB est 25. partium quarum vna est quadratum ex CB factum; Verùm ex quadratis planis, quæ sint mensura quadrati AB; ex CB linea quadratum solùm 5. possidet. Siquidem, cùm ita sit AC crus maius ad CD crus minus in maiori triangulo ADC, vt idem crus CD maius in minori ad CB minus ex Coroll. prop. 16. lib. 6. erit CD media proportionalis, & sic eius quadratum erit æquale rectangulo ex AC, & CB quatuor partium, vnde vna cum quadrato CB faciet 5. quadrata: Istis verò duobus quadratis æquale est quadratum ex DB ex 11. lib. 2. Ergo hoc quadratum erit 5. partium respectu quadrati totius AB 25. partium quadratarum: Vnde cum duo harum linearum quadrata se habeant tamquam numerus ad numerum ipsæ lineæ AB, & DB erunt rationales potentia tantùm commensurabiles.

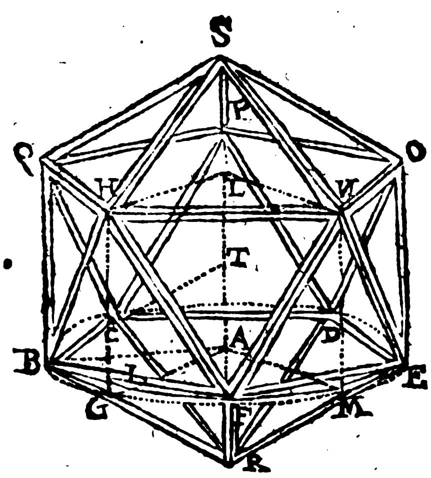


Quo supposito sic conficitur Icosaedrum. Semidiametro DB, fiat circulus BEDC, in eoque fiat pentagonū æquilaterum, & æquiangulū DCBEF ex dictis lib. 4. prop. 11. diuisaque circumferentia FB bifariam in G ducātur ad planum circuli facti perpendiculares GH, LA, & MN, & cęt. æquales ipsi DB primæ figuræ, vel G A radio illi æquali. Et harum vertices iungantur N, O, Q, H rectis, Fiatq; triangulum NLH parallelum plano circuli iam factis, extendaturque eius planum, & triangulis 4. ipsi NLH æqualibus à centro H additis compleatur pentagonum NOPQH equale pentagono inferiori, cum triangulum NLH sit æquale triangulo MAG, & consequenter ęquali triangulo FAB pentagoni primo constituti, quibus præstitis iungantur anguli, & puncta pentagoni superioris cum inferioris angulis FH, & FN, & BN & HB, & cæt. Habebimusq; 10. triangula æquiangula, & æquilatera. Decem quidem, quia decem latera duorum pentagonorum æqualium perhibeant bases; æquiangula verò, quia æquilatera ob hanc rationem, quæ de vno ostensa pro omnibus ob paritatem inseruiet.

Probatur verò ex eo, quod singula omnium latera sint equalia lateri FB. Nam vt diximus propos. 4. Tractat. 20. huius latus pentagoni V. g. FB, vel NH efficere quadratum æquale quadrato decagoni FG, & exagoni, nempe semidiametri

tri BA: Sed crus HF poteſt efficere quadratum æquale quadratis FG, & GH æqualis radio BA, ex conſtruct. vt docet prop. 11. lib. 2. ob angulum rectum apud G, ergo iſtæ lineæ FH, & FB, quæ æqualiter poſſunt, erunt ęquales, & idē valet de cęteris.

Iſtis iam 10. triangulis conſtitutis prolungetur AL in vtramq; partem in R, & S, vt pars addita LS, hinc, & AR inde ſint æquales lateri decagoni FG; Vertexque earum R, & S coniungatur cū angulis ſuppoſitorum pentagonorum, & erunt quinque triangula, vt NHS, & cæt. ſupra; quinque infra, vt FRB, aut DCR, & cæt. ſimulque decem, quæ habebunt omnia latera prædictis æqualia, & ideo illis omnino æqualia erunt ex propoſ. 23. lib. 1.



Probatur GH eſt ex conſtructione æqualis lineę GA, & ideo lineæ LH: verū SL: & AR lineę decagoni FG; angulus verò apud L, aut A rectus, vt āgulus apud G. Ergo triangula LSH, & ARG, & FHG æqualia erunt. Quare baſes quoque erunt æquales SH, & RB, & FH, & ſic dicas de alijs. Cùm ergo omnia latera omnium triangulorum ſint ęqualia erit conſtitutum Icoſaedrum.

Probatur modo, quod ſphęra poſſit amplecti, quod conſequemur, ſi probauerimus lineas TS, & TB, & cęteras à puncto T bifariam SR partiēte procedentes ad angulos Icoſaedri, eſſe æquales. Nam tunc ſphæra omnes angulos continget.

Portio AL eſt latus Exagoni, quia radio ex AB æqualis, & LS decagoni ex conſtructione. Ergo ex prop. 3. Tract. 20. de circulo inſcriptis, erit diuiſa tota SA extrema, & media ratione, & LS minus ſegmentum, & medietas maioris TL. At ex pr. 35. lib. 6. Eucl. minus ſegmentum cum dimidio maioris poteſt efficere quadratum quintuplo maius, quam dimidium maioris. Linea verò TB eſt eiuſdem proprietatis. Nam quadratū AB, vtpote, quod ſit dimidio AT linea maior, vtpote æqualis ipſi AL eſt quadruplex ad quadratum lineæ AT. Vnde TB baſis rectanguli TAB poterit efficere quadratum æquale quinque quadratis, quatuor cruris AB, & vni cruris AT. Quare poterit quintuplo magis, quàm AT. Vnde cum TS, & TB poſſint æqualia quadrata, nempe quintuplo maiora, quàm quadratum lineæ AT, inuicem erunt æquales.

Probatur deinde, quod tota RS æquet diametrum primæ fig. AB, & circuli ADB. Nam illa poteſt, vt in notabili quintuplo magis, quam DB; talis verò conditionis eſt SR. Nam vt dictum eſt eius medietas poteſt quintuplo magis, quam medietas TL, & ideo tota SR quintuplò poterit magis, quam tota LA æqualis ex conſtruct. ipſi DB, & ideo eorum quadrata erunt æqualia, vnde, & ipſæ æquales.

Probatur tandem, quod latus Icoſaedri ſit linea irrationalis, quod ſufficit ſcire ne fruſtra laboremus ex nota diametro in inquirendo longitudinē illius adamuſſim, cum id fieri nequeat, quòd ſit, & potentia, & longitudine incommenſurabilis.

Nā vt probaui pr. 19. tr. 20. Latus pentagoni eſt incommenſurabile diametro, tùm longitudine, tùm potentiā; ſed diameter ſphæræ RS eſt potentia commenſurabilis diametro AB circuli, in quo inſcriptum eſt pētagonum, vt dixi, ergo latus pentagoni FB erit incommenſurabile quoque ne dum diametro AB circuli; ſed etiam ſphęrę SR, tum longitudine, tum potentia ex prop. 7. lib. 10. Elem.

COROLLARIVM I.

Hinc educitur ſphæræ circumſcribentis Icoſaedrum diametrum eſſe potentia quintuplum diametri circuli pentagonum ambientis ex cuius lateribus Icoſaedrum eſt conſtitutum.

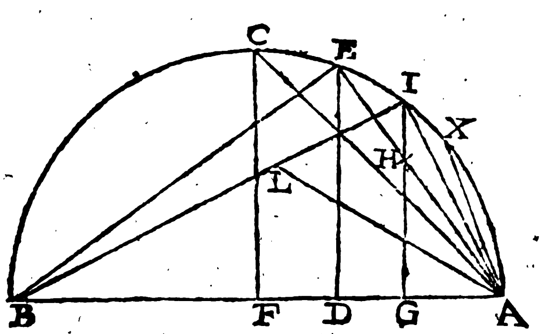
COROLLARIVM II.

Item colligitur ſphæræ Icoſaedrum ambientis diametrum eſſe compoſitum ex exagoni, & decagoni duobus lateribus circulo inſcriptis eodem, cùm AL ſit latus exagoni, at LS, & AR latera decagoni.

PROBL. II. PROP. XI.

Omnium latera corporum regularium eadem ſphæra deſcriptibilium exponere, & inuicem comparare.

Detur diameter ſphæræ AB, & ſemicirculus circa illum deſcriptus ACB; diuidaturque AB in tres partes, & ſit tertia pars AD, ex qua ducta ad diametrum perpendiculari DE, ducatur AE, & EB. Nam. Dico *primo* EB *latus eſſe pyramidis ſphæra deſcriptibilis,* cuius diameter AB.



Probatur. Quia ſit eadem conſtructio, quæ prop. 6 h. & fig. 1. conſequenter EB lineę quadratum erit ſeſquialterum ad quadratum AD, vt ex probat. tertiæ partis illius propoſ. conſtat.

Secundo ducatur à centro F perpendicularis FC, & ducatur AC, quam dico *eſſe latus Octaedri inſcriptibilis eadem ſphæra, cuius radius* FC.

Probatur. Quia eius quadratum ſubduplum eſt ad diametrum, & quadratum diametri duplus ei eſt, vt 11. propoſ. lib. 2. diximus. Ergo eſt latus octaedri, vt ex probat. tertiæ partis propoſ. 7. h. conſtat.

Tertio dico AB *eſſe cubi latus eiuſdem ſphæra inſcriptibilis*. Probatur. Quia potentia diameter eſt

est triplus ad quadratum AE; Cùm enim ita sit basis AB ad latus minus AE, vt ipsa AB basis ad latus minus AD ob similitudinem triangulorũ ex prop. 16.ex 21.lib.6. erit quadratum diametri AB ad quadratum lateris AE, vt AB ipsa diameter ad AD; Est autem diameter AB triplus ad portionem AD; quare quadratum quoq; diametri triplum erit ad quadratum AE: quare AE erit latus cubi, cui triplus est diameter sphæræ circumscribentis, vt constat ex prop.8. progr.3. huius.

Quarto secetur latus AE extrema, & media ratione in H, eritq; maius segmentum latus AH dodecaedri, vt ex dectis prop.9. huius constat.

Tandem quintò diuidatur AB in quinque partes, & sit quinta pars AG, & à puncto G ducatur ad diametrum normalis GI, nectaturque AI, & IB, assumaturque latus decagoni, & ei lateri decagoni sit æqualis IL, & ducatur AL, *quam dico esse latus Icosaedri eadem sphæra inscribendi*. Quia enim ex Coroll. propos. 4. lib. 6. AI, est media proportionalis inter AB, & GA, quod ita sit basis AB ad latus minus AI, vt ipsum latus, & basis AI ad latus minus AG, erit quoque quadratum primæ, & diametri AB ad quadratum mediæ AI, vt ipse diameter est quintupla lineæ AG; Ergo, & quadr. diametri AB ad quadr. lateris AI quintuplũ. Vnde AI erit diameter circuli, in quo pentagonum describere oportet necessarium ad Icosaedrum constituendum in sphæra, cuius diameter AB, vt ex Coroll. propos.5. huius constat, & quia latus Icosaedri ex æqualis quadrati potens; tum quadrato prædicti diametri AI, cuius circulus debet ambibire pentagonum, tùm quadrato decagoni, consequenter basis AL in rectangulo AIL; potens, & quadratũ ex AI, & quadratũ IL erit latus Icosaedri.

Quod verò attinet ad comparationem, non possumus comparare; nisi trium figurarum latera ad diametrum cum Icosaedri, & Dodecaedri latera sint omninò irrationalia: quare posita diametro partium 6. in potẽtia, idest eius quadratum partium 6. Tetaedri latus erit partium 4. item in potentia; Octaedri lateris quadratum partium 3. Cubi verò lateris quadratum partium 2. quæ ex præcedentibus satis constant. Ideoque posita diametro rationali, cætera quoque latera trium prędictorum corporum erunt rationalia; sed quia eorum quadrata non adipiscuntur eam proportionem, quam quadratus numerus habet ad numerum quadratum, cum respectu numeri 6. nec 4. nec 3. nec 2. sit numerus quadratus, ideo omnia erunt longitudine incommensurabilia, nimirum latus Tetaedri, Octaedri, & Cubi; cęterorum verò corporum latera irrationalia.

THEOR. I. PROP. XII.

Præter prædicta quinque corpora non potest aliud corpus in sphæra inscribi, quod constet superficiebus æqualium; tum angulorum, tum laterum.

PRobatur ad solidi anguli constitutionem, tres saltem anguli plani requiruntur, qui tamen simul minores sint quatuor rectis, vt propos. 2. huius. Illi ergo anguli, qui ad angulum solidum alicuius figuræ circulo inscriptæ constituendum concurrunt, vel sunt triangularis superficiei, vel alterius superficiei V. g. quadratæ, pentagonæ, sexagonæ.

Si sunt triangularis, vel tres anguli concurrunt, & triangulum habent pro basi, & fit Pyramis, Triangula verò ęquilatera, & æquiangula angulos habent, qui sunt $\frac{2}{3}$ vnius recti, ex pr.17.l.1. Cor. vnde tres compositi, vt in Tetraedro faciunt $\frac{6}{3}$, idest duos rectos vnde angulũ solidum constituere possunt, cũ sint minores, quã quatuor recti. Si quatuor sint erunt $\frac{8}{3}$, idest duo recti cum $\frac{2}{3}$, vt in octaedro; Si quinque erunt $\frac{10}{3}$, idest tres recti cum $\frac{1}{3}$ vnius recti, vt in icosaedro erunt minores adhuc quatuor rectis, vnde ad anguli solidi constitutionem poterunt deseruire, at si sint sex triangula ęquilatera, & æquiangula essẽt $\frac{12}{3}$ anguli omnes in vnum solidum conuenientes cum sint sex, & singuli æquant $\frac{2}{3}$ vnius recti, *vnde simul erunt* $\frac{12}{3}$, nimirum quatuor rectos æquabunt, vnde solidum angulum non constituent ampliùs, & tanto minùs si sint septem, vel octo.

At si sint anguli alterius figuræ cum minus, quam tres plani esse nequeant, qui solidum componant, oportebit videre an anguli illi simul sint minores quatuor rectis angulis, ergo rectus quadrati poterit deseruire, vt in cubo pro angulo solido, quia tres anguli recti non ęquant quatuor rector. Sic tres anguli pẽtagoni, quia illi nõ sunt ex 11.l.4. nisi $\frac{6}{5}$ vnius recti, vnde simul tres cõpositi facient $\frac{16}{5}$, nimirum tres rectos integros, & $\frac{1}{5}$ at si plures horum angulorum, quam tres vellemus componere æquarent, vel excederent quatuor rectos, vt in pentagoni angulis; essent etenim quatuor anguli $\frac{20}{5}$ nimirum quatuor recti, vnde angulum solidum non constituerent.

At angulus sexagoni triplex non potest concurrere ad angulum rectum constituendum, neque alterius figurę habentis plura latera, quam quinque quia angulus sexagoni æquat vnum rectum *cum* $\frac{1}{3}$, vnde tres compositi quatuor rectos æquarent, angulus verò heptagoni tantò est obtusior, vnde tantò minus tres eius anguli solidum angulum constituent.

Quare poterunt quidem alia corpora sphęra inscribi, sed diuersis superficiebus constantia V.g. quadratis, & triangulis. Triangulis, & pentagonis, & cęt. de quibus suo loco cum prędictorum corporum constitutione fundentur, non videtur hic locus de ijs agendi sed singulari tractatu.

EXPENSIO VIII.

De corpore multarum facierum in sphæra inscribendo.

AD cubandam sphęram Euclidiano modo oportet ostendere, quod sit possibile corpus inscribere sphęrę, quod non tangat intimæ sphęræ superficiem, quod alio pacto, ac Euclides præstabimus, simulque ostendemus segmentorum inscriptionem, quod videtur pręsupponere Archimedes sphęræ cubatio.

PROBL.

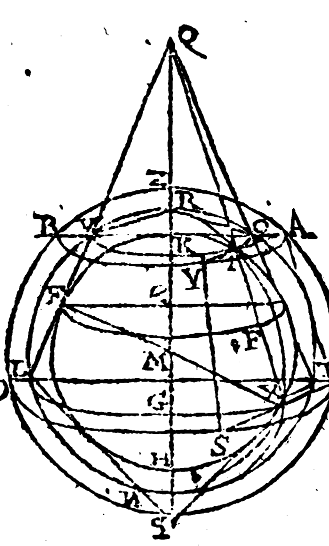
PROBL. I. PROPOS. XIII.

Inscribere in sphæra conorum segmenta, deinde tale multilaterum planis superficiebus constans, vt solum tangant, saltem iuxta aliquas superficies alterius sphæræ conclusæ superficiem.

SPæra exhibeatur ABPC, quæ concludat aliam sphæram KHF, & oporteat in ea describere corpus planis superficiebus opertum, quod tangat sphęrę cõclusæ KEHF superficiem. Diuidatur illud spatium in duas partes quascumque, & describatur OVLN intermedia sphęra radio maiori, quàm MX, deinde in hac intermedia sphera OVLN, segmenta tangentia intimã sphęram conorũ describantur: Hoc autem facilè fiet; si ducamus MF radium ad intimiorem sphęrã KFH, & ei erigamus tangentẽ LV, & à punctis V, & L ducamus quoscumque parallelos OV, & TL inuicem inæquales, & per centrum sphęræ, eorumque polos ex prop. 6. Tr. 21. p. 1. transeat axis MQ. Nam cum vnus parallelorum fit maior alter minor tangens VL ad axem eorũ inclinabit, & cum illo coibit in Q cũ non possit ipsi parallelã esse ob parallelorum, & ideo radiorum ipsorum inęqualitatem. Si ergo à puncto Q tanquam vertice linea QL intelligatur circumuerti circa parallelos VO, & LT, ex def. 1. trac. 24. describet conum, cuius frustum erit sphera media ORVLN interceptum, & tanget in circulo EF parallelo sphęram intimiorem, vt ostendam.

Sic fiat de cęteris sphęrę partibus ducendo ęquales ipsi VL, vt est LN, & describantur per extrema L, & N pararalleli prędictis LT, vel VO, & cętera fiant, vt priùs. Et sic agatur de reliquis spatijs donec LV accõmodari potest in semicirculo RVLN ab axe diuiso: quòd si spatium residuum sit minus, tunc ducetur quęcumque V. g. RV, quę conũ pariter describet, sed non contingentẽ sphęrę intimioris superficiem, vtpote, quod VR minor ponatur, quàm LV, quę tangit.

Istis pręstitis intelligantur singulorum segmentorum conicorum bases, & paralleli VO, LT, & cęt. extenti secare quoq; superficiem sphęrę exterioris, & describere eam secando ex propos. 3. Tr. 21. p. 1. parallelos maiores DSC, & BYA. Describatur ergo circa quodlibet frustum coni multilaterum cõtingens, saltem quoad plures superficies, quod extimę sphęrę includatur superficie tali modo.



Ducatur MX radius ad sphęrę mediæ superficiem, & ei tangens CS. Per contactum autem X, & axem RP ducatur maximus circulus ex 16. Tract. 23. par. 1. & vbi secat parallelum VO in I erigatur alteri puncto I altera tangens YA, quę tangentes erunt parallelę, vtpote normales eidem plano circuli maximi RIX ex 7. tract. 23. Quare per illas planum AS transire poterit. Ductis itaque similiter alijs planis per tangentes cęteras sibi ęquales, vel minores, quando ęquales capere nequeunt in circulis parallelis singulis, donec in omnibus sint ductę, erit corpus circa quodlibet frustum conicum circumscriptum. Quod dico *tangere ad summum sphæræ intimioris KEHF superficiem.*

Probatur. Conicum frustum OVTL tangit ad summum sphęrę intimioris superficiẽ KEHF. Nam VL frustũ recta circumducta formatur, quę circa parallelos VO, & TL gyratur, sed illa tangit in puncto E. Ergo etiam cęterę omnes ęquales interceptę inter parallelos circulos OV, & TL similiter tangent, cùm ęqualiter distent à centro M ex 16 lib. 3. omnium maximorum circulorum, & ideo ipsius sphęrę. Quod ostendetur alio modo. Nam per contactum E ducto parallelo FE ex axe QM descripto, hic erit in superficie conica, quę ęqualiter distat interuallo E e radij à centro e, & axe suo MQ. & in superficie sphęrę, quę, & eodem radio E e distat ab axe suo ZM. Quare erit parallelus EF in contactu conicę superficiei etiam intimioris sphęrę KFEH. Non potest autem tangere alibi, quia Conica superficies ex def. 1. Tract. 24. recta VL circumgyrata contexitur, quę tangit sphæram solùm in puncto F ex effectione.

Cum itaque superficies plana circumscripta Conicis segmentis ex 11. Tract. 24. non tangat conum, nisi penes lineam XI, quæ tendit à Q vertice, & tangit sphæram intimam tantùm ex effectione in puncto F sequitur, quod planum SA cõtingat sphæram intimiorem KFHE tantùm in puncto E, quod de alijs planis æqualibus fatendum est. Alia autem plana contingentia minora frusta conica, quę non contingunt sphæram intimam, neque ipsa contingent, & tantò minùs, si ea plana, neque contingant ipsa frusta conica, quę sphæram intimam, aut tantùm contingunt, aut nullatenùs contingunt.

COROLLARIVM.

COlligitur, quod eodem artificio poterunt sphærę circumscribi tum conorum segmenta, tum corpus quodlibet planis superficiebus constans, quod non tangat alterius sphærę circumambientis superficiem. Nam sphæra FHE est talibus superficiebus circumdata, vnde si inter sphæram eam circumdantem duę sphæræ ZBPC, & RLXO intercipi intelligantur, & eadem operatio præstetur corpus circumscriptum non tanget amplexantis sphærę maioris, quam ZPC superficiem cùm illam tantùm tangat. Corpus verò conicum circumscribatur eodem modo, ac in propos. & si debeant segmenta conica adeo multiplicari, vt relinquant quantitatem qualibet data minorem id efficietur, vt sequenti propos.

EXPENSIO IX.

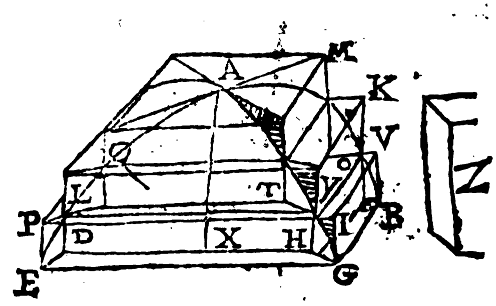
De inscriptione, & circumscriptione cylindrorum, vel quorumcumque aliorum corporum; donec relinquant quantitatem omni data minorem.

CYlindrorum, vel Parallelepidorum corporibus globosis solidis circumscriptio, vel inscriptio necessaria est ad cubanda multa corpora talis rationis: quare hoc loco nacti sumus oportunam occasionem hanc doctrinam tractandi, in quo agitur de inscriptione corporum regularium in sphæra.

THEOR. I. PROPOS. XIV.

Cuicumque figuræ solidæ curuilineæ, vel mixtilineæ tot solida inscribi possunt, vel circumscribi, vt relinquant solidas partes omni assignata soliditate minores, si tamen concedatur illam soliditatem ad ad quamcumque basim redigi posse.

SIt figura solida curuilinea ABGE. Dico illi tot parallelepipeda posse circumscribi, vel inscribi donec relinquant quantitatem omni data minorem. Sit data quantitas Z, quæ sit eiusdem basis, ac BE, vel ad eam redigi possit, & diuidatur altitudo XA dati corporis BGAB in tot partes donec parallelepipedū maius omnibus EV sit minus quātitate Z. Quod facile fiet si altitudo AX subdiuidatur in tot partes donec remaneat altitudo solidi EV, minor quàm altitudo quantitatis datæ Z, quæ conceditur eiusdem basis, vel ad eandem basim redacta sit, ac basis EB. Quadere erit minus parallepipedum EV, quam quantitas data Z. Sed omnia solida parallepipedis cōstantia, quę intus vacua sunt, & ambiuntur circumscriptis superficiebus GP, & GV, & ex inscriptis HD, & HO, & circumdant partim intra parti extra corpus solidum datum ABGE, vt EHV, cuius basis EH, & HB, & LTK, & QTH ex constructione æquant EV solidum primum, siquidem vbi desinit primum solidum maioris ambitus incipit secundi ambitus minor, & vnum intra aliud adaptari potest, Ergo omnia solida talia sunt minora quantitate Z. Quamobrem tantò erunt minora quantitate Z solida, quæ tantùm circumambiunt, vel intus inscripta sunt, & corpori dato globoso BAGB extra remanent, vt extrinseca GIV EPG, vel GHO EHD intrinseca: quæ proximè dimidio minora, quam tota GHIYEDLP. Quod intellitur etiam si corpora solida circumscripta annulis cylindricis constent, aut alterius cuiuscumque figurę, vt ex te videre poteris.



TRAC-

TRACTATVS XXXIV.

DE SOLIDIS PARS PRIMA.

De solidis planis superficiebus contentis.

VIsis corporum superficiebus, & eorum inscriptibilitate, modo ad ipsam corporum soliditatem est accedendum. Ordinique doctrinæ consentaneum fuit, vt prius lineas, superficies, singulasque exteriores corporum figuras, quæ oculis statim obijciuntur, animaduersioni quoque primæ occurrerent, quàm corpora, quæ istis inuolucris contecta solæ menti peruios sinus admittunt, de quibus agit Euclid. 11. & 12. cuius præcipuas; & necessarias propositiones hoc Tractatu exponemus.

EXPENSIO I.

De Parallelepipedis.

PRima inter figuras solidas, & magis obuia est parallelepipedum; quod obtinet oppositos angulos æquales, & plana opposita æqualia; estque veluti frustum trabis parallelis sectionibus abscisum. Cùm ergo à notioribus omnis cognitio incipiat, per huius solidi cognitionem ad aliorum corporum soliditates hauriendas accessus erit.

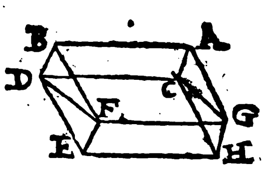
THEOR. I. PROPOS. I.

Si solidum parallelis planis contineatur, aduersa illius plana parallelogramma sunt æqualia, & similia.

SIt planum solidum contentum parallelis sex planis, nempe quatuor planis EG, FD, BC, & AH, & superficie superiori AF inferiorique CE. Dico primo *omnia plana; quibus ambitur esse parallela.*

Probatur. Terminantur etenim ex thesi planis parallelis superficiebus, ideoque sectiones ipsæ erunt parallelę ex propos.14 Tract.22. Sic planum GE terminatur parallelis planis AF, & CE, necnon. & parallelis planis AH, & BE, cum ergo sectiones istæ terminent superficies solidum ambientes ipsa ex def.35.Tr.3 erunt parallelogrāma.

Dico 2. Quòd erunt æqualia parallelogramma aduersa. Quod patet: Nam cum aduersa plana vt GE, & AD parallelis secentur, & terminentur, & parallelogramma sint, oportet margines interceptos HG, & CA, sicut & FE, BD esse æquales ex prop. 34. Elem.1. necnon eadem ratione GF, & AB sicut, & ex HB, & GD: sunt autem quoque eiusdem altitudinis: quod sint inter parallelas æquales HG, & CA, ergo ex propos.37.lib.1 erunt parallelogramma æqualia.



Dico 3. Esse quoque similia. Quia enim latus CH est æquale lateri ED, & HG lateri FB: Ergo vt CH ad HG, sic DE ad FE proportionatum erit: Angulus autem H æquatur angulo E. Nam ductis GC, & FD diagonalibus diuident bifariam parallelogramma æqualia GC, & FD, ex 34. lib. 1. quare diagonales GC, & GD erunt æquales. Quapropter triangula CGH, & FED erunt æqualia, cum latera, & bases, idest diagonales obtineāt ęquales. Ideoq; angulus H ęquabitur angulo E. Propterea que ipsa plana aduersa V. g. AH, & BE erunt similia, cum consequantur latera circa æquales angulos proportionalia.

THEOR. II. PROPOS. II.

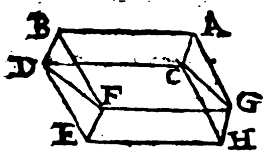
Si parallelepipedum plano secetur per diagonios aduersorum planorum; bifariam secabitur solidum ab ipso plano.

SIt solidum AE, cuius duo aduersa plana, vt GC, & FD plano GD secundùm lineas diagonales GC,

 &

& FD secta sint. Dico bifariam illud parallelepipedum sectum esse.

Probatur. Duo prismata GFAD superius, & GECD inferius habent plana similia magnitudine, & multitudine æqualia. Ergo ex def. 3. Tr.33. erunt inuicem æqualia.



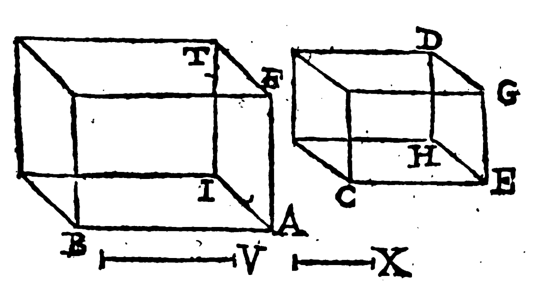
Patet autem Prismata obtinere plana similia. Quia triagula GCA huius, & HCG alterius sunt æqualia, & similia, & alia duo triangula FBD, & EED opposita similiter æqualia, similiaque sunt ex pr. 34. primi, vtpote, quæ in duo diuidant parallelogramma similia, & æqualia, vt supra ostensum est. Reliqua verò plana aduersa iam ostensa sunt æqualia, & similia GE plano AD, & AF plano CE; planum verò FDCG est cõmune: Ergo prismata erunt æqualia, & similia CFAD, & GECD; cum constent planis æqualibus, & similibus.

PROBL. I. PROPOS. III.

A data recta linea dato solido parallelepipedo simile, similiterque positum parallelepipedum describere.

DEbeat à data linea AB describi parallelepipedum dato parallelepipedo CD simile, similiterque positum.

Fiat ad punctum A angulus solidus ex 5. Tr. 33. æquale solido angulo E, ita vt tres plani anguli apud A sint æquales tribus angulis planis apud E; deinde ex 12. lib. 6. Elem. fiat, vt CE ad EG ita sit in proportione ad aliam quãdam V latus AB; fiatq; lineæ V æquale latus FA: deinde fiat, vt EG ad EH; ita proportionatum sit latus AF ad aliam quandã X cui fiat æquale AI, habebitque ex æquo AI eam proportionem cum AB, quam EH cum EC. Reliqua verò latera aduersa istis fiant æqualia, & parallela & compleatur parallelepipedum; Quod dico esse simile parallelepipedo DC, & similiter ei positum.

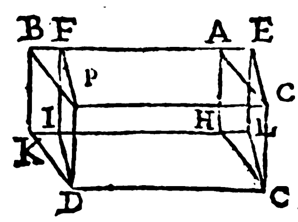


Probatur. Quia singula plana parallelogramma singulis sunt similia ob æqualitatem angulorum, & laterum proportionem eandem, sic angulus GEC est æquale angulo FAB, & latus EC eiusdem proportionis est lateri EG, ac latus AB lateri FA, quare ex def. 1. lib. 6. erunt hęc duo parallelogramma GC, & FB similia, & idem argumentum est de parallelogrammo HC, & IB ob angulos æquales ex constructione HEC, & IAB, & latera proportionalia; quia enim EC est ad EG, vt AB refertur ad AF, & vt EG ad EH ita proportionatur AF ad AI argumentando ex æquo ita quoque EC proportionem dicit ad EH, vt AB ad AI. Quare etiam hoc planum HC erit simile plano IB, & sic dicas de plano GH, quod eadem ratione assimilatur plano FI. Propter hoc & reliqua plana aduersa istis æqualia, & similia ex propos. 6. huius in parallelepipedo constructo erunt æqualia, & similia parallelepipedo dato CD.

THEOR. III. PROPOS. IV.

Solida parallelepipeda super eadem basi constituta, & eadem altitudine prædita, quorum insistentes lineæ in easdem rectas lineas terminent, sunt inter se æqualia.

EXibeantur duo parallelepipeda ABCD, & EFCD, quorũ basis sit eadẽ GD, & insistentes in basi lineæ GE, & GA, PB, & PF, &c. in eandem rectã EB terminẽt: Dico hæc parallelepipeda esse æqualia.



Probatur. Nam ex 35. lib. 1. Element. parallelogramma GAPB, & EGPF sunt æqualia, erunt ablato communi trapezio AGPF æqualia triangula GEA & PFB, quæ & sunt æqualia triangulis aduersis DIK, & LCH, vtpote residua æqualis trapezij HICD ab æqualibus parallelogrammis aduersis; sic KF æquale HE est ablato rectangulo IA cõmuni. Quare cũ, & planum DPBK sit æquale plano CO AH, & planum GLCE plano DPIF prismata PK, & GH conclusa dictis planis erunt æqualia ex defin. addatur ergo vtrisq; commune solidum trapez js clausum AFCD, eritq; parallelepipedum ADCB, æquale parallelepipedo CDEF.

COROLLARIVM.

HInc emergit modus, quo facilè aliquod parallelepipedum æquale in basi, & in altitudine, sed dissimilis positionis ob inæquales angulos alterius anguli ad eandem positionem reducas nimirum faciendo eosdem angulos super eãdem basim intra eãdem altitudinem, sic parallelepipedum HKGD reducetur ad parallelepipedum EIGD; si pro angulo AGP fiat angulus EGP, & pro angulo AGC fiat EGC angulus.

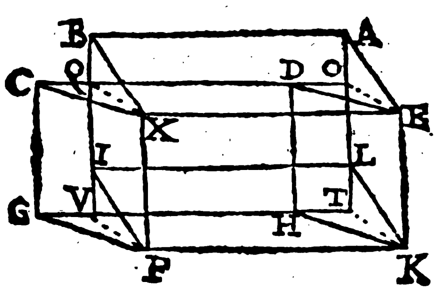
Quod si detur parallelepipedum ęqualis quidem sed dissimilis basis ob angulos parallelepipedo inæquales; sed omnino eiusdem altitudinis; eodem modo ad similem basim reducetur: Nempe intra easdem parallelas EB, & GP mutando angulos. Sic parallelepipedi AKGD basis statuatur HCDK æqualis basi LCDI; sed dissimilium angulorum, ad hoc, vt fiat similis basi LCDI, oportebit trahere latera HC, & KD; ita quod cum CD faciant eosdem ãgulos hoc q; modo totum parallelepipedum æquale iam alteri quantitate, fiet etiam illi æquale in angulis.

THEOR.

PROB. IV. PROPOS. V.

Solida parallelepipeda super eandem basim constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ non in ijsdem collocantur rectis lineis, inter se sunt æqualia.

Sint duo parallelepipeda AKBF, & DGEF, quorum basi eidem planæ EF insistant latera EA. & BD, & cæt. licet in diuersas parallelas AB, & DC terminent. Dico adhuc AKBF, & DGEF *hæc esse inuicem æqualia.*

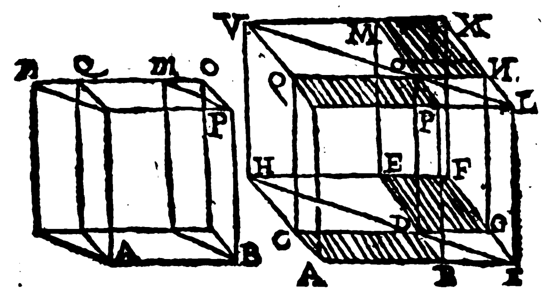


Probatur. Quia productis parallelis, ita vt se intersecent in T, V, O, Q punctis, & ductis lateribus punctatis fiet aliud parallelepipedum OVTF per insistentes rectas punctatas, quod erit æquale parallelepipedo AKBF ex pręced. quod hæc duo super eandem basim EF insistant, & eorum latera vt FV, & FI, & cęt in easdem parallelas terminent nempe in VB, sic KT, & KL terminat in TA. Rursus hoc parallelepipedum modo factum, erit ęquale exhibito alteri DGEF, quòd quoque eius latera punctata, vt FV, & KT eijsdem parallelis TG insistant, vt faciunt KH, & FG, & sic de alijs. Ergo duo parallelepipeda exhibita parallelepipedo effecto eidem OVTF erunt æqualia, & consequenter inuicem. Quod verò punctata latera faciant parallelepipedum, patet, quia in parallelarum communem intersectionem terminent, vt satis ex se quilibet comprehendere potest.

THEOR. V. PROPOS. VI.

Solida parallelepipeda super æquales bases constituta, & æqualis altitudinis æqualia sunt inuicem.

Bases æquales, quæ exibentur, vel sunt diuersę quidem figuræ, & inęqualium angulorum, vel sunt omninò eiusdem, vel sunt diuersæ figuræ, sed æqualium angulorum. Si sunt omninò similis, & æqualis figuræ, id iam patet ex propos. 4. & 5. idem enim est, quòd sit æqualis omnino, & similis, & quod eadem. Quæstio ergo est differentis figurę, quę si est, & inęqualium angulorum, vt sunt GDEF, & AB mn reducetur ad eosdē angulos ex Cor pr. 4. vt OP, & super eam fiet parallelepipedum eiusdem altitudinis, vt est ABOQ parallelepipedum, quod erit æquale exhibito iuxta ibi tradita. Collocentur ergo bases CB, & EG æquales, & iam similium angulorum tali modo, vt in angulo D se tangant, & latera CD, & DG in vnam rectam conueniant, & fiant recta CG. Nam, & in eādem rectam conuenient latera BD, & DE ob angulos æquales CDB, & EDG ex 15. lib. 1. compleaturque parallelogrammum AHIF, quòd poterit fieri ex prop. 24. lib. 6. cum bases nigrę sint, & ęquales, & similes quoque ob æquales angulos: Deinde super eas compleatur totum parallelepipedum, vt vides, ducaturque planum VHIL per diagonios, & ex prop. 28. h. erit diuisum totum parallelepipedum in duo prismata ęqualia VAL, & VFL: sic etiam vt ex pr. eadem colligi potest prismata VCO, & VEO sunt æqualia, ob ęqualia triāgula VMO, VQO, quibus sunt, planaque HEVM ęquale plano QOCD, & QVCH æquale plano ODEM; planumque VHDO commune vtrisque prismatibus.



Idem dicas de prismate OBL, & OGL, quæ item sunt æqualia: Si ergo à prismatibus magnis VAL, & VEL ęqualibus auferas primo duo prismata æqualia minora VCO, & VEO illud ab illo alterum ab altero, & rursùs duo alia prismata reliqua, quę item sunt ęqualia OBL, & OGL hoc ab isto, aliud ab alio, reliqua ablatis ęqualibus remanebunt ęqualia, vt erant priùs, & sic parallelepipedum QOAB remanet ęquale parallelepipedo DENX super ęquales bases, sed diuersę figurę & sub eadem altitudine constituta, licet ęqualium angulorum. Sed parallelepipedum OQAB est ęquale parallelepipedo ABmn, cuius basis est inęqualium angulorum basi DEFG iuxta Coroll. prop. 9. Ergo parallelepipeda habentia bases ęquales, licet inęqualium angulorum, & differentis figurę, & altitudines ęquales, sunt quoque inuicem ęqualia.

THEOR. VI. PROPOS. VII.

Si solidum parallelepipedum plano secetur aduersis planis parallelo erit quemadmodum basis ad basim; ita solidum ad solidū.

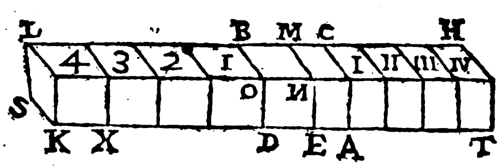
Vsque modo egimus primo de proprietatibus parallelepipedorum, exinde de illorum creatione, & constructione, & tandem de eorum ęqualitate, & inęqualitate, modo de eorum proportione agimus.

Sit itaque solidum parallelepipedum ACBD, quod plano MB secetur parallelo aduersis planis CA, & DB. Dico quod sicut basis NC ad basim MO, ita solidum super primam basim constitutum AECM, ad solidum super alteram basim erectum BEMD.

Probatur. Quia ita est prima quantitas ad secundam, vt tertia ad quartam in proportione ex 9. def. tr. 9. elem. cum primę, & tertię ęquè multiplicia à secundę, & quartę ęquè multiplicibus in qualicumque multiplicatione, vel vna deficiunt, vel vna ęqualia sunt, vel vna excedunt.

Sit ergo prima magnitudo basis NC secunda altera basis MO tertia parallelepipedum AECM quarta parallelepipedum BEMD; multiplicemusq;

primam magnitudinem, nempe basim CN in bases I, II, III, IV æquales, & faciamus super eas eiusdem altitudinis parallelepipeda, quę ęqualia erunt parallelepipedo AECM ex propos. 4. & 5. h. Sic secundam magnitudinem, nempe basim MO multiplicemus, faciamusque ei bases ęquales 1. 2. 3.



& super eas parallelepipeda eiusdem altitudinis, nimirum æqualia quartæ magnitudini, & parallelepipedo EBMD. Cum ergo sint æquales bases I. II. III. IV. singulæ basi CN, & 1. 2. 3. singulæ basi NMBO, si ita multiplicentur, vt omnes bases I. II. III. IV. cum CN, idest NH euadant æquales basibus 1. 2. 3. cum MO basi acceptis, idest 3N parallelogrammum. Etiam parallelepipeda I. II. III. IV. CB tertia magnitudo æquè, ac prima magnitudo basium suarum I. II. III. IV. multiplicata, idest parallelepipedum HE æquatur parallelepipedis 1. 2. 3. MD quarta magnitudo æquè, ac secunda basium 1. 2. 3. multiplicata, idest parallelepipedo XM ex prop. 4. & 5. h. cum parallelepipedum HE sit æqualis basis HN basi N3, & æqualis altitudinis parallelepipedi MX,

Ecce quomodò si æquales sint magnitudines æqualis quoque est multiplex primæ, & tertiæ, ac secundæ, & quartę. Verum si minor sit basis primæ multiplex NH, quam basis NL secundæ magnitudinis multiplex, talis quoque erit tertia respectu quartę, nempe parallelepipedorum. Sic multiplicata prima basis producit basim I. II. III. IV. minorem, quàm basis 1. 2. 3. 4. & parallelepipedum quoque EH nempe tertia quantitas AECM, vt prima basis multiplicata, producet parallelepipedum minus, quàm parallelepipedum EL ex multiplicatione quartę magnitudinis parallelepipedi EBMD consurgens.

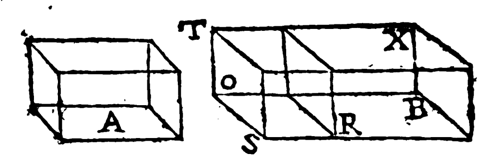
Et ecce quomodo multiplex primæ, nempe bases simul sumptæ NH vna cum parallelepipedis simul sumptis EH multiplici tertiæ simul deficiunt, bases nimirum à basibus multiplicibus secundæ NL, & parallelepipeda à parallelepipedibus MK multiplicibus quartæ magnitudinis. Et idem dices de augmento. Quapropter eandem dicent proportionem basis C N basi MO, sicut parallelepipedum AECM constitutum super primam basim CN parallelepipedo EBMD constituto super secundam basim MD.

THEOR. VII. PROPOS. VIII.

Parallelepipeda sub eadem altitudine constituta sunt inter se, vt bases.

SIt solidum cuius basis A, & solidum, cuius basis RB, quæ solida sint eiusdem altitudinis. Dico, *eadem proportione referri basis* A *ad basim* BR, *vt solidum super* A *ad solidum super* BR.

Quod vt probetur super rectam RS ex 45. lib. 1. basis RO statuatur, ita angulata, vt basis BR, & æqualis basi A, erigaturque super eam parallelepipedum RT eiusdem altitudinis, ac parallelepipedum super BR, vel quæ est eadem super A, & iam ex præcedens 6. propos. patet, quod parallelepipedum super basim RO est æquale parallelepipedo super basim A. Vnde



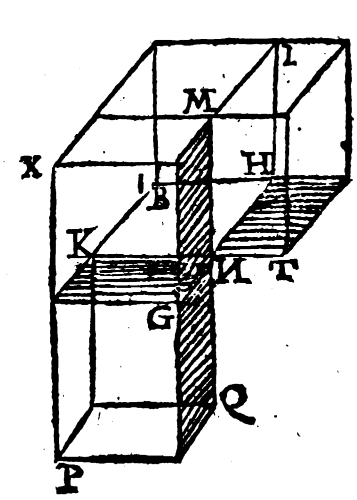
Ostenditur propositio. Ita se habet parallelepipedum RT ad parallelepipedum RX ipsi annexum, & faciens vnum parallelepipedum integrum SX cum ipso, ac basis RO ipsius RT ad basim BR ex præcedenti propos. Sed parallelepipedum RT est æquale parallelepipedo A, sicut, & basis RO basi ipsius A. Ergo ita est parallelepipedum A ad parallelepipedum XR, vt basis A ipsius ad basim BR parallelepipedi RX.

THEOR VIII. PROP. IX.

Similia solida parallelepipeda inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum.

SInt similia parallelepipeda TI, PN ex def. 2. Tr. 22. planis similibus conclusa, ideoque etiam bases KG huius, & TH alterius similes sint, & habeant homologa latera, sitque NH ad NT, vt NK ad NG. Dico *ea habere proportionem laterum* NH ad NK, vel NT ad NG *triplicatam*. quam explicauimus expens. 5. tract. 9. part. 1.

Parallelepipeda se tangant in angulo N, ita vt in vnam rectam conueniant latera MN, & NQ, & latera HN, & NG, quod ob similitudinem basium ex contextu prop. 10. lib. 6. eueniet, siquidem anguli ad verticem N erunt æquales; Deinde compleatur basis BN, & super basim sit parallelepipedum eiusdem altitudinis KI, ac TI, & idem fiat super basim nigram KG; Eruntque quatuor parallelepipeda, nempe istud erectum super basim TH aliud super basim NB, tertium, & quartum habentia basim GK, quorum quodlibet suo collaterali erit, vt basis ad basim, cum sint eiusdem altitudinis, & basim habeant continuatam, & ideo, vt latus ad latus basium æquè altarum.



Prob. Latus NH ob similitudinem basium dicit proportionem ad NT, quam NK ad NG, ideoque permutando

permutando HN erit ad NK, vt NT ad NG. At ex 1.l.6. quam proportionem dicit latus HN ad latus NK illam dicit parallelogrammum, seu basis TH ad aliā NB, & quam latus TN ad NG latus, eam dicit NB basis ad GK nigram basim. Verùm ex 7. h. quam dicit HT basis ad basim NB eam dicit parallelepipedum IT super HT ad parallelepipedū KI super NB, & quam dicit basis NB ad basim nigram GK, eam dicit parallelepipedum XI super NB ad parallelepipedum NX super KG, & quam dicit parallelepipedum XI super BN ad aliud NX super GK, eam dicit HM altera basis eiusdem ad nigram GM ex 7. huius, & quam dicit HM basis ad GM nigram, eam ipsam dicit HN ad NG, & consequenter latus MN ad NQ latus, ex hypothesi. Quare & eamdem dicit basis nigra MG ad basim nigram QG, & consequenter parallelepipedum NX super GM ad parallelepipedum NP super GQ.

Igitur parallelepipedum NT super TH dicit eam proportionem ad parallelepipedum NP super basim GK, quam latus NH ad NK latus; sed non immediatam, sed triplicatā, nempe ter repetitā. Nam parallelepipedum IL super HT dicit ipsam proportionem ad aliud KI super NB, & ecce prima repetitio, & hoc ad aliud NX super GK, cuius altera basis est GM, & ecce secunda, & hoc tandem super MG ad parallelepipedū NP super basim QG, cuius altera est GK, & ecce tertia repetitio. Ergo parallelepipeda habent laterum LN ad NK triplicatam rationem, ser ter continuè repetitā, quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

EX hoc fit manifestum, quod si fuerint quatuor rectę lineę proportionales, vt est prima ad quartam, ita esse solidum super primam ad solidum super secundam simile, similiterq; positum; Quia prima linea ad quartam habet rationem triplicatam ex def. 10. lib. 5. vt solidum habet ad solidum, & hinc etiam est, quod obtineant duplicatam rationem basium, cum bases sint, vt prima ad tertiam.

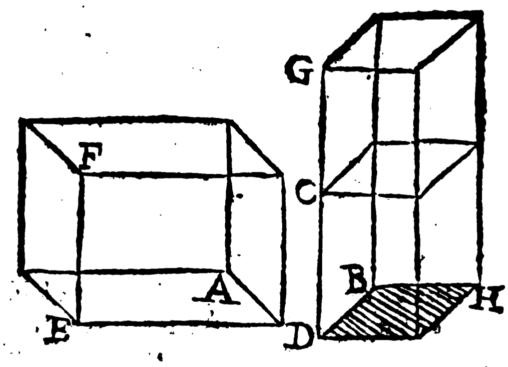
THEOR. IX. PROP. X.

Æqualium parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur; Et quorum solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur illa sunt æqualia.

SOlida, quę exhibentur æqualia, si non sunt æquiangula, reducantur priùs iuxta Coroll. propos. 9. ad æquales angulos, & tunc exhibeantur.

Sint itaque duo parallelepipeda ęqualia, nempe vnum super basim AE, alterum super basim nigram DH æquiāgula, quę sint inęqualis altitudinis. Dematur altiori DC altitudo CD ęqualis minori altitudini EF, & fiat parallelepipedum depressius supra basim nigram DH nunc

Progress. 1. Probatur assumptum. Parallelepipedum super basim AE est ęquale altiori parallelepipedo GH super basim DH, Ergo ex 7. lib. 5. eodem modo in proportione se gerunt eidem parallelepipedo depressiori CH. Sed parallelepipedū GH euectius dicit eam proportionē depressiori CH, quam basis GB basi CB ex 8. huius prop. & basis GB alteri basi CB eam proportionem, quam altitudo DG altitudini DC ex 1. lib. 6. Ergo ita erit quoque parallelepipedum euectius GH parallelepipedo HC; velut altitudo GD altitudini DC.



Progr. 2. sed vt solidum ad solidum, ita est ex propos. 8. huius basis ad basim, si solida sub eadem altitudine existant. Ergo ita erit basis AE ad basim DH, vt parallelepipedum AF super AE ad parallelepipedum super DH eiusdem altitudinis, quæ est CH. Sed vt dixi in principio probationis parallelepipedi AF super AB ad parallelepipedum depressius CH super DH ratio est illa ipsa, quàm parallelepipedi euectioris GH super DH ad idem depressius solidum CH. Ergo est illa ipsa, quam habet altitudo DG altitudini DC, vel æquali ex constructione altitudini FE, vt probaui in primo progressu. Ideoque reciprocè AE basis erit ad BH basim, vt GD huius altitudo ad EF altitudinem alterius.

Progr. 1. secunda pars. Nam dato parallelepipedo super basim AE, quæ sit ad basim alterius nigram DH, vt altitudo GD huius ad altitudinem FE alterius, & altitudines sint inęquales, abscindatur altitudo GD in C, & fiat ęqualis DC altitudini EF.

Prob. pr. ita est altitudo GD ad DC, vel ęqualē EF, vt basis EA ad basim DH ex Thesi. Vt verò proportione refertur basis EA ad basim DH, ita solidum super AE ad solidum HC super basim DH cùm ęqualis sint effecti altitudinis.

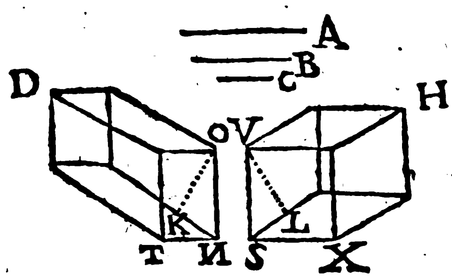
Progr. 2. Ex alia autem parte, vt est altitudo GD ad altitudinem DC, ita est basis GB ad basim CB ex 1. lib. 6. Elem. & vt basis GB ad basim CB, ita solidum GH super GB basim ad solidum super CB alteram basim ex 7. huius, quia sunt eiusdem altitudinis; Ideoque iam eidem parallelepipedo CH super DH basim duo parallelepipeda eandem dicunt proportionem AE basis ad DH basim, parallelepipedum AF super basim AE ex 1. progr. & parallelepipedum GH super DH ex 2. progress. Ideoque ex 7. lib. 5. inter se erunt ęqualia.

THEOR. X. PROPOS. XI.

Si tres rectæ proportionales fuerint; quod ex his tribus fit solidum parallelepipedum æquale est descripto à media linea parallelepipedo, quòd æquilaterum quidem sit in se, æquiangulum verò prædicto.

SInt datę tres rectę A, B, C, & ex istis componantur parallelepipedum ND, in quo media B ęqualis sit NO. Ex qua huic ęquiangulum aliud parallelepipedum constituatur SH, cuius omnia latera

latera sint æqualia mediæ B. Dico *quod hoc Parallelepipedum est æquale alteri* ND *ex tribus datis prius constructo*.



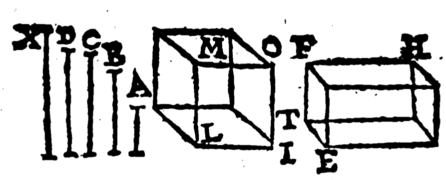
Probatur ex eo, quòd habeant basim VX basi OD æqualem ex 14. lib. 6. quòd VX basis contineatur sub media B, at OD sub extremis A, & C ex effectione. Et etiam ex eo quod habeāt altitudinē, quę mensuratur punctata VL ad angulos rectos ab V cadente in L altitudini alterius perpendiculari DK punctata in K angulos rectos efficiente dimetitæ æqualem. Quod enim perpendiculares punctatæ V, & O sint æquales patet ex 26. lib. 1. quoniam angulus N est æqualis ex effectione angulo S, & K, & L recti, basis verò ex hypothesi VS basi NO est æqualis, quare triangula KON, VSL ęqualia, & ideo bases KO, & VL.

Cum ergo hæc parallelepipeda habeant bases, & altitudines æquales ex 11. huius erunt æqualia.

THEOR. XI. PROPOS. XII.

Si sint quatuor lineæ continuè proportionales parallelepipedum sub quadrato vnius extremæ, & altitudine alterius est æquale cubo mediæ proportionalis, quæ extremæ basim substernenti propinquior est.

Sint quatuor continuè proportionales ex prop. 2. Tr. 15. A, B, C, D. Dico parallelepipedum EH scillcet ex EF, quadrato ex A, & altitudine D esse æquale cubo AO ex B. Vel si maius parallelepipedum ex quadrato D, & altitudine A lineę æquale esse Cubo ex quadrato lineæ C.



Probatur. Quoniam quadratum EF, ex A est ad quadratum OL ex B, vt A ad C ex 21. lib. 6. ob similitudinem eorum, idest ex 11. tract. 16. vt B ad D, sc. IO ęqualis ipsi B ad HF, erūt istis duobus solidis bases altitudibus reciprocè proportionales. Vnde ex ipsis A quadrato, & D altitudine constitutum parallelepipedum erit æquale AO cubo erecto ex B ex 10. huius.

THEOR. XII. PROPOS. XIII.

Si sint quinque lineæ continuè proportionales parallelepipedum erectum ex quadrato vnius extremæ tamquam basi, & altitudine alterius æquatur. Parallelepipedo erecto ex quadrato secundæ, & altitudine tertiæ.

Sint quinq; continuè proportionales A, B, C, D, X, & ex A quadrato eleuetur parallelepipedū ad altitudinem X, & ex B quadrato, & *altitudine* C aliud constituatur. Dico ea esse æqualia.

Pr. Basis A est ad basim B, vtpote, quod sint quadrata, & ideo similia plana, vt A ad C tertiam proportionalem, vt autem A ad C sic est C altitudo huius, cuius basis B ad X altitudinem eius, cuius basis A, ergo. Bases, & altitudines reciprocantur. Ergo ex prop. 10. h. erunt parallelepipeda æqualia.

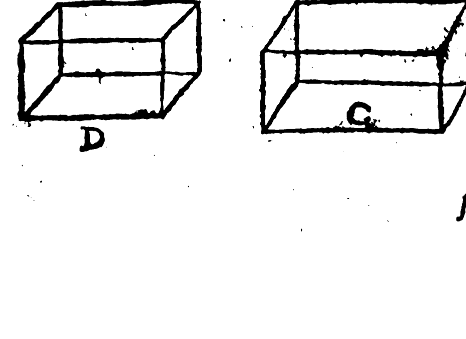
COROLLARIVM.

Hinc autem etiam est, quod, & si parallelepipeda non obtineant bases ex A, & B quadratas, sed ex quocumque alio rectangulo, dummodo sint rectangula similia, & similiter posita idem sequetur, quia etiam basis A ad basim B ex prop. 21. lib. 6. erit vt A ad C, vt autem A ad C, sic est C altitudo, cuius basis B ad altitudinem, eius cuius basis A, vnde cum reciprocæ sint bases, & altitudines erunt æqualia parallelepipeda.

THEOR. XIII. PROPOS. XIV.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, & solida parallelepipeda, quæ ab ipsis similiter, & similia describuntur proportionalia erunt, & si data Parallelepipeda proportionalia sint similia, & similiter descripta, & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ proportionales A, B, C, D, constituanturque super A, & B duo parallelepipeda A, & B, similia, similiterque descripta: Item super C, & D duo alia similia inuicem, & similiter posita licet à primis A, & B similitudine discrepent; Dico *ita esse solidum* A *ad solidum* B, *vt*



soli-

solidum c ad solidum D.

Probatur. Quia proportio ipsorum solidorum ex 14. huius est in triplicata ratione suorum laterum, cum enim latus A ad latus B, sit, vt latus C ad latus D etiam triplicata lateris A ad triplicatam lateris B, erit, vt triplicata lateris C ad triplicatam lateris D, quæ proportio triplicata est solidorum, quæ super latera dicentia proportionem simplicem quodlibet erectum est.

Probatur secunda pars. Ponitur solidum A ex hypothesi dicere eam proportionem ad solidum B. quam C solidum ad D solidum; sed solida suorum laterum habent triplicatam proportionem, idest ter repetitam, ergo latus solidi A ad latus solidi B dicet proportionem simplicem eandem, quam dicit latus C ad latus D, quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

A Modo, quo præcedens proposit. ostensa est, ne dum conuenit parallelepipedis, sed omni generi solidorum similium. Nam & ipsa dicunt triplicatā diametrorum aut laterum proportionem nam V. g. Prisma est dimidium parallelepipedi: quare, & ipsa erunt in triplicata ratione suorum laterum, vtpote dimidia prismatum, vt infra, sic, & pyramides, vtpote quod quælibet sit tertia pars prismatis. Sic omne corpus ex quinque regularibus, similibus, cum æqualibus pyramidibus constet, quæ sunt in triplicata ratione suorum laterum, vnde, & omnes pyramides vnius corporis solidi ad omnes alterius erunt in triplicata ratione lateris vnius pyramidis ad latus alterius.

EXPENSIO II.

De Prismatibus.

BReuis de Prismatibus Expensio erit, cum ea ferè omnia, quæ parallelepipedis conueniunt etiam prismatibus applicari, & de ipsis verificari possint, vtpote quod sint ipsorum dimidium.

DEFINITIO I.

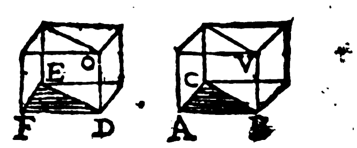
P*Risma est figura solida, quæ planis continetur, quorum opposita sunt similia, & æqualia parallelogramma, alia verò opposita æqualia, & similia triangula, seu cuiuscumque figuræ.*

THEOR. I. PROPOS. XV.

Prismata triangulares habentes bases, & eandem altitudinem inter se sunt vt bases.

SInt duo prismata VCB, & FEO triangulares super bases ACB, & DEF, & eiusdem altitudinis. Dico *esse inuicem, vt bases.*

Probatur. Nam talia sunt parallelepipeda, quorum medietates sunt; sed prismata sunt dimidium parallelepipedorum, sicut, & bases triangulares sunt dimidię basium parallelogrammarum, sed vt totum ad totum, ita est dimidium ad dimidium. Ergo dimidiatę eam dicent proportionem, quam parallelepipedum ad parallelepipedum. Sicut, & dimidium parallelepipedorum ad dimidium eorundem. Ergo eadem quoque erit proportio dimidiatę basis ABC ad dimidiatam basim BFD, idest triangularis, quam dimidiati parallelepipedi ACBV ad dimidium parallelepipedum BFDO, nempe prismatis ad prisma.



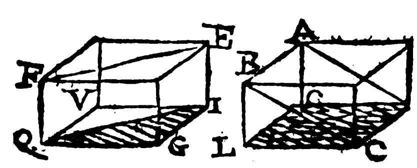
COROLLARIVM.

VNde prismata eiusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases sunt æqualia. Sicut & prismata æqualia super æquales bases eiusdem sunt altitudinis, tandemque Prismata æqualia, & æqualis altitudinis, æquales quoque possident bases. Quia, & parallelepipeda prismatum eorum dupla, tales obtinent proprietates.

THEOR. II. PROPOS. XVI.

Si fuerint duo prismata æqualis altitudinis; sed illud super quadrangulam basim aliud super triangulam, & quadrangula sit dupla triangularis basis; æqualia erunt prismata.

SIt prisma ABCO quadrangulam habens basim OC, & aliud EIFG triangulam habens basim IGQ, quæ sit medietas basis CO. Dico esse æqualia ipsa prismata si sint æqualis altitudinis.



Ex prismatibus compleantur parallelepipeda, quę dico esse æqualia ex prop. 4. huius. Quia bases erunt, vt ostendam ęquales, & altitudo æqualis ex hypothesi. Bases autem erunt æquales, quia completo parallelepipedo basis triangularis GIQ fiet qudrangula GV, & sic duplicabitur. Vnde erit æqualis basi CO, quę erit ex hypothesi dupla triangularis, cum ergo parallelepipeda sint dupla prismatum suorum in quæ diuiduntur, ipsa prismata ABCO, & GIFV quoque erunt æqualia.

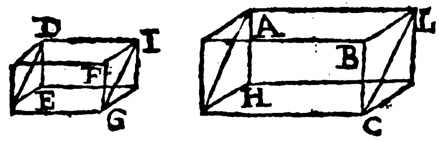
THEOR. III. PROPOS. XVII.

Similia prismata, quæ triangulares habent bases in triplicata sunt homologorum laterum ratione.

SInt similia prismata ABC, & DFE habentia triangulares bases BCL, & GFI, Dico, *quod hæc prismata sunt in triplicata suorum laterum ratione.*

Nam si compleantur Parallelepipeda AHBC, & DBFG sunt in triplicata suorum laterū homolorum ratione; sed prismata sunt eorum dimidia. Ergo ex prop.

ex prop. 8. lib. 5. Ergo, & ipsa sunt in triplicata suorum laterum ratione.

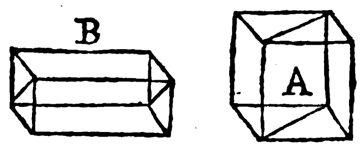


Cum autem prisma ACHB ad prisma DIGE consequatur proportionem triplicatam lateris LB ad latus IF; etiam consequetur triplicatam diagonalis LC ad diagonalem IG, quia ob similitudinem triangulorum LCB, & IFG, ita est diagonalis LC ad diagonalem IG, vt latus LB ad latus IF.

THEOR. IV. PROP. XVIII.

Æqualium prismatum reciprocantur bases, & altitudines; & quorum prismatum reciprocantur bases, & altitudines illa sunt æqualia.

PRobatur ex dictis. Quia bases, & altitudines parallelepipedorum, quorum sunt medietates reciprocantur, & ita est basis A ad basim B, vt hęc



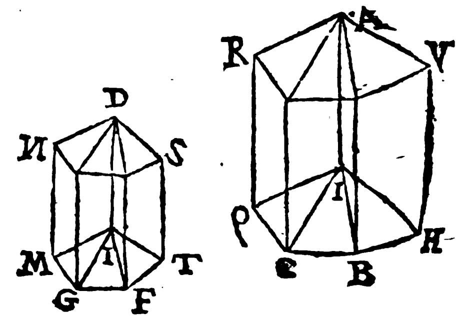
solidi altitudo in basi B ad solidi altitudinem in basi A, sed ità est totum ad totũ, vt dimidium ad dimidium, ergo, & dimidia basis A erit ad dimidiam basim B quales sunt bases prismatum, sicut altitudo solidi B ad altitudinem solidi super A. Pars étiam 2. prop. patet eadem ratione.

THEOR. V. PROPOS. XIX.

Omnia, quæ de Prismatibus triangulares bases habentibus ostenta sunt illa, & de cæteris verificantur.

QVæ dicuntur de prismatibus triangularibus, ea dicuntur etiam de prismatibus multilateribus V. g. pentagonis octagonis, & cæt. Quia ea omnia diuidi possunt in triangulata prismata, de quibus singulis eędem propositiones militabunt. Vnde, & tota ijsdem rationibus erunt obnoxia, vt patet.

Sic prismata ABH, & DNT pentagona, singula resolui possunt in tria prismata triangularia, quorum vnum est BCAI, aut IFGD, quę in eadem proportione erunt; qua bases, ita vt sicut se habet basis ad basim, sic se habet quodlibet prisma super eã basim, ad aliud super alterã basim. Nã V.g. basis HIB est ad basim BIC, vt prisma HIBV ad prisma BICA. Quare ex 18.l.5. si componantur simul basis cum basi, & fiat basis HIBC hęc erit ad CIB simplicem, vt compositum prisma ex duobus HVAC ad simplex BICA: & quia basis simplex CIB est ad alteram simplicem ICQ, vt prisma simplex BICA ad aliud simplex CQAR; erit quoque ex *æquo* composita basis HIC ad simplicem CIQ, vt prisma compositum VACIH compositæ basi innixum, ad prisma ARICQ simplici innixum. Quare *componendo* rursus tota basis ex tribus iam composita pentagona erit ad vnam basim CIQ, vt prisma pentagonum ad prisma simplex QIRC.



Progr. 2. Et idem filosofandum de altero prismate pentagono TMD, quod nempe sit pentagona basis ad simplicem aliquam TIF, vt prisma pentagonum ad simplex TFID.

Progr. 3. Iam habemus basim pentagonam ad simplicem triangularem comprehensam QIC dicere eam proportionem, quam pentagonum prisma ad triangulare comprehensum CQIR. Sed basis QIC ad basim alterius prismatis triangularis TFI, ita prisma in ipsa innixum ICQR ad prisma in hac situm TIFS; Et vt hæc basis simplex ad pentagonam; qua clauditur, ita hoc prisma simplex ad pentagonum TMD, cuius est pars, ex secundo progr. Quare ex *æquo* ita erit pentagona basis HIQ ad pentagonam basim TMI. Vt pentagonum prisma AHQ ad pentagonum prisma DTM.

COROLLARIVM.

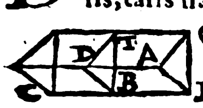
HInc est. Quod si daretur prisma pentagonum, & aliud triangulare idem esset argumentum. Nam ostensum est Pentagonam basim HIQ esse ad simplicem IQC, vt prisma pentagonũ AHQ ad simplex triangulare ICQR, & esse basim simplicẽ QIC triangularẽ ad basim item triangularem TIF, vt prisma in ea situm CIQR ad prisma in hac collocatum STLF, quare ex *æquo* ita erit pentagona basis HQI ad triangularem TLF; vt prisma pentagonum AHQ in pentagona basi positum ad hoc prisma SDTF in triangulari situm, quod si prisma triangulare ad aliud obtineat triplicatam proportionem etiam multilaterum ad aliud multilaterum, quorum sunt partes obtinebunt triplicatam proportionem, vt est in fig.

EXPEN-

THEOR. VI. PROPOS. XX.

Prisma ad prisma æqualis basis se habet, vt altitudo ad altitudinem.

Detur prisma AOHT si basis HQ non est normalis, talis fiat ex Cor. pr. 4. h. & alterius DCTB basis DBT, si non est similis basi AOH similis fiat, & cum ex Thesi sit æqualis ei erit DTB qualiũ laterum ipsi AOH. Eruntque prismata eiusdem altitudinis HO, vel BT. Quare inuicem referentur, vt bases ex pr. 15. h. AB, & DC. Sed AB ad DC est vt latus HB ad BC ob æqualem altitudinem TB. Ergo prisma AOHT ad DBCT erit, vt HB altitudo ad BC altitudinem.



EXPENSIO III.

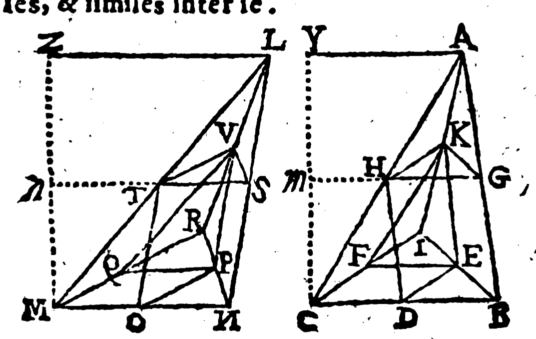
De Pyramidibus.

Soliditas pyramidum parùm captu difficilior, sed quæ viam sternit ad sphæræ corporumque sphæroicorum soliditatem inueniendam.

THEOR. I. PROPOS. XXI.

Omnis pyramis triangularis diuiditur in duas pyramides triangulares æquales, & similes inter se; & etiam toti similes, & in duo prismata æqualia per bifariationem omnium laterum. Prismata sunt æqualia quoque prismatibus alterius pyramidis in æquali basi, quoad aream, & vnum latus, quæ sit eadem altitudine prædita.

Sit pyramis BACI. Dico diuidi in duas pyramides æquales inuicem; similes, tum inter se, tum toti: quod fit diuidendo singula latera in G,H,K bifariam, & basis crura in E, & F, sic enim ductis lateribus puncta connectentibus erunt factæ duæ pyramides GKHA, & KEIF, quę erunt ęquales, & similes inter se.



Probatur. Quod sint compositæ ex cruribus parallelis cruribus primæ pyramidis, & ideo quod eiusdem angulis polleant ex propos. 30. lib. 1. & æqualibus cruribus; sic crus HA est æquale cruri FK, quod sit æquale cruri HC, eo quod sit inter parallelas HK, & FC, quod crus HC, vtpote medietas est æquale cruri AH. Sic GH est æquale cruri EF: eò quòd ita sit AH ad HG, vt AC ad CB, & quia AH est dimidium cruris AC, etiam GH erit dimidium cruris BC, & tale quoque erit EF eodem argumento, quod sit IF ad FE, vt IC ad CB, at IF est ex effectione medietas cruris IC ergo etiam EF cruris BC.

Et sic argumentare de alijs & idem potes philosophari de angulis; Sic angulus AKH est æqualis angulo KIF ex prop. 30. lib. 1. Elem. ob bases parallelas GHK, & BIC, & sic de alijs. Vnde pyramides erunt æquales, & similes inuicem, & etiam toti similes iisdem argumentis.

Prob. etiam. Quod diuidatur in duo prismata. Nam diuiso latere BC in D, & ducta HD, & ED, duo prismata erunt completa, nempe GHK EDB super basem triangularem BED, & prisma KEF HDC super basem quadrangularẽ FCDE, quę CDFE est dupla basis BED, & ideo cum sit eiusdem altitudinis ex propos. 19. h. prisma triangularis basis erit æquale prismati quadrangularis basis.

Dico tandem hæc quoque prismata BEDGKH, & EDFCKH esse ęqualia prismatibus NPOSVT, & POQMVT alterius pyramidis ęqualis basis, quoad aream NRM areæ BIC, & latus NM lateri BC, & eiusdem altitudinis MZ, ac CY, similiter diuisæ.

Probatur. Nam triangula BIC & RMN in pyramidibus dissimilibus, quarum apices A, & L sunt necessariò inter parallelas, cum ex hypothesi sint æqualia ex pr. 39. l. 1. Cor. & habeant ęqualem basim. Quare si diuidantur latera RN, & RM, & NO bifariam in P, Q, & O linea PQ erit æqualis lineæ EF ex ratione præcedenti, eo quòd DC, & OM sint æquales, vtpote dimidiæ æqualium BC, & MN, & EF, & PQ sint eis ęquales, vtpote inter parallelas ED, & FC; necnon, & inter OP, & MQ. Quare ex 12. Tract. 29. trapezium OPQM erit æquale trapezio EDFC: quare erunt eiusdem altitudinis. Quapropter triangulares quoque bases NPO, & BED erunt eiusdem altitudinis; basis verò BD æquatur basi NO æqualium BC, & NM dimidiæ. Quamobrem sunt quoque ęqualia triangula NPO BED. Altitudo quoque prismatum est eadem ob triangula DHC, & OTM æqualia ob æquales bases DC, & OM. & æqualem eleuationem, vtpote eleuationis dimidiæ Pyramidum æquè altarum. Ergo Prismata GKHBED, & SVTNPO, necnon, & EDCFHK, & POQMVT erunt inuicem æqualia ex prop. huius.

THEOR. II. PROPOS. XXI.

Pyramides triangulares æquali basi prædita vt prius, & in eadem altitudinem eleuatæ sunt inter se æquales.

Sint duæ pyramides, in præced. fig. quarum vertices æqualis perpendicularis altitudinis sint A, & L; bases verò æquales, & triangulares etiamsi dissimiles BIC, & RNM. Dico pyramides esse quoque æquales.

Probatur. Nam si differunt hæc erit maior altera. Minor assignetur, & sit A minor pyramide L quantitate V.g. X. Ablatis ab ea prismatibus duobus, & ab L etiam prismatibus suis prædictis ęqualibus remanebunt duæ pyramides AGKH, & KEIF in A æquales inuicem, similesque toti A duæ pyramides in L similes toti, & item æquales inuicem LSVT, & VRPQ. Ab eis ergo prismata ęqualia quatuor hinc à pyramidibus in A, & quatuor inde à pyramidibus in L demantur, quę ob eandem rationem præc. prop. erunt æqualia inuicem. Et residuæ erunt Pyramides eiusdem speciei, ac priores à quibus ęqualia item prismata poterunt resecari.

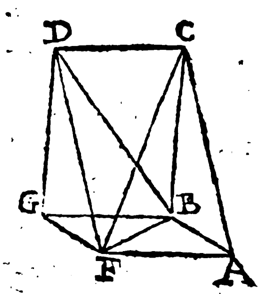
Id ergo fiat demendo à singulis æquis vicibus, donec in minore A remaneant adeo paruæ pyramides, vt omnes simul sint proximè minores differentia Z, ita quod residuum in L quod semper est maius residuo in A, ablatis vtrique æqualibus sit, aut maius, aut æquale differentiæ X. Quod si ablatio omnium prismatum ab omnibus pyramidibus esset nimia ab vna, aut duabus pyramidibus, tum residuis pyramidis A, tum residuis Pyramidis L detrahantrahantur, aut prisma, vel dimidium, vel triens prismatis vtrinque. Ab istis itaque pyramidibus maioribus differentia X reliqua prismata auferantur, donec prismata tot sint, vt æquent differentiam X, vel superent. Id enim fieri potest, cum hę pyramides in L residuæ fuerint maiores, vel ęquales differentiæ X. Quia itaque à pyramidis minoris A residuis pyramidibus tot prismata prædictis pyramidis L ęqualia prismatibus auferri possunt ex pręc. demantur tot vicibus quot à residuis pyramidibus pyramidis maioris L ablatum est. Et tunc à pyramidibus minoribus, quam quantitas X Auferretur, aut magis, quàm quantitas X, aut quid ei æquale, quod est absurdum, non erit ergo minor pyramidis A pyramide L, sed ęqualis.

THEOR. III. PROPOS. XXII.

Omne Prisma triangulari basi innixum diuiditur in tres pyramides æquales triangularibus basibus fultæ.

*SIt prisma CDBF triangulares possidens bases ABC, & FGD: cuius parallelogramma ambientia tribus diametris BF, & CF, & DB secentur. Dico in tres pyramides esse diuisum ABCF, & BDFG, BDCF, quas dico æquales esse inuicem.

Probatur. Quia Pyramis ABFC habet æqualem basem ABF, basi BFG pyramidis FBGD ex 34. lib. 1. El. ob diagonalem BF, æqualem verò altitudinem, quòd terminent in eandem parallelã DC basi GB. Ergo erunt ex pręc. inuicem ęquales.



Progr. 2. Pyramis verò CDFB habet quoque verticem in eodem puncto F, quo altera prædicta FBGC, & habet basem CDB illius basi BGD ob diagonalem BD ex 34. lib. 1. æqualem: Ergo, & istæ sunt æquales nimirum FBDG, & CFBD; sed FBDG erat æqualis primo propositæ CBFA. Ergo omnes sunt æquales.

COROLLARIVM.

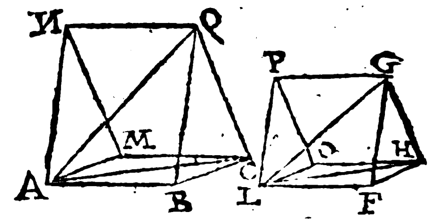
HInc enascitur quamlibet pyramidẽ esse tertiã partem prismatis, quod eandem cum eã habeat basim, & altitudinem, seu prisma tale pyramidis in illo contentæ triplum esse.

THEOR IV. PROPOS. XXIII.

Similes pyramides, quæ triangulares habent bases in triplicata sunt homologorum laterum ratione.

*SInt pyramides BCAQ, & FLHG similes, sitæ in basibus triangularibus BCQ; & FHG. Dico pyramides ipsas esse in triplicata homologorum laterum BQ, & FG ratione.

Fiant ex illis prismata MAN BCQ, & OLP FHG, quę ob pyramides similes erunt, & ipsa similia. Nam planum BMAC, & LOFH faciet cum BQC, vel FDH plano eundem angulum, vt faciebat priùs, cùm erat triangulare, & idem dicas de alijs; quare similia omninò erunt prismata BCN, & FHP, propter oppositos angulos æquales oppositis ob laterum ęqualitatem, & parallelismum denuò ductorum priùs ductis lateribus.

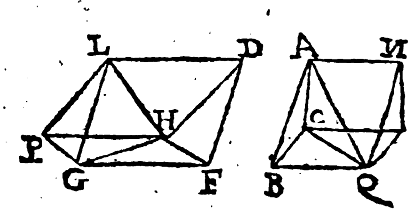


Probatur propos. prismata sunt ex dictis in triplicata suorum laterum ratione. cùm sint similia; sed pyramides in eadem proportione sunt, cùm prismatum tertia pars sint ex propos. 18. lib. 5. El. Ergo erunt, & ipsę in triplicata suorum homologorum laterum ratione.

THEOR. V. PROP. XXIIII.

Sub eadem altitudine existentes pyramides, & triangularibus basibus prædita inuicem sunt, vt bases.

*PRob. Nã sũt tertia pars prismatis, quod super earũ basim inscriberetur. PFD CQN, habent verò eandem altitudinem, & eandem basim, vt in pyramide ABCQ, & GPHL patet. Quare cùm tertia pars ad tertiam partem habeat eandem proportionem, quam totum ad totum ex prop. 18. lib. 5. quę sunt prismata sub eadem altitudine eorum basibus innixa NCQ, & DFP, & prismata inuicem sint ex prop. 15. h. vt bases; Pyramides quoque eandem proportionẽ; quam bases consequentur ex 18. l. 5.



THEOR. VI. PROPOS. XXV.

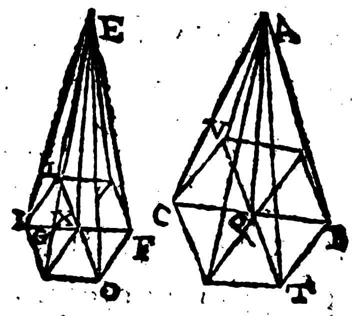
Æqualium pyramidum, & triangulares bases habentium reciprocantur bases, & altitudines.

*SInt duæ pyramides ABCD, & FGHI, quæ habeant bases triangulares CBD, & GHI. Dico earũ bases, & altitudines reciprocari. Nam possident eandem altitudinem, & basim, quam prismata GMFI, & CDAL. Sed prismatum propos. 18. h. vt dictum est bases, & altitudines reciprocantur. Ergo pyramidum quoque, quæ sunt tertia pars prismatis ex 21. h. bases, & altitudines reciprocabuntur: & ita erit basis CBD ad basim GHI, vt altitudo IF ad altitudinem DA.

CO-

COROLLARIVM.

Hinc elicitur nempe à tota expens. passim quod idem dicendum sit de pyramidibus, quarum bases plura latera numero æqualia possideant, quàm tria. Nam ea resolui possunt in tot pyramides triãgulares V.g. pyramis sexagona resolui potest in sex pyramides, quę erũt tertia pars suorum prismatum; quare pyramis ad pyramidem æqualis altitudinis eam habebit proportionem, quam basis ad basim, & si basis erit equalis, & æ-



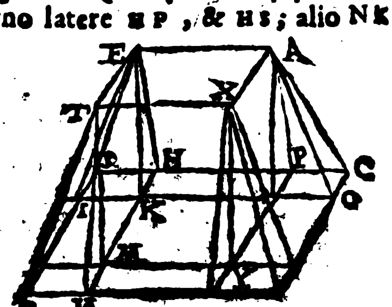
qualis altitudo pyramides quoque erunt æquales, at si sint inæquales basi solùm, essent vt bases, si altitudine tantùm, erant vt altitudines si prorsus inęquales, at similes in triplicata suorũ homologorum laterum ratione. At ęquales, si altitudines, & bases reciprocentur. Quod verò omnes pyramides resolui possint in pyramides triangulares patet, quia bases possunt diuidi in triãgula V g. vQL, ILX, & in triangula TQB, & FXO, & per lineas rectas, eruraque triangulorum QB, & QT, vel XF, & XO, & per vertices E, & A plana agi queunt. quæ vtique pyramides triangulares efficient QTBA EXOF, & reliquas.

THEOR. VII. PROP. XXV.

Frustum quadrangulæ pyramidis parallelis basibus abscissum, est æquale parallelepipedo basim habens comprehensam duobus lateribus, quæ singula constent ex latere minoris basis, & semidifferentia homologorum laterum, & trienti parallelepipedi in basi siti à semidifferentia eorundem laterumcomprehensa, quæ omnia sint eiusdem altitudinis.

Sit frustum pyramidis AB, cuius bases quadrangulæ semibasis superior AT, inferior, BC; differentia homologi lateris AE ab homologo latera CS sit SH, & tota sit CP cum HS: Sic semidifferentia homologi lateris ET ab homologo latere HN sit KH, & tota sit KH cum MN.

Dico igitur. Quod parallelepipedum ex basi YS, ex vno latere HP, & HS; alio NK, KH,



& altitudine XE pyramidis constans vnà cum triente parallelepipedi in basi MB siti, & eiusdem altitudinis est æquale frusto pyramidis BA. Cadant igitur superficies FM, & EA, & aliç normales ipsi in planum CB, & faciant parallelepipedum MA, intelliganturque extensæ, vt secent superficies frusti pyramidis, & sint HETN, & IBAO, & cęt. Igitur diuident frustum pyramidis in parallelepipedum AM existens in medio, & duo prismata æqualia KA, & NX, quæ simul vnita constituent parallelepipedum basis KP, & altitudinis YX, & duo IT, & YA ęqualia tũ inuicē, tum prędictis, quod sint super bases æquales MI ipsi KP, vtpote complementa circa diametrum, & YO ipsi YN, vnde & ipsa vnita constituent parallelepipedum æquale priori basis MI, & altitudinis TX. Tandem constituent quatuor pyramides, vt MNBT, & alias ex angulis constitutas, quarũ singulæ essent duo trientes prismatis, ex basi MB in altitudinē MT consurgentis ex Cor. propos. 22. p. 1. & ideo triens parallelepipedi eadē basi MB siti eandē altitudinem habentis. Itaque tres pyramides facient parallelepipedum MB in altitudinē KE, vel YX: Duo prismata KP, & NX efficient parallelepipedũ ex basi KP, & altitudine KE. Duo autem prismata OX, & MB constituent parallelepipedum ex basi MI, & altitudine EY. Ideoque cum parallelepipedo medio YA conficient totum parallelepipedum BA situm super basim parallelogrammã YS, quę est ex latere PH vna cum semidifferentia HS pro vno latere, & pro alio MK cum semidifferentia KH pro alio latere, cui si addas pyramidem MBT, idest triens parallelepipedi super basim MB altitudinis MT erit frustum pyramidis parallelis basibus constantis æquale illi parallelepipedo ex basi YS ad altitudinem KE euecto vna cum triente parallelepipedi basis MB ad altitudinem eandem MT eleuato, quod erat probandum.

COROLLARIVM.

Pyramidis triangularis frustum est æquale prismati triangularis basis V.g. semibasis SY, quæ constituatur ex latere PH minori, & semidifferentia SH pro vno latere, & pro alio ex alio minori MK, & semidifferentia KH, & triente prismatis ex basi, cui semidifferentię prędictę KH, & HS latera prestent. Quia frustum illud Pyramidis erit dimidium frusti basi quadrata sub ijsdem lateribus, & angulo comprehensi, sicut prisma basi triangulari situm est dimidium parallelepipedi basis quadratę sub eodem angulo, & lateribus comprehensæ, dummodo omnia in æqualem altitudinem sint eleuata.

TRACTATVS XXXIV.

PARS SECVNDA.

De soliditate corporum curuorum.

EXpedita soliditate corporum planis superficiebus contentorum restat, vt curuis planis contenta corpora videamus illa verò sunt in triplici differentia alia, quæ continentur, curuis quidem, sed rectilineam habent basim, vt fornices quadrati, alia quæ curuis superficiebus, sed rotundam, & planam basim continent, vt coni, & cylindri, alia sunt, quæ superficie omnino curua absque vlla admixtione planitiei consequuntur, vt sphæræ, & sphæroides.

EXPENSIO I.

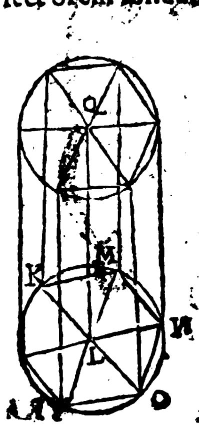
De Cylindris, & Conis.

POst corpora, que planis superficiebus continentur, succedunt mixta, quæ superficie curua altera, aut duabus planis constant, inter quæ precipua sunt coni, & cylindri, de quibus, & soliditates, & soliditatum proportiones sunt indagande.

THEOR. I. PROPOS. I.

Sicut se hibet basis triangularis inscripta sectori in proportione ad sectorem, ita prisma rectè in basi collocatum ad corpus solidum in sectore normaliter existens, eandemque cum prismate altitudinem possidens.

SIt basis triangularis KML inscripta sectori KML super quam sit prisma KLMQ, sectorq; KML, super quem ad eandem altitudinem corpus sit triangulare velut prisma, sed rotundæ superficiei LMKQ, quod apellabimus sectorem solidum. Dico, quòd sicut est basis triangularis LMK ad sectorem planum LMK, ita est prisma LMKQ in basi prædicta ad sectorem solidum LMKQ.



Probatur. Nam, si sumantur eque multiplices basis, vt LMN, NOL, & sectoris item LNO, LMN, superque bases fiant prismata sua, & super sectores planos sectores solidi sub eadem altitudine, Prismata erunt æqualia inuicem ex pr. 15. cor. par. 1 h. nec non, & sectores solidi MNLQ, NOLQ, KLMQ; quia, vt patet, continentur, tum prismata inuicem, tum sectores solidi inuicem superficiebus equalibus, & simillibus planitie, & numero ex def. Tract. 33.

Si ergo crescant bases triangulares prima quantitas magis, quam sectores plani secunda, crescet & tertia, nempe crescent prismata magis, quam sectores solidi, quarta quantitas. Si verò vtlibet multiplicentur bases triangulares prima quantitas, & æquet secundam quantitatem sectores; prismata quoque tertia quantitas, nempe velut bases basibus, reperientur æquales quartæ quantitati, nempe sectoribus solidis, quod si prima quantitas multiplicata sit minor nempe bases, quam sint sectores plani secunda quantitas, vt vt multiplicati, erunt quoq; æque, ac bases sue multiplicata prismata tertia quantitas maiora, quã sectores solidi quarta quantitas multiplicata, vt sectores.

Crescentibus itaque basibus crescunt prismata decrescentibus, decrescunt, & cum equales sunt equantur illæ cum sectoribus planis, hec cum sectoribus solidis, vnde ex 9. def. Tr. 9. inuicem dicent proportionem, & ita erit basis triangularis ad sectorem planum, vt prisma ad sectorem solidum.

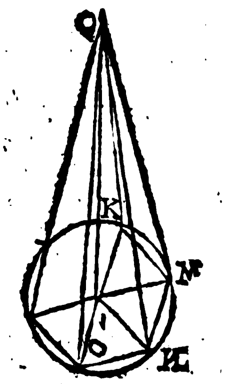
THEOR. II. PROP. II.

Sicut se habet basis triangularis ad sectorem planum, ita se habet pyramis in basi sita ad portionem coni in sectore constitutam; dummodo æqualem possideant altitudinem, & coni sint recti.

HAec propositio ostenditur, vt antecedens. Nam supposito cono recto portiones omnes coni, que super sectorem planum fiunt; sunt similes, & æquales V. g. IMKQ, INMQ, OINQ &c. quod ex def. superficiebus similibus, æqualibusq; & numero equali contineantur; sicque pyramides QIMK, MINQ, NIOQ & cet. factæ super bases triangulares in sectoribus inscriptas inuicem erunt æquales ex prop. 10. Tr. h. pa. 1. quare si bases multiplicentur, ita quod superent sectores, pyramides

quoque

quoque ita crescent, vt superent portiones conorum: Si verò bases triangulares ita multiplicentur, vt minus sint, quàm sectores, erunt quoque pyramides, minus quàm portiones conorum: Si tandem ita augeantur æquè multiplices bases, vt adęquent sectores; pyramides quoque æquabunt portiones coni: quare vt est basis pyramidis ad sectorem planum, ita pyramis ipsa ad portionem coni recti super sectorem eleuatam in æqualem altitudinem.



COROLLARIVM.

Hinc eruitur ita esse circulum ad multilaterũ sibi inscriptũ, sicut conus in ipso locatum ad pyramidem in multilatero constitutam, nam cum diuiso circulo in tot sectores inuicem ęquales in quot triãgula æqualia basis multilateri inscripti diuisa est, ita erit quodlibet triangulum IMK ad quemlibet sectorem circuli, vt quęlibet pyramis colocata in triangulo ad quemlibet sectoré conicum æquè, ac pyramides eleuatum. Ergo etiam omnes ita se habebunt ad omnes ex 17. lib.5. & omnia triangula multilateri, idest multilaterum ipsum ita se habebit ad omnes sectores numero ęquales, vt pyramides in triangulis sitas ad sectores solidos conicos in sectoribus planis locatos.

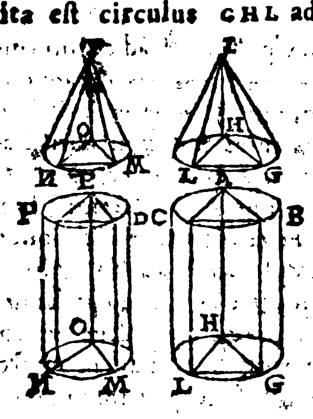
Et idem dicendum est de prismatibus, quę sint ad cylindros, quibus inscripta sint, vt bases triangularis prismatum in sectoribus inscriptę ad circulum qui basis cylindri est, vt ex prec. propos. eodem argumento colligitur.

THEOR. III. PROPOS. III.

Coni recti, seu Cylindri eiusdem altitudinis, & diuersæ basis sunt inuicem, vt bases.

Sint Coni, GILH, & MDNT, vel cylindri BACGHL, & DFEMON recti sub eadem altitudine, sed diuersę basis GHL, & MON. Dico esse ad inuicem in proportione, vt bases. & ita referri conus GHLI ad conum MTON, vel cylindrus BACGHL ad cylindrum DFEMON, vt basis GHL ad basim MON.

Probatur. Nam ex propos. 40. & 41. lib.6. ita est circulus GHL ad circulum MON, vt multilaterum GHL ad multilaterum MON, ideoque *conuertendo* circulus GHL erit ad multilaterum GHL, vt circulus MON ad multilaterũ MON, sed vt circulus GHL est ad multilaterũ GHL, sic cylindrus CABLHG, seu conus ILHG ad prisma AGHL, seu pyramidé IGHL ex 2. h. & vt basis circulus MON ad multilaterũ MON, sic Cylindrus DFE MON, seu conus TOMN ad prisma EMON, vel pyramidem inscriptam TOMN: Ergo ex propos. 16. lib.5. ita erit cylindrus BACGHL ad sibi inscriptũ prisma AGHL, vt cylindrus DFEMON ad prisma sibi inscriptum EMON. Quare *conuertendo* ita erit cylindrus BACGHL ad cylindrum DFEMON, vt prisma inscriptum AGHL ad prisma inscriptum EMON; sed prismata se habent ad inuicem, vt bases ex prop. 23. par.1.h. Ergo etiam cylindri.



Et sic quoque erit conus IGHL ad pyramidem inscriptam sibi IGHL, vt conus MTON ad inscriptam sibi pyramidem TMON. Quare pari modo *conuertendo* ita erit conus IGHL ad conum MTON, vt inscripta pyramis IGHL ad inscriptã pyramidem TNOM: sed inscriptę pyramides sunt inuicem, vt bases ex prop. 23. p.1.h. Ergo etiam coni se habebunt ad inuicem, vt bases.

COROLLARIVM.

Hinc est. Quod si Conus, & Cylindrus sit pyramidi, & prismati æqualis basis, & eiusdem altitudinis sit ei ęqualis. Quod patet ex Cor. p.2.h. Nã ita est cylindrus, & conus ad prisma, & pyramidẽ sibi inscriptã, vt basis coni, vel cylindri ad basim prismatis, vel pyramidis inscriptę, si sint ęqualis altitudinis; sed prisma, vel pyramis inscripta ad prisma aliud, vel pyramidé Z eiusdem altitudinis, & æqualis basis O illi circulo, qui basis est coni, vel cylindri, est vt basis sua inscripta circulo coni, vel cylindri ad basim O ęqualé circulo qui est basis cylindri, vel coni Z. Basis autem inscripta ad basim coni, vel cylindri, & ad basim O huic æqualé eandé vtpote ad ęquales dicit proportionem. Ergo etiam prisma inscriptum cylindro, vel pyramis cono inscripta ad conum, vel cylindrum suum, & ad prisma, pyramidemq; Z æqualiũ basiũ eandé proportionem dicet; quare ex 7. lib.5. erunt prisma, vel cylindrus æqualium basium, & eiusdem altitudinis, sicut etiam pyramis, & conus æqualia.

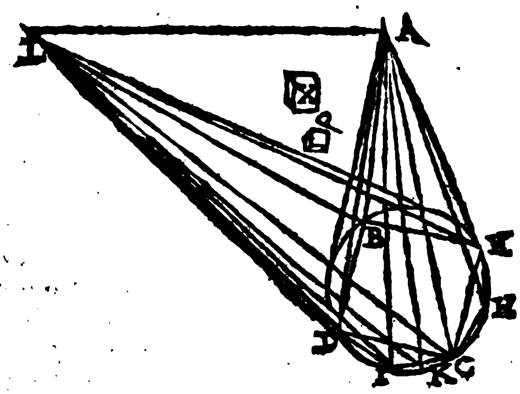
THEOR. IV. PROPOS. IV.

Coni, seu recti, seu scaleni, sicut, & cylindri in æqualibus, seu in eadem basi constituti, & in eandem altitudine sunt æquales.

Sint coni, seu cylindri super eandem basem rotundam CN, quorum vertices A, & L, hos dico esse æquales; quod si quis neget; alterũ maioré altero necesse est esse, assignet conum, vel cylindrũ maiorem, & sit L, ideoque A conus, seu cylindrus minor erit V.g. quantitate X. Auferantur ab vtrisque pyramides quadratę æquales, sed prismata ob eandem altitudinem, & eandem basim ex Tr. h, propos. 1. & 29. NBCDL, & ABCDN, & remanebunt segmenta conorum, vel cylindrorum quatuor, qualia sunt CDIL, & CDIA, à quibus segmentis auferantur, rursus pyramides triangulares CIDL, & CIDA æquales, aut prismata æqualia ob eandem altitudinem, & æqualem basim, & residua erunt segmenta conorum CIKL, CKIA, & cętera, vel cylindrorum, si pro conis cylindri assumpti fuerint à principio: Sed ad vitandam confusionem loquamur de solis conis, quod, & de cylindris intelligetur, à quibus, ablatis sursus pyramidibus triangularibus IKCL, & IKCA æqualibus remanebunt adhuc sectiones conorum minores. Id ergo

totics

toties fiat; donec remaneant segmenta conorum simul in cono minori A minora quantitate, & differentia X proximè (auferendo, vel omnia eorum, quæ simul auferenda sunt, vel aliqua, sed semper æquo numero ab vtraque pyramide. Ideoque segenta conorum residua in pyramide maiori L erunt maiora, vel æqualia differẽtiæ X, sint ergo æqualia primò, & à cono L auferantur tot pyramides triãgulares, donec exequent segmenta conorum minora quantitate X residua coni A, aut proximè superent. Nam cum deinde, & à segmentis ipsis coni A tot pyramides æquales auferri possint, aut nihil remaneret segmenti conici, quòd est absurdum, cùm pyramis sit minor segmento conico, quod eam continet, aut à minori auferetur maius, (scilicet aliquod æquale differentiæ X) quod item absurdum est.



Quod si sint maiora hæc segmenta coni L, quàm differentia X. Auferantur à cono ipso L tot pyramides æquales triangulares; donec ipsę pyramides ablatę exequent, vel proximè superent differentiam X, & eodem modo cum, & à segmentis coni A residuis æquales tot pyramides auferri possint, auferreretur à minoribus conicis segmentis differentia X, aliquid, aut æquale, aut maius Differentia X; quod item est absurdum.

COROLLARIVM.

Hinc ellicitur idem dicendum esse de segmentis conorum, & cylindrorum. Siquidem idem argumẽtum valet etiam de segmentis CIDL, & CIDA. Nam auferatur primo ab vtrisque pyramis triangularis CDIA, & CIDL. Deinde triangularis CXIL, & CXIA, & sic consequenter; donec restans segmentũ à CIDA minoris coni remaneat minus differentia Q proximè, qua differt minus à maiori, deinde à residuo maioris deducentur tot partes solidæ, donec superent ablatæ differentiam Q, & auferrerentur etiam tot pyramides à residuis segmenti conici minoris, quod est absurdum.

THEOR. V. PROPOS. V.

Sub eadem altitudine existentes Coni, & Cylindri inuicem sunt, vt bases.

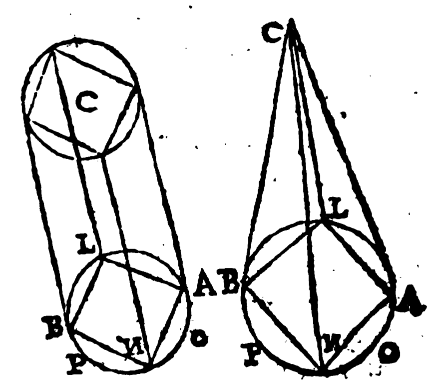
Sit conus, vel cylindrus eiusdem altitudinis A, & alius B, siue obliqui sint, siue recti, dico, quod ad inuicem sunt, vt bases.

Probatur. Nam cum obliqui sint ęquales rectis ex pręced. & recti sint ad inuicem, vt bases ex prop. 3. h. dummodo in eamdem perpendicularem altitudinem extollantur, etiam obliqui eiusdem altitudinis erunt inuicem, vt bases.

THEOR. VI. PROPOS. VI.

Coni, & Cylindri obliqui ita referuntur ad pyramides inscriptas, vel prismata inscripta, vt circulus, in quo sunt, refertur ad multilaterum basis pyramidis, vel prismatis seu rectæ, seu sint obliquæ figuræ solidæ.

Sit conus, seu cylindrus CLOP, in quo inscribatur pyramis, vel prisma ABC LN super basim multilateram LAN. Dico, quod, vt est circulus LOP ad multilaterum basis ABLN; sic conus, seu cylindrus LOCP ad pyramidem, seu prisma ABLNC.



Prob. Nam si sit conus, seu cylindrus rectus super basim circulum LOP erit æqualis obliquo æquèalto ex præced. 4. sic si super multilaterũ basimque LNAB sit pyramis, seu prisma ABLNC sunt æqualia rectum obliquo ęquèalto ex prop. 11. Cor. & ex 21. par. 1. h. sed conus, seu cylindrus rectus est ad pyramidem, vel prisma inscriptum conuertendo pr. 1. h. & 2. Cor. vt basis circulus LOP ad multilaterum ANBL. Ergo etiam obliquus conus, seu cylindrus LCOP refertur ad pyramidem, seu prisma inscriptum, vt basis circulus LOP refertur ad ABLNC multilaterum. basimque ANBL.

THEOR VII. PROP. VII.

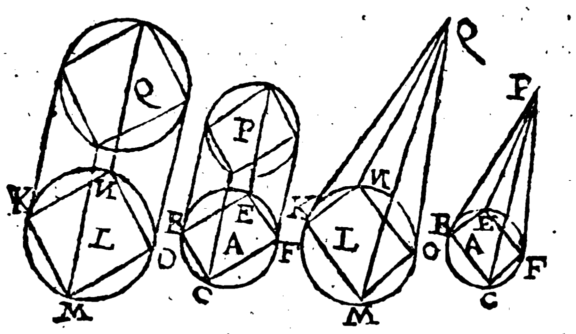
Omnis conus est tertia pars Cylindri eandem cum ipso basim habentis, & altitudinem æqualem.

Probatur. Nam ita prisma est ad cylindrum sicut basis multilatera prismatis est ad circulum circumscriptum, qui cylindri est basis, & ita quoque est pyramis in ea basi multilatera ad conum, qui in circulo eodem collocatus est ex pręced, sed ex 11. lib. 5. quę eidem rationi sunt eędem rationes, & inter se sunt eędem rationes. Ergo ita erit prisma ad cylindrum, vt pyramis ad conũ: Ergo *permutãdo* ita erit Prisma ad pyramidẽ quantitates eiusdem generis, vt cylindrus ad conum eiusdem item generis. Sed prisma comprehendit ter pyramidem, illiusque est triplum, dummodo eadem basi sita, ad eademque altitudinem sit eleuata: Ergo ita quoque erit cylindrus respectu coni, & conum ter continebit, quod erat ostendendum.

THEOR. VIII. PROPOS. VIII.

Coni, & Cylindri sunt inuicem, vt Pyramides, & Prismata in illis inscriptas.

*SIt cylindrus, seu conus FEBCP, & alius ONMKQ, inscribanturque conis pyramides, & cylindris prismata similiũ basiũ. Dico ita esse ONMKQ cylindrus, seu conus ad FEBCP cylindrũ, seu conum, vt est prisma, seu pyramis inscripta ONMKQ ad prisma, vel pyramidem inscriptam FEBCP.



Pr. Ita est ex 6. h. ONMKQ cylindrus, seu conus ad prisma, seu Pyramidem sibi inscriptam, vt circulus L basis ad basim multilaterã OMKN, vt autem circulus L ad ONMK basim inscriptã sibi; *permutando* propositionem 40. & 41. lib. 6. ita circulus altera basis A ad basim multilaterã inscriptam sibi FEBC, vt autem circulus A ad multilaterã basim FEBC sibi inscriptam, ita est cylindrus, seu conus FEBCP in circulo A situs ad prisma, seu pyramidem in FEBC multilatero sitam. Ergo ex prop. 12. lib. . Ita erit cylindrus, seu conus ONMKQ ad prisma, seu pyramidẽ sibi inscriptam, velut cylindrus, seu conus FEBCP ad prisma, vel pyramidem sibi inscriptam, vt etiam dixi prop. 7. h. Quare *permutando* ita erit cylindrus, seu conus ONMKQ ad cylindrum, seu conum FEBCP, vt prisma, vel pyramis inscripta ONMKQ cylĩdri, vel coni ad prisma, vel pyramidem cylindro, seu cono FEBCP inscriptam.

THEOR. IX. PROP. IX.

Similes Coni, & Cylindri in triplicata ratione sunt diametrorum, qui in basibus.

SInt duo coni, & cylindri similes, quorum altitudines Q, & P, quarum bases OMNK, & FEBC. Dico hos conos, seu cylindros esse inuicem in triplicata ratione diametrorum. Inscribantur in cylindris prismata. In conis pyramides quotlibet laterum æqualium V. g. quadrangulæ sed similiũ basium, vt in fig. præc. propos. Prisma ONMKQ, seu pyramis ad prisma, seu pyramidem FEBCP habet proportionem triplicatam lateris MK ad latus BC ex prop. 14. & 25. & Cor. prop. 26. Sed vt ex prop. ant. P. L. Ita est pyramis, seu prisma Q inscriptum ad pyramidem, seu prisma P inscriptam, vt est conus, seu cylindrus Q circumscribens ad cylindrum, seu conum P circumscribẽtem, ergo cylindrus, seu conus erit ad conũ, seu cylindrũ P in triplicata ratione KM ad BC eadẽ ex 41. l. 6. diametri circuli L ad diametrum circuli A.

COROLLARIVM.

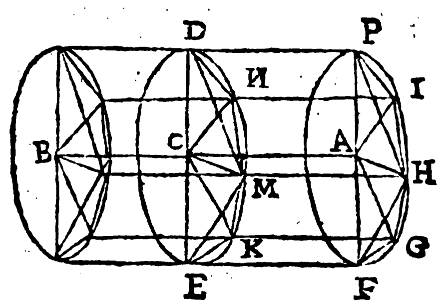
QVare patet, quod etiam erunt in duplicata ratione basium suarum.

THEOR. X. PROPOS. X.

Si Cylindrus plano secetur aduersis planis parallelo erit, Cylindrus ad Cylindrum, vt axis ad axem.

SIt Cylindrus AB sectus plano DME parallelo planis PHF, vel illi aduersô. Dico ita cylindrum super axem AC esse ad cylindrum super axem CB, vt axis AC ad axem CB.

* Diuidatur circulus basis PHGF in partes æquales, & per eas partes, & per axem ductis planis, & per subtensas PH, & HF, DM, & ME constituantur prismata inscripta PHAC, & DMCB, & cæt. vsque dum inscribant totum cylindrum. Quæ in cylindro AC erunt omnia æqualis altitudinis, sicut & omnia, quæ inscribunt cylindrum CB, & æqualium basium AHF, & CME. Et ideo erunt inuicem, vt altitudines, nempe quæ sunt in cylindro AC ad ea, quæ sunt in cylindro CB, vt altitudo AC ad altitudinem CB ex 20. par. 1. h.



Rursus inscribantur alia, vt sunt AGFC AGHC, & cęt. dimidiatis arcubus priorum in cylindro AC, & CEKB, & CKMB in cylindro CB, & hæc etiam secundò inscripta in cylindro AC ad ea, quę inscripta sunt secundò in cylindro CB erunt, vt altitudo AC ad altitudinem CB, vtpote, quod omnia sint æqualium basium AGF, & CKE, sicut AGH, & CMK, & cęt. ex effectione.

Rursusq; idem replicetur toties, donec inscripta prismata adeo multiplicentur, vt omne spatium absumant, quòd possibile est absumi remanens inter superficiem rotundam cylindri, & subtensas planas prismatum superficies. Satis enim constat sine ostensione particulari, quòd quantò magis prismata multiplicantur, tantò minus spatium remanet inter superficiem globosam cylindri, & prismatũ superficiem planam. Quia ergo omne spatium, quod absumi potest à prismatibus inscriptis, & quantum fieri potest multiplicatis absumptum est. Ergo illa prismata æquabunt cylindros AC, & CB, & ea quidem, quę inscripta sunt in cylindro AC ipsum æquabunt, sicut quæ inscripta sunt in CB cylindro ipsum ęquabunt quoque. Siquidem si non ęquarent, remaneret aliquis locus nouę inscriptioni contra pręsuppositum. Verùm ea omnia prismata in AC sunt semper ob ęqquales bases, in quibus sunt, ad ea omnia, quę in CB, vt altitudo AC ad altitudinem CB ex 21. h. p. 1. Ergo etiam cylindrus AC erit ad cylindrum CB, & altitudo AC ad altitudinem CB.

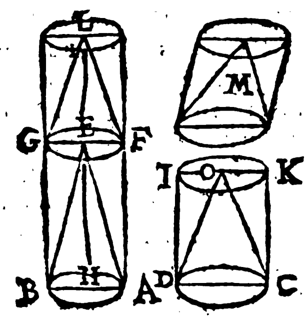
THEOR.

THEOR. XI. PROPOS. XI.

Super æqualibus basibus constituti Coni, & Cylindri inuicem sunt, vt altitudines.

SInt super bases æquales AB, & CD duo coni AEB, & COD, & duo cylindri FAGB, & KCDI. Dico esse inuicem, vt altitudines, seu recti, seu scaleni sint.

Prob. Nam si cylindrus CADI superponatur cylindro FABEG erit vnicus cylindrus, cuius axis HL, quod si sit scalenus, vt M, pro illo apponatur alius EL rectus æqualis altitudinis, qui cùm sit etiam æqualis basis erit æqualis scaleno M ex propos.4. h.



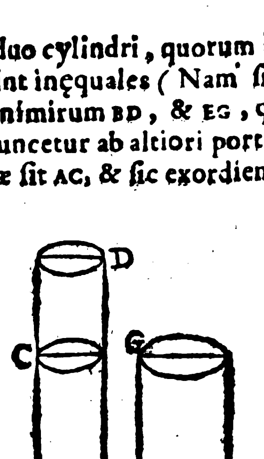
Cum ergo cylindrus totus in axi HL, fit diuisus in E in duo segmenta erit cylindrus FGAB ad cylindrum EL æqualis, vel scaleno M, vel recto KICD, vt axis HE ad axem EL ex præced. axis verò in cylindro EL recto est altitudo cylindri æqualis altitudini cylindri M.

Probatur quoque de conis, quia enim supra ostensum est prop.7. h. quòd conus est tertia pars cylindri eandem cum ipso altitudinem, & basim possidentis, estque eadem proportio partis, & totius, erit quoque proportio coni ABE ad conum GLF, vel ad scalenum M, vt altitudo HE ad altitudinem EL.

THEOR.. XII. PROPOS. XII.

Æqualium Conorum, & Cylindrorum reciprocantur bases, & altitudines, & quorum Conorum, & cylindrorũ reciprocantur bases, & altitudines illi sunt æquales.

POnantur duo cylindri, quorum bases, & altitudines sint inæquales (Nam si sint æquales per se patet) nimirum BD, & EG, quorum bases AB, EF. Detruncetur ab altiori portio æqualis cylindro EG, quæ sit AC, & sic exordiemur argumentum.



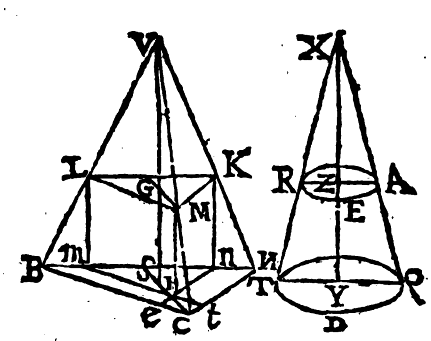
Probatur. Duo cylindri AC, & EG in ea proportione ad inuicem referuntur, qua bases: Cylindri verò AC, & AD inuicem referuntur, qua altitudines Ergo ita erit basis EF ad basim AB, vt altitudo AD ad altitudinem CB vel GI æqualem, quia proportiones sunt eædem cylindro AC æqualium cylindrorum DB, & GE ex hypothesi, & ideo ex 7.l.5. eædem inuicem. Conorum verò eadem est ratio, quia sunt tertia pars cylindrorum.

Probatur secunda pars. Nam quia ponitur eadem proportio basis EF ad basim AB, vt altitudo DA ad CB, vel æqualem FG, erit quoque cylindrus DB altior ad cylindrum CBA ob eandem basim AB, vt GE maioris basis ad cylindrum BCA eiusdẽ altitudinis ex 16.l.5. Quare ex 9 l.5. cũ duo cylindri DC, & GE eandem rationem habeant eidem CA, inuicem erunt æquales. Quod & asseritur de conis, qui sunt tertia pars cylindrorum, vt supra ostendimus prop.7.h. in quibus descripti sunt. Et propositio intelligitur etiam de scalenis cùm sint æquales rectis eiusdem basis, & altitudinis.

PROBL. XIII. PROPOS. XIII.

Frustum Coni æquatur Prismati, cuius basis habeat pro vno latere diametrum minorem, cum semidifferentia diametrorũ, & pro alio lineã æqualẽ minori peripheriæ, & semidifferentia eius à maiori, & insuper trienti prismatis, cuius basis ex prædictis semidifferentijs tamquam lateribus sit constituta.

SIt frustum coni QDTRA, & altitudo coni sit YX basis inferior QDT, & diameter eius QT superior RBA, & diameter RA. Fiatque pyramis NVB eiusdem altitudinis SV, cuius basis NCB habeat crus NC æquale diametro QT, & CB æquale crus peripheriæ. Dico frustum coni æquari prismati, cui basim substernant latera t m, & e n, quæ fiunt ex I m, n I basis minoris lateribus, & semidifferentiæ I, I t, & insuper trienti prismatis, cui basis I e, I t semidifferentis contenta, quæ prismata sint æqualis altitudinis, ac frustum coni.



Probatur. Nam fiat triangulum æquale circulo QT ex 3. Tract. 30. & sit NCB, cuius latus NC æquetur radio QT, & CB peripheriæ QDT, & super eam extollatur pyramis VNCB, quæ æquabit conum QXT ex Coroll. prop.3. par.2. huius. Deinde ad eleuationem eandem basis OI planum KML, quod substernet basim triangularem pyramidi KMLV; quam dico esse æqualem cono RAX, quia ex prop. 3. par. 1. Coroll. obtinet æqualem basim LKM basi RBA, vt ostendam, & eandem altitudinem ex effectione. Quod

Quod autem basis KML æquetur basi REA. Pr. vt QT diameter ad RA diametrum, ita est altitudo YX ad altitudinē ZX in triangulis per axē æquiangulis RAX QXT, sed vt YX ad altitudinem ZX, sic est SV altitudo ad GV altitudinē, quod sint æquales. Vt autem SV ad GV, sic est CV ad MV ob similitudi- triangulorum SVC, & MVG; vt autem CV ad VM, sic NC ad KM ob similitudinē triangulorū NVC KVM. Ergo ex 16. l. 5. vt QT ad RA, sic NC ad MK: sed QT, & NC sunt æquales: Ergo ex 12. lib. 5. RA, & KM erunt æquales. Rursus eodem arg. ex 41. l. 6. peripheria QDT est ad peripheriam REA, vt diameter QT ad diametrum RA; Iam verò ostensum est QT esse ad RA, vt NC ad KM, nempe vt CV ad MV, & in triangulis similibus CBV, & MLV, vt CB ad ML: Quare ex prop. 16. lib. 5. ob similitudinem rationum QDT peripheria erit ad AER peripheriā, vt CB crus ad ML, sed QDT peripheria, & CB crus ex effectione sunt æqualia. Ergo ex 12. lib. 5. AEK peripheria, & ML crus erunt æqualia. Proptereaque ex 3. Tract. 30. basis KML æquabitur circulo REA ob KM æquale diametro RA, & ML æquale crus peripheriæ REA. Igitur pyramis KMLV, & conus REAX æquabuntur ob bases, & altitudines æquales ex prop. 3. h Coroll.

Si ergo à cono QDTX, & pyramide NC BV ex effect. æqualibus auferatur hinc pyramis KMLV. inde conus AERX, quę æqualia ostensa sunt, restabit frustum coni RAQTD æquale frusto pyramidis NCBKML: sed frustum pyramidis KMK NCB æquat prisma, cuius basis duo latera sint constituta vnum ex diametro KM minori, & semidifferentia, vt idem latus; alterum ex crure ML peripheriam minorem æquante, & semidifferentia eorundem, & insuper trienti prismatis, cuius basis crura efficiant vnum semidifferentia diametrorum NC ab MK, & alterum semidifferentia CB ab ML, quę est peripheriarum ex Cor. prop. 35. p. 1. h. Ergo etiam illi æquale prismati erit frustum conicum QDTRA.

EXPENSIO II.

De soliditate Annulorum, & Rhomborum solidorum.

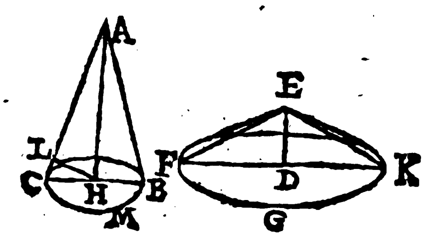
CVm quandoque annuli soliditas perquiri oporteat, hinc corpus annulare inter cętera corpora rotunda tetragonismo supponimus maximè; quia ad sphærę soliditatem perscrutandam apprimè deseruiat.

THEOR. I. PROPOS. IX.

Duo Coni Isosceles; cuius vnus habeat basim superficiei alterius æqualem; & altitudinē alterius lineæ ductæ orthogonaliter à centro basis ad latus coni primi, erunt inuicem soliditate æquales.

SIt conus ABC, in quo à centro basis sit ducta HL perpendicularis ad latus AC, & huic lineę sit ęqualis altitudo DE coni KEF: sicut superficies curua coni ABC basi circuli KGFK sit ęqualis. Dico *hos duos conos esse inuicem æquales*.

Quia superficies BAC æquatur basi KFG, & æqualia ad idem relata eandem habent proportionē fiet, vt sicut KFG basis est ad basim BMC; ita superficies BAC ad basim eandem suam BCM; vt verò superficies BAC ad basim BCM, ita vt ostendimus tr. 31. propos. 30. AC ad CH, & sicut AC ad CH, ita AH ad AL ob triangulorum similitudinem, quæ est æ-



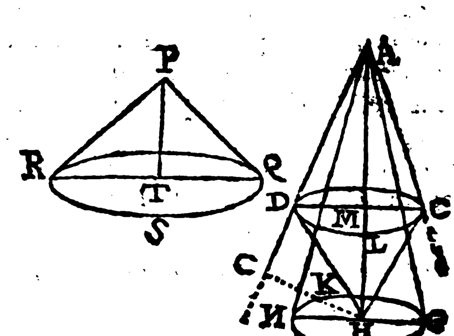
qualis DE, igitur sicut basis KGF ad basim BMC; ita Altitudo HA ad altitudinem HL, vel DE; Quare reciprocam bases altitudinibus habent proportionem; vnde ex prop. 12. Tr. h. coni CAB, FEK erunt æquales.

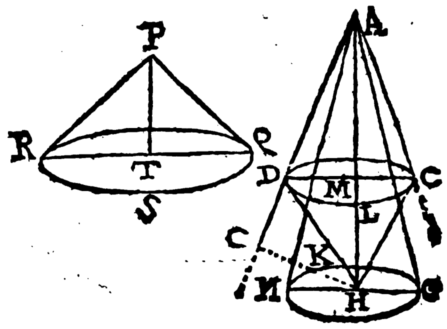
THEOR. II. PROPOS. XV.

Si ex duobus conis Isoscelibus Rhombus solidus componatur, æquatur cono illi, qui basim habet æqualem basi compositorum conorum, & altitudinem æqualem altitudini vtriusque.

SIt Rhombus ex duobus conis integratus ADHO; Sitque alter conus, cuius basis GKN basi OLD æquetur, & altitudo HA sit eadem. Dico *Rhombum, & conum esse æquales*.

Probatur. Sicut AH ad AM; sic Rhombus solidus OADH ad conum OAD, quia coni compositi eandem habent basim, quare sunt inuicem, vt altitudines, vt autem AH ad AM, ita quoque ob æqualitatem basium GKN, OLD est conus AGN ad conum OAD. Ergo cum eidem cono OAD eandem dicant proportionem inuicem sunt ęquales Rhombus OADH, & conus GNA. Quod intelligitur etiam si coni OAD, OHD inuicem non sint æquales.





THEOR. III. PROPOS. XVI.

Si sit Rhombus, vt superiùs, & sit conus alterius conorum Rhombi superficiei basem possidens æqualem, & altitudinem æqualem lineæ à vertice coni Rhombum componentium perpendiculariter in latus productum cadenti, conus iste prædicto Rhombo solido æquatur.

SIt Rhombus HOAD conicus, & à vertice H in latus AC productum, si oportet cadat perpẽdicularis HC, & fiat QPR conus altitudinem TP æqualem perpendiculari HC, & basim QSR æqualem superficiei OAD coni possidens. Dico *Rhombum* HCAD *hunc cono* QPR *esse æqualem*.

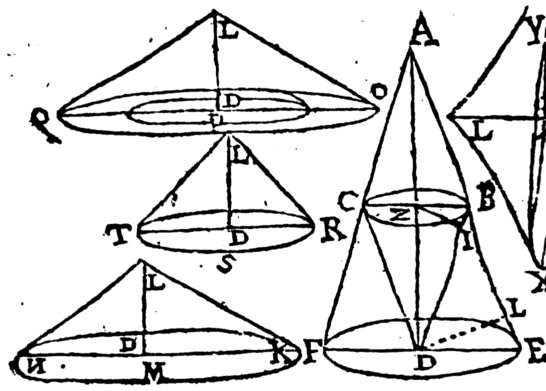
Probatur. Quia superficies coni OAD æquatur basi QSR, erit superficies OAD ad propriã basim CLD sic basis QSR ad basim CRM, OLD basi ęqualem. Sed vt superficies AOD ad propriam basim DLO; sic AD ad DM ex dictis prop. 30. Tract. 31. cum circulus æqualis superficiei conicę sit ex radio TQ media proportionali inter latus, & diametrum basis, & sicut AD ad DM; sic ob similitudinem triangulorum AH ad HC; ideoque etiam basis QSR ad basim GKN, sic AH ad HC, idest altitudo AH ad altitudinem PT; quæ æqualis lineę HC est effecta. Cum ergo habeant bases conus GAN, & QPR altitudinibus reciprocè proportionales ex prop. 12. Tract. h. erunt inuicem ęquales coni GAN, & QPR. Quare etiam Rhombus OADH, qui probatus est ant. prop. æqualis cono GAN cono RPQ ęquabitur.

THEOR. IV. PROPOS. XVII.

Si à Cono Rhombus inscriptus auferatur, residuo conus ille æqualis est, cuius altitudo perpendiculari à vertice opposita Rhombi ad latus deductæ, & cuius superficies residuæ conuexæ superficiei æquetur.

SIt conus FAE, cui inscriptus Rhombus ABCD, qui scilicet verticem in centrum D defigat, & linea LD à vertice D cadens perpendiculariter in latus EA feratur. Fiatque conus, cuius altitudo DL basis verò KMN; ęquetur superficiei, quę ambit residuum coni EBCF, vt ex propos. 32. Tract. 31, effici potest. Dico *hunc conum* KLN *esse æqualem illi residuo* EBDCF *sublato cono* BCD.

Fiant duo alij coni primus maior, cuius basis OPQ coni AEF toti superficiei conuexę æquetur, & DL sit altitudo, qui ex dictis ęquabitur cono EAF. Deinde alter constituatur, cuius basis RST ęquet



superficiem BAC coni conuexam, & altitudinem DL, iste quoque conus æquabitur Rhombo BACD: Basis verò OPQ æquatur basibus KMN, & SRT, quòd æquetur toti superficiei conuexæ EAF, cui quoque duę bases KMN, & RST æquantur ex constructione, cum quę tres isti coni LRT; KLN, & OLQ vtpote altitudine equali prediti se habeant ad inuicem, vt bases ex prop. 5. Tract. h. Sequitur quod OLQ conus basis OPQ, cùm ad ambas bases simul KMN, RST dicat proportionem ęqualitatis, quod etiam ad conos KNL, & RLT eadem relatione feratur, & eos ęquet, & ideo conus EAF duos conos æquabit KLN, & RLT. Vnde sublatis æqualibus cono RLT, & Rhombo BACD residua conus KLN, & EBDCF residuus annulus triangularis erũt ęqualia.

COROLLARIVM I.

*HInc ellicitur frustum coni EBCFD ęquale esse duobus conis primo, cuius basis sit ęqualis superficiei frusti conici, quam inuenies ex propos. 31. tract. 31. & altitudo LD, alterum cuius altitudo IZ, & superficies basis ipsius coni CDB superficiei ęqualis.

COROLLARIVM II.

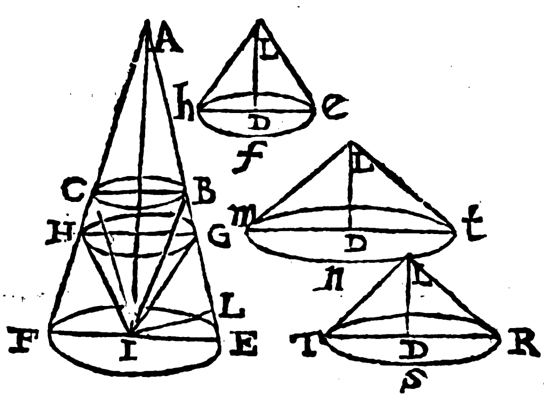
*HInc ellicies, quod si fiat conus OLQ æqualis toti cono EAF, & TLRV. g. cono BAC, postea fiat conus, cuius basis circulus æquet residuũ annulum sublata basi RST à basi OPQ, vt ex 18. tract. 30. potes efficere, & super hunc circulum erigatur conus YLX altitudinis DL iste æquabit frustum coni EBCF.

Probatur. Nam cum coni sint omnes eiusdem altitudinis, ita erit conus RLT ad conum OLQ, vt basis RST ad basim OPQ, sicque conus XLY ad conum OLQ, vt basis XY ad basim OPQ; Ergo ex propos. 25. lib. 5. prima quantitas LRT conus cum quinta, nempe cum cono XLY erit ad secundam OLQ, vt tertia basis RST cum sexta basi YX ad quartam OPQ basim: sed basis RST, & YX sunt æquales conicę basi OPQ. Ergo etiam conus YLX, & LRT sunt ęquales cono OLQ, sed LRT æquat conum BAC partem, & OLQ æquat totum conum EAF, ergo residuus conus YXL ęquabit frustum coni reliquum CBEF.

THEOR. V. PROPOS. XVIII.

Si à Rhombo Rhombus auferatur inſcriptus, reſiduo conus ille æqualis eſt, cuius altitudo æquetur perpendiculari à vertice oppoſita Rhomborum deductæ ad latus, & ſuperficies reſiduæ connexæ ſuperficiei.

SIt Rhombus AGIH, in eoque inſcriptus alter Rhombus BACI, & linea à vertice communi conorum I deducta, quæ ſit IL. Sitque eLh altitudinis IL, & baſim efh habeat ſuperficiei conuexæ, quę ambit GBCH, reſiduæ Rhomborum BACI & AGIH ablato cono BAC æqualem. Dico hunc conum eLh ęqualem eſſe ſoliditati reſiduæ Rhomborum ſi alter ABCI ab altero AGIH Rhombo auferatur. Fiat itaque conus, cuius baſis RLT ęque-



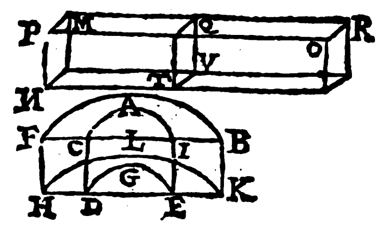
tur BAC coni ſuperficiei cōuexæ, & altitudo DL ſit IL iſte conus erit æqualis Rhombo BACI ex 16. propoſ. h. item ſit tLm, cuius baſis tnm æquet ſuperficiem conuexam coni GAH, & altitudo eadem DL, eritque ex pręhabitis propoſ. 16. conus iſte tLm ęqualis Rhombo GIAH. Et quia tota huius baſis æquat ſuperficiem totius coni GAH, & RLT ſuperficiem conuexam coni BAC; & efh. ſuperficiem reſiduā BGHC erit baſis tnm baſibus efh, & RST æqualis, & altitudines DL erunt æquales, cum ergo coni ęqualium altitudinum ex prop. 5. Tr. h. ſe habeant ad inuicem, vt baſes, erit conus tLm æqualis conis eLh, & RLn, & item ex dictis Rhombo GAIH; ſed conus RLT æqualis eſt Rhōbo BACI: Ablatis itaque iſtis æqualibus erunt reſidua æqualia eLh conus, & BGICH reſiduum Rhombi.

THEOR. VI. PROPOS. XIX.

Annulus ſolidus, cuius baſis quadrata, æqualis eſt parallelepipedo, cuius vnum latus ſit æquale annuli altitudini, & baſis æqualis annulo eiuſdem plano.

SIt Annulus ſolidus ABCDEI. Dico hunc eſſe æqualem parallelepipedo NR, cuius vnicæ ſuperficiei QO æquetur ſuperficies annuli HLKBGD, & altitudo NP altitudini LB.

Sit priſma NR quadrāgulę baſis, & æqualis baſi BAFL cylindri BFAHK, & portio parallelepipedi, ſeu priſmatis æqualis baſi QP cylindri interni CAIDE baſi DGE, & corū omnium ſit æqualis altitudo NP cylindrorum ipſorum ęqualis altitudini EI. Iſti cylindrus, & priſma erunt æqualia ex prop. 3. Cor. p. 2. h. quia habent baſes cylindrorum baſibus æquales, & ſunt æqualis quoque altitudinis, ſcilicet cylindrus BAHEK priſmati NR, & cylindrus internus IADE priſmati NQ. Ablato itaque EADI cylindro interno à cylindro maiori BAHEK

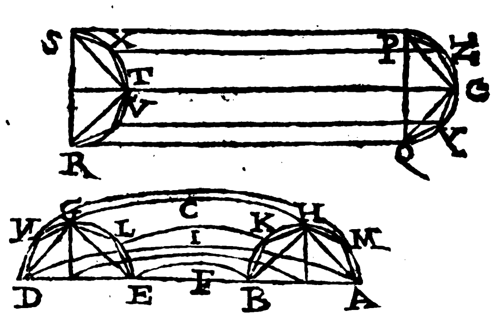


ſicut, & priſma NQ æquans cylindrum à priſmate NR reſidua nimirum priſma TR, & annulus ſolidus KIACH remanebunt æqualia, cuius baſis OQ plana æquabit annulum planum KLHDGE, vtpote, quod ſit quoque reſidua æqualis baſis RP circulo BAFL ablata plana baſi PQ æquante IACL baſim.

THEOR. VII. PROPOS. XX.

Annulus ſolidus rotundus æquatur Cylindro, cuius rectangulum per axem ſit æquale annulo plano, qui per diametrum tranſit, & circulus baſis æquetur annuli circulo.

SIt annulus ſolidus circularis quoad ſuperficiem ABCDGE, & cylindrus, cuius rectangulum per axem SRQP ſit ęqualis annulo plano ABFIED, & BGD circulus circulo baſis QOP. Dico hunc annulum eſſe æqualem cylindro SVRO.



Probatur. Nam inſcribatur primo in cylindro Priſma QOPRTS baſis quadratę, & ſimiliter in annulo priſma æquale, & eiuſdem baſis EGDHAB ex pręc. erunt æqualia. Inſcribantur rurſus conicæ ſuperficiei ſegmenta plāna SXTPZO, & RVTQYO, & GLEHBK, & DNGAMH in annulo ſolido omnia erūt æqualia inuicem ob æquales baſes DNG, & SXT, &c. & æqualis altitudinis, ac circulus GCH: ſiquidem ex prop 41. Coroll. Tract. 32. quantūm augeſcit extima quęlibet, vt GNCMH, tantūm decreſcit intima correſpondens ſuperficies, & ſumpta in æquali re motione à puncto G, vel H: quare ſupplentibus illis, quæ augeſcunt defectum ſuperficierum deficientium, omnes erunt ęqualis altitudinis ac longitudo, quam præbet circulus GCH. Quapropter ſi in cylindro QS figura ſolida tot laterum æqualium inſcribatur, cuius latera æquentur inſcriptarum annulo ſolido ſuperficierum rectis lateribus, vt QT ipſi LE, & alia alijs erunt omnes ſuper-

superficies solidæ figuræ cylindro inscriptæ eiusdem altitudinis, ac quę in annulo solido inscriptæ fuere. Siquidē cylindri altitudo ponitur ex Thesi ęqualis annuli circulo GCH, cuius altitudinē mutuò se supplendo inuicem ęquant superficies ānulo inscriptæ, ideoque planæ superficies annulo inscriptę erunt eiusdem altitudinis ac illæ, quæ in cylindro fuere inscriptæ. Sunt autem etiam bases æquales, vtpote triangulorum GND, & QYO æqualium ex thesi. Quadere omnia solida prismata annularia inscripta annulo solido erunt ęqualia prismatibus inscriptis in cylindro V. g. GNDCAMH prisma ānulare prismati recto RVTQYQ ex prop. 19 Tract. h. quia scilicet sunt eiusdem basis RY, & altitudinis RV.

Si ergo in annulo solido tot prismata annularia inscribantur, quot possunt inscribi, similiterque in cylindro tot quot possunt inscribi, omne spatium annuli prismata ipsi inscripta, & cylindri cylindro inscripta adęquabunt, sed facta qualibet multiplicatione semper perseuerant ęqualia: Ergo soliditas cylindri, & soliditas annuli, quas æquant, erunt æquales.

COROLLARIVM.

Hinc autem est superficies globosas tum annuli, tum cylindri esse æquales, quia omnia plana annulo inscriptibilia, quę figurā eius quantū potest multiplicata æquant, sunt omnia si simul sumantur supplentibus incrementis excrescentium defectibus deficientium æqualia omnibus planis figuræ cylindri æquali numero laterum similiter inscriptę, vt patet ex ostensione præc. propos.

PROBL. I. PROPOS. XXI.

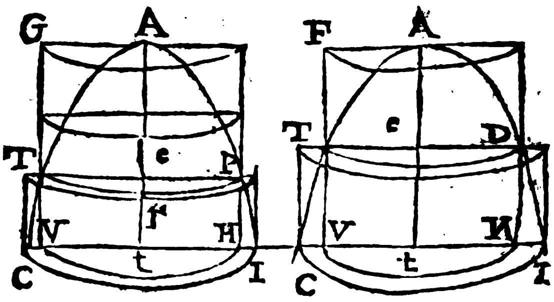
Annulos solidos cylindris æquales, vel proportionales reperire.

Describatur Parabolicum conoides IAC, & circa eum cylindri describantur æqualis altitudinis DF, & IT inscribatur quoq; eisdem ęquèaltus DV. Dico residuum ablato DV à TI cylindro esse annulum solidum æqualē solido cylindro DF.

Probatur. Quia annuli solidi residui ablatis cylindris inscriptis à circumscriptis omnes sunt remanentibus ad altitudinem axis residui euecti, & circumscriptis cylindris ęquales.

Quod sic ostendo in Parabola AIC est tA ad eA ex propos. 5. tract. 24. vt quadratum tI ad quadratum eD, sed tA est dupla te ex effectione. Ergo etiam quadratum tI duplum erit quadrati De; quare etiam circulus ex It semidiametro duplus erit circuli ex eD radio, & ideo etiam cylindrus IT duplus erit cylindri DF ex prop. 5. tract. h. sed etiam NF duplus est cylindri VD. Ergo cylindrus IT, & NF sunt æquales, ablato itaque cylindro VD communi annulus residuus solidus IT remanebit solido cylindro DF æqualis.

Eadem ratio, atque ostensio erit de cylindris quibuscumque inscriptis, & circumscriptis, alijs. Sic tA est ad eA ex prop. 5. Tract. 24 vt quadratum It ad quadratum Pe, & ita circulus tI radio, & cylindrus IT ad circulum ex Pe, & cylindrum PG, sed tA ad eA est, vt 3 ad 2. Ergo etiam cylindrus IT ad cylindrū PG, vt 3. ad 2. erit, sed huic HG



lindrus quoque est, vt 3. ad 2. quod sit, vt altitudo IA ad altitudinem eA. Quare cylindrus It, & HG erunt æquales ex 9. l. 5. ablato itaque communi cylindro PV remanebunt æquales cylindrus residuus PG, & annulus IGHPT. & sic de cæteris.

COROLLARIVM.

Hinc colligas omnes superficies orizontales horum annulorum ęquari cylindricis V. g. IHCV, vel PT. Ratio est, quia bases dicunt eandem proportionem ac cylindri. Vnde si cylindri crescunt per augmenta æqualia etiam bases annulares eodem modo crescent.

EXPENSIO III.

De quorumcumque corporum soliditate, quorum sectiones basi parallelæ sint similes, aut æquales.

Cum aliquando corpora reperiantur, quæ irregularis quidem figuræ sunt, sed tamen cubationem non respuunt; hinc de illis agere oportet; quorum multa attulit Ambrosius à Sancto Vincentio agens de Ductibus; sed nos ab ipso non nisi vnicum exemplum excerpemus.

THEOR. I. PROPOS. XXII.

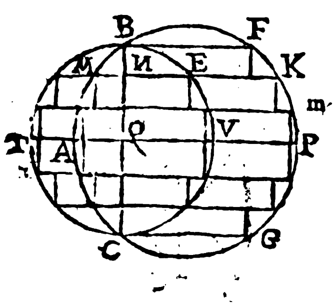
Si dentur tria plana communem habentia altitudinem; in quibus ductæ æquidistantes parallelæ sint continuè proportionales, & ex illis planis corpora formentur, ea corpora erunt æqualia.

Detur portio circuli BGFC, & BAC ex quibus superficiebus rectangulè in linea CB vnitis intelligatur corpus erectum, quod ex duabus partibus superficie globosa eorūdem arcuū FPG curuata, vel BAC comprehendetur ex alia parte verò superficiebus planis BFGC, cuius vnicum latus curua terminatur FPG alterum verò plano BAC. Dico hoc corpus esse æquale corpori, quod ex duobus semicirculis BVC quadratè vnitis exoritur.

Inscribantur singulis planis ęqualis altitudinis rectangula, vt TQ, & VQ, & QA, & cętera singulæ lineę in plano BDC ductæ singulis in plano BAC existentibus eędem sint, & ex illis componantur rectangula eas rectangulè vniendo, illa erunt æqualia quadratis ex lineis in BEC constitutis. Siquidem ex prop. 35. lib. 3. Rectangulum ex PQ, &

QA

QA æquale est quadrato QB, sed QB æquatur VQ, ideoque quadratum VQ æquabitur rectangulo ex PQ, & QA. Sic ex eadem prop. 35. lib. 3. rectangulũ ex KN, & NM æquatur rectangulo ex BN, & NC, quod æquatur quadrato NE ex eadem propos. vnde rectangulum KN, & MN æquale erit quadrato NE, sic dicas de alijs. Si ergo ex istis basibus parallelepipeda intelligãtur erecta æqualis altitudinis omnia erunt æqualia illis ex prop. 19. Tract. 23. quæ quadratis basibus æqualis altitudinis eriguntur V.g. parallelepipedum PQ super rectangulum ex PQ, & QA erectum erit æquale parallelepipedo ex VQ quadrato erecto in altitudinem eandem P m, & sic dicas de alijs.



Si ergo hęc duo corpora alterũ ex BFGC superficiebus, & BAC; alterum ex semicirculo BVC dicantur inęqualia. Dicatur V. g. corpus ex BPC constitutum maius quantitate e. Et inscribantur tot parallelepipeda in vtroque modo prędicto, vt ex prop. 17. Tract. 23. fieri posse ostendimus donec solida in vtroque inscripta relinquant minorem quantitatem, quam e, tunc rectangula solida in corpore ex semicirculis BVC, quod dicitur maius constitutum, essent adhuc æqualia illis, quæ in corpore minori ex planis BFGC, & BAC constituto inscripta sunt, hęc itaque essent maiora corpore, in quo inscripta sunt. Siquidem superaret differentiam e, quę inter corpus, & corpus inuenitur, quod omninò absurdum est.

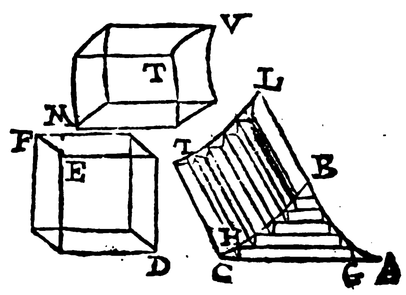
COROLLARIVM.

Erit autem eadem ostensio etiam si BVC non sit semicirculus, sed portio circuli. Quamobrem generaliter quando dantur tria, aut quatuor plana, in quibus ductę singulę, aut sint tres continuę proportionales, aut quatuor proportionales, ex quibus nimirum medijs fiant rectangula ęqualia extremis, illa plana rectangulè composita, & secundùm alia latera superficiebus rectangulè se coniungentibus, seu curuis, seu rectis circumuestita prout latera curua sunt, sed recta constituent corpora ęqualia illis, quę superficiebus operiuntur, quorum parallelæ æquè diuisę inscriptę ęquè possunt, sic propos. 70. Tract. 24. semetipsis FHG cum altera eiusdem portione rectangulè vnita, & superficiebus sibi inuicem incidentibus vestita constituent corpus ęquale triangulo semiparallelogrammi FG si secundum diametrum FG rectangulè vniatur, & similiter rectangulis sibi inuicem superficiebus terminentur; idem asseres de prop. 69. eiusdem Tract. & sic de cęteris.

THEOR. II. PROP. XXIII.

Duo corpora quascumque habentes bases in eandem altitudinem subuecta parallelo ductu basis, inuicem erunt, vt ipsæ bases.

AD perfectam corporum cubationem prǽter conos, & cylindros videtur etiam necessarium noscere omnia ea corpora, quę cylindri naturam sapiunt, & sunt ea, quę parallelis lateribus inuicem à quacumque basi, seu elliptica, seu cuiuscumque incertę figurę in altum eleuentur, siue obliquè, siue rectè, dummodò in alteram, ęqualem, & similem basim terminent: ea verò cylindracea dicemus.



Sint duo corpora ABCL, & DEF, quorum bases sint BAC, & DE altera quidem quęcumque BAC V.g. curuis AB, & BC, altera verò quadrata DE. Dico, quod sicut BAC est ad DE: ita corpus BACL super primam basim ad corpus DEF si sit æquealta.

Inscribantur tot rectangula in basi ABC ex propos. 1. Tr. 30. donec minus euadat spatium, quòd inter curuas AB, & BC intercipitur, & rectangula inscripta, omni data possibili quantitate, & super illa parallelogramma, vt GH erigantur parallelepipeda GHI, æquè eleuata, ac solidum DEF ob eandem altitudinem datorum solidorum ABCL, & DEF, quę omne quoque spatiũ possibile inter CBIL curuam superficiem, & superficies solidorum inscriptorum occupabunt; Quare parallelepipeda inscripta ipsa tandem ABCL soliditatem adęquabunt: Nam si non ęquarent, nouę inscriptioni parallelepipedorum, & ideo suarum basium daretur locus in basi ABC, & sic contra Thesim omni possibili quantitate minus spatium non remansisset. Verùm parallelepipeda singula inscripta, vt GHI sunt ad solidum eiusdem altitudinis DEF, vt bases V.g. GHI ad DF, vt basis GH ad basim DE, & sic de alijs.

Quare ex propos. 17. lib. 5. omnia quoque solida inscripta in ABCL erunt ad solidum DEF, vt bases omnes parallelogrammę GH, & cęt. inscriptę in ABC basi ad basim DE: sed illę ęquant ABC basim solidi ABCL, sicut & parllelepipeda inscripta solidum ABCL, vt dixi, ergo solidum ABCL erit ad solidum DEF ex 7. prop. lib. 5. vt basis ABC ad basim DE.

Sit deinde aliud corpus MVT ęquęaltum, vt ABCL. Dico iterum; quod corpus ABCL erit ad MTV corpus, vt basis ABC ad basim MT. Quoniã ABCL corpus est ad DEF corpus est, vt ABC basis ad DE basim, & ob eandem rationem *conuertendoque* DEF corpus MTV corpus, vt DE ad MT erit ex *æquo* ABCL corpus ad MV corpus; vt ABC basis ad MT basim.

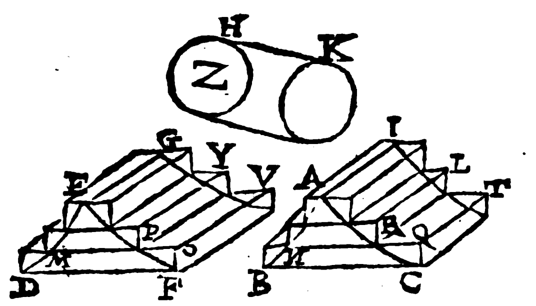
COROLLARIVM.

Hinc patet, quod si hęc solida ęquales habuerint bases, & altitudines ęqualia sint, quia cum referantur, vt bases, & bases referantur proportione æqualitatis, sequitur, vt etiam ipsa corpora eadem ęqualitatis ratione inuicem respondeant.

THEOR. III. PROPOS. XXIV.

**Si corpora cylindracea æqualium similium, & similiter positarum basium sint diuersæ altitudinis inuicem correspondebunt, proportione, vt altitudines.*

*Sint corpora cylindracea ABCI, EDFG, quæ obtineant bases omninò æquales quoad latera aream, & positionem. Dico ea esse inuicem, vt altitudines.



Probatur. Nam cum bases ponantur omninò similes, si diuidantur parallelis in partes æquales erunt omnia rectangula circumscripta basibus æqualia V. g. BQ rectangulo DO, & alia singula in BAC singulis in DEF. Quare, & parallelepipeda super eas bases erecta solida ipsa circumscribentia erunt ad inuicē, vt altitudines V.g. BCT solidū erit ad DFV solidū, vt altitudo QT ad altitudinē OV. Sic rectangulū solidum NRL ad solidū MPY ob æquales bases NR, & MP est, vt altitudo RL ad altitudinē PY idest vt solidum BT ad DV solidum, & ita dicas de omnibus alijs. Quare ex prop.17. lib.5. ita erunt omnia solida BCT, & NRL, & cęt. parallelepipeda in corpore solido BCAI circumscripta ad omnia solida parallelepipeda DFV, MPY, & cęt. in corpore DFEG circumscripta, vt altitudo QT ad OV. Ergo & ipsa corpora talia erunt, cùm omnis possibilis circumscriptio tandem ipsa solida exęquet, vt toties diximus.

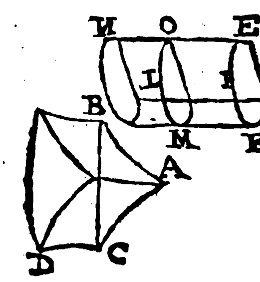
COROLLARIVM.

*Hinc autem colligitur, quod etiam si bases non sint similes, idem tamen sequi. Nam detur solidum KZ, cuius basis Z non sit similis basi CAB; sed tamen ęqualis, & ideo basi FED, sitq; eleuatum super illam cylindraceum, quoddam corpus ad eandem eleuationem cylindracei DFG ex pręc. Coroll. erunt ęqualia cylindraceum DEFG, & super Z, sed CABI cylindraceū refertur ad FDEC, vt altitudo AI ad altitudinem EG. Ergo etiam ad corpus in Z locatum æquale ipsi FDEG referetur, vt AI ad EG, idest vt AI ad æqualem KH altitudinem corporis Z.

THEOR. IV. PROP. XXV.

Cylindracea Corpora, quorum reciprocantur bases, & altitudines sunt æqualia, & æqualium cylindraceorum reciprocantur bases, & altitudines.

*Sit corpus cylindraceum ABCD, & aliud EFIO. Sitque basis ABC ad basim FEI, vt altitudo EO ad altitudinem CD. Dico hęc corpora esse ęqualia. Quod ostenditur eodem modo, ac prop. 12. Tract. h. fiant enim OLMN eiusdem altitudinis



ON, ac CD, eritque ex pręced. IFO solidum cylindraceum ad NOLM corpus eiusdem basis, vt altitudo EO ad altitudinem ON, sed vt EO ad ON ex hypothesi, ita est basis ABC ad basim EIF vel OLM, vt autem ABC ad basim OLM, ita est ex prop. præced. solidum ABCD ad solidum OLMN. Ergo eidem solido OLMN solidum EIFO, & ABCD eandem dicunt proportionem altitudinis EO ad ON altitudinem. Quare ex 7. lib.5. erunt hęc solida cylindracea inuicem æqualia. Secunda quoque pars eodem modo probatur ac prop.12.h.

COROLLARIVM.

Hinc enascitur omnes cylindros Ellipticos nimirum quorum basis Ellipsis est esse ęquales si obtineant, vel bases, & altitudines æquales, vel bases altitudinibus reciprocè proportionales: Item esse ad inuicem in ea proportione quā bases si fuerint tantum æquales altitudine, quod si fuerint æquales basibus tantùm se inuicem referre, vt altitudines. Quibus potest addi quod si fuerint similes habeant triplicatam suorum diametrorum, seu axium proportionem. Quia omnes portiones axis ad applicatas ad diametrum eandem proportionem dicunt ex def. ellipsium similium prop.51. Tract.24. ideoque omnia prismata, seu parallelepipeda in eis inscripta similia. Vnde, &c.

EXPENSIO IV.

De Conis Ellipticis, atque conis in lineam rectam terminantibus.

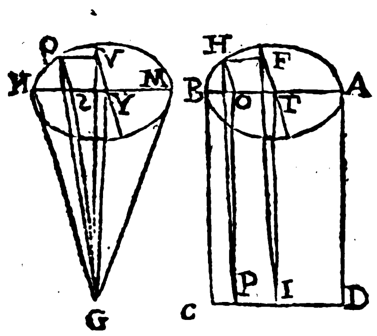
Sunt coni diuersæ rationis ob diuersam basim, quod sit elliptica, vel hyperbolica, de quibus soliditas pretereunda non est; vnde fit.

THEOR.

THEOR. I. PROPOS. XXVI.

* *Conus in rectam lineam terminans est ad conum in punctum terminantem eiusdem basis, & altitudinis, vt 3. ad 2.*

* SIt conus ABCD, quem descripsimus pr.8. tr.25. in lineam rectam terminans. Dico, quod ad conum MNG eiusdem basis, & altitudinis se habet, vt 3. ad 2.



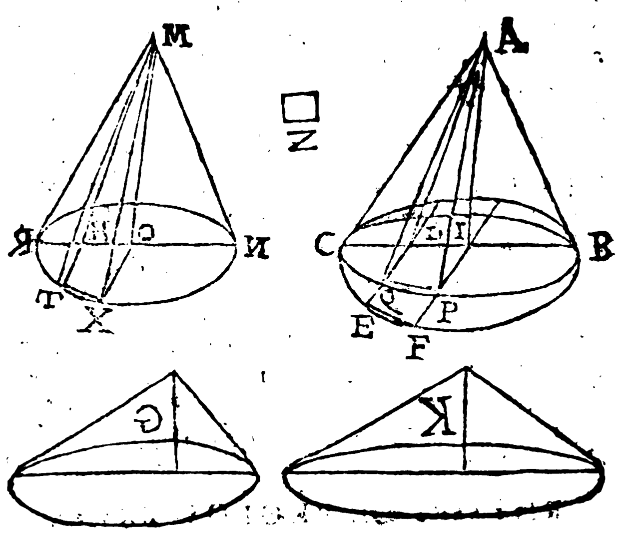
Probatur. Inscribantur enim in cono in lineam terminante prismata hoc modo. Ducatur per subtensam FH, & OT parallelas planum FP, Pr. Rursusq; per FT, HO parallelas plana FTI, OHP, eritq; prisma basis quadratæ FHTOIP, fiat verò in basi æquali, & simili ex Thesi coni MNG eadem operatio constituendo super æqualem basim, & similem QVSY pyramidem, quæ erit æqualis altitudinis. Cum itaque prisma, & pyramis sint æqualis altitudinis, & basis erunt ad inuicem, vt prisma ad pyramidem. At vero prisma basis quadratæ se habet ad pyramidem eiusdem basis, vt 3. ad 2. Si ergo in cono in rectam terminante inscribantur talia prismata, quo vsque describi possint, & in cono item acuto æqualis numerus pyramidum super æqualem similemq; basem, omne spatium tum huius, tum illius coni absorbebitur, & occupabitur, quare cum semper omnis inscriptibilis multitudo prismatum in cono in rectam terminante, & in cono in punctum finiente se habeant, vt 3. ad 2. nimirum, vt prisma quadratæ basis ad pyramidem, erit ipse conus in rectam terminans ad conum in punctum finientem, vt 3. ad 2.

Quod verò prisma quadratæ basis sit ad pyramidē eiusdem basis, & altitudinis, vt numerus 3. ad numerum 2. patet. Nam prisma, quod semper obtinet quadratam basim est triplum pyramidis triangularem basim habentis ex pr.22.p.1.h. at vero pyramidis quadratæ basis ex prop. 5. par.1.h. est dupla pyramidis triangularis basis. vnde prisma ad talem quadratæ basis pyramidem se habebit, vt 3. ad 2.

THEOR. II. PROPOS. XXVII.

Conus Ellipticæ basis, & eiusdem normalis altitudinis, seu rectus, seu obliquus est æqualis cono eiusdem normalis eleuationis basis circularis; quæ tamen sit æqualis Ellipsi cono Elliptico basim subternenti.

*PRobatur: Nam si assumantur in basi coni circularis partes æquales peripheriæ circuli NTR; subtendanturq; rectæ. vt XT, & ab ijsdē punctis perpendiculares ad diametrum ducatur XO, & TH, & cæt. Deinde axi elliptico CB basis coni elliptici BAC circūscribatur circulus BFC, cui diuiso in æquales numero partes, vt circulus NTR eodē modo rectæ subtrahantur EF, & segmentis peripheriæ ab ijsdemque punctis in axem BC normales ferantur, vt ED, & FI, & ducatur subtensa ambitui elliptico PQ. & fiat prorsùs eadem operatio, quam



exhibuimus prop.24. tract.30. erunt spatia elliptica PIQD æqualia spatijs circularibus XTOH, vt ibi ostenditur. Si ergo super hæc spatia Pyramides eleuentur, cum in eandem eleuationem extollantur, erunt æquales; quamobrem, & ipsi coni erunt æquales. Si enim coni essent inæquales sequeretur illud idem absurdum, quod in pyramidibus assignauimus pr.21.p.1.h. nempe si circularis V. g. esset minor quantitate z; quòd ab eo tot pyramides inscriptæ auferri possent, donec remaneret aliquid minus quantitate z proximè, & tunc facta æquali numero ablatione Pyramidum inscriptarum continuè æqualium quantitate pyramidibus à cono circulari minori ablatis, remaneret aliquid maius in cono elliptico BAC, vtpote maiori; quam residuum coni circularis NMR. Si ergo auferatur adhuc ab hoc cono elliptico BAC aliquid æquale, vel maius proximè differentiæ z, cùm & à cono circulari MNR idem numerus pyramidum æqualium deduci posset, auferretur aliquid maius differentia z à residuo coni NMR minore, quam differentia z, quod esset absurdum.

CO-

COROLLARIVM I.

*HInc primo enascitur conos ellipticos, si sint ęqualium basium, & ęqualis altitudinis esse inuicem ęquales; quia tertiò circularis basis ęquabuntur.

COROLLARIVM II.

*QVod si habeant bases altitudinibus reciprocè proportionales, quod sint ęquales. Nam sit coni altitudo IA ad altidudinem coni K, vt basis coni K ad basim coni BAC, sitque coni K ellipcici ęqualis basis coni G, & ęqualis altitudo, & ideo conus circularis G, cono K elliptico æquetur; sicut conus NMR circularis, ęqualis basi, & altitudine æquatur cono BAC: Erunt ergo isti coni circulares G, & NMR ex prop. 12. h. ęquales, quod & reciprocentur bases, & altitudines, quod sint ęquales basis coni G ipsi basi coni K, & altitudo altitudini sicut, & ęqualis basis coni NMR basi coni BAC, & altitudo altitudini.

Quare sicut illę reciprocantur, sic & istę, eritq; basis coni NMR ad basim coni G, & altitudo coni G ad altitudinem coni MNR: Ideo coni NMR & G. ęquabuntur ex h. Proptereaque BAC ęqualis cono NMR, & K conus cono G ęqualis, inuicem ęquales erunt.

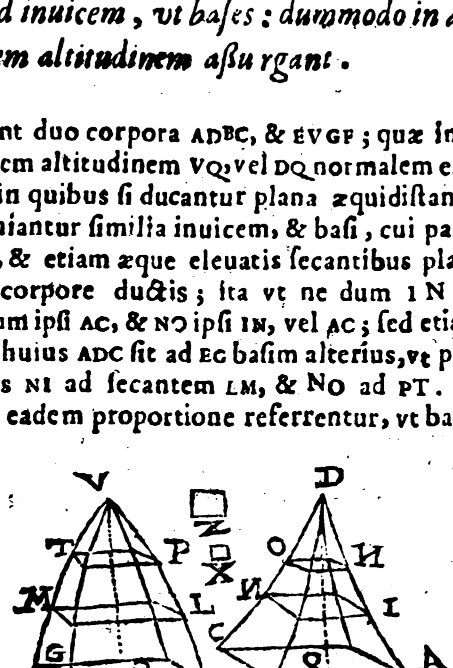
COROLLARIVM III.

*DEducitur quoque conos Ellipticos æqualis basis, & diuersę altitudinis esse ad inuicem, vt altitudines; quia conus circularis NMR ęqualis altitudine, & basi, & soliditate cono BAC, V.g. est ad conum G, vt altitudo ad altitudinem, qui conus cono K soliditate basi, & altitudine sit ęqualis quare elliptici CAB, & K ad inuicem referentur, vt altitudines, & idem dicendum de basibus inęqualibus, si altitudines fuerint ęquales.

THEOR. III. PROPOS. XXVIII.

Duo corpora coniformia, quorum omnia plana basi ipsorũ parallela similia sint, & inuicem plana huius planis alterius, erunt ad inuicem, vt bases: dummodo in æqualem altitudinem assurgant.

SInt duo corpora ADBC, & EVGF; quæ in eandem altitudinem VQ vel DQ normalem eleuentur, in quibus si ducantur plana æquidistantia, ea inueniantur similia inuicem, & basi, cui parallela sunt, & etiam æque eleuatis secantibus planis in alio corpore ductis; ita vt ne dum IN V. g. planum ipsi AC, & NO ipsi IN, vel AC; sed etiam AC basis huius ADC sit ad EG basim alterius, vt planum secans NI ad secantem LM, & NO ad PT. Dico, quod eadem proportione referrentur, vt bases.



Probatur. Nam si intelligantur circumscripta cylindracea corpora æqualta: tum inuicem, tum & cylindraceis corporibus alterius, erunt hæc ad inuicem, vt bases ex prop. 23 huius. Si ergo hæc corpora CABD, & EFGV asserantur non ad inuicem referri, vt bases, sit minor proportio ABCD corporis ad EVGF corpus, quam ABC basis ad EFG basim, sit ea minor quantitate Z. Itaque tot cylindracea corpora circumscribantur donec differẽtia, quæ inter ABDC corpus, & ipsa sit minor differentia, quàm Z, & tunc omnia ista cylindracea corpora corpori ADCB circumscripta dicent minorem proportionem ad EVGF, quam basis ABC ad basim EFG, quò contra ostensa est. Siquidem cum singula referãtur in ABCD ad singula in EVGF, vt bases singulæ singulis. Singulæ verò bases obtineant ex thesi eam proportionem, quã AC ad EG; etiam omnia parallelepipeda referentur, vt AC basis ad EG basim, & tamen minorem dicerent: cum enim coniforme corpus ABCD esset ad EVGF in minori proportione quantitate Z, & circumscripta corpora cylindracea nõ addant quantitatem Z corpori ADCB, sed solùm quantitatem minorẽ, vtique dicent ad EVGF minorem proportionem basis ABC ad basim EFG.

Quòd & dicas, si ABCD corpus asseratur maiori in proportione, nam tunc EVGF minus erit, quàm EFG ad ABC basim, vnde eodem argumento vti poteris; cùm itaque ABCD ad EVFG non possit obtinere, neque maiorem, neque minorem proportionem basis ABC ad basim FGE consequetur eandem.

COROLLARIVM I.

*HInc enascitur; quòd, si hæc corpora fuerint æqualium basium, quòd se referent, vt altitudines: quia plana quoque huius ad plana secantia alterius in easdem numero partes erunt æqualia: Quare, & cylindracea corpora huic circumscripta ad cylindracea alteri circumscripta, erunt, vt altitudines huius ad altitudines alterius, & cæt. vt eodem argumento persuadere tibi poterit.

COROLLARIVM II.

HInc rursus est, quod sint æqualia, si sint ęquales, tum altitudines, tum bases.

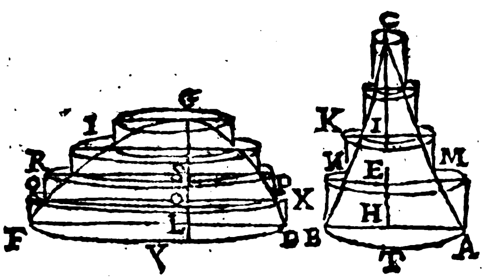
THEOR. V. PROPOS. XXIX.

Solida corpora, quorum omnes bases basi parallelæ similes sint, & altitudines obtineant basibus reciprocè proportionales æqualia sunt.

*SIt ABC corpus quoddam; cuius altitudo normalis HC se habeat ad altitudinem alterius corporis GL; vt basis DYF ad basim ATB reciprocè. Omnes verò sectiones, quæ parallelæ basi fiunt, sint similes ipsi basi. Dico hæc corpora esse ęqualia.

Probatur. Nam circumscribantur vtrinque solida cylindracea eodem numero multiplicata. Diuidantque altitudines in partes proportionales ex 18. lib. 5. & in singulis corporibus V. g. in ACBT inuicem æquealta, sicut, & in GDFY, vnde erit altitudo EH ad altitudinem LO, vt HC ad GL, idest ex Thesi, vt basis DYF ad basim ATB. Vnde ex prec.

pr.25.cum hæc cylindracea ATBN,& DYFQ habeant altitudines basibus reciprocè proportionales erũt



æqualia. Idem afferendum de cylindraceo MENK, & POQR, nam altitudo IL, idest æqualis EH ad OS, aut æqualem OL, vt basis POQ ad basim NEM reciprocè, erit quoque solidum MENK solido POQR æquale, & idem afferas de omnibus alijs circumscriptibilibus. Quapropter cum omnia cylindracea solido ACBT circumscriptibilia sint æqualia solidis cylindraceis solido DGFY circumscriptibilibus, si hæ multiplicentur quantùm multiplicari possunt, occupabũt ex pr.14 Tr.33. omnẽ quantitatem possibilem, quæ inter solida exhibita, & cylindracea circumscripta intercipi queat. Vnde nulla quantitate possibili illa excedẽt, quare etiam ipsa corpora, quorũ omnia plana basi parallela sint similia, & habeant altitudines basibus reciprocè proportionales inuicem erunt æqualia.

EXPENSIO V.

De Conoidibus Hyperbolicis.

Conoides Hyperbolicum efficitur ab hyperbola circa suum axem versata. Quare si secetur à plano rectangulo ad axem illa sectio erit circulus.

At si à plano ad axem obliquo, sectio erit ellipsis, vt supra ostendimus Tract.25. Expens.5.

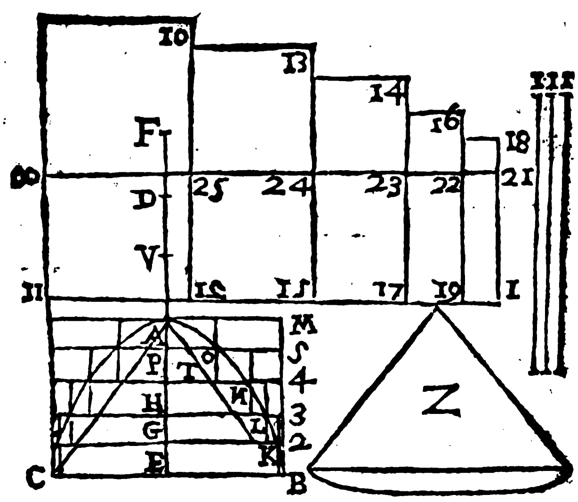
THEOR. I. PROPOS. XXX.

Conus inscriptus ad quodlibet Hyperbolicum Conoidem eam proportionem habet, quam diameter cum transuersa diametro tota, ad diametrum, & diametrum transuersam cum dimidio eiusdem.

Sit quodlibet Conoides, seu rectangulè, seu obliquè sectum ABC. Dico conum inscriptum item ABC habere eam proportionem ad conoidem, quam diameter EA cum diametro transuersa AD, tota inquam ED ex illis compacta habet ad duas, nimirum diametrum EA, cum diametro transuersa AD, & huius dimidio FD, idest EF.

Progress. 1. Sit itaque conus Z; cui conus BAC habeat eam proportionem, qua ED respicit FE. Dico huic cono conoidem hyperbolicum esse æquale; quod si tale non est, erit aut maius conoides, aut minus, sed neutrum esse potest; Ergo erit æquale.

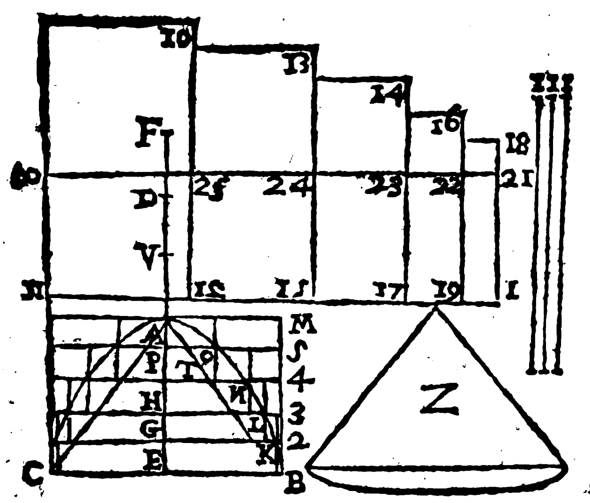
Progr. 2 Nam maius sit, si id esse potest, & inscribatur in conoide figura inscripta, & circumscripta, ex multis cylindris constans eiusdem altitudinis. Quales inscripti sunt EK, LG, & quales circumscripti BG, KH, adeoque multiplicentur ex propos.14.tract.33. vt figura circumscripta super inscriptam minus addat, quam conoides super conum Z. Fiatque CM cylindrus ex frustis cylindrum E 2, G 3. & cæt. constans æqualis, tum altitudinis, vt priores. & æqualis basis. Quia ergo circũscripti cylindri minus excedunt inscriptos, quàm conoides conum Z. & hæc circumscripta cylindrorum multitudo est maior, quam conoides erunt etiam inscripti cylindri maiores cono Z.



Progr. 3. Et quia vt diximus supra propos. 7. tract. h. Cylindrus MC ad conum ABC inscriptum habet proportionem, triplam habebit eam, quam tripla DE, vt sũt lineę III ad DE, & vt FE ad TV, quia TA est tertia pars diametri AE, & AV tertia pars totius AF. Quia itaque cylindrus CM est ad conum inscriptum BAC. vt III ad DE, at conus inscriptus BAC ad conum Z habet eam proportionem, quam ED ad FE *ex æquo* cylindrus CM ad conum Z erit, vt III ad FE. Verum illæ III lineæ habent eam proportionem ad DE, quam EF ad VT, vt dixi. Ergo *permutando* DE ad VT eam habebit proportionem, quam III lineæ ad EF, idest quam cylindrus MC ad conum Z, idest DA ad VA, idest 2. ad 1. & EA ad AT, idest 3. ad 1. quoniam DA, & EA componunt ED: at AV, & AT componunt VT.

Progr. 4. Cylindrus itaque primus E 2 pars magni cylindri, cuius altitudo MB ad primum inscriptorum EK eiusdem altitudinis GE habet proportionem, quam bases circuli, & circuli, quam quadrata eorum, & quadrata, quam quarta pars quæ tandem pro latere habent applicatas BE, & GK, itaque cylindrus E 2 ad cylindrum EK habet eam proportionem, quam applicatæ quadratum BE, quę etiam radius est ad quadratum applicatæ KG ijsdem muneribus fungentis; Quadratum verò BE ad quadratum GK habet eam proportionem, quam rectangulum ex DE, EA quale est 10.11. ad rectangulum DG, GA quale est 12.13. ex 6. Tract.24. Propterea que cylindrus E 2. ad EK cylindrum erit, vt rectangulum 11.10. ex DE, & EA ad rectangulum 12.13. ex GD, & GA lateribus. Eodem argumento vteris ad ostendendum cylindrum G3. vel quod idẽ E 2. ad cylindrũ GL habere proportionẽ, quam rectangulũ ex DE EA, sc.1011. ad rectãgulũ ex HD, HA, quod est 14.15. & sic de alijs; Quare omnes V.g. ex 19.Tr.17. quatuor cylindri æquales E 2. G 3. H 4. P5. ad ões V g. cylindros inscriptos EK, GL, HL, PO habebũt eã proportionẽ, quã quatuor rectangula æqualia 11.10. ad quatuor 12 13.15 14.16 17.18 19. Dixi autẽ quatuor V.g. tot. n. erunt quot cylindri inscripti, & tot inscribantur, quot oportet.

Progr. 5. Ducta itaque 21. 8. interuallo 25 12 quantum est AB habebimus seriem quadratorum decrescentium 8. 10. & 25. 13. & cęt. vsque ad 21 18. & rectangulorum item decrescentium 11.25 vsque ad 21 19. quæ decrescunt: rectangula quidem vnico decremento arithmetico quoad latitudinem, at quadrata duplici decremento arithmetico secundùm vtrumque latus longitudinem, latitudinem; Quare ex 12. tract. 27. erunt integra rectangula V. g. quatuor ad deficientia eiusdem numeri, & altitudinis dupla, vt etiam potes videre. Nam deficientia 12 24. 15 23. 17 22. 19 21. includunt decem partes rectanguli quale est 19. 21. At quatuor æqualia primo 11 25 maiori, viginti partes includūt. Vnde si vtrisque addatur rectangulum 11 25 erit proportio quinque ęqualium ad quinque decrescentes minus, quam dupla.



Sic omnia quadrata V. g. quatuor æqualia comparata 4. quadratis decrescentibus sunt magis, quam tripla, vt ex prop. 14. Tract. 27. vt & etiam ex calculo colligere licet, nam quatuor quadrata æqualia ad decrescentes se habent, vt 100. ad 30. At si vtrinque addas idem quadratum sunt minus, quam tripla cum se habeant, vt 125. ad 55.

Vnde simul quadrata æqualia cum rectangulis æqualibus ad quadrata decrescentia cum rectangulis decrescentibus habebunt proportionem 2. ad 1. & magis, quam 3. ad 1. quæ proportiones aggregatę ex 32. Tract. 27. sunt, vt 12. ad 5. & ideo habebunt proportionem magis, quam 12. ad 5. Vel plusquam diametri DE ad partem eius VT, quæ ex progr. 3. est, vt 2. ad 1. scilicet DA ad AV, & 3. ad 1. idest AE ad AT, si tamen ab vtrisque quadratis, rectangulisque æqualibus, & quadratis, rectangulisque inæqualibus decrescentibus excludas maximum. At si includas iam quadrata, rectangulaq; integra, & maxima erunt respectu quadratorum decrescentium, minùs quam 2. ad 1. & quam 3. ad 1. scilicet minus, quam 12. ad 5. vel DE ad VT.

Progr. 6. Propter hoc cylindri quoque æquales, si compares V. g. quatuor ęquos quatuor decrescentibus exclusis maximis V. g. B 2. G 3. H 4. T 5. ipsis EK GL HN TO qualis comparatio est inscriptorum erit eorum æqualium proportio ad decrescentes inscriptos plùs, quam 12. ad 5. quam DE ad VT. At si compares multitudinem cylindrorum, æqualem æqualium numero cylindris decrescentibus, sed inclusis maximis V. g. 5. qui faciunt cylindrum CM ad quinque B² KH LT Np OA veluti comparantur æquales cum circumscriptis, eorum proportio est minus, quam 12. ad 5. idest minus, quam DE ad VT. Eò quia, referuntur, ita cylindri MC ad cylindros inscriptos conoidi, & circumscriptos decrescentes, vt rectangula æqualia rectangulo 10. 11. respiciunt rectangula decrescentia, dummodo æqualia numero sumantur, vt progr. 4. ostensum est.

Prog. 7. Cum ergo cylindri B 2. & cæt. idest totus MC ad figuram cylindrorum inscriptorum maiorem habeant proportionem, quam DE ad VT habebit quoque maiorem proportionem [illegible] inscriptorum cylindrorum figuram, quàm [illegible] coni Z: Siquidem progr. 3. ad conum Z ostensus est cylindrus MC habere proportionem, quam DE ad VT. idest quam 12. ad 5, si enim quatuor cylindri B 2. G 3. & cæt. quatuor decrescentibus comparati minoribus illis KE, CL, HN, & cæt. dicunt maiorem proportionem, quam DE ad VT, quanto magis, si omnes, quibus constat cylindrus [illegible], comparentur omnibus inscriptis, qui semper minores numero sunt, nempe vna vnitate minus cùm maximus cylindrus in conoide inscribi nequeat, qui habeat altitudinem PA.

Progr. 8. Hinc autem sequitur conum Z figura inscripta esse maiorem, cum illi cylindrus [illegible] MC, quia figuræ inscriptæ dicit maiorem proportionem, quòd eam secundùm plures eius partes contineat, quàm ad conū Z; hoc autem esse nequit, cum ostensum sit progr. 2. figuram cylindrorum inscriptam cono Z esse maiorem.

Progr. 9. Si verò sit conoides minus cono; circumscribatur, & inscribatur talis figura solida ex multiplicatis cylindris, vt circumscripta addat super inscriptam quantitatem talem, quæ sit minor quantitate illa, qua conoides à cono Z in quantitate deficit. Itaque circumscripta cylindrica figura erit minus cono Z, quia enim conoides cono Z est minus, & inscripti cylindri minus sunt, quam conoides, & minus circumscripti cylindri excedunt inscriptos, quam conus, conoidem, ita conus circumscriptis cylindris maior erit, & ipsi erunt illo minus.

Progr. 2. Deinde ea omnia considerentur, quę prog. 3. 4. 5. dicta sunt.

Progr. 10. Cum ergo omnes cylindri æquales MC cylindrum magnum componentes ad quinque cylindros circumscriptos minorem habeant proportionem, quam DA ad VT, siquidem probatum est progr. 4. rectangula æqualia quale [illegible] 10. 11. ad rectangula decrescentia [illegible] minorem habere proportionem, quam tripla, & dupla scilicet 5. ad 12. nimirum quam DE ad VT; si vtrisque addantur maximo quale 10. 11. & ideo cylindri quoque æquales cylindrum CM componentes, qui ex progr. 3. cylindris decrescentibus eandem proportionem dicunt, quam rectangula ęqualia decrescentibus, si vtrisque addantur maxima, vt hic facere oportet, quia primus E 2 cylindri CM est etiā circumscriptus, dicent proportionem minorem ad cylindros decrescentes, quam DE ad VT.

Et hinc est quod cylindri circumscripti [illegible] sumpti erunt maiores; cono Z, ad quem cylindrus MC dicit eandem proportionem, quā [illegible] V ex progress. 3. Sed ex progress. 9. maior conus Z, probatus est quam cylindri circumscripti simul ergo esset maior, & minor, quod est absurdum.

Cum itaq; conus Z, neque maior, neque minor esse possit conoide hyperbolico conus Z, & conoides erunt æqualia, ideoque quam proportionem dicet conus inscriptus BAC ad conum Z eandem dicet ad conoidem; sed ad conum Z dicit proportionem

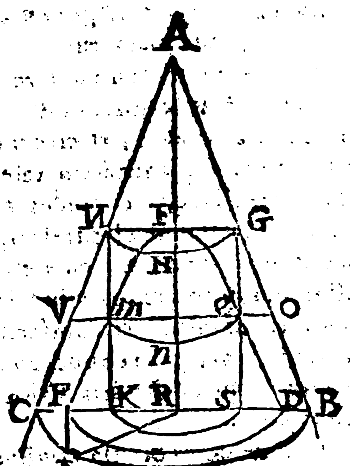
quam

quam EDad FE. Ergo conus inscriptus BAC dicet ad conoidem Hyperbolicum eam proportionem, quam ED ad EF; nimirum quam diameter EA, & transuersa diameter AD habet ad diametrum eandem FA, & transuersã diametrum AD cum dimidio eiusdem transuersæ diametri, nimirum DF.

THEOR. II. PROPOS. XXXI.

Quæcumque rectæ ducuntur in conoide hyperbolico rectangulæ ad planum hyperbolæ generantis vsque ad ambitum coni Asymptotici sunt æquales inuicem.

SIt conus ABC rectus, Asymptoticus sectus plano per axem exhibente sectionem hyperbolicam DEF, quæ conoidem generet, & sint Asymptoti eiusdem AB, & AC, fiant sectiones GHN rectæ ad axem EA, quę per verticem hyperbolicum transeat, & aliæ, vt BIC, quæ ei æquidistent, & à punctoE, quo secat Hyperbolam generantem normales ad BC erigantur, vt EI. Dico EI, & alias similes si adsint esse singulę ęquales lineę FN, & ideo inuicem.



Probatur. Nam rectangula BE, & EC singula sunt æqualia quadrato FN, vt ex prop. 46. Tract. 24. de conicis, sed etiam quadrata ex BE, & EC sunt æqualia quadrato EI. Ergo quadratum ex EI, & FN sunt æqualia; Vnde & latera eorum EI, & FN sunt æqualia.

THEOR. III. PROPOS. XXXII.

Solidum frustum asymptotici coni conoidem Hyperbolicum cingens æquat cylindrum, cuius axis æquet axem Hyperbolæ generantis, & radius basis æquet lineam tangentem eius verticem, & in ambitum Asymptotici coni terminantem.

SIt vt supra conus Asymptoticus BAC cingens conoidem hyperbolicum DFB, sitque cylindrus SKGHN, cuius basis GHN habeat pro radio lineam verticem hyperbolę generantis tangentem, & in conum asymptoticum BAC terminantẽ. Altitudo verò, seu axis sit RF idem, qui etiam est axis conoidis. Dico spatium NCIB DGF frustum solidum asymptotici coni, cingens conoidem cylindro descripto SKGHN esse æqualem.

Prob. Solidi cylindri cylindrum KC diuidentes, & frusto ENGB annuli circũscripti æqualis altitudinis semper erunt æquales ex prop. 23. h. Cor. vt bases. Quamobrem ex propos. 22. Tract. h. & corpora etiam ipsa erunt æqualia.

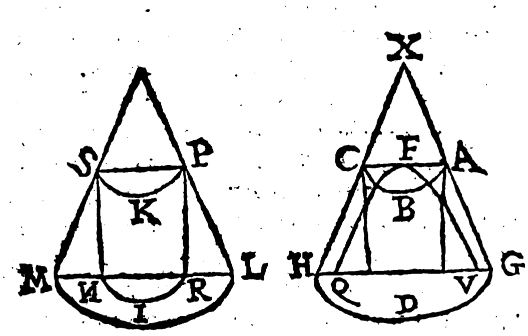
Quod autem bases sint æquales ostenditur. Nã annulus quicumque CIBDE basis corporis cingentis æquat NHG quãcumque basim cylindri; eo quia ex præc. EI æquet NF. Ex prop. verò 18. tract. 30. ex EI circulũ æquat annulus CIBDE: siquidem circulus ex EI radio, & circulus ex ER radio æquant ex IR circulum, idest ex CR: ablato itaque ex ER circulo restant circulus ex EI, seu ex FN ex præced. ęquales lineę, & annulus CIBDE basis corporis conoidem cingentis æquales.

Idem verò dicas de quolibet alio spatio, siue maiori, siue minori, vt de spatio FNVmneOGF, qui eadem ratione æquatur cylindro m c.

THEOR. IV. PROP. XXXIII.

Conoides Hyperbolicum iisdem positis æquatur spatio, quod Cylindrum prædictum circumcingit.

PRobatur. Frustum coni ACBGH, in quo conoides, æquatur frusto coni KSPLIM, in quo cylindrus ex hypoth. & spatiũ FAGVQHCF cylindro BKSNR æquatur P ex 31. h. Aufer ergo à frusto coni PKSMIL cylindrũ KPSRN, & à frusto coni GAECHD spatiũ circumcingens conoidem ęquale cylindro, remanebitque conoides FVQ æquale spatio solido circumcingenti cylindrum PKSMNIL.



COROLLARIVM.

QVare colligitur, quod habita cognitione Asymptotos conoidis hyperbolici, & basis eiusdem, facilè deueniemus in cognitionem eius soliditatis. Asymptotos autem reperiemus ex propos. 47. Tract. 24. de conicis sectionibus. Habita autem diametro GH habebimus quoque ex propos. 12. Tract. 25. basim GDH datis verò asymptotis soliditatem quoque coni venabimur ex prop. 7. h. inquirendo soliditatem cylindri illum conum comprehendis, cuius conus GDHX est tertia pars. Pariter id efficiemus de cono ABCX sublata altitudine conoidis, & ablato hoc cono ABCX ab illo GDHX erit frustum ABC GDH ex quo auferemus cylindrum PSKRIN, & residuum ex præced. erit soliditas Hyperbolæ.

EXPENSIO VI.

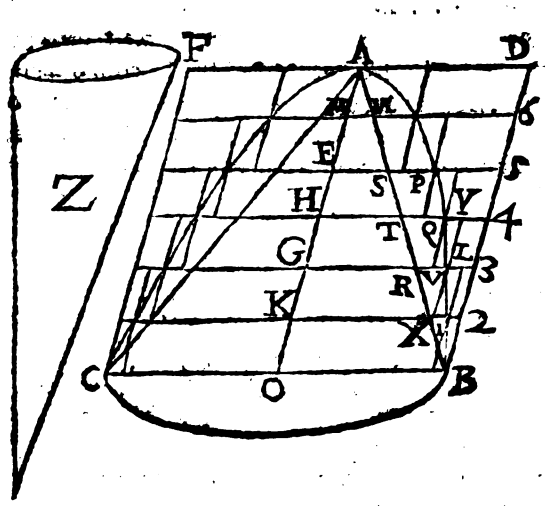
De Conoidis Parabolici proportionibus.

SOlidum Parabolicum efficitur, à parabola circa suum axem versata vsque dum ad terminum vnde discessit redeat, vt diximus Tr. 25. in def. Ex. 4. Quare si secetur plano rectangulo ad axem illa sectio erit circulus, si secetur plano obliquo illa sectio erit Ellipsis, vt probauimus Tract. 25. Expens. 4. sed modo de eorum soliditate agendum est.

THEOR. I. PROPOS. XXXIV.

Conoidale Parabolicum quomodocumque sectum, seu rectè, seu obliquè habet proportionem sesquialteram ad conum inscriptum.

ESto conoidale parabolicum ABC, in eoque inscriptus conus item ABC, sitque superficiei secantis diameter BC, in qua tum conus, tum conoides existat. Axis verò AO, & A erit vertex, tum trianguli, tum conoidalis: Circa verò conoidem cylindrus sit eiusdem altitudinis, ac conoides, conusque inscriptus habens latera BD, & FC parallela axi AO; basim verò BC, cono, conoidique communem.



Sitque conus Z sesquialter cono BAC. Huic cylindrus erit duplus, quia est triplus coni inscripti, est sicut numerus 3. ex 7. h. sesquialter numero 2. sed triplo numeri 2. nempè 6. est subduplus, numerusq; ipse 6. duplus numeri 3.

Dico itaque hunc conum Z sesquialterum cono BAC esse æqualem conoidi prædicto.

Progr. 1. Quod si talis non est, erit conus Z, aut maior, aut minor conoide, sed nec maior, nec minor esse potest; Ergo æquale erit cono ipsi conoides nam si est maius, sit maius quantitate P.

Et Probabitur. Quod non possit esse maius conoides cono Z sine implicantia, & absurdo. Circumscribatur itaq; & inscribatur conoidi figura ex frustis cylindrorum constans, ita vt quodlibet frustum habeat basim aliquam ex applicatis ordinatim ad axem AO, & sint æqualis altitudinis, vt est cylindrus IO inscriptus, LK circumscriptus, habens pro diametro basis suæ circularis applicatam IK; Tot verò inscribatur, & circumscribantur: donec spatium, quo figura circumscripta superat inscriptam ex prop. 14 Tract. 33. minus sit, quàm quantitas ea, qua conoides superat conum, & sic figura inscripta erit maior cono Z cum quia differat à quantitate maiori conoide, quam differt Z à conoide maiori, quàm conus Z.

Progr. 2. Tunc, quia cylindri sunt omnes æqualis altitudinis ea ad inuicem proportione gaudebunt, qua gaudent bases ex prop. 5. Tract. 30. Proportio verò basium, quę sunt circuli eadem est, quæ quadratorum ex prop. 40. lib. 6. quarum similia latera sunt applicatæ BO, & KI: quadrata verò applicatarum ex prop. 5. tract. 24. eam habent proportionem, quam interceptæ diametri portiones: Itaque ita est cylindrus O2 ad cylindrum IO, vt basis, seu circulus, cuius diameter 2 & quadratus quadrati ambientis BO ad circulum similis rationis IK: sed vt circulus ad circulum, ita quadratum ad quadratum, & ex 18. l. 5. quarta eius pars, quale est quadratum, cuius latus est BO ad quadratum, II, & ita intercepta portio diametri AO longitudine ad AK ex citat. 5. Tract. 24 & ita etiam ob parallelismum linearum in triangolo BAO linea 2 K, vel BO ad KX. Quare ex 16. l. 5. O2 cylindrus ad cylindrum OI erit, vt 2 K ad KX. Idem autem dicendum de alijs cylindris. Nam ita est cylindrus 3 K ad cylindrum KV vt quadratum 3 G, vel BO ad quadratum VG, & ita est AO ad AG, & BO ad 3 G, & ideo ex 10. sic est cylindrus K3 ad cylindrū inscriptum KV, vt BO, vel æqualem 3 G ad GR. Et eadem ratione cylindrus G4 ad cylindrum GQ, vt BO, vel B4 ad TH; sicque de alijs vsq; ad MN vbi nullus est cylindrus inscriptus.

Progr. 3. Si ergo omnes lineę in vnam colligantur longitudine ęquales, qualis vna ex ipsis BO si comparentur cum lineis omnibus ab axe OA ad coni latus deductis, quarum vna est XK habebunt proportionem duplam; quia CA diagonalis secat omnes simul sumptas per medium, ita vt omnium linearum simul media pars sit intra BAO alia extra. Cum ergo lineę ęquales qualis BO habeant ad quasque in cono deductas qualis XK est vna, proportionem duplam, etiam cylindri simul omnes quinque æquales diametris basium, & altitudine ad quinque cylindros in conoide inscriptos consequentur proportionem duplam.

Nam vt OI est ad O2 sic XK ad OB, & vt KX ad 2 K, & sic GR ad OB, ergo ex pr. 25. l. 5. vt OI. & KV ad O2. & ideo ad duplū O3. sic KX, & GR simul ad OB, & ideo ad eius duplam OB, K2. & sic dicas de alijs gradatim procedendo.

Progr. 4. Quare totus cylindrus illis constans, & insuper cylindro DN; nempe cylindrus DC habebit ad inscriptos quinque proportionem plusquam duplam: Idem vero cylindrus erat coni Z duplus, vt supra dictum est, quia factus est coni BAC sesquialter. Figura igitur inscripta ex cylindris minor est cono Z; quod est absurdum, cum poneretur maior, eo quia circumscripta figura minus adderet super inscriptam, quam conoides super conum Z, & ideo cum figura circumscripta sit maior conoide etiam inscripta erit maior cono Z, cum tamen probata sit minor.

Progr. 5. At si aliquis asserat cono Z esse minus conoides. Figura iterum eodem modo inscribatur & circumscripta superet inscriptam tali quantitate quæ sit minor, ea qua conoides deficit à cono Z, eritque figura circumscripta minor cono Z, siquidem figura inscripta est minor conoide, quæ exceditur à circumscripta minus eo, quo conus excedit conoidem, & ideo necessariò conus Z est maior ipsa figura circumscripta.

Progr.

Progr. 6. Sit itaque primus cylindrus figuræ circumſcriptę O 2, ſecundus KL, tertius GY, & cęt. ſintque fruſta cylindrorum æqualium tot numero O X, K 3, & 6 4, & cęt. Itaque, vt eſt fruſtum O 2 ad cylindrũ O2, vt primus circũſcriptor. Sic baſis circularis, cuius radius BO, vt fruſti cylindri, ex BO ad eundẽ circulũ, vt baſis cylindri circũſcripti vtque circulus ad circulũ, ita quadratum ad quadratum, & ſic quarta pars quadrati, cuius latus eſt radius BO ad quartã partem eiuſdem quadrati ex 18. lib. 5. vt priùs, eſt enim eadem ſub duplici conſideratione, vnde habet proportionem æqualitatis. Non ſic verò cętera fruſta cylindrorũ comparata cum cylindris circumſcribentibus. Nam ita eſt K 3. cylindrus ad KL cylindrum, vt circulus cuius radius 2 K, idest BO ad circulum IK, & vt circulus ad circulum, ita quadratus ad quadratum, & eius quarta pars, cuius latus 2 K ad alterius quartam partem, cuius latus IK, vt autem quadratum 2 K ad quadratum IK, ita eſt AO ad AK, & ita ob parallelas K 2. vel BO ad XK, & ita in quibuſcumque arguendum: quare omnia fruſta cylindrorum æqualium inter BO ad omnes cylindros circumſcriptos eam obtinebunt proportionem, quam latera æqualia omnia qualia BO 2K ipſorum cylindrorum radij ad ductas BO, KX, RG, & cęt. ab axe ad latus coni inſcripti vt ſupra pr. 4. ex prop. 25. l. 5.

Progr. 7. Lineæ verò æquales A 2 incluſiuè vſque ad 6. ſunt duplæ ad alias ab X vſque ad N ſi ſimul in vnam longitudinem redigantur, vt dixi. Si vero addamus vtriſque BO propter cylindrum primum BK, qui vnus ex circumſcriptis eſt, & vnus ex æqualibus cylindri DC, erunt omnes à B & NO vſq; ad 6. ſex lineę ſex lineis inter BN minus quàm duplæ, cum hę poſtremæ non dimidio creſcant per additionem BO, ſed æqualiter. Quadere cylindri quoque æquales fruſta cylindri DC ad cylindros circumſcriptos erunt minus, quam dupli.

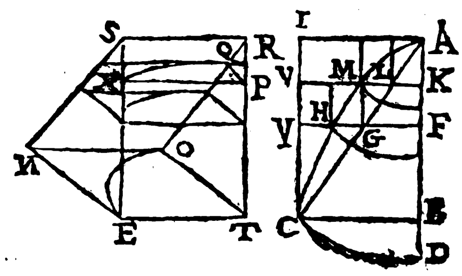
Progr. 8. Sed cylindrus DC ex illis ſex cylindris æqualibus conſtans eſt duplus coni Z, ergo ex prop. 7. lib 5. figura circumſcripta eſt maior cono Z, cum cylindrus maior CD ad figuram circumſcriptam dicat minorẽ proportionem, quod eſt cõtra id, quod ſupra dictum eſt prog. 5. conum Z eſſe maiorem ipſa figura circumſcripta. Cum ergo conus Z, nec maior, nec minor ſit conoide erit æqualis ipſi conoidi;. Quare cum ſit triangulo inſcripto BAC ſeſquialter, etiam conoides cono inſcripto erit ſeſquialterum.

THEOR. II. PROPOS. XXXV.

Conoides parabolicum, & ſingulæ partes ipſius æquantur partibus coni priſmatici eandem altitudinem, & eandem baſim obtinentis.

SIt ſemiparabola ABC, quæ ſufficit ad demonſtrationẽ, & intelligatur efformare corpus parabolicum ABCD, cuius partes ſint AKM, & FAH, deinde ſit priſma TNRS, ex rectangulo CABI, & ex triangulo BAC, in quo ſit conus priſmaticus ex pr. 26. h. RSOTE. Dico, quod & totum ABCD ęquatur priſmatico cono RSTE, & ſingulæ eius partes KAM partibus PQSXR intercipientibus eandem altitudinem.

Pr. Nam ex pr. 59. tr. 24. Applicata axi FH, & MK & quęcũq; alia dãs pũcta in parabola M, H eſt media proportionalis inter KL, & KV inter, & FG, FY, & ideo ex pr. 19. l. 6. rectangulum KL, KV æquat quadratũ KM, & ita dicas de rectangulo FG, & FY, quod ęquat FH quadratum, & de quocumq; alio. Omnia verò rectangula ex KL, & KV, & KY, FG, & cęt. ideſt parallelepipeda æquealta ſuper eas baſes erecta ex propoſ. 8. Tract. h. æquantur parallelepipedis æquealtis ex quadratis HF, & MK ſingula ſingulis, & ita quartę ellipſium in illis inſcriptæ quartis circulorum in quadratis inſcriptis ex prop. 26. tr. 30.



& ideo ſolidę quartæ cylindrorum ſolidis quartis ellipſium æquabuntur, ſingulæ ſingulis æqualitis ex propoſ. 37. Cor. tr. h. Ideoque ex prop. 19. l. 5. quadrans cylindri ex quadrante XM ęquabitur quartæ cylindri PQX, & cæteris cæteri, quia æquealti extolluntur ſuper æquales baſes quadrante, nimirum ex radio XM, & quadrante ellipſis deſcriptæ in rectangulo PQX, quia ſcilicet dicunt eandem proportionẽ tũ baſes, tũ ſolida ſuper XM, & QPX baſes erecta, quam quadratum ex XM, & rectangulum ex PX, ideſt XV, & PQ, ideſt KL ęqualia.

Cum itaque omnia ſolida æquealta inſcripta, vel circumſcripta quartæ parti conoidis ACBD æquent omnia ſolida inſcripta in priſmatico cono KOTE, & hęc ſi omni poſſibili numeroſitate multiplicentur tandem acceſſura ſint ad æqualitatem quadrantes quidem ſolidi quartæ parti conoidis; Parallelepipeda verò ex quartis ellipſium priſmatico cono RSOTE ſequitur, vt etiam quarta pars conoidis AMCBD, & priſmaticus conus RSOTE ſint ęqualia. Vnde ſi, & priſmaticus conus quadruplicetur ſuper quatuor quadrantes TOE ellipſis integræ, vel circuli integri deſcribendo, & ſic quoq; parabolicum conoides. Etiam quadruplicatum conoides Parabolicum, & priſmaticus conus æquabuntur ex prop. 18. lib. 5.

Quod, & de ſingulis partibus intelligitur, cum valeat idem argumentum quocumque loco æquè alto tamen, ducantur plana ſecantia, tum conum priſmaticum, tum conoides parabolicum. Poſſemus hanc propoſ. reducere ad impoſſibile. Sed hæc ſufficiet ne hoc argumentum reductionis ad impoſſibile continua iteratione replicetur.

EXPENSIO VII.

De ſphæroidibus.

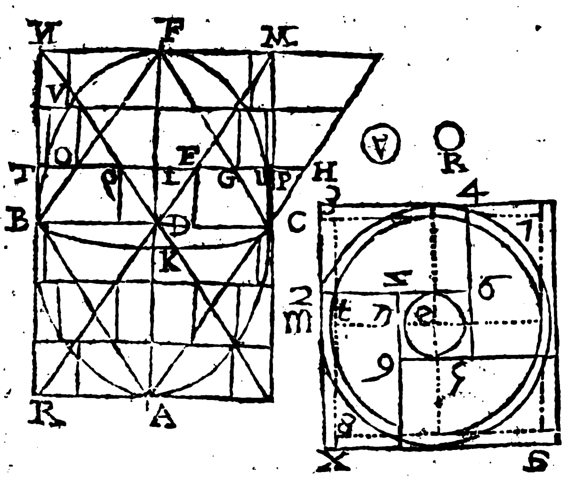
VSus ſphæroicorum corporũ frequentior eſt in comercijs humanis, ideo eius cubicatio magis quoque vrgens eſt, talis verò eſt ex noſtro ingenio, lumine tamen deſumpto à Luca Valerio, quod idem aliter probat.

THEOR.

THEOR. I. PROP. XXXVI.

Semisphæroide si sit conus inscriptus eiusdem basis, ac circulus semiaxe sphæroidis ductus, & altitudo sit eadē ac alterius semiaxis, hic conus erit æqualis residuo cylindri eiusdem basis, ac altitudinis deducto ipso sphæroide.

SIt sphæroides ABCF, & sit eius dimidio CFB inscriptus conus BFC, cuius basis CKB, ex diametro axis V. g. minoris, at altitudo, vt DF alterius semiaxis maioris (quod, & è contra esse potest basis ex axe maiori, & altitudo semiaxis minoris) Sit deinde cylindrus MB eiusdem basis CKB, & eiusdem altitudinis FD; à quo sit ablatum, semisphæroides CIFOB, & remaneat scaphium CI FOBMN. Dico conum CFB esse equalem residuo scaphio CIFOBMN.



Prodatur, & Progr. 1. In Ellipsi rectangulum HL, LG est æquale quadrato LI ex prop. 19 lib. 6. eo quòd LI sit ex prop. 60. Tract. 24. media proportionalis inter LH, & LG. Sed LH æquatur ipsi QP, & LG residuum residuo QT; siquidem tota HL, LG, vel LO æquatur toti PT ob parallelas CH, & FB, &c. CM, & BN: Ergo rectangulum GT, & GP æquatur quadrato LI: Vnde etiam quatuor quadrata ex LP, & quatuor rectangula TQ, & QP equabuntur. Fiat itaque quadratum 38. ex diametro CB, sintque in eo quatuor rectangula ex TQ, & QP cuilibet lateri applicata secundùm latus maius QP, scilicet x 2. restabit 23. æquale frustum lateri 2 3. idest QT, quare si aliud rectangulum ei 32. applicetur secundum latus QT æquabitur ipsi 32. vnde latus maius occupabit lōgitudinem 34. idest QP, & remanebit portio equalis ipsi QT, & sic ages de omnibus quatuor rectangulis, relinquentq; quadratū 25 69. cuius latus 6 z equabitur lineę EQ, à qua ad adęquandum PT ęqualem 3 x, duę longitudines ablatę sunt ęquales inuicem EP, & QT nimirum 2 z, & 64. ab x 3; quare residuabitur 6 z ęqualis lineę EQ. Describātur rursùs quadrata quatuor ex LI, idest quadratum totum OI ex 6 l. 2. vt remaneant rectāgula æqualia circumquaq; nempe quatuor rectangula ex PI, & IT qualia sunt rectangulum 37. & & 83. & cæter. Quia itaque quatuor quadrata 7 e quatuor rectangulis ęquantur 24. x z, & cæt. si hęc, & illa intelligantur auferri à quadrato toto 3 x 8, restabunt ęqualia quadratum 69. & telarium circumquaque nempe quatuor ambientia rectangula 37. & 78. & 88. & 83 Et idem semper sequetur quoquo puncto trahas parallelas HT.

Progr. 2. Cum itaque ex 4 l. lib 6 Eucl. sit quadratum ex 3 x ad quadratum 69. vt circulus inscriptus quadrato 3 x, idest basis coni CFB ad circulum inscriptum quadrato 69. idest sectioni IQ coni; ita *diuidendo* erit quadratum ex 3 x ad quatuor rectangula 36. &c. residua, vt circulus in quadrato 3 x inscriptus, idest CKB ad annulum residuum, cuius latitudinis mensura est n m, vel 23. vel TQ, qui circumambit conum. Vt autem quadratum ex 3 x ad telarium, vel quadratum annulum m n, vel TQ, ita est quadratum ex 3 x idem ad quatuor quadrata ex IL qualia sunt 6 e, ob eorum supra ostensam ęqualitatem, & vt quadratum 3 x ad quatuor quadrata ex LI: ita circulus inscriptus in quadrato ex 3 x, idest basis coni CKB ad circulum ex diametro e t, idest LI, & *diuidendo* erit quadratum ex 3 x ad telarium residuū ex quatuor rectangulis 37. 83. & cęt. vt circulus inscriptus in 3 x ad annulum residuum, cuius latitudo t m, vel PI, qui circumambit sphęroidem. Quadratum autem ex 3 x ad quadratum 6 9. dicit eandem proportionem, ac ad tellarium ex quatuor rectangulis sc. 37. & cęt. ob eorum ęqualitatem supra ostensam. Ergo etiam circulus inscriptus in quadrato ex 3 x ad circulum inscriptum in 6 9. dicet eandem proportionem ac ad annulum, cuius latitudo t m, vel IP. Quapropter ex 7. lib. 5. ęquabuntur annulus planus t m, & circulus in 6 9 inscriptus, idest circulus QE, qui est sectio coni basi parallela, ideoque ablatis æqualibus 6 9. & annulus, cuius latitudo t m remanebunt æqualia circulus radio e t, vel LI, & annulus, cuius latitudo n m, vel E P, sicut æquantur annulus IP circumambiens sphęroidem ac circulus basis coni, vel sectio, quæcumque eius QE, quæ per idem planum secans sphęroidem, conum, & cylindrum sit facta.

Progr. 3. Cogitentur itaque cylindrus, conus, & sphęroides secti planis PT ęquidistantibus, quę diuidant cylindrum in segmenta ęqualis altitudinis, & in cylindros circumambientes ęquealtos in eadem numerositate. Quia itaque, vt circulus ad circulum, ita cylindrus eiusdem altitudinis ad cylindrum, qui in illis sint collocati ex proposi 5. h. circulus PT ad circulum QE erit, vt cylindrus BP ad cylindrum QD. Quare *diuidendo* erit circulus PT ad annulum residuum planum ex QE ambientem conum, cuius latitudo EP, vel TQ, vt cylindrus PCTB ad annulū residuum ęquealtū similiter ambientem conū EPCTQB: sed circulus PT habet eandem proportionem ad annulum planum EP, QT, quam ad circulum IO ex applicata LI tanquam radio, quia supra progr. 2. ostensi sunt ęquales talis circulus ex IO, & annulus ex EP, QT ambiens conum. Ergo etiam cylindrus PB ad annulum solidum PECDBT, & ad cylindrum IV ex basi IO eamdem dicent proportionem. Ergo annulus solidus DEPTQB, & cylindrus IV ex basi IO ex 7 l. 5. equabuntur. Ablatis itaque astis equalibus cylindrus IV ex basi IO, & annulus solidus EPDIQT ęqualia restabunt cylindrus equealtus QD super basim QE circumscriptus cono NMD, & annulus IPVTO residuus à cylndro IVO.

Progr. 4. Semper igitur perseuerant ęquales quicumque cylindri circumscripti cono, & quicumque circumscripti annuli scaphico residuo sphęroidis sc. QD cylindrus, & annulus solidus sphęroidem circumcingens IOVT. Fiāt itaq; tot

cylindri

cylindri circumscripti sphæroidi, & cono æquali, donec omne spatium possibile, quod inter conum eiusdem, & vltimam eorum superficiem expleant; ita quod nullum spatium possibile remaneat inter OV superficiem annuli, & sphæroidis POB superficiem; sicut nec inter superficiem cylindri, circumscripti, & coni; Iam æquabitur multitudo cylindrorũ cono circumscriptorũ ipsi, & sphæroidi annulorum sphæroidem ambientium; cum enim omne spatium possibile remanens inter ipsos, & corpora, quæ vestiunt, abolitum sit, iam ipsa æquabunt: Quare cum multitudo cylindrorum omnis possibilis æquetur multitudini annulorum, cum data quacumque multiplicatione perseuerent æqualia, etiam conus BFC, & inuolucrum solidũ CNMBOFI sphæroidem circumcingens æquabuntur.

Quod est ostendetur redigendo ostensionem ad impossibile. Nam si conus CFB, & scaphium CMNBOBI sunt inæqualia, sit minor conus CFB, & describatur circa ipsum talis multitudo cylindrorum donec differentia R inter ipsos, & conum sit minor, quam differentia inter scaphium, & conum, quæ sit y. Itaque figura cono circũscripta minor erit scaphio CMNBOFI cum minus differat à cono minori, quam scaphium; Ergo etiam minor, quam cylindri solidi PI VOT scaphio circumscripti, quia minus differt à quantitate minori, quod contra præcedentem demonstr. est, in qua cylindri solidi coni, & annuli solidi scaphij ostensi sunt æquales. At si aliquis afferat scaphium cono esse minus. Iste inscribat tot solidos annulos in scaphio, tot cylindros in cono donec differentia R inter ipsos, & conum sit minor, quam inter conum, & scaphium. Tunc, quia maior est conus, & cylindri coni inscripti minus differunt ab eo, quam ipse à scaphio erunt maiores, quam scaphium. Ergo multò maiores erunt ipsa figura cylindrorum scaphio inscripta, quòd probatum est supra impossibile. Ergo conus CFB scaphio CMNBOFI, neque erit maior, neque erit minor.

THEOR. II. PROP. XXXVII.

Semicylindrus semisphæroide circumscriptus se habet ad semisphæroidem, vt 3. ad 2. ad conum verò inscriptum, vt 2. ad 1.

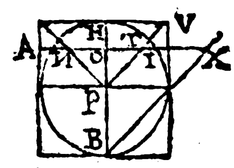
PRobatur. Nam semicilindrus BM se habet ad conum CFB. vt 3. ad 1. ex propos. 7. Tr. h. Quare ad residuũ ablato cono se habebit, vt 3. ad 2. sed inuolucrum sphæroidis solidum CMNBOFI est æquale cono CFB ex dictis; Ergo erit ad ipsum cylindrus, vt 3. ad 1. sicut est ad conum, quare ad reliquum, scilicet sphæroidem ablato scaphico se habebit, vt 3. ad 2. Sic dicas de alia medietate sphæroidis, & cylindri eam circumscribentis; quare ex prop. 18. lib. 5. erit duplus cylindrus RM ad sphæroidem totam FCBA, vt 3. ad 2. Quapropter ad conum inscriptum, qui est 1 respectu cylindri se habebit, vt 2. ad 1. ex propos. 29. & 30. Tr. 17.

COROLLARIVM I.

HInc est, quod id poteris afferere etiam si sectiones, non sint per axes, & cylindrus obliquus, & conus scalenus, & bases ellipses. Nam erunt ellipses similes, vtpote, quia sunt parallelæ, tum quæ fiunt à cono, tum quæ fiunt à cylindro, tum quæ sunt sectiones sphæroidis ex propos. 4. & 11. & 22. Tract. 25. Vnde eodem prorsus argumento poteris concludere cum sit, vt rectangulum ad rectangulum ex axibus ellipsium, ita ellipsis ad ellipsim; sufficit innuisse. Tu ex tuo ingenio argumentum si placet, dispone.

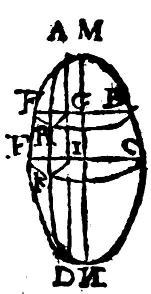
COROLLARIVM II.

HInc patet, quæ dicta sunt de sphæroide, de sphæra quoque verificari: siquidem OI est etiam in circulo media proportionalis inter VT, vel NA, & TA cum ON æquetur ipsi PO ob rectangulum æquicrurum NOP, & NA residuo OB, & OA radio PB, & ob parallelas PT, & BX, lineæ IX: Rectangulum verò BO, & OB æquatur quadrato OI ex propos. 35. lib. 3. Quare ex propos. 19. l 6. OI; vt in prop. 36. erit media proportionalis inter TV, & AT, quia OT æquat NO, vel OP, sicut AO equat PB, scilicet tota AT totam OB, vel æqualem OX, quæ etiam ob suas partes æquales lineæ OB ipsam æquat sicut OH residuum residuum VT.



COROLLARIVM III.

HInc etiam sequitur, idem dicendum de sphæroidibus, quæ obtineant sectiones per axem vtrasque ellipsim; quod scilicet sit cono, cuius basis sit ipsa ellipsis, quæ per axem transit; & alter axis altitudo ipsius, dupla. Nam omnes ellipses, vtpote parallelæ in ipso sphæroide erunt similes, & ideo rectangula ipsam circumambientia similia, sicut in ellipsi circulari sunt quadrata. Vnde id quod concluditur de circulis circulo maximo parallelis eodem pacto concludetur de ellipsibus ellipsi maximæ parallelis transeunti per axem. Omnes autem ellipses basi parallelæ similes erũt, quia tale corpus ellipticum MADNC intelligitur formari ellipsibus axi parallelis, vt AKD & suo ambitu per ambitũ alterius ellipsis per axem ductæ CKP transeuntibus. Sit ergo talis ellipsis DEM, & ellipsis axi parallela AKKD, & in ipso ellipsis FRB parallelæ alteri ellipsi per axem PKC. Dico hanc BRF ellipsim esse similem CKP ellipsi. Quod ostenditur. Nam DIA rectangulum est ad DGA rectangulum ex propos. 6. Tract. 24. vt IK quadratum ad GR quadratum in ellipsi DKA, sed vt DIA rectangulum ad DGA rectangulum, ita est CIP rectangulum ad BGF rectangulum ex prop. 48. Tract. 24. Ergo CIP rectangulum est ad BGF rectangulum, vt IK quadratum ad GR quadratum. Vnde, & ipsa latera erunt proportionalia cum quadrata, & rectangula sint similia. Vnde ex pens. 7. de similitudine sectionum con. Tract. 24. in præfatione Ellipses CKP, & BRF erunt similes.

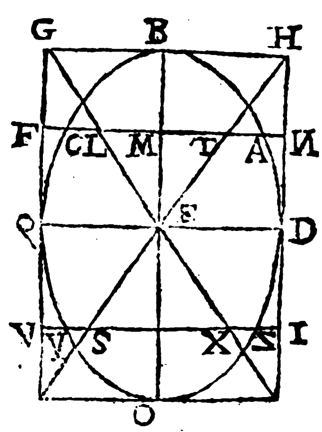


THEOR.

THEOR. III. PROPOS. XXXVIII.

Frustum sphæroidis æquat duas tertias partes cylindri ambientis frustum deducta portione coni eiusdem altitudinis frusti sphæroidis eodemque plano resecti, qui tamen conus integer habeat pro basi sectionem sphæroidis per axem, & altitudinem alterum axem.

SIt frustum sphæroidis ABC, cuius centrum E, & frustum cylindri eiusdem altitudinis MB sit FH, & detrahatur ei frustum coni HTLG eiusdem altitudinis MB, qui cylindrus, & conus consequantur eandem basim circulum, qui ductus sit radio semiaxe DE, & pro altitudine semiaxem alterum EB consequatur. Dico, quod si frustum coni HTLG deducatur à frusto cylindri HF remansurum concauum inuolucrum quoddam, cui portio ABC sphæroidis æqualis, erit.



Probatur. Nam ex propos. 36. h. reliquum solidi FH deducto frusto sphæroidis ABC est æquale frusto HTLC; Ideo sphæroidis frustum ABC remanens ab eodem corpore FH æquabit TNHLGF concauam soliditatem cylindri, deducto ipso frusto coni NTLG.

COROLLARIVM.

HInc dato frusto sphæroidis minori versùs verticem CBA poterit eius quantitas inueniri si data sit eius sectio elliptica per axem, nam poterit inueniri axis minor, & maior, & sic haberi basis cylindri, & coni, & ex his inuenta soliditate coni HGE, ab ea demes soliditatem coni TEL, & residuum HTLG demes ab inuenta soliditate cylindri FH, & residuum HNTLFG æquabit portionem sphæroidis CBA.

Si verò detur pars sphæroidis versùs centrum ACDQ demes soliditatem frusti conici TLE à solido DF cylindri, & reliquum NDE TELQF solidum erit æquale sphæroidis frusto ADCQ.

Si verò detur etiam DBQ demes à cylindro HQ conum GEH, & residuum erit æquale sphæroidi dimidię; si verò detur frustum centrum includens ACZY; inuentas soliditates conorum XES, & TEL subduces à cylindri frusto NV, & quod remanet erit æquale frusto sphæroidis AZYC.

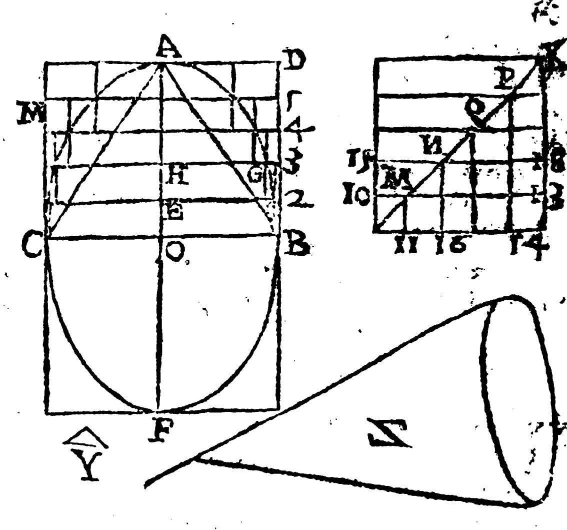
Quę etiam possent fieri, quamuis sectio non esset rectangula ad axem; si tamen conorum, & cylindrorum bases, quæ tunc essent ellipses, essent notæ, & ideo etiam alio modo frustorum sphæroicorum soliditatem venabimur.

THEOR. IV. PROPOS. XXXIX.

Hemisphæroides duplum est coni inscripti.

SIt dimidium sphęroidis ABC plano BC per centrum transeunte, seu normale axi, seu non resecti. Dico, quod est duplum coni inscripti BAC.

Præassumpt. Dictum est propos. 14. Tract. 28. quadrata duplici arithmetico decremento minuta excluso vtrique maximo ad maxima, & integra eiusdem numeri esse minus, quam 1. ad 3. Quare Gnomones, qui ipsis successiuè auferuntur, erunt ad integra eiusdem numeri magis, quam 2. ad 3. quoniam, si ea adessent iam decrescentia ex Thesi maximis essent æqualia. Quare maxima quadrata ad illos gnomones excluso vtrinque maximo erunt minus quàm 3. ad 2. & si vtrinque addas maximum, cum sit augumentum æqualitatis quadrata ad gnomones successiuè ablatos erunt multò minus, quam 3. ad 2. cum minus comprehendant maxima de gnomonibus, quàm quod *priùs* quandò non erant addita maxima. At si solùm *quadratis* maximis vnicum addas quadratum maximum, tunc maxima ad gnomones erunt magis, quam 3. ad 2. Ratio desumitur ex prop. 14. Tract. 28. Dimidium enim rectangulum FP in fig. illius prop. deficit ad hoc vt decrescentia quadrata æquent $\frac{2}{3}$ integrorum; Quare gnomones successiuè ablati erunt magis, quàm $\frac{2}{3}$ integrorum, rectangulo dimidio eodem. Rectangulum autem illud FP est minus, quam dimidium quadrati maximi ex prop. 15 contextu Tract. 28. quare dimidium eius erit minus, quam $\frac{1}{4}$ vnius integri. Ad hoc, vt ergo se habeant integra ad gnomones remanentes, vt 3. ad 2. esset aut auferendum dimidium rectangulum FP, idest minus, quam $\frac{1}{4}$ integri, aut addendū integris ipsum rectanguli dimidium, & insuper dimidiū dimidij, vel $\frac{1}{4}$ totius, idest $\frac{3}{4}$ illius rectanguli, idest minus, quam dimidium integri. Additur autem maximis maximum vnicum totum. Ergo integra vnico maximo adaucta ad gnomones residuos erunt magis, quam 3. ad 2. his notatis.



Probatur Progr. 1. Sit enim conus Z duplum coni inscripti BAC. Dico hunc conum sphœroidi dimidio esse æqualem, quod si non est æqualis sit minor conus Z, si id euenire potest, & tunc (vt supra fecimus) inscribatur, & circumscribatur multitudo cylindrorum æqualem altitudinem habentium talis, vt id, in quo circumscripta figura inscriptam excedit sit minus eo, quò sphœroides dimidium excedit conum Z; Cum ergo figura solida circumscripta sit maior sphœroidis dimidio BAC, & minus excedat inscriptam, quam sphœroides conum Z, erit maior figura inscripta ipso cono Z.

Cylindrus autem CD constat ex tot numero cylindris, quot sunt circumscripti, estque ad conum inscriptum BAC, vt 3. ad 1. quare ad conum Z, qui est duplus coni inscripti se habebit, vt 3. ad 2. & cylindrus CD dicet minorem proportionem ad figuram inscriptam, quam ad conum ea minorē Z.

Progr. 2. Itaq; cylindrus primus 2O. ad cylindrū primum inscriptorum OI habet proportionem, quam bases; cum sint æqualis altitudinis ex prop. 5. Tract. 34. qui sunt circuli, quorum radius maioris est BO, minoris est EI. Circuli autem habent eam proportionem, quam quadrata circumscripta ex prop. 40. lib. 6. & quadrata eam, quam quartæ eorum partes ex prop. 18. lib. 5. nempe quadratum, cuius latus est BO ad quadratum, cuius latus est EI. Quadratum autem BO ad quadratum ex EI eam possidet proportionem, quam rectangulum ex OF, OA ad rectangulum ex FE, & EA ex 6. Tr. 34. idem quam quadratum OF ad gnomonem 10. MK 11. siquidem 10. K 13. addito rectangulo 11. 13. eiusdem altitudinis 11. 14. ac 13. K æquat rectangulū ex FE, & EA, cum latus 13 14. cū latere 13 10 æquet latus FE, & 13 11 æquet lineā EA. Itaq; ablato quadrato 11. M 10 à quadrato toto ex OF efficitur gnomon 11. MK 10. æquans rectangulum FE, EA.

Itaquoque dicendum de alijs. Cylindrus enim E 3. est ad inscriptum EG, eadem ratione vt circulares bases, & ideo vt quadrata basium, & ideo, vt quartæ partes, nempe vt quadratum E 2. ad quadratū ex HG, & ideo ex 6. Tr. 34. vt rectangulum FO, OA ad rectangulum FH, HA, & ideo vt quadratum ex OF ad gnomonem 15. NK 16. qui fit ablato quadrato toto ex OH. Siquidem gnomon prædictus est æqualis rectangulo FH, & HA, quia latus 18. K est æquale segmento HA, & 15. 18. addito 18. 14. latere parallelogrammi eiusdem altitudinis 16. 18 est æquale lateri FH, cum latus 18. 14. sit æquale segmento OH, & ita discurre de alijs.

Itaque tot cylindri æquales tot cylindris decrescentibus comparati circumscriptis, vel inscriptis eam habent proportionem, quam quadrata eiusdem numeri æqualia, quorum vnum est OF gnomonibus decrescentibus, sed numero æquis qualia sunt V. g. ea in quibus M, N, Q, P litteræ sunt.

Progr. 3. Nunc videndum, quàm proportionem quadrata æqualia, dicant decrescentibus gnomonibus. Et iam ex præss. notum est, quadrata maxima ad decrescentes gnomones, si maxima, & æqualia superent tantùm gnomones vnico maximo & sibi æquali quadrato, dicere maiorem proportionem, quàm 3. ad 2. Cum itaque quadrata quinque maxima ad decrescentes gnomones quatuor M, N, Q, P habeant maiorem proportionem, quàm 3. ad 2. Cylindrus quoque magnus habens eandem proportionem iuxtà omnes quinque suos cylindros æquales inuicem ad cylindros quatuor dimidio sphœroidi inscriptos, quam quadrata quinque æqualia inuicem ad decrescentes gnomones dicet ad illos maiorem proportionem, quam 3. ad 2. Et ideo cum ille cylindrus magnus ad conum Z ex Thesi sit, vt 3. ad 2. Erit minor figura inscripta in sphœroide cono Z ex prop. 7. lib. 5. quod est contra demonstrata progr. 1. ostendimus enim figuram inscriptam cono Z esse maiorem.

Progr. 4. Si verò aliquis contendat dimidium sphœroidem Cono Z esse minus. Rursus eadem inscriptio, & circumscriptio cylindrorum fiat adeo multiplicatis cylindris; vt id, in quo figura inscripta exceditur à circumscripta sit minus, quam id in quo sphæroides dimidiū exceditur à cono, idest minor differentia ea, in qua sphæroides ipsū cono minus est, & tunc quia figura inscripta minor est ipso sphæroide, quod cono minus est, & circumscripta minus addit super inscriptam, quam super sphœroidem conus Z, etiam circumscripta minor erit cono Z, & sic cylindrus CD dicet maiorem proportionem ad circumscriptam figuram, quam ad conum Z.

Progress. 5. Consideretur rursùs cylindrus magnus CD, eodemque modo probetur, ita esse cylindrum primum O 2 in ipso, cuius semidiameter OB ad cylindrum circumscriptum ei æqualem O 2, vt basis ad basim nempe, vt quadratum, ad quadratum, & vt quarta pars ad quartam partem; nempe quadratum OB ad idem quadratum OB, & vt quadratum ad ipsum quadratum, ita rectangulum ex FO OA, nempe quadratum ex OF ad illud ipsum rectangulum ex FO, OA, idest æquale quadratum ex OF. Sic quoque comparentur alij cylindri æquales portiones cylindri magni ad cylindros circumscriptos; eritque B 3, idest O 2 ad EG, vt rectangulum ex FO, & OA ad rectangulum ex FE, & EA, & sic dicas de alijs.

Rectangulum verò ex FO, & OA est quadratum, at ex FE, EA rectangulum est gnomon M, & ex FH, & HA est gnomon N, & sic de alijs, vt supra explicaui progr. 2.

Et ideo omnes cylindri, qui in toto cylindro CD existunt ad omnes cylindros circumscriptos habebunt eam proportionem, quam quadrata omnia ad omnes gnomones maximo etiam quadrato addito.

Progress. 6. Quadrata autem omnia maxima incluso vtrinque maximo ad decrescentes æquali numero gnomones residuos ex præassumpto dicunt minorem proportionē, quā sesquialteram, idest quā 3. ad 2. quare cylindrus quoque maximus æqualibus constans cylindris ad cylindros decrescentes circumscriptos eiusdem numeri habet minorem proportionem, quam sesquialterā. Quare maior erit multitudo cylindrorū circūscriptorū ex pr. 7. l. 5. cono Z; cum cylindrus CD ad conum Z dicat maiorem proportionem, nempe eam, quam 3. ad 2. quàm ad circumscriptam cylindrorum multitudinem. Hoc autem esse nequit cum hæc multitudo progr. 4. ostensa sit minor cono Z.

Nota verò, quod idē semper sequitur siue sphæroides per centrum detruncatū sit, siue rectangulè per axem, siue non, vnde non sunt multiplicanda argumenta.

Cū ergo sphœroides CBA cono Z, non sit maius, neque minus erit æquale, & consequenter erit duplum coni inscripti BAC, prout etiam conum Z duplum effecimus, vel supposuimus factum.

COROLLARIVM.

HInc emanat, quod sphæroidides sit æqualis cono, qui habeat basim, cuius diameter sit duplus diametri basis coni inscripti, & eiusdem altitudinis, hic enim erit quadruplus coni inscripti, & ideo duplus hemisphæroidis, & ideo æqualis ipsi sphæroidi.

THEOR. VI. PROP. XL.

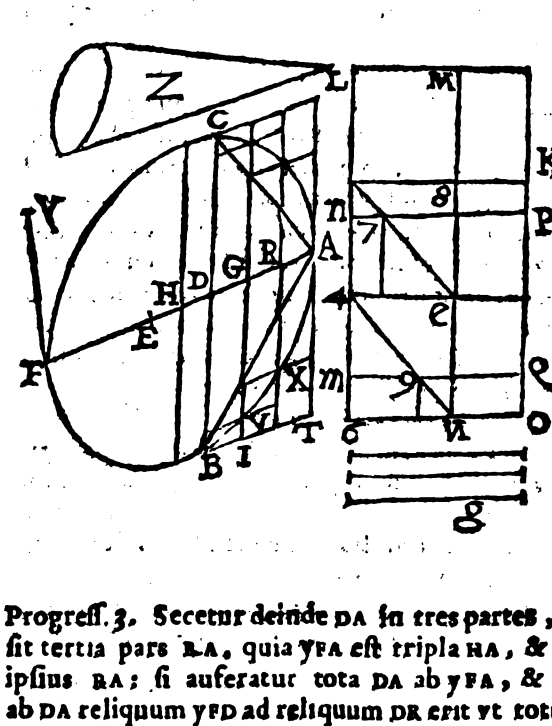
Cuiuscumque sphæroidis frustum siue maius, siue minus habet eadem proportionem ad conum inscriptum, quam axis dimidium cum segmento alterius axis portionis ad segmentum remanentis illius alterius portionis, quæ est in frusto reliquo.

SIt segmentum sphæroidis quodcumque, seu axi rectum, siue non ABC, Axis AF, centrum H frustum, seu segmentum alterius portionis DF. Ostendendum est sphæroidis partem BAC ad conum inscriptum BAC eam dicere proportionem, quam FD, FH, seu æqualem DFY ad FD.

Sit conus itaque Z, qui habeat eam proportionem ad conum CAB, quam FD, FH, idest Y F D ad FH Dico huic fore æqualem soliditatem portionis ipsius sphæroidis.

Progr. 1. Quod si non sit æqualis erit, aut maior, aut minor sphæroidis portio cono Z, sit itaque si id esse potest primo sphæroidis portio maior cono Z.

Progr. 2. Inscribatur, circumscribaturque pr. 14. Tract. 33. portioni sphæroidis multitudo Cylindrorum æqualem altitudinem habentium, adeoque multiplicentur, vt à circumscripta cylindrodrorum multitudine inscripta minus differat, quã conus, qui positus est minor sphæroidis portione ab ipsa differt, cum autem circumscripti cylindri sint maiores ipso sphæroide, & ipsum maius cono Z, erit etiam inscripta conorum multitudo maior cono Z.



Progress. 3. Secetur deinde DA in tres partes, & sit tertia pars RA, quia YFA est tripla HA, & DA ipsius RA; si auferatur tota DA ab YFA, & RA ab DA reliquum YFD ad reliquum DR erit vt totum YFA ad totum HA.

Quoniam vt est YFA ad HA, ita DA ad RA, ergo vt YFA ad DA permutando, ita HA ad RA nimirũ vt YFA totum ad DA partem, ita HA totum ad RA partem. Quare & reliquum YFD ad reliquum HR se habebit, vt YFA totum ad totum HA nempe in proportione tripla.

Tres autem lineæ g æquales ipsi FD dicent eandem proportionem triplam, quam YFD ad HR: Quare permutando tres lineæ ad YFD erunt in eadem proportione, qua FD ad HR: at cylindrus circumscriptus CT ad inscriptũ conum CAB est, vt tres lineæ ad FD. Conus verò CAB est ad conum Z inuertendo vt FD ad YFD, & ideo ex *æquo* cylindrus ad conum Z erit, vt tres lineæ æquales ipsi FD ad YFD, cum ergo tres lineę prædictę ad YFD sint, vt FD ad HR; etiam cylindrus circumscriptus CT ad conum Z erit, vt FD ad HR.

Progress. 4 Sint ergo parallelogramma æqualia contenta sub FD, DA, quorum primus ex tot, quot sunt in figura circumscripti cylindri, sitque ON dupla DH, idest DE, & remanebunt DA, ER & ideo constituent quadratum reliquum N4. Postmodum a singulis excepto primo auferatur gnomon latitudinem habens AR quale est K74. & a sequente gnomon latitudinem habens AG, vt est Q46. & sic si alij adsint, eritque totus gnomon Q46. æqualis rectangulo FG, & GA, quod Q46. 96 æquent longitudinem FG est enim Q96. æqualis lateri FG, & m9. lineæ AG, sic totus gnomon P74 æqualis rectangulo sub RA, & AF contento; nam rectãgulum KN cũ 74 æquat longitudinem RF: est enim P04 æqualis lateri FR, & 7 n lateri RA, & sic dicas de alijs gnomonibus, si adsint.

Progr. 5. Cylindri autem æquales, vt CI, ex quibus componitur cylindrus CT magnus altitudinem eandem habentes, ac segmentum axis portionis sphæroidalis, & basis, cuius radius DB, ita erit VG primum cylindrum inscriptorũ, vt basis nempe circulus, cuius radius BD ad circulum, cuius radius GV, & ideo ex pr. 5. h. quã quadratũ circumscriptũ circulo maiori ex radio BD ad quadratũ circumscriptum circulo minori ex radio GV, & quam quarta horum quadratorum pars ad quartam partem, & ideo quam quadratum BD ad quadratum GV, & ideo quam rectangulum FD, & DA ad rectangulũ FG, GA ex prop. 6. tr. 24. nimirũ quã rectangulum O4. ad gnomonem Q46. & ita dicas de alijs æqualibus cylindris respectu cylindrorum decrescentium. V. g. cylindrus ID erit ad cylindrum GX, vt rectangulum K4. ad gnomonem K74. nimirum FR, & RA, & ita si alij adsint.

Progr. 6. Modo videndum est, quam proportionem obtineant rectangula æqualia ex FD, & DA ad gnomones decrescentes. Et primò certum est ex pr. 12. tr. 28. quod rectangula integra ad decrescentia vnico decremento Arith. e p. sunt vt 2. ad 1. sed addito maximo tantùm maximis, & æqualibus sunt magis, quam 2. ad 1. Quadrata verò maxima 8 L, & inuicem æqualia ad decrescentia 7 e, & 9 N quadrata duplici decremento arithmetico illis numero æqualia sunt magis, quam 3. ad 1. Quare ad gnomones residuos 8 7 4. & e 96. erunt minus, quam 3. ad 2. quia gnomones cum quadratis inclusis æquant maxima, at si addatur integris maximum quadratum ex præass. proportione erunt magis, quam 3. ad 2. ideoque rectangula tria KM æqualia ad decrescentia V. g. duo

QE erunt magis, quam 2. ad 1. & quadrata tria maxima 8 L ad gnomones 8 7 4. & e 96. decrescentes duplici decremento magis, quam 3. ad 2. Ideoque simul ex prop. 29. Tract. 27. erunt magis, quam

quam 6. ad 5. nempe quam oN æqualis ipsi ED ad dimidiam HD, & N 6. idest DA ad DR, nimirum quam tota O 6. vel æqualis FD ad totam HR, quæ est illa, quam possidet cylindrus circumscriptus ad conum Z, vt ex tertio progr. constat: quare cylindrus ad multitudinem conorum inscriptam habebit proportionem maiorem, quam LB cylindrus circumscriptus ad conum Z, & ideo multitudo conorum inscripta erit minor cono Z, & tamen progr. 2. hæc multitudo cono Z ostensa est maior.

Quod si aliquis afferat esse sphæroidem minus cono Z. Eodem modo inscribatur, & circumscribatur multitudo cylindrorum æqualem habentium altitudinem ex prop. 14. Tract. 23. ita vt circumscripta multitudo cylindrorum minus differat ab inscripta, quam sphæroides differt à cono Z. Quia ergo inscripti cylindri sunt minores ipso conoide, & ipsum minus cono Z, etiam circumscripta figura erit minor cono Z.

Progress. 7. Disponantur deinde, cætera vt 3. & 4. progr. factum est, & eodem modo argumentandi vtemur. Quia ergo ex 5. progr. cylindrus æqualium primus in cylindro CT existentium habet eam proportionem ad cylindrum ID eundem circumscriptum, quam quadratum ex DB ad quadratum ex DB idem erit, vt rectangulum FD, DA, vel æquale KL ad rectangulum idem, vel æquale KL. Sic cylindrus, cuius basis radius GI ad GV eam habet proportionem, quam quadratum ex GI ad quadratum ex GV ob rationem allatam progr 5. superioris partis huius, & ideo ex expen. 1. Conic. quam FD, & DA rectangulum ad rectangulum FG, & GA, & ideo quam rectangulum O 4. ad gnomonem Q 4 S dicto rectangulo æqualé ex 4. progr. præced. & ita effare de alijs: quare omnes cylindri æquales ad decrescentes cylindros circumscriptos eam habebunt proportionem, quam omnia rectangula æqualia ad omnes gnomones incluso maximo rectangulo, nimirum, quam KL, K4, O 4. ad KL, K 74. & Q 46.

Progr. 8. Certum est ex præhabitis prop. 12. Tract. 28. quòd rectangula æqualia K e. e O ad rectangula P e. & Q N habent proportionem duplam, & ideo ad residua rectangula, & portiones gnomonum K 8. & e Q duplam quoque, quibus si vtrinque addas maximum cum id, quod additur non sit vt 2. ad 1. sed æqualitatis habebunt maxima tria ad tria decrescentia, incluso maximo proportionem minus, quam duplam. Sic quadrata interga 4 8. & e 6. ad decrescentia *conuertendo* propos. 14. Tr. 28. habent proportionem magis, quam 3. ad 1. & tantò magis incluso maximo. Quare ablatis e 7. & N 9. ad residuos gnomones 8 7 4. & e 9 6. & 8 L, qui simul cum quadratis, quę includunt, ęquant quadrata ęqualia eiusdem numeri non decrescentia erunt minus, quam 3. ad 2. quare KL, K 4. 40. tria rectangula æqualia ex prędictis integrata ad KL, ad gnomones residuos ex gnomonibus prędictis confectos obtinebunt proportionem minorem, quam ex dupla, & sesquialtera constitutam, quę est 6. ad 5. nempe, quam ON ad dimidiam ON, vel ęqualē DH, & N 6. idest DA ad duas tertias partes DR idest quam tota FD æqualis lateri O 6 ad totam HR, quæ est ex 3. progr. præced. quam cylindrus circumscriptus CT habet ad conum Z. Quare cylindrus circumscriptus ad cylindrorum inscriptorum multitudinem decrescentem habet minorem proportionem, quam ad conum Z, & ideo erit maior cylindrorum multitudo cono Z, cum tamen ostenderimus minorem, quam conus Z.

Cum itaque, nec maior esse possit, nec minor conus Z sphæroide, ipsi erit ęqualis: sed conus Z ad conum inscriptum ABC est, vt YFD ad FD ex effectione: Ergo sphęroides ad conum inscriptum habebit eam proportionem YFD ad FD, nimirum, quam dimidia diameter cum maiori segmento, ad ipsum maius diametri segmentum.

EXPENSIO VIII.

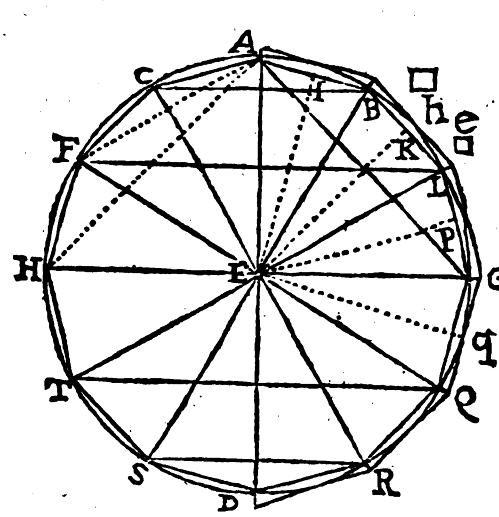
De Sphæra.

SOliditatis sphærę cognitio; cum sit vsibus humanis omninò necessaria prętereunda non est, & præter ea, quæ diximus in pręced. quęst. hic principaliter modus Archimedis magis dilucidè tradendus est.

THEOR. I. PROPOS. XLI.

Figura solida sphæræ inscripta, quæ conicis superficiebus æquè altis continetur illi cono æqualis est, qui basim obtinet circulum æqualem superficiei figuræ inscriptæ, & altitudinem normali ad aliquod latus perpendiculariter demissæ.

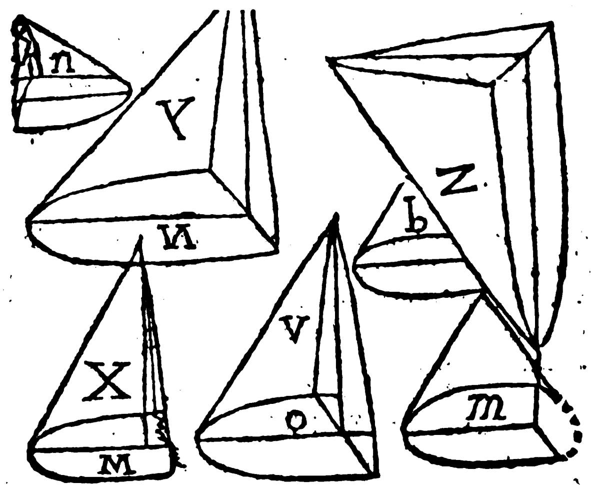
SIt figura solida, quæ solidis conorum contineatur segmentis V. g. cono BAC; & opposito BEC, circaque hunc conum circumuolutum intelligatur corpus LBECF; ita vt LBCF superficies annulus intelligatur planus sphęra inscriptus. Sic asseras de corpore LGBHF, & cæt. Deinde sit conus rectus Z, cuius basis circulus æquet sua planitie subtēsas planities omnium corporum sphęra inscriptorū, & altitudo sit radius. Dico hunc conū Z esse ęqualem inscripto corpori sphęra GAHD.



Probatur ex prop. 16. huius. Rhombus conicus BACB ex duobus conis aduersis super eandem basim CB ęquatur cono X altitudinem EI obtinēti, quę est linea à vertice coni in latus normaliter demissa, & etiam basim M superficiei coni BAC ęqualem. Item conus V erit æqualis cono concauo LBECF altitudinem habens lineam EK normalem ad latus eius LB à vertice deductam, & basim O superficiei LBCF annuli plani ex prop 18. huius ęqualem, tandem idem dicas de cono concauo LGEFH, quod habeat æqualem conum Y eiusdem altitudi-

 nis

nis ac linea EP normaliter à vertice E in eius latus demissa, & basim N æqualẽ superficiei planæ OLHF sphęrę superficiei subtensę ex 17.h. Et eadem asserenda de Rhombo BEDS, & concauis QLETS, & GEQTH, sunt vtpote cũ singuli sint singulis prędictis ęquales; Erũt igitur V.g. sex coni, duo x duo y duo



v, qui totam soliditatem corporis inscripti æquabunt. At basis coni z est æqualis omnibus simul basibus horum conorum; quia basis eius æquat, ex hypothesi superficiem totius corporis inscripti, quam, & bases omnium conorum similiter æquant altitudo verò est æqualis eorum altitudini. Ergo cum conus z ad omnes illos conos, vt basis ad basim referatur ex 5.h. cum basis ipsius ad omnes bases proportione ęqualitatis referatur, etiam conus z conis sex erit æqualis. Quare, & corpori solido sphæra inscripto æquabitur.

COROLLARIVM I.

IDem etiam dicendum de sectore aliquo solido V. g. LAEF, quod scilicet sit factus ex Rhombo conico BACE, & residuo LBECF. Nam si detur conus aliquis n, qui superficiei illius LBACF sua basi æquetur, & habeat altitudinem KE, iste æquabitur prædicto sectori: Siquidem habebit basem ęqualem basibus M, &, O conorum X, V eiusdem altitudinis; quam EK; quia basis M æquat superficiem BAC, & basis O superficiem LBCF, & has duas superficies æquat coni basis n, quare coni basis æquabit basim M, & O, quare cum sit eiusdem altitudinis conus n æquabit etiam conos x, & v, vnde, & sectorem LAFE.

THEOR. II. PROPOS. XLII.

Corpori ex conicis segmentis sphæræ inscripto conus æqualis, est minor recto cono, cuius basis superficiem sphæræ exæquet, & altitudinem obtineat radium: Conus autem æqualis eidem corpori, sed sphæræ circumscripto est maior illo cono recto, cuius basis æquet superficiem sphæræ, & altitudo sit radius.

PRob. Nã conus ęqualis corpori sphæræ inscripto habet altitudinem EK minorem, quam diameter EA, & basim vtpote æquantem superficiem corporis inscripti obtinet minorem, quàm basis, quæ æquat superficiem sphęrę, vtpotè, quod superficies inscripti corporis minor sit superficie sphæræ circumambientis.

Eodemque modo Prob. 2. pars, quia ille conus, qui ęquat corpus circumscriptum sua basi habet superficiem maiorem corporis circumscripti, quàm superficie sphæræ, & altitudo est E P æqualis radio EA; basis verò æquans superficiem sphæræ, & altitudo radius EA conum minorem constituit cono, qui æqualis sit basis corporis sphæram circumscribentis superficiei, & altitudinis eiusdem.

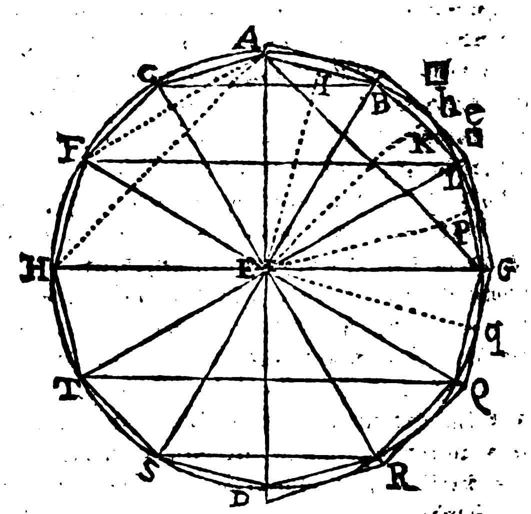
COROLLARIVM I.

ELlicitur etiam. Quod si detur conus habens pro basi circulum ęqualem superficiei sectoris sphęrę LAF, & alius habens pro basi circulum æqualem sectoris corporis circumscripti eidem superficiei; quod item conus hic posterior maior est primo; si habeant eandem altitudinem, nam superficies circumscripta sectori est maior superficie ipsius sectoris.

THEOR. III. PROPOS. XLIII.

Quælibet sphæra est æqualis cono habenti basim superficiei sphæræ æqualem, & altitudinem radio.

DEtur sphæra AGDH, & conus m, cuius basis æquetur superficiei sphæræ AGDH, & altitudo radio EA: Dico sphęram, & conum æquales esse quantitates.



Prob. Nam sphęra non erit, aut maior, aut minor ipso cono m: Ergo illi æquabitur.

Si verò aliquis asserat esse sphæram cono maiorem, sic ostendetur id esse impossibile.

Progress. 1. Inscribatur enim, & circumscribatur figura ex propos.14. Tract.23. adeo multiplicatis lateribus, vt spatium, quod inter sphæram, & figuram inscriptam intercluditur sit minus quàm differentia illa V. g. h, quæ inter conum m, & sphæram reperitur: Itaque hæc conica figura solida, vt IKP, & cæt. erit maior cono m; quia magis accedit ad sphæram, quæ ponitur maior conus m, cum minor si differentia inter sphæram, & inscriptam conicam figuram, quàm inter conum.

Progress. 2. consideretur deinde conus z, qui ex præc. obtineat basim æqualem superficiei corporis conici inscripti, altitudinem EP; iste conus vtique ex præced æquabit sui solidi-

te

te corpus conicum inscriptum: Verùm iste conus ex Coroll. prop. præc. minor est cono m ergo corpus quoque conicum sphæra inscriptum prog. 1. cono m minus erit: sed ostensum est maius igitur, maius, & minus, quod est impossibile.

Progress. 3. Dicat deinde aliquis sphęram cono m esse minorem, & circumscribatur aliqua conica fig. ex pr. 13. Tr. 33. quæ adeo constet multiplicatis lateribus, vt differētia solida e, quæ est inter sphæram, & se sit minor, quam differentia, quę est inter conum m, & sphæram, & iam fig. conica circumscripta minor erit cono m: siquidem minori differentia à minori sphæra differt, quam conus m prædictus.

Sit deinde conus z, qui constet altitudine E q, & obtineat basim superficiei conici corporis circumscripti æqualem; vt prop. 41. h. Hic itaque conus æquiabtur corpori conico circumscripto maiorque erit, quàm conus m ex propos. 42. cum suam basim consequatur maiorem. Ergo etiam figura conica circūscripta, quæ ei æquatur maior est cono m, sed supra ostensa est minor: Ideoque absurdè esset maior, & minor, quod esse nequit. Cum itaque conus obtinens basim superficiei sphæræ æqualem & altitudinem radio non possit esse aut maior, aut minor ipsa sphæra, illi omninò ęquabitur.

COROLLARIVM.

HInc est quod cum superficies sphærę ex ostensione prop. 43. Tract 31 sit quadrupla maximi circuli in sphęra inscripti: quod etiam conus iste æqualis sphęrę habeat basim huic circulo quadruplo maximi circuli ęqualem, & ideo consequetur basim obtinentem diametrum duplo maiorem, quam diameter sphæræ: nam sic area circuli ex prop. 36 lib 6. & 6. lib. 2. erit quadrupla circuli maximi in sphęra inscripti. Vnde etiam patet. Quod sphęra est ad conum GAH sibi inscriptum, vt conus qui consequatur diametrum GH pro radio suę basis, & altitudinem radiū BA cum enim iste conus æquet sphæram. ad eundem conum referetur eadem proportione, ac ipsa sphęra.

COROLLARIVM II.

HInc etiam est sphæram esse ad conum sibi inscripum, vt circulus ex radio GH ad circulum ex radio HE: nam conus ex radio GH ad conum ex radio EH habentium eandem altitudinem EA ita referuntur, vt bases, conus autem ex diametro GH, & altitudine EA æquatur sphærę.

THEOR. IV. PROPOS. XLIV.

Cuiuscunque sectoris sphæræ soliditati æquatur illa conus, qui basim obtineat æqualem superficiei portionis sphæræ, & altitudinem æqualem radio.

SIt sector LBACGFE, & conus reperiatur aliquis n, qui basim consequatur æqualem superficiei LBACF portionis sphęrę, nempe ex prop. 46. Tr. 31. ductam radio subtensa arcus FA, & altitudine EI. Dico hunc conum esse æqualem soliditati sectoris LAFE.

Probatur. Nam sector solidus sphęræ, nec maior erit, nec minor prędicto cono n. Ergo ei ęquabitur.

Quod verò cono sector non sit maior, ostenditur: si enim sector cono maior est figura conica sectori sphęrę inscribatur, adeo multiplicatis lateribus, vt differentia h, quæ inter ipsam est sphęræ sectorem mediat sit minor, quam illa, quæ inter conum n, & sectorem reperitur: Itaque ista figura cono n maior erit cum magis in quantitate ad sphęrę sectorem maiorem ipso cono accedat ob minorem differentiam inter se, & sphęram.

Prog. 2. Fiat deinde conus aliquis æqualis soliditati corporis conici in sphęra inscripti, iste conus erit minor cono n; cum constet basi minori vtpote quod æquetur superficiei corporis sectori inscripti; coni vero n basis superficiei portionis sphęrę maioris: habeat quoque altitudinem minorem EK, quam conus n obtinens altitudinem EL. Quamobrem cum iste conus sit minor cono n, etiam figura conica inscripta sectori LAFE ipsi cono ęqualis erit minor cono n. Itaque esset figura conica inscripta sectori maior quidem ex primo progr. minor ex secundo cono n, quod est absurdum.

Progr. 3. At si aliquis putet sphęram cono esse minorem; Tunc circumscribatur sectori LAFE figura conica, adeo multiplicatis lateribus, vt sit differentia e inter ipsam, & sphæram minor, quam ea, quę est inter conum n, & ipsam sphęram, & iam ista figura conica cono n minor erit; cum minor differentia interponatur inter sphęram minorem cono n, & seipsam.

Progr. 5. At fiat conus alter ęqualis figurę conicę circumscriptę; iste conus maior vtique erit cono n: siquidem constat ex altitudine ęquali EQ, & basi maiori, quę est ęqualis superficiei figurę conicę circumscriptę sectori, & ideo maior superficie LAF sphęrę, cui ęquatur ex thesi basis coni n, & ideo cum constet conus hic ęqualis soliditati sphęrę conicę circumscriptę sectori basi maiori, eademque altitudine, maior erit. Cum itaque sit maior conus iste cono n, etiam figura conica huic ęqualis sphęrę sectori circumscripta cono n maior erit; sed progr. 3. ostensa est minor: Ergo esset maior figura conica circumscripta sectori cono n, & simul minor, quod esse nequit. Cum itaque sine absurdo sector LAFE, nec maior, nec minor esse possit cono n, ipsi ęquabitur.

COROLLARIVM I.

HInc patet quomodo possit cognosci quantitas LAFE sectoris sphęrę data sectione LF, & subtensa AF, nam cùm iam cognoscamus basim coni n ex prop. 46. Tr. 31. quę ducitur radio subtensa AF, & altitudine AE si constituamus conum, ex hac basi radio AF, & altitudine AE istius coni cognita soliditas, quæ est pars tertia cylindri eiusdem altitudinis, & basis ex prop. 7. h. etiam sectoris sphęrę quantitas inotescet.

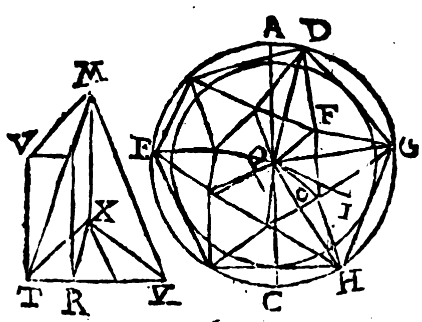
COROLLARIVM II.

HInc quoque exeret quantitas portionis sphæræ. Nam cum habeamus notum diametrū LF, etiam obtinemus basim eius diametro ductam ex prop. 3. tract. 30. datur quoque altitudo coni linea in FL terminans educta à centro E; vnde conus constituetur tertia. sc. pars cylindri eiusdem basis, & altitudinis; Si ergo hunc conum à sectofectore LAFE subducamus, erit nota sphęricę portionis LAF soliditas; ex qua etiam venabimur soliditatē residui LGHF, & si sit segmentum RLFS subductis duabus portionibus LAF, & RDS idem consequemur.

THEOR. IV. PROPOS. XLV.

Omne corpus circa sphæram circumscriptibile æquale est Parallelepipedo, cuius altitudo sit semidiameter, basis verò sit æqualis tertiæ parti superficiei ipsius figuræ circumscriptæ.

Sit sphęra in ABCG, eique circūscribatur corpus quoddam V. g. triangularibus superficiebus constans, vt sunt circumscriptæ eius medietati quę sunt GDF, & QGF, & GQH, & cæt. Dico, quòd hoc est ęquale parallelepipedo, quod habeat pro basi tertiam partem eius superficiei, & pro altitudine semidiametrum.



Probatur. Nam corpus circumscriptibile sphęræ est illud, quòd habet superficies tangētes sphęram; à puncto verò contactus ad centrum sphęrę, linea ducta est radius, & ex pr.2.tr.23. est perpēdicularis illi superficiei, vnde si ab angulis alicuius superficiei illius corporis V. g. GHO ducātur rectę ad centrū sphęrę Q fiet pyramis GOHQ, cuius altitudo erit semidiameter IQ. Omnis verò pyramis est tertia pars prismatis ex dictis ad eādē altitudinē & in eadē basi: Quare si tertia pars basis GHO assumatur, & ad eādē altitudinē QI fiat prisma MVTRX hoc erit æquale toti pyramidi TMNX, quam suppono ęqualem, & similem pyramidi GOHQ. At si bases omnes, vt TRX redigantur ad vnam basim ęqualem quadrangulam ex prop.18.Tract.19. quę sunt tertię partes basium pyramidalium, erit illa basis ęqualis tertię quadrangulę parti basium omnium simul, quę subtendunt omnes pyramides polygoni circumscribentis sphęram, & si constituatur super eam basim parallelogrammam Parallelepipedum ad eleuationem prismatis TRXVM erit omnibus prismatibus quale est vnum ex ipsis TRVMX quę singulas pyramides ęquant ex pr. 22. part.1.h. ęquale, & consequenter erit ęquale omnibus pyramidibus. Vnde etiam ipsi polygono circà sphęram descripto, quare parallelepipedum, cuius basis ęquet tertiam partem superficiei polygoni, & semidiameter eius altitudinem mensuret, erit ęquale ipsi polygono, quod erat ostendendum.

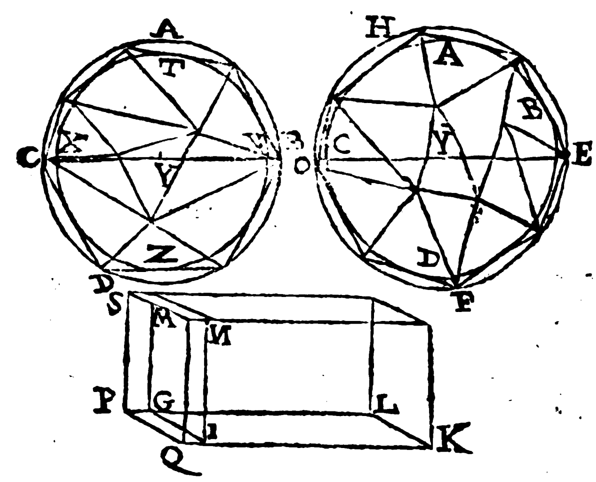
THEOR. V. PROPOS. XLVI.

Sphæra qualibet æqualis est solido rectangulo comprehenso sub semidiametro sphæræ, & tertia parte ambitus sphæræ.

Sit sphęra ABCD, & solidum rectangulum LKMN cuius basis LKGI, ęquet tertiam partem superficiei sphęrę propositę, altitudinem verò IN mensuret eius radius CY. Dico quòd sphęra proposita est ęqualis rectangulo solido LKMN.

Probatur. Nam, si non est ęqualis sphera solido, erit, aut maius illud solidum, aut minus ipsâ sphęrâ: sed nec maius, nec minus esse potest. Ergo ęquale solidum erit ipsi sphęrę.

Nam si maius est, erit ergo ęquale alicui alteri sphęrę maiori ea proposita BACD, vel si contendas æqualem assignari non posse, assignabitur saltem aliqua maior proposita, quæ nec solidum omninò



exęquet, sed inter vtramque magnitudinem consistat: Sit ergo hæc sphęra HEFO, quæ in aliquo superet sphæram propositam BADC, & ideo ambiet illam, & tamen sit minor solido LKMN. Quo posito circumscribatur sphæræ minori Polygonum, quod sphæram maiorem non excedat; Id enim posse fieri supra ostendimus propos.13.Tract.33. fiatque solidum rectangulum LKQS, cuius basis LKPQ, sit æqualis tertiæ parti superficiei illius polygoni, & altitudinem eius mensuret sphæræ radius, quod ex præmissa erit æquale ipsi poliygono.

Parallelepipedum itaque LKSQ æquale polygono, habebit basim maiorem LKPQ, quàm LKGI basis illius solidi, quod nos dicimus sphęrę æquale cū illa sit æqualis tertiæ parti polygoni; hæc tertiæ parti sphæræ in polygono existentis, vnde cum sit maius continens, quā contentū erit etiā maior superficies poligoni continentis, quam sphærę ABDC cōtentę, & cōsequēter maior erit tertia pars superficiei polygonę, quā superficiei globosæ sphæræ, & basis LKPQ æqualis tertiæ parti polygonæ superficiei maior erit, quam basis LKGI tertiæ parti superficiei globosæ æqualis, & tandem solidum sub eadem altitudine SK super basem maiorem LKPQ maius erit, quam solidum KMLK super basem minorem LKGI, sed hoc solidum dicebatur ab aduersarijs aut maius, aut æquale sphæræ maiori EHOF; Ergo sphęra maior erit minor, quā solidum LKSQ rectangulum super basem maiorem LKPQ; sed hoc ex constructione est æquale polygono contento in sphæra maiori, ergo esset sphæra continens minor contento polygono, quod est absurdum.

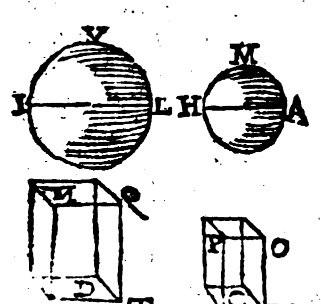
Pro-

Probatur quoque, quod minus esse nequeat solidum prædictum LKMN sphæra proposita ABCD. Circa idem centrum Y describatur sphæra, aut æqualis, aut non minor ipso solido LKMM, nec maior sphæra proposita BACD, sed inter vtramq; magnitudinem consistens, & sit TVXZ per aduersarios. Huicque sphæræ assignatę XVXZ circumscribatur rursùs polygonum non excedens sphæram primo propositam BACD ex Cor. pr. 13. tr. 3?. fiatque deinde ex præced. basis æqualis tertiæ parti superficiei polygonæ, quæ sit LKPQ, & super eam ad altitudinem radij YC parallelepipedum LKS. Cum ergo superficies polygoni huius sit minor, quam superficies sphæræ continentis ABCD, etiam eius tertia pars erit minor, quam tertia pars eiusdem sphæræ continentis, & ideo erit quoque minor LKPQ æqualis tertiæ parti superficiei polygonæ, quam basis LKGI, quæ æqualis ex hypothesi est tertiæ parti superficiei conuexæ sphęrę CABD vnde parallelepidum LKS licet maius esset, vt æquans KTVZ maiorem, quam KMLN esset minus parallelepipedo LKMN super illam basim ad eandem altitudinem erecto, quod in illo continetur, quæ omnia absurda sunt, cum ergo parallelepipedum LKMN, nec minus esse possit, nec maius sphæra BACD illi erit æquale.

THEOR. VI. PROPOS. XLVII.

Sphæræ sunt inter se in triplicata ratione diametrorum, radiorum, & peripheriarum.

INspiciantur duæ sphæræ AMH, & LVI. Dico eas ad inuicem referri in triplicata ratione diametri AH ad LI, vel radij, vel peripheriæ AMH, LVI, fiant eis parallelepipeda æqualia C, & D; quorum latera OP, & QN sunt æqualia semidiametris AH, LI. Certum est hæc esse similia ob basium rectangula



trienti superficierum sphæricarũ æqualia ex 46. h. sc. circulis ex diametris LH, & LI, tamquam radijs ex 43. tr. 31. & ideo ex tr. 31. prop. 3. triangulis ex ambitu, & radio eorum AH, & LI, sc. comprehensaĩ sextante ambituum ex radijs HA, & LI ductorum sc. trienti HMA, & LVI peripheriarum, quæ sunt dimidium ambituum ductorum radijs HA, LI ex 43. lib. 6. Quare ex eadem 43 & 18. lib. 5. OP, OX, XD erunt proportionalia lateribus QN, QT, TD, vtpote radij diametri AH, LI, & trientes peripheriarum AMH, LVI. Ergo ex def. 3. tr. 34. parallelepipeda erunt similia, ideo ex 14. p. 1. h. in triplicata ratione laterum, idest radij PO ad radiũ QN, vel trientis peripherię OX ad QT, & ideo peripheriarum ex 18. l. 5. vel diemetri OX ad diametrum TD. Quare etiam sphęrę ęquales parallelepipedis HMA, & LVI erunt in triplicata ratione peripheriarum ex 7. l. 5. vel radiorum, vel diametrorum.

EXPENSIO XI.

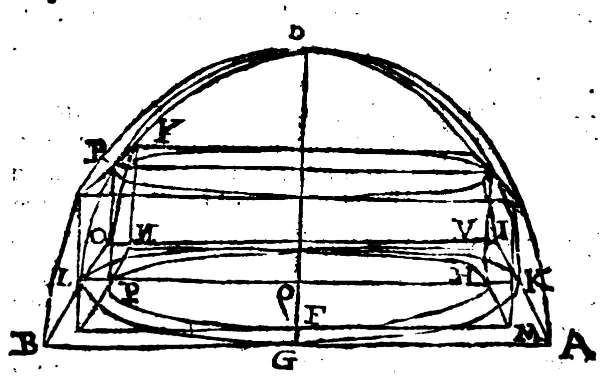
De sphæra, vel sphæroidis quadriformis, & vngulæ Cylindricæ soliditate.

SPhera quadriformis est figura solida, quæ formatur à plano quadrato, vel rectangulo: sed deinde omnia plana, quæ parallela lateri, & basi perpendicularia ipsi plano per corpus illud ducuntur, aut circuli sunt, aut Ellipses. V. g. super quadratum AIOB, sit formatum tale corpus AIOBD, cuius sectio KDL normalis basi AIOB, & parallela lateri AB sit circulus, vel ellipsis, illud corpus erit sphæra quadriformis, si sectiones sint circuli, vel sphæroides quadriforme, si sectio sit ellipsis; de quo corpore soliditas cubica quærenda est.

THEOR I. PROP. XLVIII.

Sphæra ita est ad sphæram quadriformem, vel sphæroides ad sphæroidem quadriforme, vt circulus aliquis, vel ellipsis ad quadratum, vel rectangulum ambiens bases ipsorum corporum.

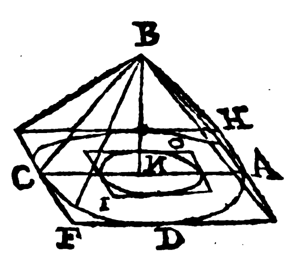
SIt sphęroides quadriforme AIDOB, vel eius medietas supra descripta, cuius basis rectangula AIOB, & in ea hemisphęrium KLGD, cuius basis circulus KGL. Dico, quod sphæra KGLD, ita est ad sphæram quadriformem AIOBD, vt circulus AGL ad quadratum AIOB.



Probatur. Inscribantur enim tum in hemisphærio, tum in hemisphęra quadriformi in hac parallelepipeda in illa cylindri ęqualis inuicem altitudinis V. g. parallelepipedum MNY, & cylindrus HEPR per continuam subdiuisionem radij DQ; eritque quicumque circulus ad circumscriptum sibi quadratum in eadem proportione V. g. circulus KGL erit ad quadratũ AO, vt circulus HFP ad quadratũ MN, & sic dicas de omnibus alijs quibuscumque, cum omnis circulus ad alium circulum, vt ex propos. 40. lib. 1. constat, V. g. circulus KGL sit ad circulum quemcumque HFP, vt quadratum AO ex diametro HL ad quadratũ MN ex diametro HP, quod est etiam dicendum de Ellipsibus ex propos. 27. Tract. 30. vnde *permutando* sequitur, quod sit circulus KGL ad quadratum AO, vt circulus HFP ad quadratum MN, vel Ellipsis KGL ad rectangulum ambiens AO, vt Ellipsis HFP ad rectangulum se circundãs MN, & cæt. Cum ergo cylindri super circulos, vel super Ellipses erecti sint æqualis altitudinis: ac parallelepipeda super quadrata, vel rectangula ex diametris ex Thesi dicent eam proportionem, quàm bases; ideoque omnes cylindri, qui sphęra, vel sphæroide inscriptibiles sunt ad omnia parallelepipeda sphęra, vel sphæroide quadriformi inscriptibilia dicent eãdem proportionem, quam circulus, & basis, cui cylindri innituntur, dicit ad bases rectangulas parallelepipedorum ex prop. 5. h. Omni itaque inscriptione possibili tum Parallelepipeda in sphæra, vel sphæroide quadriformi, tum cylindri in sphæra, vel sphæroide multiplicentur, necesse est, vt adæquent parallelepipeda, quidem sphæram, vel sphęroidem quadriformem mē; Cylindri autē sphæram, vel sphæroidē alioquin, si non omninò implerent,noua,& minutior inscriptio posset institui contra hypothesim, quā posuimus, omnia esse inscripta, quæ poterunt inscribi. Cum ergo omnes cylindri sphæram,vel sphæroidem æquent, omniaque parallelepipeda sphęram,vel sphæroidem quadriformem,& omnes cylindri inscripti sint ad omnia parallelepipeda inscripta, vt bases circulares ad bases rectangulas, illæque circulares habeant ad rectangulas eam proportionem, quam aliquis circulus ad aliquod quadratū ambiens, vel aliqua ellipsis ad rectāgulum circumscriptum. Erit etiam proportio sphæræ, vel sphæroidis ad sphæram, vel sphæroidem quadriformem rectāgula basi sitam,quę maximum circulum, val maximam ellipsim sphęroidis ambiat, vt ipse circulus, vel ellipsis, ad quadratum, vel rectangulum ambiens.

COROLLARIVM.

* ELlicitur. Quod cum ex pr.43.Cor.h.conus, qui sit eiusdem altitudinis,ac radius,& habeat diametrum sphæræ pro radio æquet ipsam sphæram: Quod etiam Pyramis eiusdem altitudinis, ac radius sphærę, quę habeat basim, cuius latus sit duplus diametri erit ęqualis sphęrę quadriformi. Nā ex 6 h.conus quadruplus coni sphæra inscripti ABCD erit ad pyramidem HFB eiusdem altitudinis in basi HF circulum ADC ambienti,vt circulus ADC ad quadratum HF;sed vt ADC circulus ad quadratum HF, ita est OI circulus ad quadratum inscriptū OI ex 40.l.6. & ita est sphęra in circulo sita ad sphęram quadriformem in quadrato OI sitam ex præc. Ergo conus ADCB erit ad pyramidem HBF, vt sphæra in circulo OI sita ad sphęram quadriformē in quadrato OI collocatam ex 16.l.5. Verùm conus ADCB ęquat sphæram,cuius circulus maximus OI, ergo ex 12. lib.5. etiam pyramis HFB æquabit sphęram quadriformem in OI sitam.

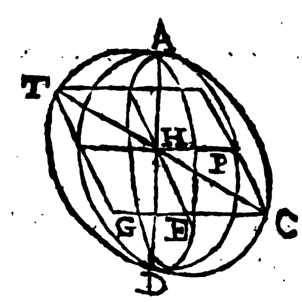


Idem dicendum de sphęroide, & de sphęroide quadriformi; Nam sicut sphęroides æquat conum cuius basis quadruplum sit basis coni inscripti; & eadem altitudo; sic, & sphæroides quadriforme ęquat talem pyramidem. Quod etiam intelligendum est si sit basis ellipticę, & ideo sphæroidis quadriformis basis non sit quadratum, sed rectangulum; vt quilibet per se poterit arguere cum ostenderimus quodlibet sphęroidem esse ex propos.37. Tract h. Cor.2. ęquale cono, cuius basis sit quadrupla basis suę, & eadem altitudo.

THEOR I. PROPOS. XLIX.

* *Vngula Cylindrica est octaua pars sphæræ, vel sphæroidis quadriformis.*

VNgula Cylindrica est portio cylindri abscissa semicirculo semiellipsi, & portione superficiei cylindricę contenta. Sit itaque hemisphęrium quadriforme AT DC,& diuidatur acto per arcū diagonaleq; CT plano, iam illud planum erit ellipsis ACDT ex prop 13. tract.25. cum superficies AEDC perpendiculares sint circuli plano AED; Ergo frustū sphærę quadriformis ACEDH continebitur ab ellipsi CAD portione cylindrica CADE, & circulo AED: Ergo erit vngula cylindrica: Est autem CAED cylindri superficies; quia est normalis circulari plano AED: Ergo soliditas vngulę æquabit octauam partem sphęrę quadriformis: siquidem triangulum EHC, super quod innititur CAEDH corpus vngulare est octaua pars totius basis, & maximi sphęrę quadriformis quadrati TC, & singulæ cæteræ partes solidæ, quæ reliquis



triangulis collocatę sunt, habeant omnes superficies similes,& ęquales huic,vt ex definitione sphæræ quadriformis satis apparet. Quod & ostenditur nam ex prop.28.Tract. huius corpora conformia æqualis altitudinis inuicem sunt, vt bases, sed bases hic sunt æquales HEC, HPC, & cęt. & altitudo omnium æqualis HA,HD, ergo & corpora conformia erunt æqualia. Sed sunt octo in quæ sphæra quadriformis diuiditur, vt sunt octo triangula ex quatuor quadratis HC, HG, & cæt. consurgentia bifariam diuisa. Ergo quodlibet corpus vngulare erit octaua pars sphæræ quadriformis, quod,& poteris asserere proportionaliter de vngula alicuius cylindri, qui basim consequatur ellipticam, & ipsius vngulæ altitudo sit, aut maior, aut minor, quam diametri: nam eodem pacto erit octaua pars sphæroidis quadriformis talem basim, & altitudinem obtinentis.

COROLLARIVM.

* HInc ellicitur vngulam cylindricam esse octauam partem pyramidis quadrangulæ, cuius altitudo sit eadem, ac radius, & latera cōsequatur dupla basis sphęrę quadriformis,cuius pars est, ideoque AC EDH vngulam esse æqualem pyramidi, cuius altitudo HA, & basis TGC: nam basis TGC triāgularis est subdupla basis TC quadrāgulæ, quæ est subquadrupla basis illius,cuius latus sit duplus lateris GC, & altus duplus lateris TG, & ideo CGT erit suboctupla basis illius pyramidis, quæ sphæram quadriformem æquat; ideoque, cùm, & hæc pyramis in CGT basi sita,& altitudinis HA sit vt vngula cylindrica ACDEH, ipsi sphęrę quadriformi,

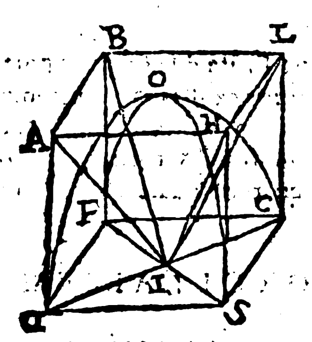
idest

idest eidem, vt 1. ad 8. hæc pyramis basis CGT altitudinis HA; & vngula cylindrica CAEDH æquabutur ex 7. lib. 5.

THEOR. III. PROPOS. L.

Sphæra quadriformis medietas æquat parallelepipedum eiusdem altitudinis, & eiusdem quadratæ basis, cui dempta sit pyramis eiusdem basis, & altitudinis.

Cogita in basi CSFD quacumque rectangula sphæræ quadriformis DCFOS medietatem, cuius altitudo sit DA in parallelepipedo CA existentem. Ex præc. cum tota æquet pyramidem, cuius basis sit quadrupla ipsius basi CFSD, & altitudo DA, idest quadruplum pyramidis BAHIL, dimidia æquabit pyramidem, cuius basis sit dupla basi CFSD: & altitudo eadem; nam hęc item erit

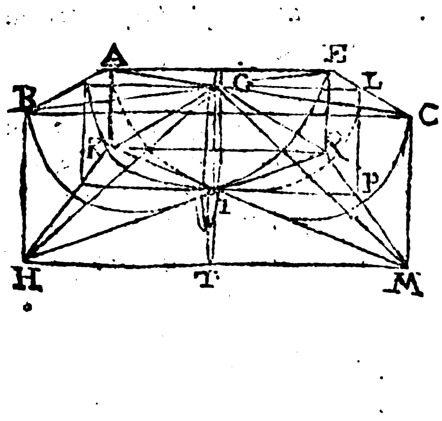


dimidia quadruplę pyramidis ex 24.par.1.h.& ideo duplum pyramidis LHBAI Cubus verò, vel parallelepipedum vacuatum pyramide LBAHI est duplũ pyramidis ipsius LHBAI, quia parallelepipedum est duplum prismatis eiusdem basis, & altitudinis, & prisma tale est triplũ basis triangularis, & ideo vt 3. ad 2. vel sesquialter pyramidi duplæ, quæ habet quadrangulam basim; vnde parallelepipedũ LSBD duplum prismatis, erit ad pyramidem LBAHI, vt 6. ad 2. ablata ergo ipsa pyramide, quæ est 2. erit reliquum ad ipsum 2. vt 4. ad 2. nempe duplũm. Quare ex 7. l.5. cubus, & sphęra æquabuntur cum eidem pyramidi LBHAI sint, vt 2. ad 1.

THEOR. IV. PROPOS. LI.

Inuolucrum semisphæra, vel semisphæroidis quadriformis est æquale pyramidi quadratum eius maximum pro basi habenti, & altitudinem eandem.

Sit semisphęrę, vel semisphęroidis quadriformis inuolucrum ABICMQEKH, quod nascitur dempta ipsa sphæra, vel sphæroide quadriformi à parallelepipedo circumscribente CQBK.& pyramis quadrata GMQKH, super maximam basim QH,



& altitudinem eandem IG. Dico hanc pyramidem inuolucro prędicto esse æqualem.

Probatur. Nam hæc pyramis MQKHG est ad cubum, vel parallelepipedum CAQH, vt 1 ad 3. ex prop.22. huius, cum sit dupla pyramidis triangularis, quæ est prismati, nempe dimidiato parallelepipedo, vt 1. ad 3. & ideo parallelepipedo, vt 1. ad 6. Sphæra verò, vel sphæroides quadriforme est ad hanc pyramidem ex ostensis, vt 4. ad 1. cum sit vt pyramidis ęquealta super basim quadruplo maiorem, idest pyramis quadruplo maior ad ipsam pyramidem inscriptam GQMKH, & hinc hemisphęrium quadriforme, vel hemisphęroides erit ad GQKMH, vt 2. ad 1. vtpote dimidium corporis integri.

Ideoq; ex 2.pr.tr.17 parallelepipedo, cui inscriptum est subsesquialterum, sc. vt 2. ad 3. Si igitur ipsa hemisphæra, vel hemisphęroides, quæ est, vt 2. ad 3. ad ipsum parallelepipedum auferatur, remanebit parallelepipedum $\frac{1}{3}$ nempe corpus quoddam ęquale pyramidi KMQHG basim habentis in basi maxima hemisphęrij, & altitudinem eandem, quę & ipsa parallelepipedi eiusdem AMEH est $\frac{1}{3}$.

COROLLARIVM I.

Hinc est quartam partẽ inuolucri hemisphęræ, vel hemisphęroidis CLMPTI esse æqualem quartę parti pyramidis QMKHG, nempe pyramidi MPTIG ęquari. Est hoc CLMPTI etiam inuolucrum vngulę cylindricę; siquidem MIPLC est dimidium inuolucrum. Quòd ICLGMP sit dimidia vngula cylindrica, & ex dictis constat, quæ tota resultaret addito alio hemisphęrio, quia continetur quartis circuli IL superficiei cylindricę ILC, & Ellipsis IGC.

Cum ergo pyramidis pars PTMIG sit quarta pars pyramidis MQGKH & inuolucri pars quarta CLMIPT sit totius inuolucri æqualis toti pyramidi; inuolucrum prędictum, & pyramis PMTIG ęquabuntur.

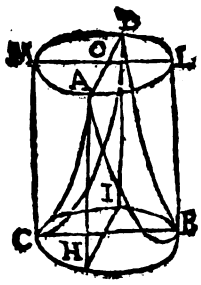
COROLLARIVM II.

Elicitur quoque. Residuum vngulæ hinc faciliter posse cognosci si cylindro in quo est sit ęquale prisma ęqualem habens basim triangulã, & eandem altitudinem, si ab hoc prismatis dimidio auferatur soliditas vngulæ nempe pyramis ex dimidio basis sphęrę quadriformis eiusdem basis, & altitudinis, remanebit soliditas residui vngulę. Igitur si detur cylindrus DABIHC, & ab eius dimidio DABML auferatur solliditas vngulę DALB remanebit residuum vngulæ ACIHB, hoc autem fit prædicto modo vtendo corporibus æqualibus ipsis vice ipsorum.

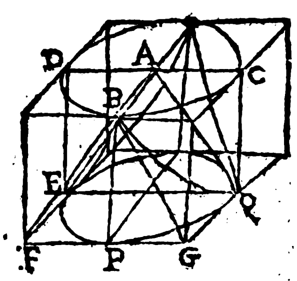
PROBL. I. PROPOS. LII.

Soliditatem Lunularum, & inuolucri ipsarum reperire.

Ex prędictis facilè soliditas duorum corporum, quę in fornicibus maximè in vsum veniunt, reperitur, nempe Lunulę, & eius inuolucri, est autem Lunula, solidum corpus quoddam in acutum desinens ex ablatione duarum semiungularum ex dimidio cono per axem enascens, sic corpus ABMC ablatis duabus semiungulis MOAC, & QABL erit corpus quoddam in communi vsu loquendi apud Italos Architectos Lunula appellatum, & est maximè in vsu in concamerationibus cubiculorum.



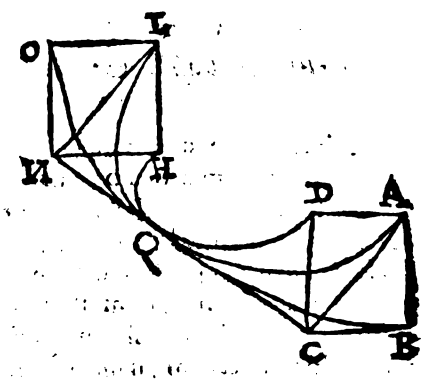
Huius igitur corporis soliditas faciliter inuenietur ex præc. Cor. Nam semicilindri LAMBHC inueniatur soliditas ex prop. 3. h. Coroll. & ab ea auferatur vngula integra, idest duę semiungulę LOBA, & OMCA auferendo pyramidē ex pr. 49. Cor. æqualem, residua erit soliditas lunulę BACH.



Inuolucrum autem lunulę est illa soliditas, quæ enascitur ablata lunula à prismate ea circundante, sic si intelligatur semicilindrus CBDQPE, & circa illud parallelepipedum CGFD, & agantur duo plana per BA, & FE alterum, alterum per BA, & GQ simul duæ semiungulæ ABQ, & ABE formabuntur, & lunula QPBE ex sectione cylindri, ex sectione verò parallelepipedi tria prismata CABGQ, & BAGQFE, & BADFE, quorum duorum duo comprehendent vngulas; sc. CABGQ, & BADFE; medium verò ęquale illis duobus lunulam continebit; eiusque inuolucrum erit. Igitur si ab hoc prismate GQBAEF auferat lunula ABQPE erit inuēta inuolucri vngulę soliditas, eritq; corpus contentum semicirculo, vel semiellipsi QPE, & superficie cylindrica ex ipsa consurgente, & planis superficiebus GQB, BFE triangulis mixtilineis, sicut & GQP, PFE, & tandem triangulo GBF. Si ergo prisma comprehendens inuolucrum vngulæ BAEQFG sit positum super dimidiam basim EQFG parallelepipedi cylindrum ambientis, & eiusdem altitudinis DB, erit dimidium dimidij ex pr. 2. tract. 24. idest quarta pars totius. Quare à quarta parte parallelepipedi cylindrum ambientis à cuius sectione vngula enascitur, auferatur lunula EPBQA residuum erit inuolucrum lunulæ, quod exquiritur.

COROLLARIVM I.

* Elicitur, quod si duo ex istis semi-inuolucris ponantur auersis prismatum acuminibus efformabitur quarta pars inuolucri fornicis cruciformis, quatuor lunulis in centrum conuenientibus constantis, vt est in fig. hic apposita, in qua ABDCQ est lunulę inuolucrū, quo cōponitur semi-inuolucrū ADCQ, sed auersis acuminibus C, A prismatū ambientium, ità vt acumen huius reperiatur vbi basis alterius, namque DAC correspondet plano FPG superioris figuræ QD est quarta circuli PQ, & QA est quarta ellipsis BQ, sic ACB refert planū FBP sed inuerso acumine C, vt eueniret si ec planum superioris figuræ cylindrica superficie esset sectū, quę incideret in ellipsim BQ. Vnde QB circulus est, qui cum ellipsi QA facit latera curua huius corporis QCA, & QCB, triangulis mixtilineis contentum, triangulo rectilineo CAB, & superficie cy-



lindrica ABQ. Et ita dicas de alia portione NOLHQ si itaque quatuor ex istis QDABC componantur, ita vt in vnam basim conueniant, cuius quarta pars sit DACBQ cruciformis fornix erit compositus in acuminibus quatuor, quale esset acumen Q, mixum.

COROLLARIVM II.

* Hinc etiam patet, quod si quatuor corpora inuolucri DABCQ componantur; ita vt quatuor quadratę superficies basim sternant, vt FCIH, & BCFE, & cęt. & coniungantur in idem acumen O, & penes quadrantes OF, OL, OB, OI ęquales, vel ęquales, & similes partes quartas ellipsium in vnū, vt vides in fig. pr. seq. cōponantur, efformabitur corpus acuminatum AHO, ex superficiebus cōcauis consurgens EOH, EOA curuitate globosa intus vergente, & si costę OE, OH, OD, OA intelligantur ablatę, & redactū in figuram, vel octangulam, vel quācumque aliam, vel etiam ad figuram prorsùs circularem efformabitur corpus solidum. Quod poterit apellari pyramis, si rectilinea sit basis, vel conus inflexis constans superficiebus, si sit circularis.

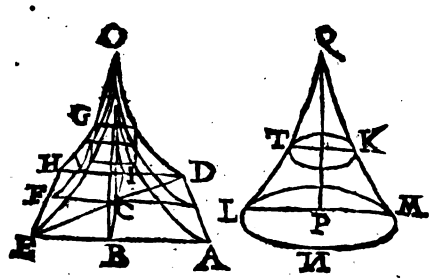
THEOR. VI. PROPOS. LVI.

**Prisma quadrangulæ basis se habet ad conum circularis basis, quæ inflexis superficiebus vestiantur, & cuius latus diametro basis coni æquale sit, & superficies sint simili, & æquali curuitate flexæ, & ad eandem altitudinem lata, vt quadratum basis prismatis ad circulum basis coni.*

Sit prisma supra explicatum Cor. 2. AHO, cuius altitudo CO ęqualis altitudini PQ, latus AE, vel LF equale diametro ML equetur; curuitas verò plani OLF per axem laterum, vt OE, & LO, ducti sit ęqualis, & similis, nempe desumpta ab eadem fig.

V. g.

. V. g. circulo, seu ellipsi, ac curuitas MKQ, vel QTL plani MQL per axem ducti, ita quod NMQL corpus intelligatur inscriptibile in corpore AOH, & singula plana circularia, vt KT inscriptibilia, in quibuslibet quadratis æquialtis, vt IG. Dico, quod corpus AOH erit ad corpus NMQL, vt quadratum AH ad circulum MNL.



Probatur autem prorsus eodem argumento, quod adduxi ad ostendendam proportionem sphæræ circularis ad sphæram quadriformem, nempe eam, quam habet basis quadratum circundans ad circulum, nempe eadem esse proportionem omnium quadratorum ad omnes circulos inscriptos, quam huius quadrati, ad hunc circulum inscriptum, ideoque esse quadratum basis AH ad circulum basis inscriptæ, vel inscriptibilis LNM, vt KG quadratum ad circulum HT sibi incriptum, vel inscriptibile ex prop. 41. lib. 6. & sic de quocumq; alio, & ideo æquealta parallelepipeda in quadratis, ad equealtos cylindros in circulis inscriptis sitos ex propos. 22. h. obtinere eandem propositionem, quam basis quadratum AH ad circulum basis LM: Quare, vt ibi conclusimus, etiam ipsę figuræ solidæ, nempe AOH ad MNQL eandem proportionem dicet; quam AH basis quadratum ad MNL circulum.

COROLLARIVM I.

HInc est, quod si bis accipiatur soliditas Lunulæ, & auferatur à duplici prismate eiusdem altitudinis, & basis rectangulæ, quæ ambiat semicirculum basim lunulę enascetur geminũ inuolucrũ; quod præc. Cor. I. adnotauimus. Vnde etiam enascetur ex 2. Cor. pyramis flexis constans, qua habita poteris arguere à quadrato basis HA ad circulum inscriptum LNM, ita soliditas pyramidis flexis constans ad aliud, & inuenietur conus prædictus circularis LQMN.

COROLLARIVM II.

ELicitur etiam, quod dicitur de tota pyramide idem dicendum esse de singulis segmentis solidis æquealtis, quod nimirum sit ad inuicem pyramis ad inscriptum conum, vt quadratum basis ad circulum inscriptum. Quod, & verificatur si comparetur quadrangularis ad pyramides cuiuscumque alterius figuræ inscriptas.

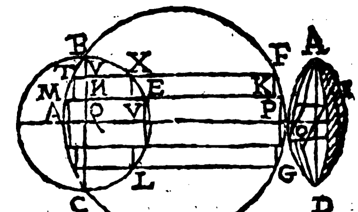
COROLLARIVM III.

QVod si prisma flexis contentum non obtineat pro basi circulum, sed figuram aliquam ex regularibus eodem argumento, ex 26. lib. 6. concludes esse prisma flexis contentum ad conum ex basi polygona flexis contentum, vt quadratum ad polygonum. Et idem erit si HA sit rectangulum, & LNM ellipsis

THEOR. VII. PROP. LIV.

Sphæra quadriformis est ad metam quadriformem quadratam, vt basis quadrata sphæræ ad basim quadratam metæ. Pariterq; sphæra ad metam circularem, vt sphæræ basis circulus ad metæ basim circulum.

MEta est corpus quoddam, vel quadratum, vel rotundum, nempe super basim quadratum, aut circulum erectum, quod ex duobus segmentis circuli per axem basi normalem ducti formatur, & dicitur meta, eo quod antiquitùs metæ ad quas, qui primi perueniebant cursu victoria potiebantur, illa figura constabant. Huius corporis figura est AD, cui modulum præbet duplex segmentum BAC circuli BACGF, quę simul vnita penes subtensam BC vel AD faciunt superficiem APDI, quæ secta basi IO, & ab eius singulis lateribus ductis superficiebus quatuor curuatis iuxta ambitum AID formatur. Diximus ergo, quod si ex circulo BELC sit erecta sphera quadriformis, quod hæc se habebit ad metam quadratam, vt quadrata basis sphæræ ad quadratam basim metæ.



Sit igitur segmentum BAC dimidium plani metam formantis, & basis quadratæ quartæ parti sit latus QA, & BVC circulus sphæræ quadriformis modulus, cuius quadratæ basis quartæ parti sit latus VQ, & BFPGC circulus residuus ex segmento BAC metæ genitore, in quibus plurimæ lineæ parallelæ ducantur, & inuicem æquidistantes, & super singulas rectangula inscripta æquèeleuata; Quia itaque ex 22. prop. huius rectangulum PQ, QA est æquale quadrato QV, & KN, & NM quadrato NE, & cetera cæteris; erit rectangulum PQ, QA ad rectangulum KN, NM, vt quadratum QV ad quadratum EN; & ita erit KN, & NM rectangulum ad FY, YT rectangulum, vt quadratum EN ad quadratum XY, & ita de omnibus alijs. Sed quadrata omnia sunt inuicem similia; Ergo etiam rectangula. Quare ex 26. lib. 6. PQ erit ad KN, vt VQ ad EN latera, & QA ad NM, & cęt. sed QA quadratum ad NM quadratum est, vt rectangulum PQ QA ad rectangulum KN NM; quia cum sint eiusdem altitudinis se referunt, vt bases PQ ad KN: Ergo ex pr. 26. l. 6. quadratũ VQ erit ad quadratum EN, vt quadratum QA ad quadratum NM, & eadem ratione EN quadratum ad XY quadratum, vt quadratũ NM ad quadratũ YT: ideoque *permutando* erit quadratum VQ ad quadratum QA, vt quadratum EN ad quadratum NM, & XY quadratum ad YT quadratum: Quare ex 17. l. 5. omnia quadrata QA, NM, YT erunt, vt vnum antecedens VQ ad vnum consequens QA: sed hęc quadrata VQ, EN, XY sunt ad quadrata QA, NM, YT ex 5. huius, vt Parallelepipeda eleuata altitudinibus æqualibus QN, YN, & cæt. Ergo omnia hęc parallelepilepipeda VN, EY & cęt. ad omnia MQ, NT erunt, vt bases omnes quadratæ ex VQ, EN ad omnes ex QA, & NM, nempe, vt basis VQ ex dictis ad basim QA.

Sed omnia hæc parallelepipeda si multiplicentur vsquedum multiplicari, in sphęra quadriformi queunt inscripta æquant ipsam sphærę quadriformis quartam partē, & QA metæ quartā partem.

Alioquin, si omne spatium inter ipsa, & corpora, in quibus inscribūtur non implerent, nouę inscriptioni daretur locus: Ergo quarta pars sphæræ quadriformis, & ideo eius quadruplū sphæra quadriformis erit ad quartā partem metæ, & ideo integrā metam, vt quarta pars quadrati basis sphæræ ad quartam partem quadrati metæ, & ideo vt basis sphæræ ad basim metę.

Quod si basis sit circulus eodem argumento, ac in præt. factum est, concludes esse metam quadratam ad circularem, vt quadrata basis ad circulum, & ideo ex *æquo* esse circulum basis sphęrę ad circulum basis metæ, vt sphæra ad metam.

COROLLARIVM I.

HInc constat idem dicendum esse de partibus æquealtis. cum idem valeat argumentum V. g. de corpore formato ex BNM segmento metę, & ENB segmento sphæræ.

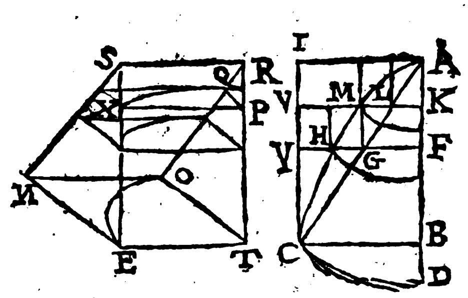
COROLLARIVM II.

QVod si basis metæ non sit circulus; sed aliquod polygonum regulare idem concludes esse sphæram quadriformem ad metam, vt basis quadrata ad polygonum metæ.

THEOR. VII. PROPOS. LV.

Conoides parabolicum quadriforme æquatur prismati eandem altitudinem, & basim habenti, singulæque partes singulis æquealtis partibus.

PRobatur. Nam repetita figura prop. 35. h. pęne eadem demonstratione propositum ostendemus. Quoniam omnes ductæ parallelæ ad basim, & applicatæ, vt KM efformantes parabolam generantem conoidem quadriformem, habent sua quadrata ęqualia rectangulis ex KL lineis, quæ ad eandē altitudinē in triangulo BCA, & ex KV, quę in rectāgulo IB trahūtur, quę superficies quadratē simul iunctæ efficiūt prisma TOENRS, & ideo omnia rectangula, vt PQX ex illis KL, & KV constantia in eadem altitudine bases sunt parallelepipedorum,



quę soliditatem prismatis TOENRS circumscribunt, quæ æquealta sunt, vt parallelepipeda æquealta super bases quadratas ex KM applicatis, quæ circumscribunt soliditatem parabolici corporis. Quare, cum omnia solida rectangula prismati circumscripta omnibus solidis rectangulis conoidi circumscriptis æquentur, sequitur ex prop. 22. h. vt prisma sit æquale conoidi parabolico; singulęque prismatis partes singulis partibus eius æquealtis.

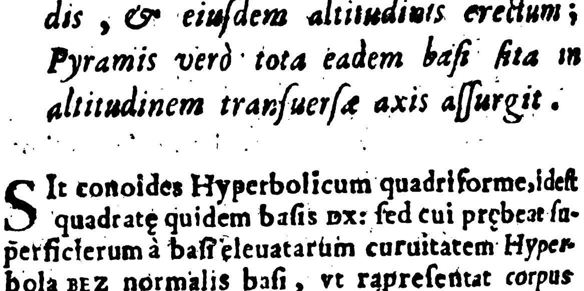
COROLLARIVM.

HIncque fit euidens conoidem parabolicum quadriforme esse subduplum parallelepipedi eandem altitudinem obtinentis, & super eandem basi collocati: singulæque eius partes parallelis abscisas, singulis eius æquealtis partibus subduplas esse: quia talē parallelepipedum est duplum prismatis eadem basi, & altitudine gaudentis.

THEOR. VIII. PROPOS. LVI.

Conoides Hyperbolicum quadriforme æquat frustum pyramidis æquealtum, ac conoides, cui frusto deficiat parallelepipedum super basem tangentem verticem conoidis, & eiusdem altitudinis erectum; Pyramis verò tota eadem basi sita in altitudinem transuersæ axis assurgit.

SIt conoides Hyperbolicum quadriforme, idest quadratę quidem basis DX: sed cui prębeat superficierum à basi eleuatarum curuitatem Hyperbola BEZ normalis basi, vt rapresentat corpus tale fig. CEXEMD. Pyramidis autem latus pertingens ad verticem axis transuersæ sit BR. quæ sit super basim DX; & frustum eius, vel dimidiū frusti sit EMECX; vt perfecimus ad læuam AMC. Dico itaq; in primis antequam demonstrem propositionem; quartam partem corporis hyperbolici quadriformis esse æqualem prismati QFPV; cuius altitudo PT æquet conoidis altitudinem YE; basis verò sit rectangula MF ex RE tangente verticis & BY latere basis, & pyramidi æquealtæ HQV, cuius basis VH sit differentia VM inter RE, vel QT, & MK, vel DC, ita quod QF trapezium æquetur trapezio plano YERB, & triangulum PTK triangulo in illo descripto YEB.



Probatur. Nam ex prop. 59. tract. 24. PI applicata quælibet æquat suo quadrato rectangulum ex LP, & PN ab eodem puncto P nascentibus, & protensis, altera quidem in superficie BYE, vel æquali TFK ex effectione, altera verò in superficie BRYE, idest EQT. Cum ergo singula quadrata singulis rectāgulis, illa, quę describuntur in conoide hyperpolico quadriformi EXD hæc, quæ in prismate

mate QTMF, & QVH pyramide, & sint quoque ęqualia ex 18 h. ęquealta parallelepipeda in illis basibus sita. Ex prop.22. tr.h. ipsa corpora, in quibus describuntur erunt æqualia, nempe quarta pars corporis hyperbolici quadriformis, & prisma MQFT, pyramisque VHQ: quæ pyramis, & prisma: si quadruplicentur erunt æqualia toti conoidi quadriformi, simulque conficient frustum pyramidis, cui parallelepipedum ipsi frusto æquealtum constitutũ super minorem basim, demptum fuerit.

COROLLARIVM I.

Hinc videre potes inuolucrum huius corporis, cuius medietas EACMX, cuius sectio REFBZ ablata hyperbola BEZ, æquari parallelepipedo, cuius basis sit quadratũ ex RF, & altitudo YB; Nã si demantur à frusto pyramidis quatuor prismata, quatuorque pyramides ęquales conoidi, quod conoides, & auferatur ab eodem corpore frusto pyramidis, remanebit inuolucrum corporis huius, & parallelepipedum illud ęquale.

COROLLARIVM II.

Ex serie quoque ostensionis euidens fit, quod conoidis quadriformis singulę assignatę partes basi parallelis planis resectę ęquatur prismatis, & pyramidis portioni ad eandem altitudinem à plano basi parallelo resecatę; Quia scilicet omnia plana parallela basi ad eandem eleuationem, hinc in sphæroide, hinc in prismate, & pyramide ducta sunt inuicem æqualia; Vnde eodem argumento ex prop.22. huius idem de portionibus concludere poteris; Et hinc ex Coroll.1. eadem de inuolucro portionis concludes, & de parallelepipedo in minori basi ad eandem altitudinem portionum conoidis hyperbolici erecto. Quod nempe tum partis inuolucrum, tum hoc parallelepipedum sint æqualia.

EXPENSIO IX.

De Corporibus spiralibus.

Vidimus Tract.30. prop.53. & sequent. superficies spirales; modò spiralia corpora super ipsas eleuata breuitèr oportet attingere, & eorum mensuras aperire: Sunt autem spiralia corpora in quadruplici differentia; Alia, quæ obtinent basim circulum, & eleuantur parallelis superficiebus à basi, sed spiraliter assendunt per incrementa ambitui circuli proportionalia, altiorque est gyrus in fine, quam in initio; Alia sunt, quæ super basem spiralem sunt constituta: sed in æqualem eleuationem terminant, in basimque spirę, à qua eleuantur, æqualem, & similem. Alia sunt, quę super basem spiralem, sunt collocata. Sed etiam secundùm, quòd crescunt spatio basis fic., & altitudine eleuantur: Alia tandem è contra; Nam in ipsa spirali basi collocata, secundùm quod basis crescit amplitudine, illa altitudine decrescunt.

DEFINITIO.

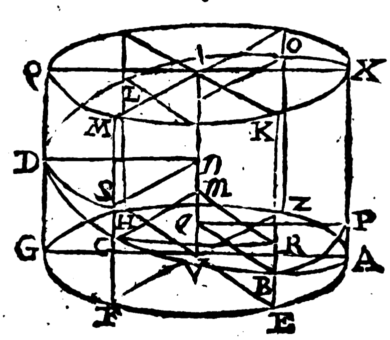
Corpus spirale est illud, quod in altum se eleuando tot partes absumit altitudinis, quot periphæriæ circuli ipsum ambientis, & ab eodem centro descripti.

Soliditates spirales in altitudinem eleuantur proportionaliter ad circulum, secundùm quod feruntur in orbem; ita quod, quot partes absumit circuli in orbem se gyrando, tot altitudinis assequatur in se eleuando: Sicut enim linea spiralis, ita decrescit, vt quot partes absumit circuli generantis, tot partibus diminuatur, sic spira ABCD, si ex sex partibus circuli AEFG eodem centro ducti efficit AE vnicam, etiam vnica parte BE eleuatur ex sex, in quas altitudo AX diuisa sit, si duas ambitus AE, & EF, etiam duas FC: altitudinis occupat, si tres AEFG, etiam tres altitudinis absumit GD, &c.

THEOR. I. PROPOS. LVII.

Corpus spirale super circulum spiraliter in altum ascendens, est dimidium cylindri super eandem basem collocati, & in eandem altitudinem eleuati.

Sit spirale corpus primi generis, quod spiraliter tantùm in altitudinem procedat super basem circularem AEGHZ, spirã ABCDLOX. Dico, quod hoc est ad cylindrum AGQX, vt 1. ad 2.



Probatur. Nam spirali corpori ABCD LOXAC circũscribãtur sectores solidi PABEVC, & REFCMV, & SDFGNV, & cęt. ęqualium basium. eritque sector solidus PBAEVC ad sectorẽ solidũ XKAEVI, vt altitudo BE ad altitudinẽ EK ex 13 h. quod sint super eãdem basim VAE. Sic sector solidus EVFRMC erit ad sectorem solidum EKIVMF, idest æqualem XFKAEV, vt altitudo FC ad altitudinem FM, idest EK: ergo ex prop.25. lib.5. prima quantitas BAEPVC sectoris solidi cum quinta EVFCMR sectoris item alterius solidi erit ad secundam AEXVIK, & ideo ad duplam ex 18.l.5. XIMAVF, vt tertia BE altitudo cũ sexta FC altitudine ad EK altitudinẽ, & ideo ad duplã FM, & EK. Cũ ergo sint duo sectores solidi APBEVC, & EFRCVM ad AXIKVE sectorẽ solidũ, vt duę altitudines EB, FC ad altitudinẽ EK, & sector quoq; solidus crescens FSG DVN sit ad solidũ VFGMIQ, idest æqualẽ KXAEVI, vt GD altitudo ad GQ; idest æqualẽ KE ex eadem prop.25. prima quantitas cum quinta, nempe duo sectores solidi APVMFC cum sectore solidos SFVNDG erit ad secundam quãtitatem AXEVKI, & ideo ad triplam XKMQAEFG ex 18.lib.5. vt tertia duę altitudines BE, FC cum sexta GD ad quartam EK, & ideo ad triplam EK, & FM, & GQ, & sic prosequere vsque ad complementum totius solidi spiralis, & totius cylindri, & tunc erunt omnes sectores

ctores solidi se augentes ad omnes sectores solidos æquales inuicem. Vt omnes altitudines se augentes BF, FC, GD ad omnes altitudines æquales: Sed altitudines se augentes sunt dimidium altitudinum æqualium. Siquidem accrescunt proportione arithmetica. Quia verò rectangula eiusdem altitudinis ex propos. 12. tract. 27. decrescentia, seu crescentia arithmeticè dimidia sunt integrorum, etiam bases lineę, quæ sunt in eadem proportione, ac rectangula æquealta ex 1. lib. 6. erunt dimidium basium integratum: Cum ergo altitudines se augentes BE, FC, GD, & cęt sint dimidium integrarum altitudinum EK, FM, GQ, & cæt. æquali numero multiplicatarum; Etiam sectores solidi crescentes BAP EVc, RVE FCm, & cęt. erunt ad integros sectores AEIV, KFIV, MGIV, & cęteros eadem numerositate altitudinum sumptos, vt 1. ad 2. si autem sic sectores circumscribentes intelligantur multiplicati omni numerositate possibili iuxta vsitatum modum arguendi adæquabunt corpus spirale ABCDLOKAEFG. Ergo hoc corpus ad cylindrum ex sectoribus æqualibus integratum erit, vt 1. ad 2. dimidiumque eius adęquabit.

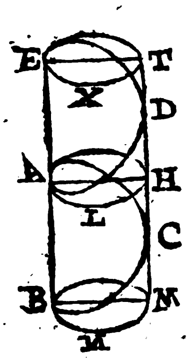
COROLLARIVM I.

QVod dicitur de toto cylindro, & de spirali corpore, idem dicendum de eorum partibus V. g. AEBPEV sectorem esse duplum corporis ascendentis ABEVE.

Quia si rectangula illi portioni, vt toti circumscribantur, eodem argumento poterit ostendi singulos sectores crescentes esse ad singulos æquales, vt altitudines crescentes ad altitudines æquales, & quia crescentes sunt dimidium altitudinum æqualium, cum arithmeticę crescant, etiam crescentes sectores esse dimidium sectoris integri.

COROLLARIVM II.

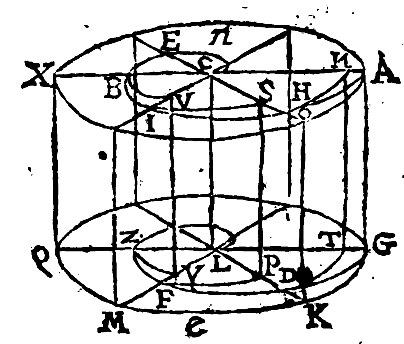
HInc est, quod habita primi spiralis corporis in altum ascendentis quantitate, cęterorum corporum spiris ascendentibus comprehensorum quantitates habeantur. Nam BNMCA spirale corpus est dimidium cylindri BHLBNM, & ALHDE spirale corpus est dimidium cylindri ALHTXE: sed hic sunt ęquales cylindri; cum eorum sit æqualis basis, & altitudo ob spiram eandem; quę ascendit à B vsque ad A, & ab A vsque ad E. Ergo corpus interpositum inter duas spiras est æquale duobus dimidijs cylindrorum ęqualium; duo verò dimidia ęqualium vnum integrum conficiunt. Vnde corpus spirale inter duas spiras BCADE conclusum ęquat cylindrum BNMALH, vel cylindrum ęqualem ALHTXE.



THEOR. II. PROP. LVIII.

Spirale corpus in æqualem altitudinem eleuatum: sed super spiralem basim collocatum est tertia pars cylindri æqualis eleuationis super circulum spiram generantem insistentis.

SIt spirale corpus AHIBECGDFZL super basim spiralem GDFZL, & circulus complectens sit GEQ: cylindrusq; super hunc circulum eleuatus ANXGQ. Dico spirale corpus AHIBECGZL esse tertiam partem cylindri GEQANX.



Probatur ex eodem principio, & ferè eodem argumento, vt ostensa est propositio precedens. Quoniam LDT basis, sectorque deficiens est ad GLK sectorem, vt sector deficiēs solidus TDLNHC inscriptus ad sectorem solidum integrum AOCGKL ex 23. prop. h. At vt PLF deficiens sector basis ad basim sectorem KLM, scilicet æqualem GLK, ita est solidus deficiens SIPFLC ad sectorem solidum super KLM in altitudinem FI erectum, seu æqualem ACLGKO: Quapropter ex prop. 25. lib. 5. prima quantitas TDL sector inscriptus planus deficientium primus cum quinta quantitate PLF, sectore plano; obtinebit ad secundum GKL, & ideo ad duplum eius ex propos. 18. lib. 5. GLM, vt tertia quantitas sector solidus deficiens NHCTDL, cum sexta PLFSIC ad sectorem solidum integrum LCAGKO; & ideo ad duplum eius GLM basi erectum æquealtum. Iam ergo si sumantur TDL, & PLF simul sectores plani erunt ad GLK sectorem planū, vt sector solidus TDCLPFSI ad sectorem solidū GAKOLC, & LYZ sector planus ad sectorē planū MLQ, idest GLK, vt deficiens sector solidus LYZBVC ad sectorem solidū integrum super LMQ æqualem GACCKL sectori. Quare si similiter iunctis sectores TDL, PLF, LYZ ad GLK sectorem integrum, & ideo ad triplum eius, vt tres sectores solidi deficientes illis basibus locati NHCLDT, SVCLFP, VBCLZY ad sectorem solidum integrum AOCGKL, & ideo ad triplum eius ęquealtum basi tripla GKMQL collocatum, & sic de alijs.

Cum itaque omnes inscripti sectores plani sint ad integros planos, vt omnes solidi inscripti deficientes ad solidos integros sectores, erit etiam ipsum spatium spirale omnes sectores solidos tandem adęquans iuxta vsitatum argumentum multiplicationis talis, quę omnem possibilē differentiā inter inscriptos sectores, & corpus spirale tollat, & absumat ad cylindrum ex sectoribus solidis non deficientibus compositum, vt tota basium multitudo, idest ipsum spirale planum ad circulum generantem.

nerantem: sed spirale spatium ad circulum generantem est, vt 1. ad 3. ex propos. 53. Tr. 30. Ergo etiam spirale corpus AHIBECGDFZL ad cylindrum ambientem GMQXNA erit, vt 1. ad 3.

COROLLARIVM I.

Hinc etiam euidens est: id quod dicitur de toto solido posse ostendi, de singulis partibus solidis, nempe, quod se habeant ad inuicem, vt portio basis spiralis ad circulum generantis portionem respondentem. Portio verò plani basis est ad sectorem, vt rectangulum ex lineis eam terminantibus cum triente quadrati differentię ad quadratum radij sectoris ex prop. 60. tr. 30. Ideoq; spiralis solidi frustum AHCGDL erit ad cylindri partem AOCGKL ambientem, vt solidum parallelepipedum super illud rectangulum linearum LD, LG terminantium, & triens aliùs parallelepipedi in quadrato differentiæ DK locati, quæ in parem eleuationem subleuata sint ad parallelepipedum æquealtum, ex quadrato GL radij basis sectoris assurgẽs.

COROLLARIVM II.

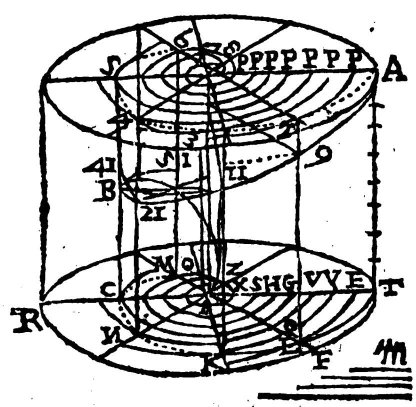
Hinc etiam patet, quod idem verificatur de corpore situato in secunda, & tertia spira, & ceteris de quibus locuti sumus prop. 56. & 58. & 59. tract. 30. Quod scilicet sit ad corpus cylindricum comprehendens, vt ipsa spira plana ad circulum eam claudentem. Nam idem argumentum, quod attulimus in ostensione propositionis, etiam hic valet absque eo, quod replicetur: cùm etiam sectores solidi deficientes ad primum sectorem, & alios maximos æquales solidos, vt sectores plani deficientes illorum bases ad primum sectorem planum, & alios æquales ob eandem altitudinem ex 23. h. sint in eadem proportione.

THEOR. II. PROPOS. LIX.

Corpus spirale basi spirali inixum, & quoad altitudinem spiraliter deficiens est ad corpus spirale eiusdem altitudinis super spiralem basim positum, vt 5. ad 6.

Sit spirale corpus ABI super basim TCI spiralem inixum deficiens spiraliter, quoad altitudinem AT. Dico, quod hoc corpus est ad spirale corpus eiusdem altitudinis super spiram TCI collocatum, vt 5. ad 6.

Ostensio, quæ nostra est sicut etiam totius h. expensionis à multis dependet, quæ priùs declaranda sunt.



Et primo progress. Obseruandum est spirale corpus æqualis altitudinis, de quo præced. prop. 58. locuti sumus posse circumuestiri portionibus annulorum eiusdem altitudinis TA, & latitudinis TE, qui à diametro TI, vbi spira basis sumit initium deducti in ipsam spiram terminent, vt sunt ELTBPA 2, 3 KEP, & alię, vt vides in fig. Quia enim ex pr. 9. tract. 18. & 52. tract. 31. semidiameter IT diuiditur in partes æquales, secundùm quas quilibet sector arithmeticè, idest æqualiter quoad diametrũ decrescit; qui spirę, aut inscribatur, aut circumscribatur, si omnes illi sectorum arcus, vsque ad spiram à diametro TI deducantur, patet se inuicem superare annulorum ęquealtis portionibus, vt sunt FLE, & YEK, & VYN, & cęt. Nam omnes TE, & EY, VY crassitudinem mensurantes æquales sunt.

Diuidatur itaque IT radius (vt huius rei demus exemplum) in octo partes æquales, à quibus singuli arcus ducantur, vt TF, EK, YN, &c. Certum est ex pręass. Expens. 7. tract. 31. decrescere singulos arcus radijs interceptos TF, & EK, YN, &c. arithmeticè pęnes diuisioaem diametri; ita quod, vt IE deficit à IT octaua parte, sic arcus EL à TF deficiat octaua parte, & sicut YI deficit ab TI duabus octauis partibus, sic YQ ab TF duabus octauis partibus decrescat; itaque si annulus EL duplicatur, deficiet duabus octauis partibus: si annulus YQ triplicatur, deficiet tribus octauis partibus ab LE, & cęt.

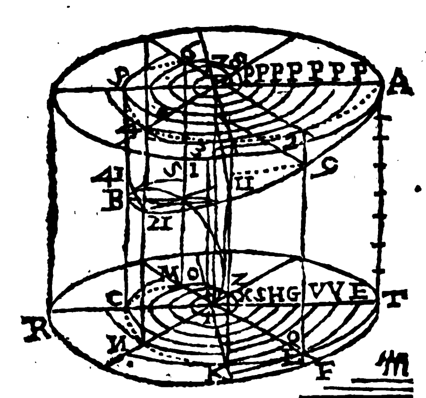
Progress. 2. Itaque sectorum arcus arithmeticè decrescent à se inuicem æquali arcu deficiendo, nempe semper octaua parte earum, in quas primus arcus TF diuisus est. Itaque in sectore IFT erit arcuũ, & ideo portionũ ãnulariũ series arithmetica, quorum primus annulus LEFT, secundus LQEY, & cęt. In secundo verò sectore IKL erit adhuc alia series arcuum, & ideo portionum annulorũ, quorũ primus KL, qui deficiunt, vt illi, qui sunt in sectore IFT, sed incipiendo ab arcu minori LK vnica octaua parte. In sectore verò NIK erit alia series arcuum, & ideo portionum annulorum eodem decremento arithmetico deficiens, sed incipiens ab arcu minori duabus partibus ab FT, sed vnica ab KL. Ita vt etiam ipsę series arithmeticè decrescant vsque ad finem, totque sint series, quot arcus in IFT sectore, vel quot decrementa arithmetica, quæ in singulis deficiunt, vel quot partes in arcu maximo FT sectoris maximi IFT, vel partes in radio IT. Quæ tamen omnes series simul sumptæ componunt soliditatem totius corporis spiralis basis; sed æqualis altitudinis.

Progr. 3. Quod autem annulares portiones, vt arcus arithmeticè deficiant, patet, quia omnes annulares portiones istis arcubus comprehensæ sunt æquealtæ, vtpote deductæ ob æqualibus partibus ET, & EY, & YV diametri TI erunt ad inuicem, vt bases, nempe vt ipsi arcus. Siquidem ex propos. 14. Tract. 30. æquantur rectangulis ex portionibus intermedijs inter arcum maiorem, & minorem marginalem ipsius portionis annularis plani, sc. arcu intermedio inter LE, & FT, qui in figura expressus non est, ne generaret confusionem. Isti verò arcus intermedij crescunt ad inuicem etiam arithmeticè, vt ipsi arcus marginales cum semidifferentia inter maiorem, & minorem, vel à maiori deficiunt, vel super minorem accrescunt V.g. arcus inter FT, & LE erit maior, quàm LE semidifferentia inter FT, & LE, at arcus intermedius inter QY, & EL erit minor, quam EL semidifferentia inter QY, & LE, quæ duæ semidifferentiæ æqualium differentiarum, quibus decrescunt arcus FT, LE,

QY

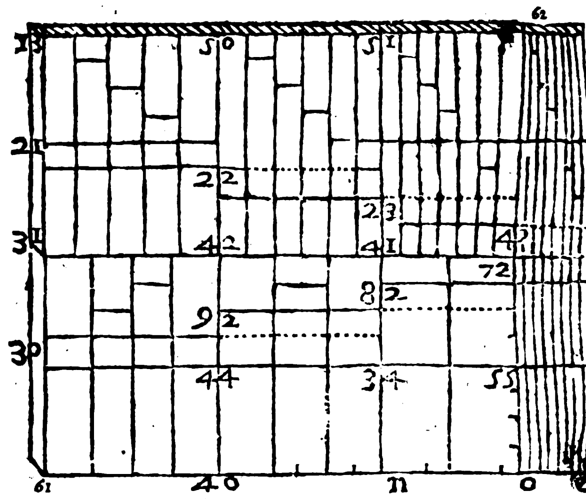
QY additæ simul facient differentiam eandem arcus LE ab FT, vel QY ab LE. Exemplum est in quatuor lineis m seorsim ductis arithmeticè deficientibus tantùm enim deficit secunda à quarta quantum prima à tertia. Cum ergo rectangulorum bases intermedijs arcubus æquales arithmeticè decrescant, etiam ipsa rectangula arithmeticè deficient, vt ipsæ bases, vtpote æquealta, & ideo ipsæ quoque portiones annulares LEFT, & QYEL rectangulis æquales ex 14. Tract.30. arithmetico defectu extenuabuntur, & si super istas bases portiones solidæ annulares intelligantur eleuatæ ad eandem altitudinem AT, quæ sunt illæ soliditates, quæ integrant spirale corpus quoad basim solummodo TLKCMOI basi infima, & A2345678 basi suprema locatum, etiam ipsæ soliditates cum sint inuicem, vt bases ex 23. prop. Tract.34. par.2. decremento arithmetico eodem semper æquali decrescent: ideoque sector solidus FIT AP 2 erit diuisus in portiones annulares solidas decrescentes arithmeticè, vt ipsę bases, idest in seriem solidam arithmeticam, V.g. FTLBAP 2. erit prima soliditas, & EL QY P P2. secunda soliditas, & sic dicas de alijs, vsque ad axem.

Eodemque modo sector solidus IKL23 diuidetur in seriem arithmeticam soliditatum, pro ut decrescunt ex 1. progr. ipsæ bases, eritque series, cuius maximus terminus KLQ23 erit minor, quã maximus LEFTPA2 vnica differentia arithmetica, & sic effare de alijs seriebus, ita quòd vnusquisque sector solidus seriem in se contineat proportionalium arithmeticarum soliditatum annularium.



Progress. 4. Considerandum itaque est, quod spiralis superficies corporis basi, altitudineque deficientis, hæc omia solida æquealta secat ab A descendendo spiraliter per A 9 11 B, & cæt. vsque ad centrum 1, & arithmetico defectu singulas altitudines detruncat, vt ex def. constat. Ideoque debent intelligi spirali superficiei descendenti circumscriptę sectorum solidorum annulares portiones TF 2 APEL, & LKQ 9 11, & NK 11 21, & cæt. quæ singulæ à semidiametro APP, & cęt descendant arithmeticè deficiendo tamquam quidam gradus altitudine AT in tot partes diuisa, vt radius TI, quos omnes spiralis superficies A9 11 B I tangat in A in 9 in 11. in 21 in B in 41. & cæt. ita quod singulorum bases sint primo LEFT, secunda EKY, tertia YVN, quarta VGC, & cæt.

Progress. 5. Quia itaque istæ omnes soliditates in figura sine confusione exprimi nequeunt, ideo seorsim ea omnia expressimus in rectãgulo I 13 e, vt eorum ordo, & defectus meliùs capiantur, in quo 13 1. superficies nigra exprimit grassitudi-



nẽ ET singularũ basiũ ETLF, &c. quæ semper crassitudo in omnibus est æqualis. At rectangulum e 72. exprimit primam portionem annularem solidam LEFT2AP non descendentem: secundum n.41. 72 o, in quo partes decrescant à 72 o. vt descendit PIIKE, per vnũ gradũ à 2 in 9. à summa altitudine 72. vel AT, quod rectangulum solidum æquet duas ęquealtas annularium soliditatũ portiones LEP2. & 23KL, quæ primo decremento arithmetico, eodem deficiunt; Tertium sit 41. 42 n.40. in quo tamen partes ab eadem altitudine n 41. descendant, vt facit ipsa portio VYN annuli solidi, cui æquatur, quæ descendit à P in 21 per duos gradus 2. & 11. quod rectangulum solidum ęquetur tribus annularibus portionibus æqualibus inuicem locatis in basibus EQ, KQ, & KN, & sic de alijs: Itaque 72 e exprimit, & æquat soliditatem in LEFT basi locatam 7282 n o æquat eam gradatam, quę in EYK, sic 41 92 40 n, quę in VYN, sed 42 30 40 61. quæ in VGC, at 13 31 42 22 eam quę in GVC sita est: rectangula 42 50 23 41 gradatam soliditatem, quę GHCM basi stat; rectangula 51 41 43 72. quę in HSMO fundatur; & tandem rectangulum gradatum 43 62 t gradationem, quæ in SXZI locata est, quæ accepta, vt æquealta ęquãt quoque annulares portiones æquealtas ijsdem basibus locatas.

Progress. 6. Itaque singuli sectores solidi veluti in TKF, & LKI, & KIN, & cæt. basibus locati deficientes arithmeticè ab inuicem in singulis rectangulis prædictis habent suam partem correspõdentem, ita quod prima pars omnium rectangulorum V. g. prima, & vnica in 72. e, prima duarum in 72. n prima trium in 41. 40. & sic omnes primę partes in quolibet rectangulo solido æquentur partibus sectoris solidi in basi ITF locati, & illæ omnes primę sint æquales portionibus annulorum quæ successiuę decrescunt in LFET, & LEQY basibus decrescentibus. Sic quoque concipies de secundis partibus in vno quoque rectangulo solido, ita quod secunda pars duarum in 72. n secunda pars trium in 41 40. secunda pars quatuor partium in 42 61, & cęt. portiones solidas sectoris KIL basi sitas adæquent, & sic dicas de tertijs in 41 40; 42 61; 13 42. & cęt quæ æquant portiones solidas NIK sectore locatas.

Progress. 8. Ad hoc vt ergo incipiamus ostendere, quam proportionem habeant hæ omnes soliditates simul acceptæ ad totum 13 e, idest, quam spira solida altitudide, basique deficiens habeat ad solidam spiram basi tantùm deficientem: Accipiamus in primis minimas singularum gradationũ altitudines, & consideremus, quod hæ singulæ minimæ

nimæ

nimę altitudines, & vltimæ AT, & L 9. & K I I. & N 12. & CB, & cęt. in vnaquaque portione annuli decrescunt aritmeticè vsque ad I; suntque in rectangulis portiones illis ãnulis æquales e 71, 82 o, 92 n 30 40, 22 31, 23 42, 43 41. vsque ad nihil t, quæ deficiunt Arithmeticę etiam quoad altitudinem; siquidem ex def. vt spira appropinquat ad centrum per partes æquales radij decrescendo, ita ab altitudine per partes ęquales altitudinis deficit. Itaque in annulo solido LEFT 2 A nulla est degradatio, sed altitudo TA, vel e t, at in annulo solido YEQL iam est primus desensus F 9 vnius gradus, vt in rectangulis solidis n 82, & sic successiuè in alijs vt ex rectangulis solidis melius percipies, in quibus vt diximus progr. 6. omnes primæ partes pertinent ad sectorem solidum in TPI locatum, quorum minimæ, & vltimæ altitudines sunt, & 72 o, n 82, 40 92. 30 61, 22 42, 34 41, 43 72 vsque ad nihil in t graduatim, & arithmeticę deficientes: Quod autem dicitur de partibus primi sectoris solidi considerati iuxta minimas altitudines; hoc item dicendum est de partibus sectoris solidi LIK locati iuxta minimas altitudines accepti: In singulis enim rectangulis solidis minimæ altitudines partibus omnibus rectãgulorum communes sunt, & dessignantur per lineas 72 t, 72 82, 82 92, 92 30, & cæt. Itaque istæ portiones solidorum sectorum, & rectangulorum solidorum illis æqualium duplici decremento arithmetico decrescunt quoad latitudinem, quidem simul cum basibus decrescentibus ex progr. 1. & 2. & etiam quoad minimas, & vltimas altitudines; ideoq; rectangulorũ ęquealtorum V. g. primorum in vnoquoque rectangulo solido in 72 e in 41 o, & cæt. erunt vtpote ęquecrassa, duo trientes vt ipsę bases planę ex contextu proposs. 14. 15. 16. 17. Tract. 28. Et quia vt dictum est prog. 6. prima omnia in vnoquoq; rectãgulo æquant sectoris primi T I F portiones annulares solidas; Ideo illę portiones acceptæ, & consideratæ iuxta vltimas, & minimas altitudines erunt duo trientes sectoris IFTA 2 eiusdem æquealti, & grassi, quod deficit quoad singulas partes vnico decremento arithmetico, vt dictum est progr. 2. & 3. Si afferas de omnibus partibus secundis rectangulorum solidorum, quæ pertinent ad solidũ in basi ILK locatũ, & sic dicas de omnibus alijs. Ideoq; in singulis progressionibus arithmeticis horum sectorum vnico decremento arithmetico deficientium solũ longitudine habemus portiones solidas deficientes secundum minimas altitudines arithmeticè, quare in vnoquoque series deficientium partium solidarum duplici arithmetico decremento ad seriem earum solùm vnico defectu deficientium se habebunt, vt duo ad tria. Ideoque etiam omnes simul ex prop. 17. lib. 5. cum ad singulas taliter sint, erunt, vt duo ad tria, & ita omnia minimæ altitudinis rectangula V. g. 72 e, 82 o, 92 n, 30 40, 42 21, 23 42, 41 43 vsq; ad t erunt totius rectanguli solidi 13 e, duo trientes cum in vnaquaq; serie V. g. primarum partium deficientium altitudine, & latitudine sint ęquealtarum latitudine deficientium duo trientes, & sic in serie secundarum partium, & cęt.

Progress. 8. Nunc quid gradationes ipsæ auferant ab vno quoque rectangulo solido, considerandum est. Ad quod aduertere oportet singulas partes singulorum rectangulorum vnicã in 72 t, duas in 41 72, tres in 42 82, & cæt. esse inuicem æquales, vtpote illę, quarum latitudines æquantur arcubus eodem decremento ab eodem maximo diminutis V. g. vnica in 72 e arcui FT duæ in 41 O arcubus LE, & LK eodem decremento primo ab arcu FT maximo deficientibus. Tres in 42 n tribus arcubus YQ, & QK, & KN, qui duplici decremento arithmetico eodem deficiunt ab FT maximo eodem. Altitudines verò omnes æquales sunt 41 82, vel 42 92, vtpote pertinentes ad spiram solidã altitudine non deficientem. At quatenus terminant in spirale corpus decrescens altitudine quoque, & eius spiram descendentem; in singulis à summa altitudine, vt dixi progr. 5. descendunt vsque ad minimam altitudinem arithmeticè.

Progress. 9. Cum itaque gradata solida rectangula in vnoquoque rectangulo accepto à summa vsque ad minimã altitudinem V. g. t 72; 72 82, 41 92. 42 30. 13 22. 50 23. 51 43. 61 t in singulis rectangulis, quorum partes æquelatæ constituant progressiones arithmeticas vnico decremento arithmetico quoad altitudinem deficientes erunt singulorum rectangulorum 72 82, & cęt. dimidium ex prop. 12. Tract. 27. vtpote quod eadem ratio sit solidorum, quorum grassitudo eadem in omnibus, vt dixi prop. 5. ac basium, & rectangulorum planorum: Cum ergo singula deficientia sint ad sua integra, vt 1. ad 2. etiam omnia ex prop. 17. lib. 5. erunt ad omnia sua integra, vt 1. ad 2.

Prog. 10. Ponatur itaq; quod rectangulum 13 e totum toti soliditati spiralis, basis æquale tantũ, sit partium 6. quia ostendimus progr. 7. rectangula minimarum, & vltimarum altitudinum 72 e, 82 o, 92 n, 33 40. & cæt. esse totius 13 e soliditatis duo trientes se habebunt ad rectangulum totum, vt quatuor ad sex. Vnde residuum integræ soliditatis ablatis illis minimarũ altitudinum rectangulis remanebit duo. At quia huius residui, nẽpe rectãgulorum T 72. 72 82, 41 92, 42 30, & cæt. gradationes solidę sunt dimidium, & ideo, vt 1 ad sex ad totum ex prop. 39. Tr. 17. Ideo cũ quantitas minimarum altitudinum posita sit, vt quatuor, & hæc ponatur vt 1. ad sex respectu totius ex eadem propos. 39. Tract. 17. erunt omnes quantitates rectangulorum solidæ, quæ æquant sectorum solidas portiones deficientes ob spiram basi, altitudineque deficientem, cui circumscribũtur ad omnia rectangula solida, quæ æquant sectorum solidas portiones spirali corporis basi tantùm circumscriptas, vt quinque ad sex.

Hoc autem totum intelligitur ex prop. 17. tract. 27. si hæc rectangula subdiuidantur omni possibili subdiuisione subdupla, sicut nempe ipsi annuli, seu portiones annulorum corpori spirali circumscriptæ, vel inscriptæ, quibus rectangula hęc æquatur omni possibili numero multiplicatæ similiter intelligi debent. Vnde etiam ipsum corpus spirale deficiens, quoad basim, & altitudinem istis rectangulis inscriptis, vel circumscriptis, quę omni possibili multiplicatione subdubla numerosa tandem ipsum æquant ad spirale corpus solùm pęnes basim deficiens annulis prædictis, & similiter multiplicatis inscriptum, vel circumscriptum erit, vt 5. ad 6. quod hæc rectangula inscripta, vel circumscripta illud tandem æquent, alioquin nouæ inscriptioni, vel circumscriptioni daretur locus ex 14. Tract. 33. quæ minorem ea, qua prior inæquatur, molem relinqueret.

COROLLARIVM I.

*Hinc enascitur, quod sit ad cylindrum RA super circulum RT eiusdem altitudinis, vt vt 5. ad 18. siquidem spirale corpus deficiens, quoad altitudinem, & basim est ad spirale corpus deficiens tantum quoad basim, vt 5. ad 6. sed corpus spirale deficiens tantum quoad basim ad cylindrum RTA est ex preced. vt 1. ad 3. idest, vt 6. ad 18. Ergo ex *æquo* erit spirale corpus vtrinque deficiens ad cylindrum RTA, vt 5. ad 18.

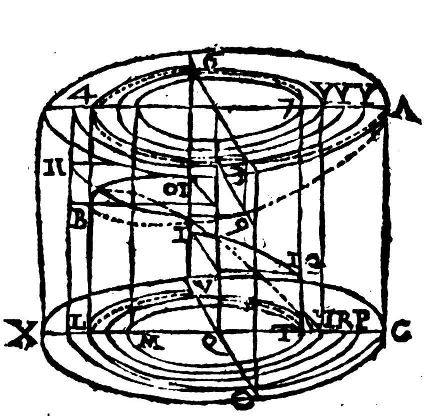
COROLLARIVM II.

*Hinc quoque fit, quod residuum huius spiralis corporis, quod scilicet decrescit altitudine, dùm spiralis basis crescit latitudine, estque corpus APP 9 B 1 2 3 4 5 6 7 8. quartum genus spirarum, erit ad corpus spirale non deficiens altitudine, vt 1. ad 6. quia compars spirale, nempe corpus ATL 9 B C I est eiusdem corporis altitudine non deficientis 5. ex partibus eius 6. vnde residuum erit 1. & ad prędictam compartem se habebit, vt 1. ad 5.

THEOR. III. PROPOS. LX.

* *Secunda spiralia corpora, & basi, & altitudine spiraliter deficientia sunt ad spiralia corpora secunda basim spiralem tantùm habentia, vt 2 $\frac{1}{3}$ ad 3.*

PRæter primas spiras assignauimus Tract. 30. prop. 57. & 58. & 59. spiras sequentes, & secundos, tertiosque ambitus post primum efficientes. Si ergo intelligantur super has bases corpora eleuari, alterum, quod spiraliter deficiat, etiam quoad altitudinem, vt est A 9 B I T super basim COLVT spiralem secundæ spirę: alterum super eandem basim collocatum COLVT, sed in similem, & parallelam basim terminet, quæ incipiant ab eodem puncto A, illud corpus deficiens spiraliter basi, & altitudine erit ad hoc basi tantùm deficiens, vt 2 $\frac{1}{3}$ ad 3. vel 7. ad 9.

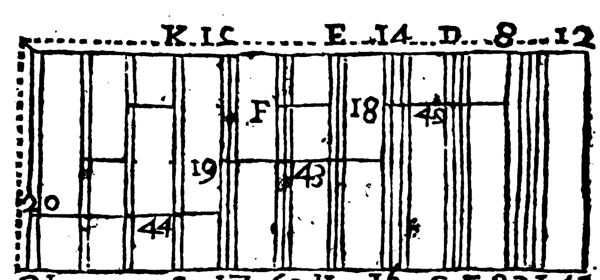


Progreff. 1. Quod ostendetur eodem artificio, quo præcedens. Nam CT semiradius, si ponatur TQ altera pars, & radius ad primum circulum pertinens diuisus in quatuor partes æquales; etiam ipse in quatuor partes diuidetur ex 55. Tract. 30. vnde erunt octo, & ita arcus deficient singuli octaua parte, vnde annuli plani erunt æquealti, qui spiram baseos, vel ambiant, vel ipsa ambiantur, decrescuntque vt arcus sectorum arithmeticè ex progr. 1. propos. anteced. singuli octaua parte.

Progr. 2. Ideo ex progr. 2. in singulis sectoribus CQO, OQL circumscribentibus erit instituta series arcuum arithmetico decremento deficientium, & ideo portionum annulorum planarum ęquealtarum PCO, & cęt. vsq; ad T in sectore CQO, & pari ratione in alio sectore LQO, & sic in omnibus alijs, quę singulę series continuę incipiant à primo arithmeticè deficiente, V. g. prima CQO ab arcu integro 8. partium, secunda LOQ ab arcu septem partium, & sic de alijs. Sed cum hac differentia à progressionibus pręced. prop. nam illę deficiebant vsque ad centrum, vsque ad vltimum sui; hę verò deficiunt vsque ad circulum TM dimidium circuli XC, vtpote ex dimidio radio QT, vnde etiam arcus quatuor, in quibus diuisus est, vt est diuisus circulus XC ex prop. 39. lib. 6. dimidium erunt quatuor arcuū circuli XC V. g. arcus OC: quare arcus tantū pro dimidio sui deficient, & aliud dimidium ipsorum integrum remanebit in singulis progressionibus, in quibus sectores distributi sunt. Ex 3. verò progr. tales, & etiam erunt portiones annulorum planorum, quos prædicti arcus ambiunt, & idem dicendum de solidis portionibus annularibus æque-eleuatis ex eodem progr. & ex 23. prop. Tract. 34. p. 2.

Progreff. 3. Spirali autem corpori etiam quoad altitudinem deficienti intelligantur circumscripti annuli, vt prędicti super bases annulares planas COP LRV, & cęt. quę sint COYA 3 non descendens, & PRL 11 Y ab Y primo gradu 9 3. descendens, & RHV 10. ab Y per duos gradus 39. B 11. descendens: Sic YHTM 12. per tres gradus 3 9. B 11. 1 10. deficiens, & tandem 7 TMT vsque ad vltimum gradum in 12 T post omnes gradus alios perueniens, sed semper incipientes à summa altitudine AYYY 7.

In istis verò annularibus solidis portionibus primò considerandę sunt minimę altitudines O 3. L 11. V 10. T 12. vt diximus progr. 7. quę deficiunt arithmeticè in vnaquaq; portione annulari V. g. minima altitudo O 3 solidæ portionis annuli in OC basi locatę O 3. & eius, quę in tota LP annulari basi est L 11. at eius, quę in RLV annulari basi situata est V 10. altitudo minima.



Progreff. 5. Sed vt fecimus progr. 5. & 6. meliùs percipies in rectangulis 41. 8. 8 16. & cæt. quorū 8 41. æquare pręsupponatur primā portionē in OC locatam latitudine, vt arcus ipse, & basis ipsa non deficientem: sed nec altitudine cum sit primū omniū. At rectangula duo 8 16. quę prima diminutione deficiunt latitudine, portioni solidę æqualia iudicentur sitę in PL. At 14. 17. tria rectāgula putentur portioni solidæ sitæ in RLV æqualia, quæ secunda diminutione deficiunt, & cęt. Vnde in singulis rectangulis primæ partes in sectore COQ sitæ intelligantur, scilicet 8 41. D 31. E 16. K 17. secundæ 14 G, & aliæ secundæ in

alijs

alijs rectangulis in LQO collocatæ, intelligendæ sunt; tertiæ vt 15 60. in OLQV. In singulis verò medietas alba rectãguli 8 41. integra latitudine, & & altitudine perseuerat, vt diximus pr. 2. perseuerare integrã medietatẽ arcuum, quæ latitudinẽ eorum mensurant. At altera medietas 8 31. DZ EH secũdũ suas quatuor partes arithmeticè deficit in singulis diminutionibus vnã partem deperdendo: si tamen hæc rectangula cogitentur æqualia illis portionibus solidis, quæ spirale corpus altitudine non deficiens ambiunt spirali tantùm basi situm.

Progress. 6. At si velimus æquari solidis partibus ambientibus spirale corpus, & altitudine, & latitudine: tunc singula rectangula deficient arithmeticè quoad altitudinem, vt diximus progr. 4. deficere portiones solidas corpus spirale ambientes, itaque 8 41. non deficiet: at 18 93. deficiet primo gradu: 19 16. secundo gradu: 20 17. tertio. & cęt. si plura sint, si sumatur secundùm minimas altitudines 8 93. 18 16. 19 17. 20 21. gradus, per quos perueniunt ad illas minimas altitudines non considerando, in illisque pars alba vnico decremento tantum deficiet, nempe quoad altitudinem, ad partes nigræ quoad altitudinem, & etiam, vt diximus quoad latitudinem. Vnde in vnoquoque rectangulo primæ partes 8 41. 45 2. 43 16. 44 17. instituent vnam progressionem arithmeticam rectangulorum quoad medietatem albam altitudine tantùm deficientium, quoad alteram etiam latitudine: Sic quoque secundę partes 18 6, 43 60. & cęt. aliam progressionem similem instituent, sed minoris numeri quoad terminos, nam primi sunt quatuor, secundi sunt tres, & sic dicas de tertijs, vt sunt in sectore COQ quatuor annulares partes, in LQO tres, & cęt.

Progr. 7. Cum ergo istæ singulę progressiones quoad medietatem albam rectangulorum, vt diximus progr. 5. quatenus æquealtę nimirum quatenus æquant solidas portiones corpori spiralis basis tantùm circumscriptas nullo modo deficiant, sed integrę perseuerent, statuantur 6. part. Verùm vt æquantia circumscriptas solidas portiones annulorum spirali corpori etiam altitudine deficienti quoad minimas altitudines, vt dixi progress. 6. deficient vnico decremento arithmetico. Vnde erunt ad non deficientes vllo modo vt 3. ad 6. ex prop. 12. Tract. 27. Altera verò medietas: partium in rectangulis 8 41. 8 16. 14 17. & cæt. deficit primo quoad latitudinem, sumpta sc. vt æqualis ambientibus portionibus annulorum corpus spirale basi solùm deficiens. Ideoque æquealta erunt ad integras partes, vt 3. ad 6. ex prop. 12. Tr. 27. sed vt deficientes etiam quoad minimas altitudines erunt, ex pr. 14. vt 2. ad 6. Cõponantur ergo simul 3. & 6. rectangulorum partes nempe illę, quæ nullo defectu, & illæ, quæ tantùm latitudinis, & erunt 9. Ponatur etiam simul illæ, quæ tantùm vnico altitudinis, & quę duplici altitudinis, & latitudinis, & erunt 5. ideoque hę ad illas ex prop. 29. Tract. 17. erunt, vt 5. ad 9. Et quia hoc contingit in singulis primis partibus, quæ quatuor sunt, & idem in secundis, quæ sunt tres, & idem in tertijs, quæ duæ sunt, & cæt. vt diximus progr. 6. rectãgulorum 8 41. 16 8. 14 17. & cęt. quę singulę sunt quędam series Arithmeticè, sed semper numero terminorum minores; ideo ex 17. lib. 5. ita omnes progressiones erunt ad omnes, vt vna ex ipsis, ad vnam, & sic omnia rectangula deficientia secundùm minimas altitudines, & etiam latitudine pro sui dimidio, sc. 8 41. 18 93. 19 16. 20 17. erunt ad omnia latitudine tantùm deficientia 8 41. 16 8. 14 17. 15 21. vt quinque ad nouẽ. Vnde residuũ rectangula 8 18. 14 19. 15 20. erunt, vt 4. ad suũ totum. Verùm illa ob gradationes à summa altitudine ad infimam descendentes pro medietate deficiunt, vt prop. 9. præc. prop. cum in singulis rectangulis V. g. in 18 8. duæ sint ęquelatę. & ęquelatæ in 14 19. tres, in 15 20. quatuor in quibus singulis gradata rectangula instituunt singulas progressiones arithmeticas vnico tantùm decremento in altitudine deficientes: ideo gradata rectangula singulorum æquelatorum, & altorum erunt medietas, ex 12. Tract 27. Quamobrem ex 17. lib. 5. omnes quoque series gradatæ ad non gradatas nullo modo deficientes erunt duo ad quatuor, quæ simul cum rectangulis minimarum altitudinum ex 29. Tract. 27. erunt, vt septem ad nouem, vel vt $2\frac{1}{3}$ ad 3. ad omnia rectangula 12 21. sc. ad totũ, & idem dicẽdum de annulis solidis corpori spirali altitudine, & basi in spiram se flectentis, quorũ graduatum defectum rectangula ex effectione imitãtur, vtpote, quod sint inuicem eiusdem latitudinis; similiterque, & per eosdem arithmeticos gradus deficiant respectu annulorum æquealtorum corporis spira baseos tantùm deficientis, vnde multiplicata quantùm multiplicari possunt sicut ipsum corpus spirale nõ excedent; alioquin nouæ inscriptioni, vel circumscriptioni daretur locus ex 14. Tract. 33. quæ minorem ea, qua prior inæquaretur, molem relinqueret; sic, & cũ semper sint inuicem in eadem ratione 7. ad 9. ipsum spirale corpus, nempe quoad altitudinem, & basim ad spirale corpus tantùm quoad basim erit vt $2\frac{1}{3}$ ad 3. vel vt 7. ad 9.

COROLLARIVM.

HInc facilliter quis videbit, quam proportionem dicat hoc spirale corpus ad cylindrum ambientem, cum enim basis spiralis ad circulum ambientem sit 7. ad 12. si super hanc basim situm sit corpus æquealtum spirale quoad basim tantùm ex 23. Tract. 34. erit ad cylindrum comprehendentem, vt 7. ad 12. vel vt 63. ad 108. nempe vt ipsę bases; At ad hoc corpus spirale se habet corpus altitudine quoque spirale, vt 7. ad 9. Idest, vt 49. ad 63. ergo ex *æquo* erit corpus spirale ad cylindrum ambientem, vt 49. ad 108. scilicet vt 7. ad $15.\frac{3}{7}$.

COROLLARIVM II.

INtelliges quoque, quid dicendum sit de tertijs spiralibus corporibus, nam circumscriptę solidę annulares portiones non deficient pro $\frac{1}{3}$, & pro $\frac{1}{4}$ deficient latitudine, vt ambientes spirale corpus basi tantum, ideoq; si non deficientes ponantur simul 12. istæ deficientes erunt 3. & ideo simul 15. Si verò intelligantur ambire corpus spirale altitudine quoque, quæ æquelatæ perseuerant, deficient tamen altitudine. Vnde illarum integrarum, quæ positæ sunt 12. istę deficientes altitudine erunt 6. at illarum, quę latitudine deficiunt, & positæ sunt 3. istę; quę quoque altitudine deficiunt, erunt $\frac{1}{3}$; ideoque cum illis, quæ sunt 6. deficientibus altitudine erunt 8. quare subductæ ab ijs relinquent 7. quarum gradationes medietatem occupant, nempe $3\frac{1}{2}$, ideoque cum reliquis erunt $11\frac{1}{2}$ ad 15. seu 23. ad 30. Sufficit indicasse, esset nimis prolixum de singulis velle agere.

TRACTATVS XXXV.

De Corporum comparatione.

Restat vltimus hic labor de Corporum comparatione Tractatus, in quo, & corpora secare, pariterque, augere, minuere, traducere in figuras alias, & tandem mensurare docemus, estque quasi fructus antecedentium Tractatuum, qui de Corporum soliditate discurrunt, & complementum omnium, quæ de punctis, lineis, figuris, planitiebus, & soliditatibus dicta sunt.

EXPENSIO I.

De similitudine Corporum.

AVgmentum plurium corporum in vnum ex eo maxime dependet, quòd describatur corpus simile alteri, & licet id supra tetigerimus, cum de parallelepipedo egimus, ea tamen fuit notitia particularis, quæ solidi rectanguli non excederet cognitionem; Nos autem hic intendimus tradere notitiam generalem similium corporum describendi, vt nedum sciamus corpora similia cognoscere, sed etiam fabricare.

DEFIITNIO I.

* *Illæ quæcumque superficies planæ dicentur similes, in quibus describtibilia ex ordine triangula ab assignato puncto erunt similia.*

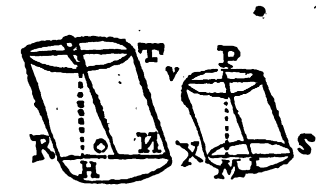
Hæc Definitio imitatur definitionem sectionũ conicarũ similiũ, & videtur potiori iure verificari, si enim applicatæ sub eodem angulo ad portiones diametri proportione simili gaudentes ostendunt sectiones similes, quantò magis triangula, quæ secum vehunt laterum proportionem, & angulorum æqualitatem, & multiplicata quantùm opus est, totam figuram æquare queunt, saltem quoad sensum, planitierum quorumcumq; similitudinem exhibebunt, & si Euclides circulum definit, in quo omnes ductæ à centro erunt æquales, similiter, & nos definimus similitudinem planitierum, in quibus omnes ductę ab assignato puncto sunt similes. Potest quidẽ esse, quod in planitiebus similibus triangula dissimilia describantur, si tamen omnia erunt similia ex ordine sumpta, semper quoque similes planities erunt, quod definitio intendit.

DEFINITIO II.

* *QVæcumque figura similiter posita iudicabitur, quæ axem consequatur, si per normalem, & basim, & axem ductum planũ triãgula efficiat similia.*

Similis autem etiã dicetur, si superficiebus similibus constet.

Cum solidæ figuræ globosæ superficies, vt plurimum angulos non consequantur, ideo non poterunt iudicari eodem modo positæ, nisi ab axe; si ergo in plano IPM ducto per normalem PM, & axem PI, & basim SX, ex istis tribus,



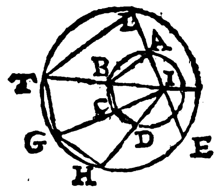
nempe sectione basis; MI normali MP ab axis vertice ductæ, & axe ipso IP fiat triangulum æquiangulum triangulo QOH ex ijsdem constituto dicetur solidũ similiter constitutũ, vt RT, quod, & verificabitur de parallelepipedis, siue axem in ipsis ducas, siue latus pro axe sumas. Similitudo verò superficierum, quibus vestiuntur, obtinebitur, si duplicatam, aut laterum, aut diametrorum, aut axium proportionem consequantur. Nam, & circuli, qui duplicatam diametrorum proportionem obtinent, similes sunt superficies.

PROBL. I. PROPOS. I.

* *Similem quamcumque superficiem à dato puncto alteri describere.*

SIt data superficies ABCD mixtilinea, vel rectilinea, vel curuilinea, quæcumque, & oporteat ei similem delineare. Eligatur quodcumq; punctũ in ea I, & ab I ad margines planitiei ducantur plurimæ lineę, & si habeat angulos pręcipuè ad illos illæ vergañt, & producantur vsquedum oportet, aut placet, & inter illas aliqua perueniat ad datum punctum L, deinde fiat, vt IA ad IL, sic IB ad aliud ex prop. 15. lib. 6. & inuenietur IT; sic iterum fiat, vt IA ad IL, sic IC ad IG, & ID ad IH, & sic agatur in omnibus: Deinde per omnia illa puncta multiplicata quantùm sat est, ducatur, vel flexa, vel plurimæ flexæ, vel rectę, secundùm, quod figura exhibita imitanda rectis, vel flexis, vel angulis

gulis, vel tantùm curua constat, & erit factum id, quod desideratur. Nam figura descripta per omnia illa puncta LTGH, & alia plurima erit similis figuræ exhibitæ ABCD.



Probatur. Nam omnia triangula in fig. ABCD sunt similia triangulis in figura LTGH, cùm obtineant latera ambientia eundem angulum apud I proportionalia, cùm effecerimus, vt IA V. g. ad IL, sic IB, & IT, & cæt. Vnde subductis basibus AB, & LT triangula ipsa erunt similia ex 5.l.6 & sic de alijs: cum ergo omnia triangula in planitie ABCD sint similia triangulis in planitie LTGHE describtibilibus ex def. ipsę planities erunt similes.

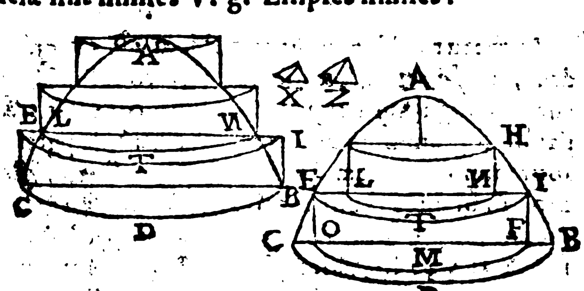
COROLLARIVM.

ELlicitur quod latera quęcumque illa sint, erunt proportionalia. Quoniam enim IT ad BI, vt LT ad AB, & TG ad CB, ex 4 lib.6. vt GI ad CI, & GI ad CI, vt GH ad CD erit LT ad AB, vt TG ad BC, & GH ad DC, vnde ex pr.17. l.5. & omnia simul antecedentia LT, & TG, & GH ad omnia consequentia AB BC, & CD eadem proportione gaudebunt, vt vnum antecedens LT ad aliud consequens AB, quæ est eadem, quæ LI ad AI. Quare etiam latera quæcumque formentur ex illa basium multitudine, vt vt libet multiplicata semper erunt proportionalia, & erit vt LT ad BA, sic LTGH ad ABCD.

THEOR. I. PROPOS. II.

* *Ad superficiem cuiuscumpue corporis globosi, cuius omnes sectiones parallelæ ad axem sint similes, eam obtinet proportionem planum per axes basium, & corporis ductum, quàm axis basis, ad circumferentiam basis.*

*SIt superficies globosa corporis conoidalis alicuius BAGD, & superficies plana ducta per axem CB basis, & AM corporis sit ABC. Dico, quod vt est ABC planum ad ABDC superficiem globosam, sic axis BC ad ambitum BDC corporis ducti, seu recti, seu obliqui, cuius omnes sectiones basi parallelæ sint similes V. g. Ellipses similes.



Inscribantur portiones cylindraceorum corporum DFEI, & LNH, & cęt. æquealtorũ. Singulæ earum superficies ex propos.4. tract.31. quæ de quacumque orbita intelligitur, vt constat ex demonstratione, erunt æquales rectangulo ex circumferentia OMF, & altitudine FI, ideoque rectangulum OI per axes dicit ad superficiem cylindracei OFI eam proportionẽ, quam ad rectangulum illud ex ambitu OMF ellipsis, & altitudine FI, idest axis CB ad ellipsim BDC; & ita dicas de superficie cylindracei LNH, cui HL rectãgulũ dicit eã proportionem, quam LN diameter ad ambitũ LTN. Omnes verò Ellipses BDC, LTN ex thesi similes sunt; Quare vt OI rectangulum ad OEFIM superficiem cylindracei, sic OF axis ad OMF ambitum, vt autem OF axis ad OMF ambitũ, sic LN axis ad LTN ambitũ ob similitudinẽ ellipsiũ; vt autẽ LN ad LTN, sic ex 4.tr. 31. rectãgulũ LH ad LTNH superficiẽ cylindracei; Ergo ex 16. lib.5. vt OI rectangulum ad OEFIM superficiem cylindracei, sic LH rectangulum ad LTNH superficiem cylindracei; idest vt OF axis ad OMF ambitum, & ita discurras de alijs. Ergo ex 17. lib.5. ita erunt omnia rectangula OI, & cæt. ad omnes superficies cylindraceas EOMFI, & cæt. vt vnum rectangulum OI ad vnam superficiem cylindraceam EOMFI. Quo posito. Assero quod etiam ABC planum ad ACDB superficiem est, vt BC ad BDC ambitum. Nam si non dicit, eandem proportionem sit maius planum per axem ABC, quàm quod requirat ratio BC ad BDC quantitate X; ita vt si quantitas X abesset ab ipso, tunc ABC planum per axem esset ad globosam superficiem ACDB, vt BC axis ad ambitum BDC, vel OF ad OMF ex thesi.

Inscribantur itaque tot cylindracea; donec superficies ipsorum rectangulorum à globosa superficie differat minùs quàm quantitas X. Ergo, quia rectangula inscripta minùs differunt à CAB plano quã X, & X est illa differẽtia quà totaliter ablata CAB planum ad globosam superficiem ACDB diceret eandẽ proportionem, vt CB ad CDB; etiam rectangula inscripta OFI; LNH, & cæt. dicent maiorem proportionem ad globosam superficiem, quam CB axis ad CDB ambitum. Dicunt autem ad superficiem suam curuam eandem proportionem. Ergo cum eadem rectangulorum superficies ad conuexam CABD corporis exhibitl maiorem proportionem dicat quàm ad cylindraceorum superficiem ex 10 lib.5. erit maior cylindraceorum inscriptorum superficies, quàm ipsa globosa superficies ABDC: quod est absurdum, cum debeat esse maior, vt pote continens.

Quod si dicas CAB Planum ad CDBA globosam superficiem dicere minorem proportionem, quam CB ad CDB. Deficiat illis quantitas X, cum quà eandem diceret proportionem, quã CB ad CDB. Tũc autem circumscribantur tot rectangula, donec eorum superficies differat à plano CAB minori quantitate, quam X. Quia ergo tota quantitas X deberet addi; rectangula verò non superant CAB quantitate X; sed minùs; ideo etiam ipsa ad globosam superficiem CABD dicent minorem proportionem, quam CB diameter ad CDB circumferentiam, dicunt autem ad cylindraceorum circumscriptorum superficiem, illam proportionem, quam CB ad CDB; Ergo ad superficiem globosam dicunt minorem proportionem, quam ad superficiem cylindraceorum, quare ex 10. lib.5. erit maior superficies corporis CABD, quam circumscriptorum cylindraceorum, quod est absurdum, cùm ergo non possit planum CAB ad superficiem globosam dicere maiorem, aut minorem proportionem, quam CB ad CDB dicet eandem.

CO-

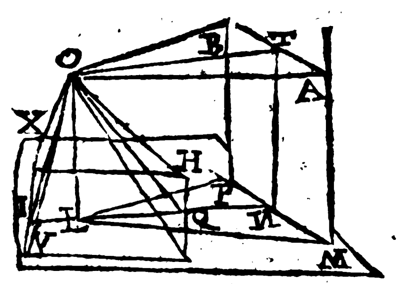
COROLLARIVM.

HInc modus obtinetur, quò omnium Conorum etiam scalenorum superficies inueniātur. Nam cognito ellipsis ambitu, vel circuli peripheria, & axe, & triangulo per axem; etiam eorum globosa superficies obtinetur; cùm ita sit, vt axis ad ambitum ellipsis, vel si conus sit circularis, vt diameter ad peripheriam; sic triangulum per axem ad globosam eius superficiem, quæ cognitio deficit tractatui 31. expens.3. & hic aptiùs ponitur.

PROBL. III. PROPOS. III.

Normalem altitudinem corporum perscrutari, & superficierum intùs latentium, quorum latera in superficie appareant, nec non, & punctum, in quod à vertice cadit normalis inuenire.

AD corpora similia constituenda in primis est necessaria normalis corporum altitudo, quam hoc modo obtinebimus, non obstante eorum soliditate. Sit datum corpus HVO, cuius altitudo velit inueniri. Extendatur basis HV, & sit MX, vel supposito alio plano, vel alia ratione, eique plano aliud planum OGBA parallelum fiat, electoque puncto M ex 11. tract.22. erigatur normalis AM, & erit altitudo, quæ requiritur.



Probatur. Nam ducto per MA plano AOML per intellectum, & per punctum O, cum plana sint parallela, ex 14. Tract.22. etiam sectiones erunt parallelæ AO, & ML, normalis quoque OL corporis dati HO OV, & MA eidē plano MX extenso normales sunt, itcoque parallelæ ex 7. Tract.22. ideo MO erit parallelogrammum; quare ex prop.33. lib.1. MA, & LO erunt æquales.

Sit deinde QOI intus latentis superficiei reperienda normalis, quæ debeat cadere in latus L extendatur latus QI in N, & per NQ, QO, ducatur planum, quod secet AOB, in TO in plano itaque TNOQ sectioni NQ ducatur normalis NT, & æquabitur normali LO: Patet ex eadem ratione. Nam TO, & NL sunt parallelæ ob plana parallela BOA, & XM.

Sunt quoque parallelæ LO, & TN ex prop.28. lib.1. quod in eodem plano TL sint lateri NL normales altera ex suppositione altera ex effectione, quare inuicem erunt æquales.

Si tandem debeat reperiri punctum, in quod caldt normalis ab o in basim HV, non obstante soliditate corporis HVO; Ductis vt priùs planis ABO, & MX parallelis, & plano AEMP per AM normalem; erit quoque, & ipsum planum ex 16. tract.22. normale ipsis planis ABO, & MX.

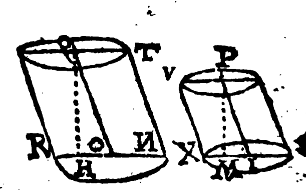
Sectionesque parallelæ AB, MP ex 14. tract.22. coniungatur deinde BO, & AO, & sumpta æquali ipsi AB in MP sectione ab M, fiat triangulum MPL ex pr.24. lib.1. æquale triangulo ABO, & vertex L erit punctum, in quod cadit normalis.

Probatur. Nam si duo plana concipiantur ducta per BO, BP planum PO, & per AO, & AM planum MO erunt normalia plano MX ob normalem MA, & æquidistantem PB ob æquales AB, & MP, & ideo normalem ex 15. tract.22. quare, & ex 16. eiusdem sectio ipsorum OL normalis erit; & ideo parallela ipsis BP, & AM normalibus. Vnde BO, & PL, nec non, & ML, & AO erunt æquales ex prop.33. lib.1. cum etiam sint parallelæ ex 14. Tract.22 Quare triangulū PLM æquabitur triangulo BOA, & ex 16. lib. 1. & erit triangulum iam factum super PM: sed triangulum ab istis sectionibus factum incidit in communem planorum sectionem normalem OL & ideo in L punctum plani, in quo est; ergo etiam triangulum effectum PML, quod est idem, & cuius omnia latera in eundem situm incidunt.

PROB. IV. PROPOS. IV.

Cylindrum super datam basim similem, & similiter positum, ac alius datus ædificare.

SIt cylindrus datus TR, qui sit imitandus cylindro super SX erecto; Ducatur axis QO, & ab extremo Q demittatur normalis HQ, perque normalem, & axem, quæ sunt in eodem plano ex prop. 2. tract.22. ducatur planum TR, secans basim: deinde à centro I ducatur IP, quæ faciat eundem angulum cum sectione TX, ac OQ cum sectione OR, deinde fiat, vt OR ad OQ, sic IX ad aliud, & inuenietur IP longitudo, compleatur itaque parallelogrammum SV per axem, simileque erit parallelogrammo TR: Vnde si axe IP, & basi SX fiat cylindrus SV ducta per PV altera basi, erit similis cylindrus SV cylindro TR, & similiter positus, vt ipse est.



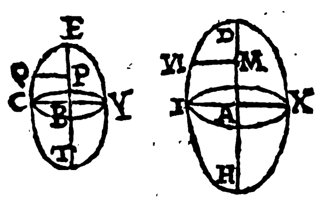
Probatur. Nam positus quidem est SV cylindrus, vt cylindrus TR ob axem IP concludentem cum IX angulum I æqualem angolo O ex desc.1. At parallelogrammum per axem SV est simile parallelogrammo per axem TR; vnde superficies cylindros ambientes erunt similes, siquidem ex 2. & 3. dicunt proportionem duplicatam peripheriarum; sed ex 11. & 40. l.6. bases quoq; circuli dicunt duplicatam proportionem peripheriarum; Quare erit basis SX ad basimNR, vt curua cylindri SXMV superficies ad curuam NRHT cylindri superficiem, cum ergo

ergo superficies sint similes ex def. 2. tract.33. etiam cylindri similes erunt.

PROBL. V. PROPOS. V.

* *Data sphæra sphæroide Parabolico, Hyperbolico, vel Elliptico recto ad axem simile aliud corpus componere.*

FAcilis est constitutio sphæræ, cum omnes sphæræ sint similes, tum positione, tum soliditate, cum sint in triplicata ratione diametrorum, duplicata maximorum circulorum, quibus semper eodem modo sunt collocatæ. Sed vt alia corpora describantur. Super diametrum datæ basis circularis similis ellipsis ellipsi ductæ per axem sphæroidis imitandi, & similis positionis, vel Hyperbola, vel parabola fiat, quod efficietur ex prop. 52. Tr.24. si fiat loqnendo de ellipsi, & hyperbola (nam omnes parabolæ ex 51. Tr.34. sunt similes) radius, & applicata AI ad AD axem, ita BC radius basis datæ ad aliud, & inueniatur BE axis, cui applicetur BC rectangulè, vt est AI ad AD, deinde ductis plurimis alijs, fiat vt MD ad MN. sic PE ad PQ, & cæt. Si ergo hæc sectio intelligatur circum suũ axem verti; describetur sphæroides, si sit Ellipsis; Conoides Hyperbolicum si sit Hyperbola: Parabolicum si sit Parabola ex definit. tract.25. Dico itaque quod sphæroides CETY simile sit, & similiter positum, ac sphæroides DIHX.



Probatur quod sit simile. Nam vt est XDIH planum Ellipticum ad superficiem sphæroidis IXDH, ex pr.38. tract.31. ita est diameter XI ad peripheriã XAI basis p centrũ, sed vt XI, diameter ad peripheriam XAI, sic YC diameter ad peripheriam YBC ex lib.6. pr.42. vt autem YC diameter ad peripheriam YBC, ita est Ellipsis YECT ex pr.38. tract.31. ad superficiem sphæroidis YECT. Ergo ex æquo vt est XDIH planũ ad Ellipsim YECT, ita est superficies XDIH sphæroidis ad superficiẽ sphæroidis IECT; sed ellipsis XDIH est similis ex effectione superficiei YECT; ergo etiam superficies XDIH sphæroidis superficiei sphæroidis YECT: sed etiam XAI est basis similis YBC, quod sint ex effectione circuli, & ideo similes: Ergo ex def. 2. tract 23. solida erunt similia eũ circumuestiãtur similibus superficiebus. Positio verò eadem est ob eorum rectitudinem.

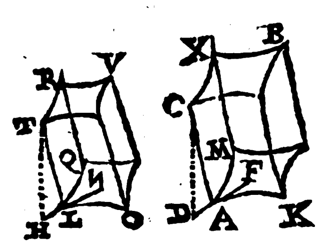
COROLLARIVM.

*HInc est conos similes rectos faciliter posse constitui, si fecerimus triangulum per axẽ describendi coni similem triangulo per axem coni imitandi. Nam ex præcedenti argumento deducto ex prop.38. tract.31. constabit illos conos similes esse; qui superficies circumuolutas habeant similes, vt sunt inuicem similia triangula per axẽ, & idem dicendum de conis ellipticis, dummodo bases ellipticæ similes sint.

PROBL. VI. PROPOS. VI.

* *Cylindraceum corpus alteri simile constituere ad datam altitudinem.*

SIt Cylindraceum quoddam corpus AB, quod imitari oporteat. Demittatur à latere AC, quod sẽper rectilineũ est (illo uice axis vtẽdo) normalis CD, & per AC, & CD ducatur planum ACD, quod secet basim productam, & sectio sit AD. Eligaturque in ea sectione quodlibet punctum F, & in altero plano ducta, vtcumque HN, & electa altitudine cylindracei describendi HT; fiat vt DC ad DA, sic HT ad HL, & p punctũ L ad T ducatur latus LT. Deinde fiat, vt AD ad FD, sic LH ad aliud, & reperiatur HN; super latus itaque LN describatur basis OQ similis basi KM. Et ab ea eleuentur latera QR, & cæt. æqualia inuicem, & parallela ipsi LT; multiplicando illa iuxta exigentiam, vel angulorum, vel curuorum laterum, per quæ superficies, vel planæ, vel curuæ ducantur, quæ secẽtur TV parallelo plano ipsi plano QO per T, & erit constitutum cylindraceum corpus simile, similiterque positum ac AB.



Quod sit similiter positum patet. Nam def. 2. triangulum LTH, & ACD sunt triangula similia ex effectione. Quod verò sit etiam similibus superficiebus circundatum; patet eo quod basim OQ similem basi KM effecerimus, vnde basis VT superficiebus æquedistantibus ex definitione corporis cylindracei circundata, & ideo æqualis, & similis basi OQ similis basi MK, & CB, vt autem in basibus similibus quibuscumq; ex prop.1.h.Cor. AF ad LN sic quodcumque latus AK ad LO, est autem AF ad LN, vt AC ad LT; Ergo vt latus AK ad latus LO, sic est AC ad LT, & sic dicas de alijs æqualibus; vnde etiam superficies DT, & aliæ similes erunt superficiebus KC, & alijs. Itaque cylindraceum corpus LV erit simile cylindraceo corpori AB.

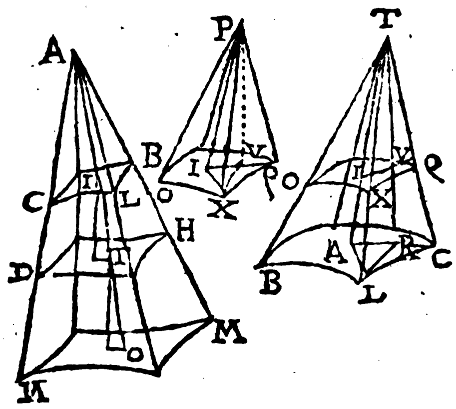
PROBL. VII. PROPOS. VII.

* *Pyramidem Conum, seu corpus pyramidem, vel conum referens alteri simile, & similiter positum ponere ad datam altitudinem.*

COrpus pyramidale mixtilineum appellamus illud, quod superficies rectilineas in acumen tendentes habeant, quę non sint planæ, sed curuæ, & à basi, cuius latera curua sint eleuatæ. Sit itaq; conus, vel pyramis, vel etiam pyramidale aliquod corpus TCLB, quod oporteat imitari. Inueniatur ex prop.3.h. punctum R, in quod cadit normalis. Deinde ducta aliqua RC, quæ cadat in latus basis CL à puncto R fiat vt RT ad RC sic VP data altitudo

ad

ad VQ, & similiter ductis alijs RL, & cæt. fiat, vt RC ad RL, sic VQ ad VX, & sic fiat de reliquis, eritq; ex *æquo* TR ad RL, vt PV ad VX, quare bases erunt similes ex prop. 1. h. & sic concludes de omnibus alijs: simulque triangula omnia CTR, TRL erunt similia quodlibet suo correspondenti: triangulis QVP, & PVX: Siquidem angulo recto gaudent, vt pote à normali VP, vel TR effecto ex def. 2. Tr 22.



& latera circa æquales angulos proportionalia sũt: Erit itaq; TC ad CR, vt QP ad QV, at CR est ad RL, vt QV ad VX ex effectione, & RL ad LT ob similitudinem triangulorum TRL, & VPX, vt VX ad XP. Ergo ex *æquo*, vt TC ad LT, sic QP ad XP, Est autem TC ad CR ob similitudinem triangulorum ostensam, vt QP ad QV, & ob similitudinem basium supra ostensam CR ad CL latus rectum, vel si sit curuum subtensam CL, vt QV basis ad QX latus rectum, seu si sit curuũ ad suam subtensam, quare ex *æquo* CT erit ad CL latus rectum, siue subtensam, vt QP ad QX. Ideo triangula omnia CTL triangulis QPX erunt similia, & alia omnibus alijs. Quare superficies omnes pyramidis, vel coni, vel corporis pyramidi similis erunt similes cum omnes planæ superficies inscriptibiles, vel circumscriptibiles illis corporibus similes sint: Bases autem sunt similes ex effectione, & ideo est idem numerus in basibus laterum quapropter, & superficierum circũambientium. Ergo duo corpora CLBT, PQXO similia sunt.

COROLLARIVM.

Elicitur autem hinc; quod si corpus aliquod ex prædictis plano parallelo basi secetur V. g. ANM corpus plano DH, quod conus reliquus, vel pyramidale corpus DAH erit simile toti corpori DAH. Ratio est omnino eadem, quæ propositione posita est, quia triangulum RCT est simile triangulo TVQ sectione eius, VQ plani OQ cum normali VT, & latere TQ effecto in fig. BTC, quia ea sectio VQ parallela sectioni RC est ex 14. tract. 22. & XQ parallela LC, & cæteræ cæteris, vnde ex propos. 4. lib. 6. omnia triangula erunt similia, siue in basibus, siue in superficiebus ad apicem tendentibus effecta. Ideoque ipsa corpora similia.

THEOR. I. PROPOS. VIII.

Omne corpus regulare in sphæra descriptum est alteri simile, si sit eiusdem generis.

Id faciliter ostenditur. Quia obtinet omnes superficies similes sunt enim; aut triangula æquilatera, & æquiangula inuicem, quæ sunt in dato corpore, & ideo similia illis, quæ sunt in alio corpore, ne dũ inuicem æqualia, sed & æquiangula triangulis primi corporis, aut quadrata, aut pentagoni, quæ sunt quoque figuræ similes.

Imo etiam corpora omnia in sphæra inscriptibilia, sed figuris in se diuersis constantia eiusdem generis, sunt quoque figuræ similes: quod sint aut triangula æquilatera, & quadrata; aut pentagoni, & triangula æquilatera, & cæt. ideo enim eiusdem generis sunt, quia similibus superficiebus licet duarum specierum tum vnum, tum alterum corpus constet.

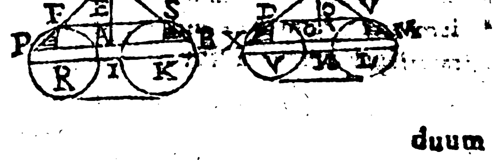
COROLLARIVM.

Hinc patet quomodo corpus regulare simile alteri describas, in data sphæra, aut ad datam altitudinem; Sufficit enim pyramidem super datam basim, aut ad datam altitudinem alteri similem extollere, quæ reperitur in corpore imitando, & illi construere tot pyramides æquales, quæ numerum pyramidum in corpore prototypo existentium exæquent: Nam illæ circa eundem verticem positæ conficient corpus exoptatum: quod patet ex tract. 33. de inscriptione corporum regularium in sphæra, Nam omnia constant pyramidibus basim habentibus in superficiem sphæræ & verticẽ in centro. In data autẽ sphęra describemus iuxta ea, quæ diximus Tr. eodẽ describendo corpus eiusdem generis, ac propositum, quod imitandum proponitur.

THEOR. II. PROPOS. IX.

9 *Omnes annuli rotundi, vel figurarum regularium sunt similes.*

Sit Annulus rotundus MX, & alius quicumque BP, quorum sectiones MVN, & BSI sint circuli. Dico eos esse similes. Nam ducto per centra sectionum circularium plano LY, & KR, ducatur ei per similes arcus, plana æquidistantia MX, & BP, eruntque circuli ob annuli figuram, erectisque normalibus ab eorum centris O, & A ab M ducatur MT intercipiens arcum similem arcui BS, quem intercipit BH, eritq; triangulũ MOT simile triangulo BAH cum sit rectãgulũ, & angulũ, M obtineat æquale angulo B ad circũferentiã, & sic dicas de triangulis VTQ, & SEH: Vnde si circũuertantur efformabunt conos similes Cor. pr. h. ideoque superficies coni MTX erit ad VTD coni superficiẽ, vt superficies BHP coni ad superficiem coni SHE, & ideo *diuidendo* MTX superficies coni erit ad su-



duum annulum MVDX, vt BH, coni superficies ad residuum annulum BSFP; Cum ergo idem argumentum de omnibus superficiebus in annulo inscriptis fieri possit etiam rotundæ superficies, quę semper similibus planis sunt inscriptibiles similes erunt, ideoque ipsa corpora vnica superficie contenta. Similia erunt.

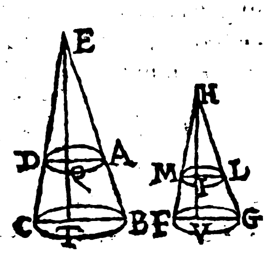
COROLLARIVM.

OMnes quoque annulos cuiuscumque figuræ circulo inscriptibilis esse similes; dummodo ipsæ figurę inscriptæ similes sint, patet ex præced. cùm quamcumque superficiem circulo inscriptibilem eundem numerum graduum subtendentem similem alteri simlem arcum subtendenti demonstrauerimus: Vnde; si sint plures similes superficies, sed semper æquali numero, quæ similes arcus subtendant in hoc annulo, vt aliæ in alio similes etiam erunt figurę inscriptę. Quod, & concludetur de annulis, quorum sectiones similes quidem sint; sed tamen circulo non inscriptibiles; quia illæ figuræ, sectionesque per centrum poterunt diuidi in triangula: quæ semper in circulis inscriptibilia sunt ex prop. 2. lib. 4. elem. quorum latera eundem numerum graduum subtendunt cum ponantur figuræ similes; & ideo triangula in quæ dispartiri queunt, ab vno angulorum ad aliquem alium ductis lineis, similia.

PROBL. VIII. PROPOS. X.

Frusta conorum, vel pyramidum planis parallelis excisorum quarumcumque similia efficere super datam basim similem basi coni dati.

SIt datum Frustum conicum ABCD compleatur, & sit BEC; sit deinde data basis GF similis basi BC; & super eam erigatur conus, vel pyramis, vel corpus referens conum, vel pyramidem, prout basis data reposcit, simile cono BEC: Deinde fiat altitudo TE ad altitudinem TQ; sic VH ad VI, & per I agatur planum basi parallelum, eritque GLMF frustum simile frusto BADC.



Probatur. BEC superficies corporis imitandi est ad superficiem imitantis corporis GHF, vt AED superficies ad superficię LMH ex pr. 7. h. Cor. Si ergo auferantur AED, & LHM *diuidendo* erit BEC superficies ad reliquam superficiem BADC, vt GHF ad reliquam superficiem GLMF, sed BEC, & GHF sunt similes, ergo etiam BADC, & GLMF superficies similes erunt; sunt autem, & bases similes BC, & GF ex effectione, & AD, & LM, quod AED, & LHM sint coni similes, ergo frusta conorum BADC, & GLMF erunt similia.

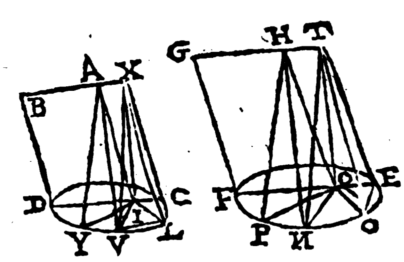
PROBL. IX. PROPOS. XI.

Prisma, vel Prismaticum conum, vel corpus cuiuscumq; basis ea corpora referens simile dato exhibere.

COrpus referens prisma, vel prismaticum conum est corpus à quacumque basi in lineam rectam terminans parallelam basi eleuatum.

Sit itaque constituendum aliquod ex dictis corporibus V. g. XBCD simile, & similiter positum, ac corpus prisma referens EFTG.

Inueniatur punctum Q in quod ab aliquo puncto T cadit normalis. Deinde p lineā terminantē TG ab eius T extremo ducto plano EG. quod faciat sectionem in basi EF, & ductis plurimis lineis QO, & cæt. (si sit necesse, quod basis non sit circulus, aut figura regularis, vel saltem rectilinea.) Fiat vt normalis TQ ad QF, & quālibet ex ipsis OQ, vel QE, sic IX normaliter erecta super planum CD ad libitum assumpta ad ID, & quālibet aliam IL, & IC, eosdē āgulos claudētes & p extrema C, L, D lineā ducatur. Itē fiat, vt QT normalis ad TG, sic IX ad XB, & vt QT ad TH, sic IX ad XA; Ducantur itaque superficies à basi CLD, quæ terminēt in lineā XB, & erit corpus prismaticū CXBD simile corpori dato FGTB.



Prob. Et primo ostendemus, quòd bases sint similes: Siquidem omnes ductæ à puncto Q, & I proportionales sunt. Nam fecimus TQ ad QF, vt IX ad ID: Ideoque *inuertendo* QF ad TQ, vt ID ad IX: sed etiam ex effectione TQ ad QO, vt IX ad IL. Quare ex *æquo* QF ad QO, vt ID ad IL, & sic dicas de alijs.

Probatur quoque quod superficies circumambientes sint similes, ex eo quod in eis tot planæ superficies similes inscribi possint, siquidem poterit vtrumque corpus in similes pyramides partiri. Nam ducta EO, & TO, sic CL, & LX. Iam erit pyramis EOQT similis pyramidi CLXI, est enim ex effectione QT ad EQ, vt XI ad CI, & anguli ad Q, & I recti semper; vnde triangula EQT, & CIX erunt similia, & ita argue de triangulo OQT; quod sit similis triangulo LIX. Vnde ex 7. h. pyramis EQTO erit similis pyramidi CLXI; erit enim consequenter EO ad ET vel OT, vt CL ad CX, vel LX: Sic dicas, quod OQNT similis sit pyramidi LXVI; Pyramis autem TQNH assimilabitur pyramidi XVIA ob eandem rationem, quod triangula TQN, & TQH sint similia triangulis XIV, & XAI; cùm TH æquetur BQ, & XA ipsi CI ob parallelismum linearum QH, & ET, nec non, & XC, & AI. Quo ostenso, etiam QHNP cōstabit similis pyramidi IVAY, & sic de alijs. Omnes itaque pyramides in ETGF erunt similes pyramidibus in CXBD. Vnde, & habebunt superficies similes, quæ sunt in ETGF, superficiebus pyramidum in CXBD, quarum extimæ sunt inscriptæ, vt sunt EOT, & ONT, & THN, vel in alio

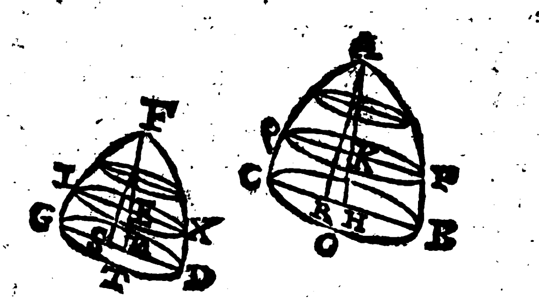
Pppp corpore

corpore CLX, & LVX: & cæt. & sic omnes superficies inscriptæ in EGFT corpore erunt similes superficiebus inscriptis in CXBD corpore numero æqualibus. Quamobrem ipsa corpora ex def. erunt similia. Non putamus autem necesse ostendere pyramides in istis corporibus descriptibiles esse, nec casum quo normalis extra cadit replicato argumento ostẽdere, neq; ostensione subtilius proponere de singulis lateribus cuiuscũq; pyramidis proportiones similes, & angulos æquales demonstrãdo. Esset enim discursus prolixus, qui alioquin patet ex discursu anteced. vel quilibet ex se, & casum fingere, & argumentum texere potest.

PROBL. X. PROPOS. XII.

Dato quocumque corpore Conoidali, seu sit conoides obliquum, seu rectum, seu portio eorum, seu quodcumque aliud corpus: dummodo ad proportionales axis partes planis similibus secari possit, simili corpore imitari, & simili positione.

SIt corpus aliquod BAC, cuius planum per axem ductum, & per normalem basi; seu sit conoides obliquum, seu rectum, aut sphæroides, seu quodcumque aliud corpus ex segmentis circulorum, vel etiam ambituum constans, & oporteat ei simile corpus ponere, fiat ex prop. 1. h. DFG simile planum BAC plano per axem HA, & per normalẽ AR, in quo plano DFC sit normalis SF, & axis NF, quæ cum DG simile faciat triangulũ ipsi RHA, quam normalem docuimus reperire prop. 3. h. perque DG normaliter altitudini SF, ducatur planum DTG, sicut altitudini RA ductum est planum BOC: seceturque corpus imitandum in partes planis PQ, & alijs, quæ erunt similia basi BOC ex thesi. Deinde ad partes NE axis similes partibus axis HK ducantur parallela plana XL, & cæt. similia planis PQ, & cæt. Circa verò plana similia superficies curuæ circumscribantur: si enim plana sint plurima superficies ductæ circa PQ, & alia plana erunt omninò similes superficiebus corporis imitandi BAC, & sic ex def. ipsa corpora erunt similia.



Probatur. Nam cum ex prop. 2. huius. Sit BAC superficies plana ad globosam superficiem BADO corporis exhibiti, vt BC diameter ad BOC ambitum: Sit verò ex effectione BC ad BOC, vt DG diameter ad DTG ambitum. At DG ad DTG, sit, vt DFG plana superficies ex prop. 2. h. ad DFGT globosam superficiem corporis constituti ex *æquo* erit BAC planum ad DFG planum, vt BOCA globosa superficies ad DFGT globosam superficiem. Sed BAC, & DEG sunt ex effectione similia plana. Ergo etiam globosæ superficies similes erunt. Itaque ex tract. 34. def. 2. corpora erunt similia cum superficiebus similibus vestiantur. Positio verò similis eo, quod triangulum NSF, ex axe, & normali, & sectione basis sit simile triangulo [illegible] ex axe normali, & sectione basis similiter [illegible] vt requirit def. 2. h.

EXPENSIO II.

De Transformatione Corporum.

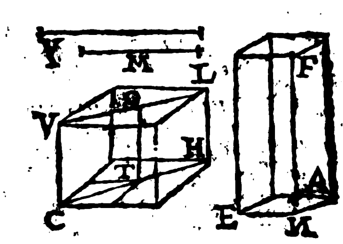
DE Transformatione Corporum doctrina ex dictis facilè eruitur, cum enim Corporum etiam diuersę speciei ęqualitatem inuenerimus, & proportiones assignauerimus, ex illis accliui argumentatione etiam corporum transformatio deriuat.

PROBL. I. PROPOS. XIII.

Dato Parallelepipedo, datæ altitudinis æquale parallelepipedum construere.

SIt datum aliquod Parallelepipedum EF, cuius basis AE, & altitudo NF, detur etiam linea quędam OT erecta perpendiculariter super aliquod planum, & oporteat circa eam parallelepipedum dato EF æquale constituere.

Fiat itaque, vt altitudo TO ad altitudinem NF, ita basis AE ad aliud scilicet ad rectangulum ex M.



Quod obtinebimus ex 12 lib. 6. Coroll. faciendo scilicet, vt TO ad NF, ita EN ad y deinde inueniendo inter NE, & y mediam proportionalem M, & constituendo super eam ex prop. 23. lib. 6. rectangulum simile, similiterque positum, vt rectangulum EA, diuidaturque in quatuor rectangula æqualia, quorum vni ab T fiat æquale rectangulum TC, dupliceturque singula latera, et compleatur rectangulum CH, & erigantur CV, HL parallelæ TO, & efficiatur parallelepipedum CL. Dico factum esse, quod exposcebatur, & parallelepipedum CL esse æquale parallelepipedo EF.

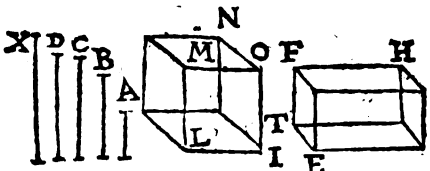
Probatur ex prop. 10. Tr. 34. pã. Nam illa sunt parallelepipeda æqualia, quæ habent bases altitudinibus reciprocè proportionales; sed ex effectione TO altitudo est ad NF altitudinẽ, vt basis AE ad basim CH. Ergo parallelepipeda erunt æqualia.

PROBL. II. PROP. XIV.

Dato Parallelepipedo cubum æqualem constituere.

SIt parallelepipedum EH, quod consequatur basim EF quadratum (quòd si talem non consequatur, fiat basis quadrata æqualis ipsi EH, & super eam erigatur parallelepipedum æquealtum EH, quod erit æquale dato parallelepidedo ex prop. 6. Tract.

Tract. 34. Huic igitur constituendus sit cubus æqualis: Inter TV, hoc est A latus basis dati parallelepipedi, & altitudinem FH, scilicet D duę mediæ proportionales reperiantur B, & C ex prop. 3. tract. 15. & ex B fiat quadratum, super quod erigatur cubus LN, & erit cubus æqualis ipsi parallelepipedo EH.



Prob. ex propos. 12. p. 1. Tr 34. quoniam cubus erectus ex media proximiori ei, quæ constituit basim parallelepipedi, vt est B æquatur parallelepipedo ipsi ex basi quadrata A, & altitudine D.

Quod si forte eueniat exhibitum parallelepipedum obtinere tres dimentiones continue proportionales, erit cubus ex media constitutus æqualis ipsi parallelepipedo ex prop. 11. tract. 34.

PROBL. III. PROP. XVI.

Dato cubo æquale parallelepipedum construere in datam altitudinem, vel super datam basim.

SIt in præced. figura datus cubus LN, & data altitudo HF, & oporteat eleuare solidum, quæsitum in altitudine FH. Duabus HF, & IO inueniatur tertia proportionalis ET, & IO fiat æquale latus TF, & ET tertia constituat aliud latus basis EF, eleueturque in altitudinem datam HF, & assero hoc parallelepidum cubo LN esse æquale, quod patet ex propos. 11. Tract. 34.

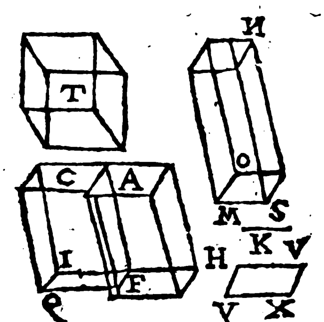
Quod, si quis velit parallelepipedum æquale dato cubo super datam basim fabricari: sit basis exibita FE; quę, si non est parallelogramma reuocetur ad æquale parallelogrammũ: Deinde fiat vt basis FE ad basim LO, ità latus IO ad FH, & constituatur super FE parallelepipedum æqualis altitudinis ipsi FH, & hoc erit æquale cubo dato. Patet quoniam sunt bases effectę altitudinibus reciprocè proportionales. Vnde ex prop. 10. tract. 34. erunt ęqualia hæc duo solida. Inuenietur autem basis FE ad basim LO, vt latus IO ad FH: si duabus TE, & LI tertia proportionalis inueniatur, deinde fiat, vt TE ad tertiam proportionalẽ repertam: sic IO ad FH: tunc enim quia est FE ad basim IO, vt TE ad tertiam proportionalem repertam ex Cor. prop. 22. lib. 6. & TE ad tertiam proportionalem repertam, est vt IO ad FH, erit etiam ex 16. lib. 5. FE ad basim LO, vt IO ad FH altitudo ad altitudinem.

PROBL. IV. PROPOS. XVI.

* *Dato parallelepipedo simile parallelepipedum efficere, sed æquale alteri dato.*

SIt parallelepipedum A, cui simile oporteat facere parallelepipedum aliquod, sed æquale cubo T, fiat quodcumque parallelepipedum C æquale cubo T, sed altitudinis æqualis parallelepipedo A; habebuntque parallelepipeda eandem proportionem; quam bases ex 8. tract. 34.

Redigatur itaque ex 6. prop. tract. 29. basis FI ad eandem altitudinem XV plani YV, ac basis HF, habebuntq; bases planæ eandem proportionem, ac bases ipsarum lineæ XY ad HF. Ideoq; ex 7. l. 5. QF erit ad FH, vt XY ad FH. Inter duas itaq; XY, & FH inueniantur duæ mediæ proportionales K, & MS, & fiat super MS ex propos. 3. tract. 34. part. 1. parallelepipedum MN simile, similiterque positum, ac parallelepipedum A, eritq; hoc parallelepipedum æquale etiam cubo T.



Probatur. Nam Parallelepipedum MN ad Praralelepipedum A sibi simile habet proportionem triplicatã laterum SM ad HF homologorum ex 9. tract. 34. ideoque erit vt XY ad HF, cuius proportio est triplicata lineę SM ad HF; siquidem est XY ad K vt K ad SM, & K ad SM, vt M ad HF. sed vt XY ad HF, ita est basis eiusdem altitudinis YV ad FH, & vt VY ad FH, ita est FI ad FH, cum sint æquales VY, & FI ex construct. sed vt FI ad FH bases, ità parallelepipedum C eiusdem altitudinis ad parallelepipedum A. Ergo vt XY ad HF, ità parallelepipedum C ad parallelepipedum A. Ergo C ad A erit in triplicata proportione SM ad HF, idest vt MN parallelepipedum simile ad A: Cum itaque eidem parallelepedo A eandem dicat proportionem parallelepipedũ C, & NM parallelepipedum. Ergo ex 9. lib. 5. erunt æqualia, & tamen MN simile ipsi A factum est, & ideo cubus T ipsi C, & ideo NM inuento æquabitur.

COROLLARIVM.

HInc poterit quis efformare ne dum parallelepipedum, sed etiam prisma, & pyramidem imò, & conum, & cylindrum, & ea omnia corpora, quæ ad eandem eleuationem ex dicendis extolli possunt, & quorum bases, in bases æqualis altitudinis rectilineas conuerti.

PROBL. V. PROPOS. XVII.

Prismati Parallelepipedum æquale construere, vel è contra Prisma æquale parallelepipedo. Sic pyramidem parallelepipedo æqualem, & vicissim parallelepipedum pyramidi æquale statuere.

HOc facilitèr efficietur ex pr. 1. Tr. 29. Fiat parallelogrammũ eiusdem altitudinis, sed super dimidiam lineam basim triãguli, quod prismati basim planam substernit, hoc æquale erit triangulo basis. Quadere, si parallelepipedo æqualis prismati altitudinis hoc parallelogrammũ pro basi substernatur, parallelepipedum erit æquale ipsi prismati Quòd si fiat triangulũ ęquale parallelogrãmo operando è cõtra, prisma super illud triangulũ erectũ æquabitur parallelepipepo. Fiat deinde Pyramis super basim parallelepipedi sextuplo maiorem ex prop. 27. Tract. 29. & erigatur ad eandem eleuationem, & erit pyramis æqualis parallelepipedo.

E contra vero Pyramidis basis sexta pars assumatur, & super illam erigatur parallelepipedum ad eandem eleuationem, & erit æquale Pyramidi.

Prob.pars 1. Nam prisma est dimidium parallelepipedi æqualis altitudinis collocati super eandem basim ex prop.2.Tr.34 p.1. quare si fiat parallelepipedum aliud super dimidiam basim, cum parallelepipeda æquealta sint, vt bases inuicem erit dimidium parallelepipedi integræ basis. Quare cùm ad prisma super æqualem basim, & ad parallelepipedum super dimidiam basim, parallelepipedum super eandem basim integram se habeat, vt 2. ad 1 erunt prisma, & parallelepipedum aliud dimidiæ basis æqualia ex prop.9. lib.5.

Patet quoque secunda pars eodem argumento.

Tertia, & quarta pars patet, quia Pyramis triangularis basis est tertia pars prismatis ex prop.22. Tr.34.p.1. & ideo sexta parallelepipedi duplũ prismatis super eandem basim erecti ad eandem eleuationem, & ideo si fiat parallelepipedum æquealtùm super partem sextam basis prædictæ hoc parallelepipedum ad illud erit, vt basis ad basem nempe, vt 6. ad 1. Vnde ad pyramidem æquealtam super eam basim, & ad parallelepipedum super sextam partem basis æquealtam eandem habebit proportionem.

Quare æquabuntur ex pr.9. lib.5. Pyramis eiusdem basis, & parallelepipedum super sextam partem erectum ad eandem eleuationem.

PROBL. VI. PROPOS. XXVIII.

Prismati cuicumque æqualem cylindrum constituere, & vicissim cylindro æquale prisma ponere; Sicuti, & pyramidem cono, & conum pyramidi erigere.

Fiat basi prismatis æqualis circulus, ex prop.13. tract.30. & super hunc circulum erigatur æqualis eleuationis cylindrus, & hæc erunt æqualia.

Ita quoque fiet ad inueniendum prisma æquale cylindro. Efficietur enim triangulum circulo æquale ex pr.14.Tr.30. & 1.Tr.29. & super hoc Prisma æqualis altitudinis extollatur.

Sic quoque Conus Pyramidi æqualis fabricabitur, & Pyramis cono constituendo super æquales bases æqualis altitudinis Pyramidem cono, vel conum Pyramidi.

Hæc autem omnia ostenduntur Coroll. prop.3. p.2. Tract.34. si autem requiratur, quod Prisma, vel pyramis sit basis similis alteri datæ basi: hæc fient ex prop 27.l.6. redigendo triangulum æquale circulo in figuram datæ figuræ similem.

PROBL. VII. PROPOS. XIX.

Dato Cylindro æqualem conum constituere, & vicissim æqualem cono cylindrum exhibere. Sicut, & dato Prismati æqualem Pyramidem extruere, & è contrà datæ Pyramidi Prisma æquale erigere.

Cylindri basis triplicetur ex 19. tract.30. & super eam constituatur conus eiusdem altitudinis, & erit conus cylindro æqualis.

E contrà basis dati coni in tres partes diuidatur ex prop.19. tract.30. & tertiæ parti fiat circulus æqualis; & exinde super eam ad eandem altitudinem eleuetur cylindrus, & erit cylindrus dato cono æqualis.

Probatur ex pr.7. Tr.34.p.2. Nam Cylindrus se habet ad conum super eandem basim erectum, vt 3. ad 1. sed etiam Conus ad eandem altitudinem super triplicatam basim erectus est ad illũ conum in basi cylindri situm, vt 3. ad 1. ergo ex prop.9. lib.5. sunt æquales cylindrus, & conus; cùm eidem cono sito in subtripla basi coni, eadẽ quæ cylindro deseruit, eandem dicat proportionem, quam 3. ad 1.

Si verò agatur de prismate pyramidi æquando idem ages: Nam triplicata basis Prismatis dabit pyramidem, quæ in eandem altitudinem erecta erit æqualis prismati; Sicut & basis pyramidis tertia parte situm prisma altum, vt est pyramis, ipsam pyramidem exæquabit soliditate.

Ratio est eadem, quòd Pyramis sit tertia pars prismatis in eadem basi sita ex prop.22. Tract.34. p.1. Vnde valebit idem argumentum.

PROBL. VIII. PROPOS. XX.

In Cylindrum datam pyramidem, & in pyramidem cylindrum transfundere. Ita Conum exhibitum in prisma, & prisma in conum deducere.

Fiat Pyramidi datæ æqualis conus ex pr. 28. h. & cono inuento cylindrus æqualis construatur ex anteced. Vel è contrà fiat cylindrus æqualis cono, huicque cono inuento æqualis pyramis. Nam erit etiam æqualis cylindro, vt patet. Sic cono dato æqualis pyramis fiat ex prop.28.h. & pyramidi inuentæ prisma æquale construatur ex prop. anteced.

E contrà autem fiat Prismati dato æqualis pyramis, & pyramidi inuentæ æqualis conus, & conus Prismati æqualis erit.

PROB. IX. PROPOS. XXI.

Conum transmutare in parallelepipedum, & vicissim parallelepipedum in conum. Item Cylindrum in parallelepipedum, & è contrariò parallelepipedũ in cylindrum permutare.

Conus in Pyramidem transmigret ex propos. 28. huius, & pyramis erecta in parallelepipedum transeat ex prop.27.h. Ita Parallelepipedum in Pyramidem transformetur ex prop.27.h. & Pyramis ex propos. 28.h. in conum transfundatur, erit effectum id, quod pars 1. propos. postulat.

Altera verò pars eodem modo in opus demandabitur. Si namque cylindro dato fiat æquale prisma ex pr. h. 28. & huic prismati æquale parallelepipedum ex prop.27. h. Aut parallelepipedo æquale prisma ex p h 27. & prismati æqualis cylindrus ex h. 28. pr. intentum consequemur.

PROBL.

PROBL X. PROPOS. XXII.

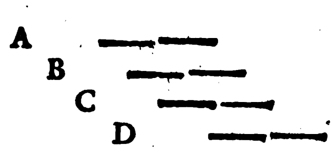
Corpus regulare quodcumque in Pyramidem æqualem traducere, & viciſſim Pyramidem in corpus aliquod regulare tranſmutare.

OMnibus 12. baſibus corporis V. g. dodecaedri pentagonis fiat quadratum æquale transformando priùs in rectangulum aliquam ex ipſis ex 5. prop. Tr. 29. & 12. ex eis vniendo, & hoc rectangulum ex 12. pentagonis conflatum reducendo ad quadratum ex 9. eiuſdem, & deinde ſuper hāc baſim extruatur pyramis altitudinis eiuſdem, ac normalis à centro ſuper quamlibet dodecaedri planam baſim deductæ: ſc. altitudinis vnius pyramidis, in quas diuiditur planis à centro deductis corpus dodecaedri. Eritque hęc pyramis æqualis omnibus pyramidibus corporis dodecaedri in centrum vertice ſuo terminantibus.

Probatur Ita Pyramis quadrilatera modo erecta ad vnam Pyramidem in centro terminantem dodecaedri eſt, vt baſis quadrata huius ad baſim illius, cum ſint eiuſdem altitudinis ex effectione, ideſt vt duodecim pentagoni dodecaedri, quibus æqualis eſt baſis quadrata ad vnum pentagonum ipſius.

Et cum omnes Pyramides dodecaedri ad vnam ipſarum; ita ſint, vtpotè eiuſdem altitudinis, vt omnes baſes duodecim ad vnam ipſarum; ſequitur vt Pyramis quadrilatera, & Pyramides omnes dodecaedri ad vnam pyramidem dicant eandem proportionem, quam 12. ad 1. ſcilicet, quam omnes baſes ad vnam; Vnde ex 9. lib. 5. erunt æquales omnes pyramides dodecadri, & pyramis quadrilatera modo erecta.

E contrà verò data pyramide ita fabricabitur corpus regulare aliquod ei ęquale.



Sit data pyramis, & eius latus A, cui ſit conſtruēdum æquale dodecaedrum. Fiat quodcumque dodecaedrum, cuius alicuius baſis pentagonæ latus ſit B, & fiat huic dodecaedro ex B, ex parte prima prop. h. æqualis pyramis, & huic alia æqualis quidem, ſed ſimilis pyramidi A, ex Coroll. prop. 16. huius, cuius latus C: Fiat autem, vt A ad C latera pyramidum, ſic B latus dodecaedri ad aliud D, & dodecaedrum ex latere D fabricetur, eritque dodecaedrum fabricatum ſuper baſim D æquale pyramidi A.

Probatur, ita eſt pyramis ex latere A ad Pyramidem ex latere C, vt dodecaedrū ex latere B ad dodecaedrum ex latere D ex prop 14. Tr. 34. Cor. ſed pyramis ex latere A eſt æqualis dodecaedro B. Ergo etiam Pyramis C erit æqualis dodecaedro D ex prop. 12. lib. 5. ſi verò quis cupiat datum corpus aliquod ex quinque regularibus æquale, aut cubo, aut parallelepipedo, aut cuicumque alteri figuræ is pyramidem quadrilateram in æqualem; aut cubum, aut parallelepipedum transfundere poterit.

At ſi quis exoptet cubo conſtituere, vel parallelepipedo æquale corpus regulare V. g. Tetaedrū, cuius latus B. Primò ex 1. part. prop. pręc. faciat cubū ęqualē, vel parallelepipedum ęquale alteri dato corpori regulari eius ſpetiei, quæ deſſideratur, nempe Tetaedro ex B, cuius latus ſit A; Deinde conſtituat cubum, vel faciat parallelepipedū ex C latere ſimile illi parallelepipedo A, vt oſtenſ. pr. 6. h. Poſtea faciat, vt A ad C, ita B ad aliud D, & conſtruat Tetaedrum ex illa linea inuenta D, tanquam latere faciendo ex illa quatuor triangula æqualia, & æquilatera, & ſimul vniendo, & erit æquale cubo, vel parallelepipedo dato C.

PROBL. XI. PROPOS. XXIII.

Sphæræ cubum æqualem ponere.

CYlindrus, cuius altitudo diameter ſphęrę, cuius baſis circulus maximus in ſphęra ſit, habet proportionē ad ſphæram ex pr. 37. Cor. 1. & 3. Tr. 24. quā 3. ad 2. Ideo ſi quis hūc cylindrū in tres partes ſecet planis ad axem rectis, & ex tribus huius partibus duas accipiat; erunt hę duę partes ęquales ſphęrę ſoliditati; Quia eidem cylindro ſuimet parti, quę eſt 2. & ſphęrę habet eandem proportionem, quam 3. ad 2. Sic quia ſphęra quadrupla eſt coni eiuſdem altitudinis, ac radij ſphęrę, & eiuſdem baſis ac circulus maximus in ſphęra, vt pr. 43. Cor. Tr. 24. p. 2. ſi ex diametro ſphęrę tanquam radio erigatur conus eiuſdem altitudinis, ac radius ſphęrę erit æqualis ſphęrę ſoliditati.

Si verò huic cylindro, vel cono, aut cubus conſtituatur ęqualis, vel Parallelepipedum, aut pyramis, aut aliquod corpus ex regularibus. Iam illud quodcumque corpus ſphęrę ęquabitur.

PROBL. XII. PROPOS. XXIV.

Annulo ſolido æquale priſma quadratæ baſis inuenire.

QVoniam ex prop. 19. Tr. 34. p. 2. annulus ſolidus quadratus ęquat parallelepipedum, cuius altitudo ęquetur annuli ſolidi altitudini, & baſis annulo plano, cui ineſt: Fiat ex prop. 18. tr. 30. annulo plano, qui pro baſi annulo ſolido ſubſternitur circulus ęqualis, & huic circulo ęquale quadratum, vel rectangulum ex pr. 13. tract. 30. ſuper quod erigatur parallelepipedum ęqualis altitudinis & erit factum id, quod expoſcitur.

Patet autem hęc operatio ex prop. 19. tract. 34. quoniam hoc parallelepipedum, vt ibi oſtenditur eſt ęquale annulo ſolido quadrato.

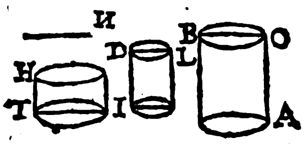
Si verò ſit annulus rotundus, fiat cylindrus, cuius altitudo ſit peripheria per centrum ſoliditatis annuli tranſiens, & baſis ſit circulus eius ſectio, & cylindrus iſte ęquabitur annulo ſolido rotūdo, vt conſtat ex 20. prop. Tract. 34. Quod ſi annuli ſectio non ſit rotunda, ſed polygona, fiet priſma, cui ſubdat baſim illa polygona annuli ſectio; ſed peripheria prędicta ſit altitudo, & iſtud priſma polygono ęquabitur.

PROBL.

PROBL. XIII. PROPOS. XXV.

Cylindrum conum, vel pyramidem, & prisma in basibus datis collocare.

SIt V. g. Cylindrus LI, cui facienda sit basis ęqualis basi OB, ita tamen vt soliditate, & mole idē perseueret, fiat, vt OB basis, LD basim ad sic altitudo DI ad aliud, reperiendo scilicet duabus OB, & LD tertiam proportionalem N, eritque ex 21. l. 6. vt OB ad LD bases sic OB ad N. Postea fiat, vt OB ad

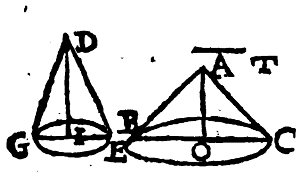


N, sic DI ad aliud, & reperietur altitudo TH. Fiat itaque Cylindrus super basim OB altitudinis HT, & æquabitur cylindro IL: cùm bases effecerimus altitudinibus reciprocè proportionales, & sit OB, idest TI ad LD ex effect. vt DI ad HT, vnde ex pr. 12. præc. tract. æquabuntur IL, & IH cylindri. Eadem ages de cono Pyramide, & prismate, & parallelepipedo quoque.

PROBL. XIV. PROPOS. XXVI.

Pyramidem, vel Conum, Cylindrum, & Prisma in altitudinem datam euehere.

SIt Conus CAB, & oporteat in altitudinē ID illū extollere, ita quòd sit conus EDG æqualis cono CAB. Fiat vt altitudo ID data ad altitudinem OA dati coni GAB, sic basis BC ad basim EG. Id autem exequetur si fiat ID ad OA, sic BC ad aliud T, & inter CB, & T media proportionalis inueniatur EG, ex qua fiat circulus, qui basis est coni. Nam ex 21. Cor. l. 6. erit CB circulus ad EG circulum, vt CB diameter ad tertiam proportionalem T, idest ID ad OA ex effect. & ideo ex pr. 12. Tr. 34. p. 1. erunt æquales coni CAB, & DEG, cum obtineant bases altitudinibus reciprocè proportionales, & idem dicas de pyramide, cylindro, & prismate.

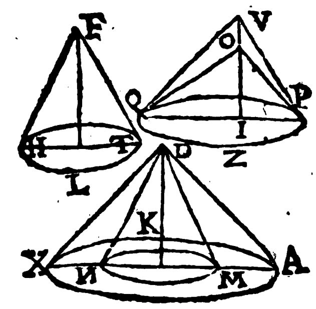


PROBL. XV. PROPOS. XXVII.

Conum æqualem soliditati coni intus euacuati construere.

CAsus 1. Sit Conus ADX; qui vacuus sit intus cauitate coni eiusdem altitudinis, sed minoris basis capaci MDN; oporteatque constituere conum æqualem soliditati ADXMN.

Fiat circulus THL æqualis annulo AKXMN ex pr. 18. tract. 30. & super illum erigatur conus ęqualis altitudinis; ac conus ADX; Et assero hunc conū TFH soliditati concauatæ coni ADX esse ęqualē. Prob. Ita est conus ADX ad conum MDN, si adesset; vt basis XKA ad basim MN si extaret: Ergo *diuidendo* ita est conus ADX ad residuum ADXMN dempto cono MDN, vt basis AKX ad residuum annulum MNXKA dempta basi MN: sed vt AKX basis ad AMKXN annulum ita est eadem basis AKX ad TLH basim ex 7. lib. 5. vtpote ad æqualia: At vt AKX basis ad basim TLH; ita est conus ADX ob eandem altitudinem ex pr. 5. tract. 34. p. 2. ex effect. ad conum TFH: Ergo Conus ADX ad soliditatem residuam euacuatam ADXMN, & ad conum TFHL dicit eandem proportionem basis AKX ad TLH, siue ad annulum AKXNM. Ergo erunt æqualia conus HFTL, & soliditas caua XDANM.



Casus 2. Quod si conus sit vacuus spatio, quod impleatur à cono eiusdem basis, & minoris altitudinis fiat, vt altitudo OV ad altitudinem OI, ita basis QP ad aliud, & inueniatur basis TLH operando eodem modo, ac prop. 15. h. super quam rectus conus HLFT constituatur eiusdem altitudinis IV, & erit æqualis soliditati coni PVQ ablato cono POQ.

Probatur. Nam vt altitudo VI ad OI, sic conus PVQ ad conū POQ ex pr. 11. Tr. 34. p. 2. ideoq; *conuertendo*, vt VI tota ad compartem OV, sic PVQ totus conus ad compartem POVQ residuam ablato cono POQ. Sed vt IV ad OV, sic PZQ basis ad TLH basim, & ita conus PVQ ad conū TFH: Ergo PVQ ad conum TFH ad, & residuum POVQ dicet eandem proportionem. Quare erunt æquales soliditas POVQ, & conus TFHL.

Casus 3. Si verò detur aliquis conus cuius vacuum, cono in quo est, sit etiam dissimile, simulq; minoris basis, & minoris altitudinis illud vacuū tamquam si esset conus redigatur ad eandem basim, vel altitudinem, vt docuimus prop. 26. & 27. h. & postea perficiatur opus, vt 1. vel 2. Casu.

COROLLARIVM.

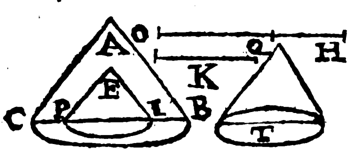
HInc enascitur idem esse dicendum de Pyramide, si aut vacuum pyramidis pyramide basis minoris, sed eiusdem altitudinis capax existat, aut minoris altitudinis, & eiusdem basis. Et idem dicendū est etiam de parallelepipedo, vel cylindro si vacuo basis minoris. & eiusdem altitudinis capax dignoscatur. Si verò vacuum non impleat totum cylindrum, vel parallelepipedum in duo partiemus in vacuatum, & in plenum, & postquam reperimus cylindrum, vel parallelepipedum vacuato æquale ad eandem basim redigemus, & coniungemus cum cylindro, vel parallelepipedo non excauato.

PROBL.

PROBL. XIII. PROPOS. XXVIII.

* *Dato cono vacuo capace similis coni, conum æqualem inuenire.*

* SIt conus ABC, cuius vacuum sit capax coni æqualis cono IPE, qui est similis cono exhibito ABC. Et oporteat æqualem conum eius soliditati inuenire. Reperiantur duabus PI, CB duæ proportionales in continua proportione tertia, & quarta, & hæc quarta sit OH; essetque conus PEI, si esset solidus ad conum CAB, si esset solidus totus, vt PI ad OH, scilicet in triplicata ratione diametrorum, eo quod vacuum, & solidum ponantur coni similes, vt ex propos. 9. Tract. 34. constat. Auferatur IP ab OH linea, & sit residuum QH, & erit *diuidendo* IPE ad BAC sublato ipso PEI, cono, scilicet CAB PEI soliditatem, vt PI ad OH sublata ipsa PI, scilicet QH. Inter igitur IP, & QH duæ mediæ proportionales interponantur, ita vt PI, T, K, & QH sint quatuor continuè proportionales ex 3. Tract. 15. fiatque conus ex diametro T immediatè post PI similis cono CAB.



Igitur ex propos. 9. tract. 24. IPE conus erit ad conum T, vt PI ad HQ: sed vt IP ad HQ, sic est IPE conus vacuus ad CAB PEI soliditatem residuam, vt ostendi. Ergo huic residuo CAB PEI, & cono T, idem conus PEI dicit eandem proportionem PI ad QH, scilicet triplicatam PI ad T diametrorum, ergo erunt ex propos. 9. lib. 5. æqualia CAB IPE soliditas, & conus T.

COROLLARIVM.

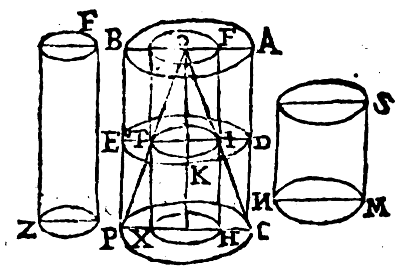
IDem dicendum est de pyramide excauata, si vacuum eius similis pyramidis sit capax, & eodem modo eius soliditati pyramis æqualis inuenietur.

PROBL. XIV. PROPOS. XXIX.

* *Cylindrum vacuatum cono, cui cylindro æqualis sit, reperire.*

CAsus primus. Si conus PCO sit eiusdem basis, & æqualis altitudinis cylindri PA. Fiat circulus ex propos. 19. Tract. 30 qui sit PZ duæ tertiæ partes circuli PC; qui basis est coni, vel cylindri, & super hanc erigatur cylindrus ZF, & erit æqualis soliditati cylindri ablato prædicto cono. Patet. Nam est conus COP tertia pars cylindri, vnde reliquum erit $\frac{2}{3}$ cylindri; Quare si erigatur super basim, quæ $\frac{2}{3}$ sit basis CP, cylindrus ZF æqualis altitudinis altitudini CA erit, vt CP basis ad basis duo trientes ZP, ita cylindrus AP ad cylindrum ZF super eam erectum. Vnde erit $\frac{2}{3}$ cylindri AP, & & ideo æqualis soliditati AP vacuatę cono COP.

Casus 2. At si sit coni uacuum TIO eiusdem altitudinis, & basis minoris in cylindro BAED, fiat basis æqualis annulo DEKIT vna cum duobus tertijs circuli IT, & sit MN, & super eam erigatur cylindrus NS eiusdem altitudinis, ac IF, & dico SN cylindrum æqualem esse soliditati cylindri BA ablato cono IOT.



Probatur. Iam si fiat cylindrus ex basi æqualis duabus tertijs IT, basis, & eleuetur ad altitudinem IF erit æqualis soliditati coni FT ablato cono IOT; Item si fiat basis æqualis annulo DKEIT & super eam eleuetur cylindrus æqualis altitudinis, ac DA æquabitur ipsi cylindro EA ablato cylindro TF ex Coroll. propos. 27. huius. Ergo ex propos. 39. Tract. 17. Si componantur isti duo cylindri erit totum EA ad duos cylindros æquantes suum solidum dempto cono IOT, vt ad SN cylindrum, qui ambos simul amplectitur, quare cylindrus SN prædicto solido æquabitur.

Pro casu 3. Consideretur fig. prop. 25. par. 1. Tract. 34. in qua probauimus frustum pyramidis BA æquari parallelepipedo ex basi YS ad eleuationem MT, & trienti parallelepipedi ex basi BM ad eleuationem eandem euecto, ideoque ad adæquandum parallelepipedum ex basi BC tota in eandem altitudinem eleuatum deficient duo parallelepipeda ex basibus NY, & YO, & duo ex PQ, & Y basibus, & duo trientes ex BM basi parallelepipedi ad eandem eleuationem extructi. Basis verò PO, Y, & BM æquales sunt, sicut & complementa NY, & YO æqualia. Quare si esset frustum triangulare deductum ex prismate normalium laterum super BC dimidiam basim à diagonali bipartitum erecto ad eandem eleuationem. esset residuum eius dimidium vnicum parallelepipedum ex NY, vel YO, & vnicum parallelepipedum BM, & triens eiusdem nempe dimidium supradicti residui. Est autem ex prop. 13. Tract. 34. p. 2. tale frustum coni TIPC ęquale pyramidis frusto, cuius basis inferior ęquet peripheriam, & semidiametrū inferioris basis coni suis lateribus, quibus sepitur, & basis eiusdem superior circuli superioris frusti coni ęquet itē suis lateribus peripheriam, & semidiametrum. At cylindrus EDKPC ęquabit ex Cor. prop. 13. Tract. 34. par. 2. prisma ęque eleuatum, cuius basis triangularis à peripherię, semidiametroq; lateribus ęqualibus stipetur ex Cor. pr. 3. Tr. 34. p. 2.

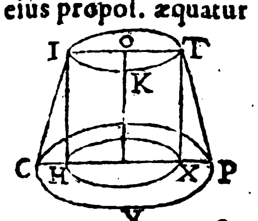
Siquidem ex propos. 3. tract. 30. hæc basis triangularis ex latere æquante peripheriam, & alio æquante semidiametrum circulo eorūdem peripheriæ, & diametri æquatur: Ergo residuum IDC TEP æquabit parallelepipedum, cuius basis ex ID semidifferentiæ diametrorum æquali latere, & alio æquali peripheriæ ex TI constet, & parallelepipedo ex basi semidifferentia ID diametrorum, & semidifferentia peripheriarum constituto, & trienti huius ipsius parallelepipedi, quæ omnia parallelepipeda ad eandem eleuationem extollantur. Basis enim

enim NY in fig. prop.25. Tract.34. part.1. ex latere minori, & semidifferentia alterius minoris à maiori homologo constituitur, & BM ex semidifferentijs homologorum laterum: Ideoque si minori peripherię æqualis ponatur pro latere, aliud erit latus semidifferentia inter diametros minorem & maiorem: at si semidiameter minor ponatur pro latere, aliud erit latus semidifferentia peripheriarum, cùm hæc duo rectangula ęquentur. Etenim, cum sit peripheria ad peripheriam; vt diameter ad diametrum, & vt radius ad radiū ex 42. lib.6. erit *diuidendo* peripheria minor ad differentiā suā à maiori, vt diameter minor ad differētiā suam à maiori, & ideo ad earum dimidium, quare rectangulum ex medijs æquabitur rectangulo ex extremis ex prop.18.lib.6. Si ergo fiat rectangulum, cuius vnum latus æquet peripheriam minorem ex TI aliud semidifferentiam diametrorum, vel ex dimidia diametro minori IT, & semidifferētia peripheriarum, & huic addatur ex pr.28.Trac. 29. rectangulum ex semidiffertējs diametrorum, & peripheriarum, & huic iterum addatur triens huius ipsius rectanguli, & super hoc rectangulum parallelepipedum erigatur; erit æquale soliditati IDC TEP cylindri EDPC, coni frustum TIPC ambientis, cui parallelepipedo cylindrus ęqualis (vt potest fieri ex prop.28.h.) æquabitur soliditati prædictæ IDC TEP.

PROBL. XV. PROPOS. XXX.

* *Soliditati frusti coni cylindro vacuatæ conum æqualem ponere.*

SIt frustum coni in pręc. fig. TIPC, quod intelligatur vacuatum cono TIXH, & sit reperiendus conus æqualis soliditati PXT IHC. Quoniam propos.13. Tract.34. p.2. (vt in illa fig. intueri licet) frustum coni RATQ æquat frustum pyramidis BLK NCM, & hoc frustum ex Cor. prop.25. p.1. est dimidium frusti pyramidis basis quadratę, quod ex contextu eius propos. æquatur parallelepipedo

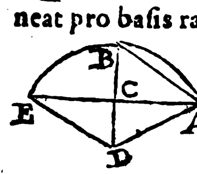


à basi eleuato ex minoribus basis superioris lateribus, & duobus parallelepipedis, ex minori latere, & semidifferentia alterius minoris ab homologo sibi latere maiori, & insuper parallelepipedo ex semidifferentijs homologorum laterum basis supremæ, & infimæ, & eius trienti omnia æqualis eleuationis HI. Ideo frustum pyramidis in hac fig. quod æquet frustum conicum TIPC æquabitur horum dimidio nempe prismati à basi ex TKI peripheria, & IO radio, quod æquat ex Cor.prop. 3. Tract.34. par.2. æqualtum cylindrum ob basim TKI ex 3.Tract.30. æqualem, parallelepipedoq; vnico ex radio, & semidifferentia peripheriarum minoris à maiori, & parallepipedo dimidio ex semidifferentijs diametrorum, & peripheriarū minorum à maioribus, & insuper dimidio trienti eiusdem, quæ duo faciunt quatuor sextantes dicti parallelepipedi ex semidifferentijs. Subducto itaque prismate æquante cylindrum XI ex peripheria TKI, & radio OI basi inixo remanebunt prædicta parallelepipeda, nempe ex radio OI, & semidifferentia peripheriarum basi eleuata, & quatuor sextantum parallelepipedi ex basi ex semidifferentijs diametrorum, & peripheriarum consurgentis. Igitur si basis constituatur ex OI radio, & semidifferentia peripheriarum, & ei addantur quatuor sextantes basis ex semidifferentijs prædictis diametrorum TI, & PD, & peripheriæ ex TI ab EXD, & super ipsam in altitudinē DC eleuetur parallelepipedum: hoc erit ęquale soliditati PTX PTC frusti coni TIPC vacuati cylindro TIXH. Hoc verò parallelepipedum conus fiat, ex pr.20.h. & verificabitur assumptum.

PROBL. XVI PROPOS. XXXI.

Sectorem, & portionem sphæræ in conum æqualem commutare.

QVoniam sector sphæræ ABED solidus ęquat conum, cuius altitudo sit radius BD, & obtineat pro basis radio subtensam AB ex Cor.1.pr.44. Tr.34. si fiat circulus radio AB, & super illum extollatur conus habens pro altitudine radiū sphęrę DB: hic conus æquabit soliditatē sphęrę sectoris EBAD. Si verò fiat conus, cuius basis CA radio ducatur, & altitudo sit CD residua radij DB sphæræ ablata sagitta portionis sphæræ BC, qui sit EAD, & hic conus DAE auferatur ab illo, qui æquet sectorem sphærę, reliqua erit soliditas, quæ redacta in conum ęquabit soliditatem portionis spherę EBAC.



PROBL. XVII. PROPOS. XXXII.

Sphæroidi conum æqualem exhibere.

HOc faciliter fit faciendo conum, qui habeat pro radio axem alterum, alterum pro altitudine. Vel cùm ex pr.26. Tr.34. ostenderimus semispheroidem esse duplum coni inscripti, cuius basis circulus ducitur ex semiaxe tamquam radio, & alium semiaxem habeat pro altitudine; sic conficiamus conum duplum faciendo eius duplam basim (quod fit, si inter totum axem, & dimidium media proportionalis inueniatur, & adhibeatur pro radio ex prop.19. tract.29.) & eandem altitudinem alterius semiaxis conseruando, erit duplum huius, & ideo æquabit hemisphæroidem, si verò duos conos similes in Rhombū solidū cōponamus, vt est ACHD in illa pr.16. Tr.præc. p.2. Huic Rhombo erit æqualis ille conus, qui habeat eandem conorum cōpositorum eleuationem, & basim eandem ex eadem prop. vt est ibi GAN: Quare conus habens totū alterum axem pro radio tum huius, tum alterius conorum compositorum æquantium duo hemisphæroides, & basim prędictā erit ęqualis Rhombo ex duobus ijsdē conis conflato, & ideo toti sphęroidi.

PROBL. XVIII. PROPOS XXXIII.

Frusto sphæroidis, vel sphæræ æqualem conum exhibere.

FRustum sphęroidis, vel sphęrę, quod datur in se concludit centrum, vel terminat in centrum, vel est totum extra centrum, & vt de singulis doceamus modum ea reducendi in conos ęquales. Sit primo datum segmentum ABC, quod omninò sit extra centrum. Quoniam ex propos.38. frustum sphæroidis ABC æquat cylindrum FNHG deducto frusto coni HTLG, si fiat ex pr.29. huius frusto

frusto cylindri HYNLGF, vt in fig. pr.38. Tr.34. p.2. remanentis prisma ęquale habebimus intenū.

Sit deinde data sectio sphæroidis, vel sphæræ, cuius portio terminet in centrum, vt ACDQ, quia hæc ex prop.38.Tract.34.æquatur cylindro NDFQ deducta portione coni, seu cono TLE, fiat huic cylindro ex par.1. prop.29. h. Conus æqualis, soliditati excauatæ deducto cono LTE, & obtinebimus intentum.

Quod si sit segmentum, quod centrū comprehendat, vt CAIZ vtere eo tamquam si duo essent, quæ terminarent in centrum, nimirum ADCQ & DZQY, & in duos conos transformentur, quæ deinde in vnum poterunt conglobari, ex doc. prop.15. Tract.34.p.2. vel ex dicendis.

PROBL. XIX. PROPOS. XXXIV.

Hyperbolicum conoidem in conum æqualem transformare data diametro, & transuersa.

QVoniam ex prop.30.tract.34. Hyperbolicum conoides ad conum inscriptum eam consequatur proportionem, quam diameter cum diametro transuersa, & huius dimidio, nempe in illa fig. AE diameter cum AD transuersa, & AD transuersę dimidio, quod est DF ad diametrū, & transuersam DE. Ideo si duæ mediæ proportionales iaciantur inter EF diametrum transuersam, & eius dimidium, vt vnam lineam EF, & inter DE diametrum. Conus similis cono BAC ex minori, & viciniori ipsi DE erectus erit ad conū CAB, vt EF ad DE, quia sicuti FE ad DE habet proportionē triplicatā eius, quę est i nuentę lineę proximiori ipsi DE ad ipsā DE; Sic quo que conus similis, similiterque positus vt BAC super illam erectus proximiorem ipsi DE dicit proportionem triplicatam ex Cor. prop. 14. Tract. 34 Vnde eidem cono BAC dicet eandem proportionem, quam EF ad DE, nempe quam Hyperbolicum conoides ad conum inscriptum, vnde erunt æqualia ex 9. lib.5.

Idem quoque obtinebimus, si fiat prisma ęquans annulum solidum, quod enascitur ablato cylindro eiusdem altitudinis, ac conoides hyperbolicum, à cono asymptotico ipsius conoidis, vt prop.33.Tr. 34. collegimus.

PROBL. XX. PROPOS. XXXV.

Conoidi Parabolico conum æqualem exhibere.

SIt conus in fig. prop.34. Tract.34. p.2. BAC, basisque circulus AC ex prop. 19. Tract. 30. fiat maior addita ei sui ipsius medietate; ita vt circulus inuentus se habeat ad basim coni BAC, vt 3. ad 2. & super hunc circulum erigatur conus eiusdem altitudinis, ac BAC parabolico conoidi inscritus, eritque æqualis iste conus conoidi.

Proaatur. Quia conus inuentus ad conum inscriptum obtinet eam proportionem, quam basis illi substrata ad basim coni BAC inscripti: sed hec est sesquialtera ea scilicet proportionē gaudet, quā habet conoides parabolicum cono sibi inscripto: Ergo eidem cono inscripto eandem proportionem dicunt conus inuentus, & conoides parabolicum. ex 9.lib.5. Quadere erunt æqualia.

* Hoc quoq; operi demadabitur faciendo conum prismaticum eiusdem basis, & altitudinis hunc enim conum parabolico corpori æquari ostendimus prop.35. tract.34.

COROLLARIVM.

POstea verò quod hæc corpora in conum translata sunt, poterunt in quolibet aliud transfundi, si iuxta præhabita conus ipse cui æquatur, transmutetur in aliam quamcumque solidam figuram.

PROBL. XXI. PROPOS. XXXVI.

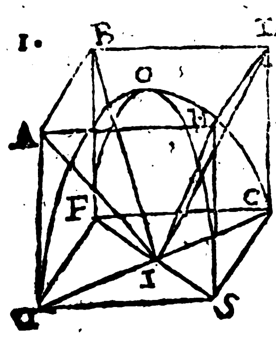
**Sphæram quadriformem, & corpora quæ ex ea nascuntur in corpora æqualia transfundere.*

SPhæræ quadriformi corpus æquale erit duplū AHFS parallelepipedum circumscriptum ipsius Hemisphærio OFCDS: sed cui demptum fuerit triens ipsius, nēpe gemina Pyramis BLAHI, quæ vt ibi ostenditur est triens BHFS parallelepipedi, & ideo geminata erit triens ipsius dupli: Hoc autem parallelepipedum debet habere eandem quadratam basim, & eandem altitudinem totius sphæræ quadriformis, vt sit duplum BHFS parallelepipedi ex prop.20.p.1.Tract.34 Quare si fiat basis, quę obtineat duo trientes basis sphæræ quadriformis exhibitæ, & super hanc eleuetur parallelepipedum duplæ altitudinis IO: hoc erit ad parallelepipedum FS basi situm in duplam altitudinem IO vt 2. ad 3. Sed etiam duplum parallelepipedum BSFH vacuatum tamen dupla pyramide BAHLI est æquale sphęroidi quadriformi est ad idem duplum integrum, vt 2. ad 3. Ergo æquantur ex 9.lib.5. & ideo sphæra quadriformis æquans parallelepipedū duplum BHFS vacuum dupla pyramide ABLHI parallelepipedo, cuius basis ipsius ABHL duo trientes & eadem eleuatio sit, æquabitur.

Inuolucro verò sphæræ quadriformis inuenientur pyramis æqualis.

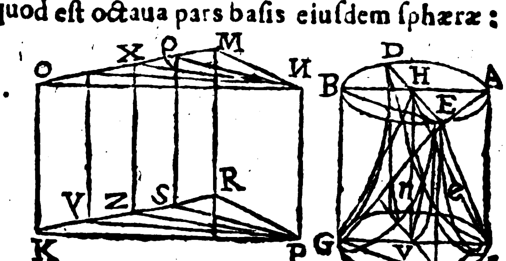
Si fiat super ABHL pyramis duplæ altitudinis, quam sit OI. Nam sicut ABLHI pyramis æquat semi inuolucrum sphęræ; si fit pyramis duplę altitudinis, & eiusdem basis, sc. dupla pyramidis ABLHI æquabit totum inuolucrum ex pr.51.tr.34.

1.



Vngulæ cylindricæ æqualis pyramis iuuenietur, si fiat pyramis super basim eius quater maiorem, quam sit triangulum, in quo inexistit Vngula, & eiusdem altitudinis, ac eius semidiameter, vt constat ex prop.49. Tract.34. dimidiū enim basis sphæræ quadriformis, cuius est octaua pars, est quater maius, quàm triangulum, cui inexistit vngula, quod est octaua pars basis eiusdem sphæræ:

2.

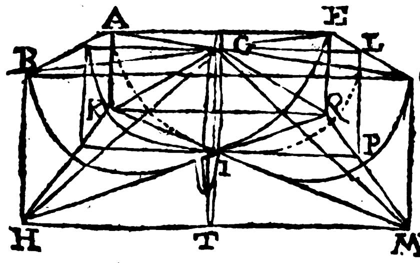


 Ideoque

Ideoque dato cylindro BEAGI; si ex basi ABGI eius sectione erigatur pyramis ABEGI erit æqualis vngulę DBGE: siquidem basis ABGI est quadrupla trianguli BHG, cui insistit vngula, & altitudo est EH diametri ED vngulę dimidium.

Lunulę verò pyramis æqualis inuenietur: Si fiat prisma KMOP, cuius basis NMO æquet circulum ADBE; Sc. ex prop. 3. Tract. 30. NM latus basis triangularis sit EH semidiameter, & MO æquet peripheriam ADBE: Altitudo verò NP sit eadem, ac GB cylindri: In hoc verò prismate sit MQ diametri duo trientes, ex quo fiat parallelogrammum MQRS æquale duobus trientibus plani secti per axem ABGI cylindri, & super ipsum erigatur prisma NMQRSP, quod erit æquale pyramidi ABEGI æquanti vngulam. Namque erit eiusdem altitudinis EH: vnde se habebit ad prisma ABEGFI, vt 2. ad 3. scilicet vt basis rectangulum MQRS ad basim ABGI ex propos. 15. Tract. 34. p. 1. sed etiam pyramis ABEGI est ad idem prisma ABEGFI, vt 2. ad 3. cum sit super basim quadrangulam ex prop. 22. Ergo equabuntur ex 9 lib. 5.: Fiat rursus prisma XQNPSZ eiusdem basis ZQ, vt est MS, & eiusdem altitudinis equabit duas pyramides AEBGI, & ideo duas vngulas DEAI, & EDBG. Quare residuum erit duabus Lunulis equale GEENIF. Diuidatur itaque parallelogrammũ XK medium, & fiat prisma IOKP, & erit æquale vnicę lunulę ICEDGB.

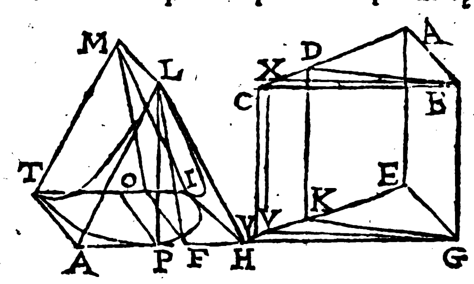
3



Inuolucro vngulę pyramis ęqualis erit. Si fiat pyramis super quartam partem PITM basis sphęrę quadriformis in altitudinem GI, vt constat ex prop. 51. Cor. 1. Tract. 34. p. 2. quę quarta pars est semirectangulũ AHVI per axẽ actũ ABIG cylindri.

At verò, si quis cupiat prisma ęquale inuolucro Lunulę, is transformet fig. 2. NPYO prismatis ęqualis lunulę basim YPK obliquam in rectangulum, cuius latus sit radius RP, & YK aliud latus, & super hoc eleuet prisma ad altitudinem PN: Quod ex 15. tract. 34 part 1. ęquabitur prismati YOPN lunule ęquali; describatque hoc prisma in prismatę

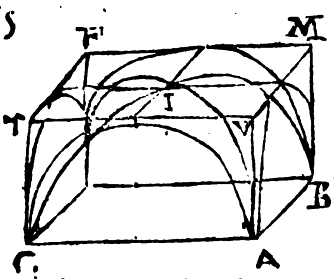
4



lunulam continẽte MLHITA (poterit enim describi: siquidem basis habet latus PB, idem quod latus IH radio ęquale, & YK minori latere, quam HA, & altitudo eadem PQ, quæ prismatis PL;) Sit verò prisma inscriptum lunulę ęquale AFTOLM remanebit reliquum prisma HFIOLM ęquale inuolucro lunulę. Quod patet, abstulimus enim corpus ęquale lunulę: ipsumque totum prisma ęquat lunulam, & inuolucrum. Ergo ablato corpore FOTALM ęquali lunulę, solùm ipsi inuolucro remanet corpus, & prisma ęquale HFIOLM.

Hinc quoque, & fornicis cruciformis TMCB quantitatem consequemur de quo prop. 53. Cor. 1. Tract. 34. locutus sum; Constat enim hoc corpus ex quatuor prędictis corporibus lunulam inuoluentibus ex Cor. 1. & 2. prop. 52. componi. Et vt huius rei demus exemplũ ITC erit inuolucrũ lunulę, & quarta pars sphęrę quadriformis, cui iam docuimus inuenire ęquale prisma. Quare, si quatuor prismata ęqualia cõponãtur obtinebimus totũ fornicẽ TFVMBC, & ita ideas de pyramide flexis constante, vel meta concaua.

5



COROLLARIVM I.

HInc patet Vngulam cylindri, in quo est, si ponatur ipsius cylindri tota soliditas 22. esse 4. partes, & $\frac{4}{6}$ totius soliditatis, & duas vngulas esse 9. partes, & $\frac{2}{6}$, & ideo *Lunulas esse*, vt 11. & $\frac{4}{6}$ vtpote residua ex Vngulis, & singulas esse 5. $\frac{5}{6}$ totius cylindri. Ratio est; quia, si fig. 2. latus MO ponatur 22. vt est peripheria respectu diametri ex pr. 3. Tract. 18. latus MQ erit totius MO 4 $\frac{2}{6}$ vtpote $\frac{2}{3}$ diametri, qui est 7. part. At vt MO ad MQ latera sic rectangula æquealta MK ad MS, quæ sunt bases, & vt bases ita æquealta prismata MOKNPR ad MQRSNP: ergo etiam prisma MOKRNP, ad MQRSNP erit, vt 22. ad 4 $\frac{4}{6}$. Ergo ex pr. 19. Tract. 17. prisma MOKRNP ad duo æqualia NMXZPR erit, vt 22. ad duplicatos numeros 9 $\frac{2}{6}$. Quare *conuertendo* NMOKRP totum ad reliquũ XOKZPN, erit, vt 22. ad reliquum 11. & $\frac{4}{6}$: quare ad dimidiũ YKONP erit, vt 22. ad dimidiũ prędicti numeri sc. 5. & $\frac{5}{6}$ proximè.

COROLLARIVM II.

COlligitur quoq; inuolucrum Vngulæ esse ex 28. partibus cylindrũ ambientis parallelepipedi 4 $\frac{4}{6}$, & inuolucrum lunulæ ex ijs 28. solum æquare $\frac{4}{6}$ Fiat prisma BACGEY in fig 4. cuius basis BGY triãgularis æquet basim cylindrũ ambientis parallelepipedi V. g. sit dubla basis THAI, quæ semicirculum basis cylindri ambit, eritque ex pr. 5. tract. 29. YE latus æquale quatuor lateribus AH: Quare prisma CABGEY erectum in eandem altitudinem parallelepipedi cylindrum ambientis ipsi æquabitur. Igitur ponatur AC quatuor diametros æquans 28. partiũ tribuendo singulis partes septẽ, & esse inscriptum prisma BADKEG fig. 2. eiusdem altitudinis AB situm super basim EADK rectangulam; Item eiusdem altitudinis EA, quæ est cylindri, quæ longitudine lateris AD habeat partes 22. sc. lineam ęquantem peripheriam, idest diametros tres cum septima parte, remanebit prisma CDBKYG cuius basis DY habebit DC partium 6., & quia ADBKEG æquat cylindrum, reliquum DBCYKG ęquabit inuolucrum cylindri.

Inuolucrum autem vngulę est ęquale ex pr. 51. Cor. 1. pyramidi BHVGE fig. 2. (siquidem rectangulum HBVG est quarta pars totius basis sphęrę quadriformis, quę vngulis octo constat, & ideo cum quodlibet rectangulũ duas vngulas ferat EGDB, & EBNGD debebit quadruplicari; vt octo vngulas pręstet) sed iam dictum est; quod pyramis ABGI æquat prisma NMQPRS, cuius basis habet latus MQ 4 $\frac{2}{3}$; ergo EHBVG dimidium pyramidis ABIG habebit latus 2 $\frac{2}{6}$ manente in basi eadem altitudine, sicut & in prismate: Quare duo inuolucra

ęqua-

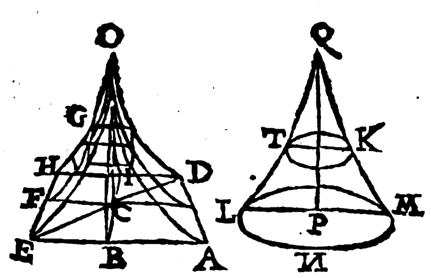
ęqualia erunt prismati DXKVGB fig.4. cuius latus DX basis æquealtę, ac pyramidis, sit 4 $\frac{4}{6}$. Remanebit ergo pro inuolucris duobus lunulę prisma XCVYGB, cuius basis erit XCVY, quę erit partis vnius, & $\frac{2}{6}$, quare singula inuolucra erunt $\frac{4}{6}$.

Igitur soliditas inuolucri vngulæ ęquans dimidium prismatis XCVYBG erit ad totam soliditatem prismatis BACEGY, vt $\frac{4}{6}$ ad 28. quia enim dimidium rectãgulum VXCY est ad rectangulum AEYC, vt dimidium XC ad AC, vtpote quod sint eiusdem altitudinis, erit etiam prismatis dimidium XCBYVG ad prisma BACGEY, vtpote eiusdem altitudinis, vt dimidium XC ad CA, scilicet, vt $\frac{4}{6}$ ad 28. vel 4. ad 168. vel vt 1. ad 42.

PROBL. XIV. PROPOS. XXXVII.

* *Pyramidem æqualẽ pyramidi flexis superficiebus constanti, & conum æqualem eiusdem generis cono constituere.*

Sit fig. prop.43. & detur pyramis flexis constans HOA, cui æqualis rectis superficiebus secta facienda sit. Fiat rectangulum ex prop.30. Tract.29. quod se habeat ad rectangulum HA, vt 24. ad 42. vel 4. ad 7. & super illud erigatur pyramis, quę appelletur X ęquèeleuata, & hęc pyramis X æquabitur pyramidi flexis constanti HOA.



Probatur. Nam sit pyramis quadrata HOA flexis constans, hæc ex 53. tract.34. quatuor inuolucris lunulæ æquabitur. Eritq; parallelepipedum, ex quo ablatis lunulis, & vngulis duabus, & harum inuolucris duobus formatur conclusum lateribus EB altitudine cylindri, BI, & dupla CO diametris eiusdem cylindri ab eo comprehensi ex Coroll. prop.53. Tract.34. & ECBO erit dimidiatæ lunulæ inuolucrum, cuius vertex E, & EFCO aliud dimidium, ex Cor. 1. prop. 52. Ideoque si basis aliqua parallelepipedi V. g. quæ continetur lateribus EB, & BI in 42. partes diuidatur, parallelepipedum super $\frac{1}{42}$ eleuatum in altitudinem duplæ CO, ex Cor. 2. præced. æquabit lunulæ inuolucrum totum FCEBO; & quadruplum $\frac{4}{42}$ totam pyramidem flexis constantem, vtpote quatuor inuolucris lunularum confectam. Sed hoc parallelepipedum fiat Pyramis eiusdem eleuationis duplę CO, & occupabit triplum maioris basis ex prop.17. Tract.h. $\frac{12}{42}$ rursus diminuatur vsque ad dimidium eleuationis, quæ est CO, & erit ex prop.25. Tr.34. $\frac{24}{42}$, vel $\frac{4}{7}$, nempe fiet duplæ basis, ideoque pyramis X æquans pyramidem flexis constantem erit situata super $\frac{4}{7}$ basis, & eleuata vsque ad eleuationem eandem CO.

Si verò quis cupiat extruere conum æqualem cono superficie curua constanti LQMN fiat circulus ex 19. Tr.30. qui se habeat ad circulum LNM, vt 4. ad 7. qui dicatur Z, & super illum erigatur conus Z eleuatus eadẽ altitudine PQ, & iste conus Z æquabitur cono LQMN.

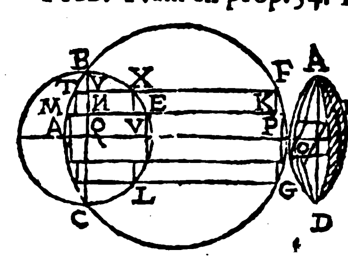
Probatur. Nam Pyramis HOA est ad conum LQMN, quæ flexis constant superficiebus ex prop. 53. Tract.34. vt basis AH rectangulum ad basim LMN circulum, vel ellipsim. Sed vt rectangulum HA ad LHM circulum, vel ellipsim, ita est rectanguli $\frac{4}{7}$ ad circuli, vel ellipsis $\frac{4}{7}$, & ita est pyramis super $\frac{4}{7}$ basis HA erecta ad conum super $\frac{4}{7}$ circuli LNM erectum ad eandem eleuationem. Ergo ex 16.l.5. vt pyramis HOA ad conum LQMN, flexis constantia, sic pyramis super $\frac{4}{7}$ basis HA ad pyramidẽ super $\frac{4}{7}$ circuli LNM: sed pyramides ex basi HOA flexis constans, & pyramis ex eius $\frac{4}{7}$ æquantur. Ergo etiam conus LQMN flexis constans, & conus ex $\frac{4}{7}$ circuli LNM ęquabuntur.

PROBL. XV. PROPOS. XXVIII.

* *Metæ quadriformi æqualem ponere pyramidem, & etiam metæ circulari æqualem conum.*

Super quadruplum rectangulum basis metæ ædificetur pyramis eiusdem altitudinis; ac metæ semiaxis QB. Et hanc pyramidem dico esse æqualem metæ quadriformi. Si verò quis cupiat metam circularem, super circulum basim metæ quadruplum ex pr.19. Tract.30. p.2. erigatur ad prędictã eleuationem conus, & erit, quod expetitur operi demandatum.

Prob. Nam ex prop.54. Tract.34. p.2. ita est sphęra quadriformis ad metam, vt basis sphærę quadratum ad basim metæ quadratum: & ita bases quadruplo, quam sphæræ basis maior ad basim quadruplo maiorem,



quàm basis metæ; & ita ex pr.28. Tr.34. p.2. pyramis ad eleuationem QB super basim quadruplam, quam sphærę ad pyramidem super basim quadruplam, quam basis metæ ad eandem eleuationem BQ. Ideo ex 16. lib.5. vt est sphæra ad metam, ita pyramis super basim quadruplam basis sphæ*ræ ad pyramidem super basim quadruplam basis metæ in eandem altitudinem euectas: Sed illa super basim, quadruplam sphęrę æquat sphęram ex pr.48. Cor. Tr.34. Ergo etiam ex prop.12. lib.5. pyramis hęc quadruplæ basis ad eleuationem QB æquabit metam.

Eodem argumento idem ostendes de cono, quod æquetur metæ circulari.

Idem concludes: si sphæra quadriformis, & meta habeant bases similes. Nam ob parallelismum omnia plana secantia erunt similia. Vnde ex prop.28. Tr.34 p.2. idem concludes de meta, & sphæra quadriformi. Et ita etiam si sint ellipticæ bases; sed similes, quæ scilicet possint circumscribi rectangulis similibus: nam cum omnia rectangula parallela basi sint similia; etiam omnes ellipses ex propos.27. Tract.30. similes erunt, & ideo ex 28. Tract.34. ipsa corpora erunt in proportione basis ad basim.

PROBL. XVI. PROPOS. XXXIX.

* *Corporibus spiralibus cylindros æquales exhibere, & superficiebus ipsorum normalibus superficiet æquales.*

Nam sit corpus spirale primi generis de quo prop.57. locuti sumus à circulo in altitudinem spiraliter ductum. Cylindri, in quo est medietas ipsum æquabit, sicut, & cuiuscumque eius partis soliditatem sectoris cylindrici solidi medietas adęquabit. Patet ex eadē pr.57.Tr.34.p.2. cum ibi ostendatur corpus tale spirale esse dimidium cylindri comprehendentis.

Si verò sit corpus spirale secundi generis à basi spirali erectum æqualtum. Diuidetur altitudo cylindri cōprehēdentis in tres partes,& tertia pars æquabitur corpori spirali super spiralē basem in æqualē eleuationē producti, vt pr.58. ostendimus.

Si verò sint corpora spiralia secundę spiræ, cum sint, vt bases spirales ad circulos includentes, & illę sint, vt 7. ad 12. si diuidatur altitudo cylindri in 12. partes ex illis assumantur 7. ille cylindrus æquabit corpus spirale.Et itidicas de alijs tertijs, & quartis spiris,diuisus enim cylindrus secundùm eam proportionem, quam habet basis ad circulum, cylindrum æqualem spirali corpori exhibebit.

Hinc superficies globosa super basim spiralem normaliter erecta corporis spiralis super spiram inixi, & æqualis eleuationis patebit. Siquidem superficies sectorum solidorum circumscriptæ deficient latitudine tantùm: quæ ad sectorum æqualium superficies inuicem æquales se habebūt, vt 6. ad 12. ex pr.12.Tr.27.Quare,& vsitato argumento talis proportionis ipsa spiralis superficies globosa ostendi poterit ad superficiem cylindri, nempe, quod sit, vt 6. ad 12.

Si vero sit corpus spirale tertij generis à basi spirali in spiralem eleuationem euecti; Diuidatur altitudo cylindri comprehendentis in 18. partes, & quinque partes æquabuntur prædicto corpori. Nam tale corpus basis, & eleuationis spiralis est ad corpus spiralis basis, sed æqualis eleuationis, vt 5. ad 6. ex prop.59.Tract.34. at verò spirale corpus ad cylindum ambientem est, vt 6. ad 18. vel vt 1. ad 3. Ergo ex 23. lib.5. spirale corpus quoad basim, & altitudinem erit ad cylindrum comprehendentem, vt 5. ad 18. sed etiam quinque partes ex 18. cylindri eiusdem est ad ipsum, vt 5. ad 18. Ergo æquantur spirale corpus altitudine,& basi, & quinque partes cylindri comprehendentis ex prop. 9. lib.5. Euclidis.

Si verò sit corpus quarti generis basi spirali, decrescendo eleuatum: tunc diuidetur cylindrus comprehendens in partes 18.& vna pars erit ęqualis tali corpori.

Probatur. Quia corpus spirale decrescens altitudine, sed crescens basi est ad corpus spiralis basis tantùm, vt 1. ad 6. sed hoc corpus est ad cylindrū comprehendentē, vt 6. ad 18. ergo etiam corpus spirale decrescens altitudine dum basi crescit,erit ad cylindrum comprehendentē vt 1 ad 18. Vnde $\frac{1}{18}$ cylindri ipsius illi corpori æquabitur.

Si verò sint secunda spiralia corpora basi, & altitudine decrescentia iam ostendimus se habere ad corpus spiralis basis,sed eiusdem altitudinis 17.ad 42.vel 119.ad 294.sed corpus spiralis basis,& eiusdē altitudinis se habet ex 57. Tract.30. vt 7. ad 12. idest, vt 294. ad 504. ideoque ex *æquo* spirale corpus deficiens etiam altitudine se habebit ad cylindrum comprehendentem; vt 119. ad 504. ideo si diuidas cylindrum comprehendentē in partes 504. & ex eis assumas 119. ille cylindrus partiū 119. ęquabitur corpori in spira siti altitudine deficiētis.

Hinc est superficiem flexam corporis spiralis facilè posse inueniri. Nam illi imaginentur circumscriptæ superficies latæ, vt ipsi arcus deficientes,quę deficiant altitudine arithmeticè,istę erunt ad eiusdem latitudinis superficies corporis basi: sed nō altitudine deficientis, vt 4. ad 6. ex pr.14. Tract.27. par.3. contextu; ideoque toties replicato argumento poterit argui, quod superficies ipsa spiralis flexa deficiens altitudine se habeat ad spiralem altitudine non deficientem, sed quæ sint basi spirali inixæ, vt 4. ad 6. At supra spiralis superficies non deficiens est ad cylindri superficiem,vt 6. ad 12. nempe vt ipsa spira ad circulum; Ergo ex *æquo* ad superficiem cylindricam spiralis superficies altitudine deficiens, & spiralis basis erit, vt 4. ad 12.

EXPENSIO III.

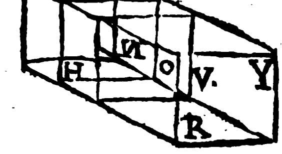
De corporum proportionali diuisione.

VIsa transformatione corporum in alia corpora diuersæ spetiei, modo de eorum diuisione proportionali agendum est non obseruata eadē figura, sed tantū per plana parallela vni lateri; Infra autem agemus de eodem augmento, seu diminutione: sed ea in eadem figura conseruando.

PROBL. I. PROPOS. XL.

Datum cubum, vel parallelepipedum secundùm proportionem datam secare.

DIuidatur latus YL in F secundùm proportionem datam, & bases NH, & OR, vtpote eiusdem altitudinis ex 1. l.6. obtinebunt proportionē laterum sectorum secundùm datam rationem, sed, & hanc habent parallelepipeda ęqualis altitudinis HL, & FR, vtpote quod eā obtineant proportionem, quæ basium ex prop. 8. Tract.34. p.1. Ergo, & ipsa parallelepipeda secta sunt secundum datam rationem.



COROLLARIVM.

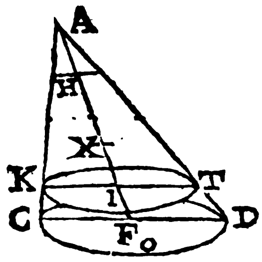
EAdem dicas de prismate, & de cylindro, si altitudo eorum in datas rationes secetur,& per sectionem agatur planum basibus in prismate triangulis in cylindro circulis parallelum. Nam eadem ratione secabuntur, tum prisma, tum cylindrus in datam rationem.

PROBL. II. PROPOS. XLI.

Cono, vel Pyramidi abscindere partem datam.

SIt ADOC Pyramis, vel conus à quo oporteat abscindere partem versùs acumen, ad quam se habeat residuum, vt 3. ad 1. Diuidatur altitudo coni AF in H tali modo, vt AF sit ad AH, vt 4. ad 1. eritque *diuidendo* HF ad HA, vt 3. ad 1. Interq; AH; & AF duæ medię proportionales AX,& AI ex 3.Tr. 15. inueniantur, quarum maior sit AI, & per punctum I planum parallelum basi coni abscindet conum TAK simile cono ODAC: Erit itaque conus DACO ad conum TAK cum ex pr.7.h. sint similes,vt FA prima ad HA quartam proportionalem nempe ex effect.vt 4. ad 1. Cum ergo sit conus DOCA ad conum TAK,vt 4. ad 1. erit etiam *diuidendo* TDKC residuum ablato cono TAK ad ipsum conum TAK, vt 4. ad 1. ablato 1. scilicet 3. ad ipsum 1. quæ erat proportio requisita secundùm quam conus debebat diuidi.

Et

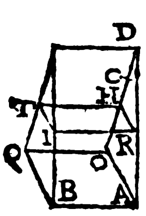


Et ita diuidetur etiam si pyramis, vel conus sit obliquus, & super Ellipsim. Nam semper conus, & pyramis quæcumque parallelo plano basi abscisa similis erit toti. Omnes enim bases, quæ ducantur basi parallelæ sint similes. Ex 2. Tract. 24. quia sunt circuli, & ex 1. & 4. Tract. 35. si sint ellipses. Triangula etiam quæcumq; per axem similia sunt vt ex prop. 2. & 4. lib. 6. cum sint anguli ob parallelas in cono KFAT, & CAOD æquales, & latera proportionalia. Vnde etiam superficies conicæ abscisi TAK, & totius ADC similes erunt cum eosdem angulos vbique, & circumquaque cùm basi efficiant, vt ex 7. h. Cor. colligere licet: cum ergo coni abscisus TAK, & totus ADC contineantur superficiebus similibus, similes erunt. Quod & extendes ad corpora coniformia rectis in centrum tendentibus ad modum coni constantia, vt cit. Cor, patet.

PROBL. IV. PROPOS. XLII.

* *Prisma triangulare parallelo ductu basi quadratæ in partes datas secare.*

SIt prisma ABQOD per ductum parallelum basi quadratæ secandum, ideo pars erit in acutum D desinens RTD, habebunt verò æqualem altitudinem IR totũ ABQOD, & pars RTD, basimq; similem AOD, & RHD ob parallelum planum RHTI, & parallelam sectionem RH, quare ex 2. lib. 6. erit AD ad RD, vt OD ad HD, & anguli æquales ex 2. lib. 6. DRH, DAO, & DHR, DOA. Vnde ex def. erũt similes. Ideoque obtinebunt proportionem laterum duplicatam, eritque ADO ad DHR in proportione duplicata DO ad DH. Et quia Prismata super eas erecta obtinent eandem basium proportionem, erit itaq; prisma ABDO ad prisma RTD in duplicata ratione lateris DO ad DH. Sit ergo data proportio, secundùm quam Prisma abscindendum est 4. ad 1. diuidaturque DO in quatuor partes, interque prima partẽ DC, & totã quatuor partiũ inueniatur media proportionalis DH; agaturque per DH planum RHT, & erit factũ, quod imperatum fuerat.

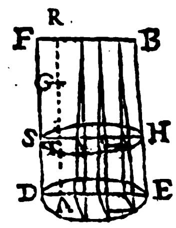


Probatur, Nam DO ad DC habet proportionem duplicatam DO, & DH; ideoque ex 21. lib. 6. Cor. basis DOA ad basim DHR habebit proportionem, quam DO ad DC: sed Prisma QBOAD habet eandem proportionem, quam basis ad basim ad prisma partiale TIHRD: Ergo prisma ABOQD erit ad prisma TIHRD vt DO ad DC.

THEOR. I. PROPOS. XLIII.

* *Conum prismaticum iuxta datam proportionem per parallelum planum basi resecare.*

DEbeat resecari conus prismaticus BFED in partes iuxta datam proportionem RA ad GR; ita vt sit totus ad suam partem, nempe, vt 3. ad 1. Inueniatur media proportionalis inter RA, & GR, & sit TR in RA normali ad basim ED, perque T agatur planum HS, parallelum basi coni DE. Nam totus conus EBFD se habebit ad conum HSBF, vt AR ad RG, nempe, vt 3. ad 1. vnde compars EHSD se habebit ad compartem, vt 2. ad 1.

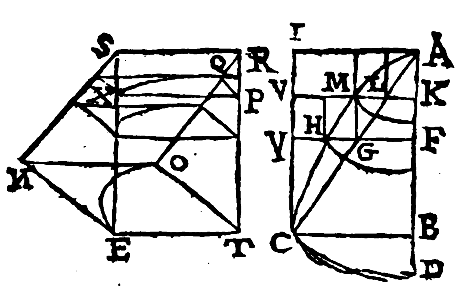


Probatur. Nam omnia prismata in cono FBED inscriptibilia erunt ex præc, tali modo truncata, vt totum singulorum sit ad suam partem, vt 3. ad 1. cumque hęc omni possibili multiplicatione aucta, & multiplicata æquent ipsum conum. Etiam ipse conus prismaticus EBFD erit ad suam partem HSBF, vt 3. ad 1.

PROBL. III. PROPOS. XLIV.

* *Conoidem parabolicum circulare, vel quadriforme in partes destinatas parallelo ductu basi secare.*

CVm conoides parabolicum quadriforme æquetur prismati eiusdem basis, quod prisma sit eleuatum ad eandem altitudinem ac conoides, conoides quoque parabolicum circulare ex prop. 35. Tract. 34. par. 2. sit æquale cono prismatico, cuius basis circularis sit æqualis circulari basi conoidis, & altitudo altitudini, singulę quoque partes prismatis singulis partibus conoidis quadriformis parallelo basi plano detruncatis, & sic partes parallelo ductu basi pariter detruncatę conoidis circularis, & coni prismatici æquentur. Hinc est, quod dato V. g. conoide circulari CMABD, si fiat conus prismaticus OETSR eiusdem basis, & altitudinis, & diuidatur iuxta præcedentẽ plano XQP, & ad eandẽ eleuationem fiat diuisio MK in conoide parabolico AMCBD parallela basi CBD, quod conoides AMCBD erit diuisum iuxta proportionem datam.



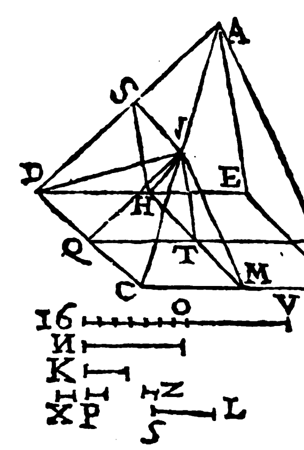
Probatur RSPQX portio coni prismati est ad RSOET totum in proportione data, sed ex dictis MAK portio conoidis æquat portionem coni prismatici RSPQX, & conoides totum AMCBD totum prisma RSOET, ergo etiam MAK portio conoidis erit ad totum AMCBD in proportione data.

PROBL. V. PROP. XLV.

* *Pyramidem diuidere quadrangulam proximè plano superficiei laterali parallelo secundùm datam rationem.*

HÆc diuisio difficultatem specialem obtinet, eo quia diuisio non fiat in partes similes toti: Sit ergo Pyramis ABCDE diuidenda per ductum HI parallelum superficiei BEA. Iam euidens est partem DSHMC, non esse similem pyramidi: Nam constabit ex IMTCQ pyramide simili toti, & ex prismate

mate DQTSHI eiusdem altitudinis ac pyramis MQI, quod diuisum plano IHD constituet pyramidem HQTDI eiusdem altitudinis, quę pyramides inuicem se habebunt ex prop.24.Tr.34.p.1.vt bases MQ ad HQ; bases autem se habent inuicem ex prop. 1. lib.6. cùm sint eiusdem altitudinis CM vt latera CQ ad QD idest CM ad MB ob basium similitudinem, vt colligitur ex prop.25.l.6. Ideoque si addatur ei pyramidi DSIH quantitas illa DSHI, qua excedit prisma ID ipsam pyramidem DHIQT, quæ est (cum sit pyramis quadrata dupla triangularis) $\frac{1}{3}$ ex prop.24.Tract.34. ideoque MQI pyramis habebit proportionem ad prisma STID, quam CQ ad QD, vel CM ad MB, & ad $\frac{1}{3}$ ampliùs ex propos.29. Tract.17. V.g. si sit pyramis ad pyramidem, vt 2. ad 3. erit pyramidis proportio ad prisma, vt 2. ad 4. $\frac{1}{2}$; si sit, vt 1. ad 2. erit ad prisma, vt 2. ad 3. & cęt.



Sit ergo data ratio, iuxta quam oporteat piramidem BACDE diuidere plano alicui planitiei lateralium parallelo, V.g. planitiei ipsi BEA plano parallelo SIHM, ita vt pars maior ABE SIHM sit 11. minor sit 5. Addantur 5. & 11. & sint 16. nempe ratio 16. ad 5. totius pyramidis ad partem abscindendam. Accipiatur deinde linea V 16. ęqualis lineę BC, quæ ponatur 16. & L sit 5. Eligatur deinde fortuitò linea minor, quam L, quæcumque P, interque P, & 16. duę mediæ proportionales inueniantur N, & K, ex prop.3. Tract. 15. Sitque N immediata, & secunda proportionalis post 16. V. Fiat deinde ex prop.15.lib.6., N ad excessum OV lineę V16. Sic P ad aliud, & inueniatur X, cui deinde addantur dimidium Z ipsius X, & videatur, si omnes simul P, X, Z tamquam vna æquent lineam L 5. si æquant benè res se habet, si non æquāt; sed superent linea P accipienda erit minor adhuc, & iteranda operatio, donec tres P, X, Z ęquent L 5. saltem proximè, & tunc dico, quod si longitudo N transferatur in BC, & sit MC, & per punctum M agatur planum MSIH parallelum plano BEA, hoc planum abscindere portionem MSID; nempe pyramidem, & prisma tale, quod se habeat ad pyramidem totam BACDE, vt 5. ad 16. & compartem, 5. ad 11.

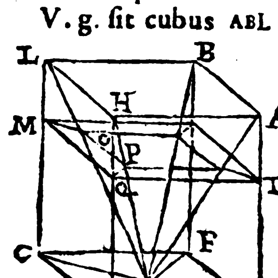
* Probatur. Pyramis tota BACDE est ad suam partem pyramidem similem MIQTC in proportione homologorum laterum triplicata BC ad MC ex pr. 23.Tract.34.pręced. sed proportio triplicata BC ad MC est lineæ 16. V æqualis ex hypothesi ipsi BC ad P siquidem est in triplicata 16. V ad N ex effectione. Ergo pyramis maior BACDE ad partem suam pyramidem sibi similem est, vt 16. V, vel BC ad P. Est autem P ad X, vt N ad OV, sc. MC ad MB ex effectione, vel CQ ad QD ex propos. 25. lib. 6. idest ex dictis, vt MIQ pyramis ad pyramidem TID quæ est $\frac{1}{3}$ prismatis, & ideo ad prisma, vt P ad X, & ad Z dimidium ipsius sicut pyramis MIQ est ad pyramidem TID, & ad residuum ex prismate, quod æquat dimidium pyramidis. Itaque DAB tota pyramis est ad pyramidem QIN partem, vt V 16. ad P Pyramis verò QIM pars est ad compartem QHI, vt QC ad QD, ideoque, vt CM ad MB, & vt P ad X; ergo ex *æquo* DAB tota pyramis erit ad pyramidem partem QHI, vt 16. V ad X, ideoque *inuertendo* X ad 16. V, vt QIH pyramis compars ad totam pyramidem BDA, itaque QHI ad DBA est, vt X ad 16. V, & QMI pyramis est ad pyramidem eandem DBA, vt P ad 16 V. Ergo ex 25. propos. l.5. prima quantitas QHI cum quinta QMI pyramides partiales erit ad secundam DAB pyramidem totam, vt tertia X cum sexta P ad quartam 16. V. Rursus pyramis QIM ad QHI, est vt P ad X, ergo *componendo* QMI cum QHI ad QHI, vt P cum X ad X, & QI ad DHIS est, vt X ad Z, quare ex *æquo* pyramides QMI, & QHI ad DHSI pyramidem erunt P, & X ad Z.

Sunt autem duæ pyramides DIM ad totam DAB, vt X, P ad 16. V, ideo *conuertendo* DAB erit ad DIM, vt 16. V ad X, & P, at DIM duæ pyramides sunt ad pyramidem DSIH, vt X, P ad Z, ergo ex *æquo* tota DAB ad DISH pyramidem partialem erit, vt 16. V ad Z, ideo *inuertendo* pyramis DISH ad totū DAB, vt Z ad 16. V. At DIM duæ pyramides sunt ad totam DAB, vt X, P ad V 16. ergo ex 25. l.6. DSIH cum DIM prima cum quinta erunt ad secundam DAB totam pyramidem, vt P, X tertia cum Z sexta ad quartam 16. V, sed hæ tres P, X, Z æquant 5 L, ergo tres pyramides DHSI, QHI, & QMI, idest tota quantitas DMSI erit ad totam pyramidem, vt 5 L ad 16. V, idest, vt 5. ad 16. quare *diuidendo* erit pars DSIM ad compartem SIMHEBA, vt 5. ad 11. vel *conuertendo* 5. ad 11. vt SIMHEBA ad DSIM.

COROLLARIVM I.

* Hinc colligas quomodo cubum vacuatum pyramide proximè, & tentando diuidas per planum basi parallelum, cui incidit vertex pyramidis in partes desideratas.

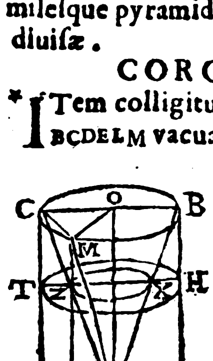
V.g. sit cubus ABLHDC, cui deficit pyramis ABLHI. Iam vides constare quatuor pyramidibus æqualibus, vt LHSCI, vel AHDIS. & cæt. quæ per planum TM parallelum lateri plano SIC diuidendæ sunt, singulę verò plano MOPQ alijs partialibus æquale.



Cum ergo sit eadem proportio partium quæ multiplicium ex propos.18.lib.5. si aliqua ex illis diuidatur E.g. LHISC iuxta pręcedentem doctrinam diuidendo latus LC in M, & per punctum M agendo planum TM omnes quatuor æquales, similesque pyramides sub eadem proportione erunt diuisæ.

COROLLARIVM II.

* Item colligitur quomodo diuidatur cylindrus BCDELM vacuatus cono BIMC per planū HT: Cū enim talis cylindrus BCDLE possit diuidi per planities ductas ad centrum I in pyramides ęquales, & similes inuicem omni possibili numerositate multiplicatas, vt est MCEI quadrangularium basium LEMC, sequitur, vt quælibet modo prædicto plano HT diuidi



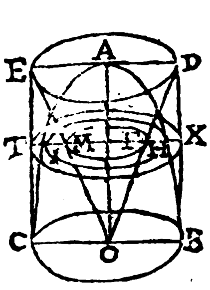
Possit

possit secundum rationem exoptatam: Quare, & omnes erunt similiter diuisæ per HT, cum pars in qualibet æqualis alteri pyramidis parti debeat habere eandem rationem ad totum æquale alteri toti ex 17. lib. 5. Elem. Quare etiam totus cylindrus BCDLE vacuus cono BIC similiter erit diuisus.

PROBL. VI. PROPOS. XLVI.

** Sphæram, sphæroidemque etiam si quadriforme proximè saltem in partes destinatas secare.*

Sit semisphæra, vel semisphæroides BAFC, & illi circumscriptus sit cylindrus DEBFC, cui fuerit ablatus conus DOE. Iam certum est ex prop. 39. tract. 34. part. 2. totum semisphæroidem, vel hemisphærium æquari cylindro DEBC, cui ablatus sit conus EOD, singulasq; partes hæmisphærij HAI, vel hemisphæroidis plano XT detruncatas V.g. IAH æquari singulis eiusdē cylindri segmentis vacuatis segmentis ijsdem coni, scilicet portionibus MTEYXD. Si ergo è cylindro DECB auferatur pars DT secundum proportionem datam agendo planū XT per T punctum parallelū basi CFB ex prop. 45. præc. obtinebimus partes æquales istis cylindricis partibus hæmisphæræ, vel hemisphæroidis. Quare dicent ad inuicem eandem proportionem, & ad totum, eritque MTEYXD cylindri concaui portio ad EDBC cylindrum, vel ad compartem BXFOMTC; quàm æqualis portio hemisphæræ, vel hæmisphæroidis HAI ad totum hemisphærium, vel hemisphæroidem CAB æqualem toti cylindro EDCFBO, vel ad compartem IHBC æqualem comparti cylindri excauati TMCOYXB.



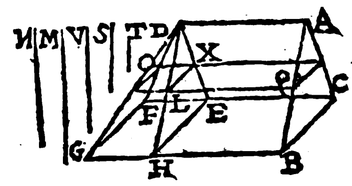
Eadem erit ostensio de hemisphæra, vt hemisphæroide quadriformi, cum idem de ea ostensum sit propos. 50. Tract. anteced.

THEOR. II. PROP. XLVII.

** Prisma simul, & Pyramidem idem corpus efficientia in partes datas tentando abscindere parallelo ductu ipsi basi.*

Sit ACBDHE prisma, & pyramis DHEFG æquealta, ipsiusque protensis superficiebus AG, AF, BF operta, quę duo corpora, vtpote vnum conficientia parallelo ductu OQ basi in partes datas sint secanda: Hoc quidem potest fieri; sed tentando ob diuersam proportionem, quam toti dicunt pyramidis frustum, & frustum prismatis; hoc enim dicit ad suum totum laterum proportionem duplicatam; Pyramis verò partialis ad totam triplicatam. Sit ergo data proportio M ad N, iuxta quam ita corpus totum ADBF sit ad suam partem ADOQ, vt M ad N constituendum.

Assumatur aliqua minor, quàm N, & sit T, interq; T, & M duæ medię interponantur V, & S, & videatur an S cum linea T; faciāt quantitatem æqualem datæ quantitati N; si facit inuentum erit, quod quęritur ad sectionem efficiendam; at si non æqualis, accipiatur adhuc alia, vel minor, vel maior; prout deficere ab N, vel excrescere super N inuenta fuerit, donec sit S, & T, saltem proximè ipsi N ęqualis. Fiat deinde ex prop. 15. l. 6. vt M ad V, sic AB, ad AQ, vel DH æqualis ad LD, & per Q ducatur planum basi æquidistans, & detruncabitur ADQO corpus, cui erit in proportione totum ADBF, vt M ad N.



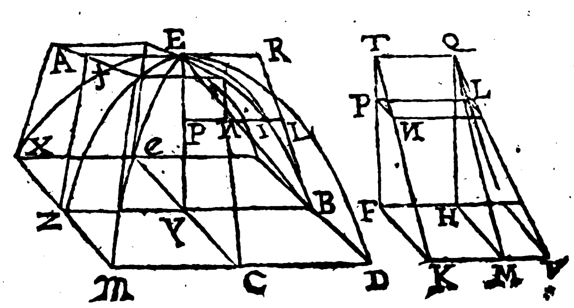
Modo ostendo corpus AF esse sectum iuxta proportionem datam. Nam prisma ADBCHE proportione duplicata lateris AB ad latus AQ respicit prisma AQDLX; sed M ad S est proportio duplicata M ad V, & M ad V est eadem ex effectione proportionis lateris AB ad AQ. Ergo prisma ADBHC, habet eam proportionem ad prisma ADQLX, quam M ad S.

Deinde pyramis DHGFE obtinet proportionem triplicatam lateris HD ad latus LD ad pyramidem DLXO: sed M ad T obtinet proportionem triplicatam DH ad DL eandem, quæ AB ad AQ: Ergo pyramis DHGFE ad pyramidem LODX obtinet proportionem M lineæ ad T. Quadere si coniungantur simul ex 19. prop. Tract 17. prisma totum, & pyramis totalis DHF, & fiat totū ADBF, habebūt ad alterā ex partibus factis V.g. prisma partiale ALXDQ eandem propprtionem, & *conuertendo* ALXDQ ad AEDB prisma, & DEG pyramidem eandem proportionem, quam dicebat priùs ad illas separatas quantitates: Quare cum iam ADFBCG sit quid totum ad illud DQALX prisma, & DLO pyramidem partiales quātitates vnitas dicent eandem proportionem ex prop. 19. Tract. 27. quam priùs disiunctę dicebant sc. eam, quam M ad S ad T; scilicet eam, quæ M ad N, quę æquat quantitates S, & T simul sumptas.

THEOR. III. PROPOS. XLVIII.

** A conoide Hyperbolico partem abscindere experiendo iuxta proportionem datam.*

Adhibeatur fig. prop. 56. pręc. Tract. Dictum enim est, prisma KQ, & pyramidem VHQ æquari quartę parti quadriformis conoidis hyperbolici, & singulas partes prismatis, & pyramidis ęquealtas singulis partibus æquealt. conoidis hyperbolici per plani basi parallelo ductu abscisas. Si ergo ad eandem altitudinem EP, & TP abscinda-



tur

tur portio IPE à conoide hyperbolico æquabitur parti prismatis,& pyramidis æquealtę. Æqualium verò est eadem proportio. Quadere ita erit QTFV corpus pyramide, prismateq; constans ad partem suam NTL prismate minori pariter constans,atque pyramide, idest in proportione duplicata quoad prisma,triplicataque quoad pyramidem lateris FT, vel YE æqualis altitudo ad TP, vel EP æqualia segmenta altitudinum, ac conoides hyperbolicum BEY ad sui partem PIB. Quare diuisa altitudine YB iuxta pręc. in P dabit eodem modo partem in data proportione. Cumq; eadem proportio existat vnius partis ad vnam,quam quatuor ad quatuor partet,& totum conoidem extenso plano eodem pacto secari, cuius quarta pars tali modo secatur.

COROLLARIVM.

IDem autē asseres de Conoide hyperbolico circulari ex propos. enim 33.Tract.34. æquatur frusto coni, cui demptus fuerit cylindrus ęquealtus, & singulæ eius conoidis partes singulis partibus huius frusti per planum basi parallelū in æquali eleuatione abscisis: Frustum verò tale conicum æquatur frusto pyramidum, prismatumque ex contex. prop.13.Tract.34.p.1. æqualem basim, & æqualem eleuationem obtinentium, ac frustum coni cylindro vacui, & singulæ illius partes æquealtæ singulis partibus illius similiter bases parallelas basi habentes, vt faciliter ab ea propositione deduci potest, cum probauerimus in ea omnes bases basi parallelas in frusto pyramidis circulo coni ad eandem eleuationem secanti æquari: Quadere eadem praxi vtemur, cum etiam in conoide hyperbolico circulari partes æquentur partibus frusti pyramidum, prismatumque, ac in quadriformi: sufficit inuisse.

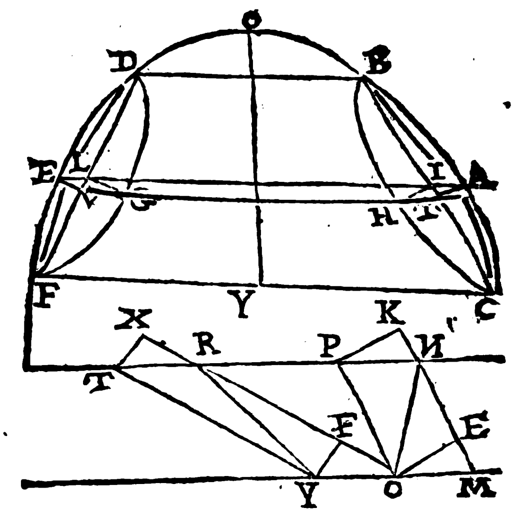
PROBL. VII. PROPOS. XLIX.

A Conoide hyperbolico, seu parabolico, seu sphæroide imperatam partem auferre à dato puncto alteri in eodem corpore æqualem.

SIt DGFE frustum conoidis parabolici,vel hyperbolici, seu etiam sphæroidis FDOBC. Sitque detruncandum à dato puncto B, aliud frustum huic æquale.

Secetur conoides, seu sphæroides plano BD, quod datum punctum B connectat cum extremo diametri ellipsis secantis DGF,& ducatur planū per centum L ellipsis DGF; quod sit EGHA parallelū ipsi plano DB. Agaturque aliud planum CF huic pariter parallelum per aliud diametri extremum F, eruntque tria plana æquali interuallo dissita, cùm sint ęqualia DL,& LF,vtpote semiaxes. Deinde ducatur per punctum E, & per axem OY planum FDOBC, quod exprimet sectionem ex generatione, & huic plano per punctum E,& C, vbi se secat cum plano DB, & FC in punctis B, & C in superficie conoidis ducatur planum BHC plano FDOBC normale. Nam hoc erit Ellipsis ex prop.10. 14. 18. Tract.25. in quocumque corpore ex sectionibus conicis deducto, & exhibebit BHCA æquale segmento DGFE.

Probatur Progr. 1. Quoniam in segmento CAHB, si quęcumque ducantur plana parallela basi similes ellipses sunt, ac ipsa basis ex 11. 15. & Cor. prop. 18. Tract. 25. Secundò segmenta hæc FGEDF& CHAB bases consequuntur altitudinibus reciprocè proportionales. Ergo hic verificabitur prop.29. part.2. Tract. præced. 34. & inuicem hæc segmenta erunt æqualia. Quod autem bases in istis segmentis altitudinibus reciprocè sint proportionales, sic ostenditur.



Triangulum BAC, & DEF, quæ inscribuntur in segmentis sunt æqualia. Ergo, bases obtinebunt altitudinibus reciprocè proportionales, vt postea ostendam. Altitudo autem AT ad altitudinem VE (normales sc. super FD, BC bases ab A,& E cadentes,)est vt basis LD ad basim IB;sed basis LD ad basim IB planorum triangulorum DFE,&BAC est, vt basis DGF segmentorum solidorum ad basim BHC, vt dicam; Ergo hæc segmenta obtinent bases DGF ad BHC, vt altitudo AT ad altitudinem EV reciprocè. Quare segmenta DEFG, & BACH solida habentia omnes bases axi parallelas similes erunt æqualia ex præc. prop.39. Tract 34.

Prog. 2. Duo itaque remanent ostendenda triangula æqualia obstinere bases altitudinibus reciprocè proportionales,& quod sit basis LD linea ad lineam BI, vt basis plana DGF ad basim planam BHC.

Probatur illud quod est primo propositum de triangulis.

Sint triangula in figura seorsim exhibita MON, & ORY æqualis altitudinis, vtpote inter parallelas TN, & YM, & basis OY, & OM, ideo inuicem æqualia ex pr.40.l.1.Cor. Ducantur parallelæ TY,& OP vni laterum OR, & alteri MK. Parallelogramma TRYO, & PONM sunt dupla triangulorum suorum super quorum bases sunt YOR, & OMN, & ideo inuicem æqualia: Productis deinde OR in X, & MN in K, & ductis normalibus TX,YF, necnon, & alio triangulo PK, & OE erunt rectangulū TYXF ęquale parallelogrammo YTRO, & PKOE parallelogrammo PNOM ex prop.40.lib.1. cùm sint inter easdem parallelas TY, & XO, vel PO, MK, & super eandem basim TY, & PO. Quia ergo hæc rectangula TXYF, & POEK obtinent angulos rectos, & ideo æquales,& sunt inuicē ęqualia,cum sint ęqualia æqualibus parallelogrammis ex 10. lib.6. propter hoc habebunt latera reciprocè proportionalia. Ideoque TY erit ad PO, vt OE ad FY, sed hæc latera PO,& TI ęquant RO,& NM ex prop.33.l.1.bases,& altitudines triangulorum RYO, & NOM sunt YE,& OE, ergo reciprocabuntur, & erit TY, vel RO basis ad PO,vel NM basim,vt altitudo OE huius ad altitudinem YF alterius.

Progress. 3. Remanet deinde ostendendum, bases nempe Ellipses DGF, & BHC dicere eandem proportionem, quam DL linea basis trianguli ad basim

basim IB alterius. Ex pr.21.32.43.Tr.30. ostensę sunt æquales AI,& LE,& ex pr.10.14.18.tr.25. planum BGHA trāsiens per axē EA ostensum est ellipsis: Quare ex 6. tr.24. erit rectangulum AI,& IE ad rectangulum AL,& LE; vt quadratum HI ad quadratū LG,quia sc. in ellipsi AHGB reperiuntur, quę transit per axem EA,& facit in ellipsibus normalibus sibi sectiones LG, & HI ad superficiem conoidis, cuius sectio est; & ideo ad eius ambitum pertingentes.

Cum itaque rectangulum AI, & IB æquetur rectangulo AL, & LB ob æqualia latera AI ipsi LE, & AL ipsi IB. Etiam quadrata ex IH,& LG restabunt ęqualia. Quamobrem etiam latera HI, & LG erunt æqualia. Cum ergo sit ex prop.26.tract.30. ellipsis DGF ad ellipsim BHC,vt rectangulum ex BI,IH; ad rectangulū LD,LG:rectangula verò ista sint eiusdem altitudinis IH,& LG ex ostēsis,& ideo sint inuicem,vt DL linea ad BI lineam sequitur,vt etiam ellipsis DGF sit ad ellipsim BHC,vt linea DL ad lineā BI, quæ est eadem ob triangula BAI, & DEL æqualia reciprocè altitudinis TA ad altitudinem EV.

Ideo que segmenta conicorum corporum habentia bases altitudinibus reciprocè proportionales erunt æqualia.

EXPENSIO IV.

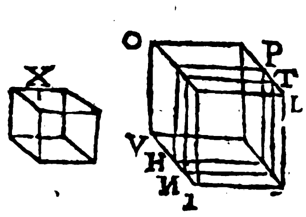
De corporum proportionali tranformatione.

MOdo de transformatione iuncta, cum augmento, vel diminutione corporum agendum est, & docere modū quo aliquid dato corpori detrahatur, aut addatur, & tamen eadem figura maneat; sicut,& residuum quamcumq; figuram inducat.

PROBL. I. PROPOS. L.

Ex maiori cubo detrahere minorem, residuumque cubum æqualem exhibere.

SVper basim NT maioris cubi VT extruatur parallelepipedum IT ex prop.14.h. cubo X minori æquale. Et ex latere cubi maioris abscindatur portio NH æqualis altitudini NI parallelepipedi constructi: perque punctum H ducatur planum HP, & erit residuum VP parallelepipedum, quod in cubum transformabitur ex prop.14.h.



Probatur operatio. Nam cum parallelepipedum NP, sit æquale parallelepipedo IT ob æqualem basim,& altitudinem; ex prop.40. h.Tract. A cubo TV detractus erit cubus exhibitus X mediante ablatione parallelepipedi NP. Vnde residuum redactum in cubum intentum pręstabit.

CO ROLLARIVM.

IDem valet de quacumque alia figura, si redigatur in parallelepipedum,& ei detrahatur parallelepipedum dato corpori æquale, vel quæ pars magis placuerit. Nam residuum iterum per ea, quę diximus in Expens. ant. in figuram propositam redactum, & in priorem formam restitutum exhibebit quamlibet figuram propositā diminutā.

PROBL. II. PROPOS. LI.

Addere cubo alium cubum, ita quod cubus remaneat.

NOn aliter,hęc propos. operi consignabitur, ac antecedens. Extruatur itaque super basim NT cubi TV parallelepipedū ęquale dato cubo X, & cubus erit adauctus quantitate cubi X, & redactus in parallelepipedum LV. Fiat itaque huic parallelepipedo cubus æqualis ex pr.14. h. & iam consequemur cubum duobus cubis æqualem cubo VT,& cubo X. Patet prop. ex pręc. ostensione.

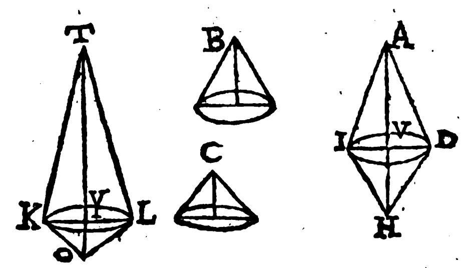
CO ROLLARIVM.

DEducitur quoque ex hac prop. quod si quodcumque corpus datum in cubum transformetur ex præcedenti expensione, & huic cubo quæcumque data quantitas addatur, & deinde iterum in pristinam figuram reformetur, corpus restitutum figura quidem priori potietur, at magnitudine auctiùs erit, & maiori mole constabit.

PROBL. III. PROP. LII.

Duos, aut plures conos rectos in vnicum conum reuocare. Vnicumque conum in plures conos distribuere.

SInt plures coni ADI, B,& C; qui debeant in vnicum componi. Redigatur ex 26.h. B ad eandē basim coni DAI,& sit DVI; componanturq; coni in Rhombum conicū ADIH: deinde fiat conus LTK obtinens basim LYK compositorum DI, & altitudinem YT ipsorū HA,& iste æquabitur ex 15. Tr.34. Rhombo DAIH. Deinde redigatur conus C ad eadem basim DVI,vel KYL, & vt iam fecimus,iterū fiat Rhombus solidus LTKO. Postea conus æqualis altitudinis, & basis Rhombo LTKO extolletur, isteque conus tribus conis iam erit æqualis. Nam ex prop.15. æquat Rhombum LTKO; iste verò æquat parte quidem LOK conum C, parte verò LTK Rhombum DAIH; nempe DAI, & B.



Contrario verò modo fiet si de ablatione agatur. Nam conus V.g. LTK in duos conos reuocabitur, faciendo conum B, qui auferendus est æqualis basis basi LK coni LTK,& altitudo quę V.g.erit VH auferatur ab altitudine YT, & relinquetur VA, fiat itaque conus DAI altitudinis VA, & basis LK, idest æqualis DI, & erit conus DAI residuus à cono LTK ablato cono B.

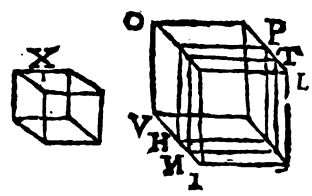
CO ROLLARIVM.

EAdem verò, quæ fiunt de conis possunt fieri de pyramidibus rectis, & quia licet prop.15. Tract.34. non loquatur de pyramidibus; ratio tamen potest ad illas extendi, eadem enim prorsus est, & efficaciter eodem pacto conuincit. Si verò rò dentur pyramides, vel coni non recti ad rectos redigentur æquales, si fiant eiusdem altitudinis ex prop. 4. Tract. 34. p. 2.

PROBL. IV. PROPOS. LIII.

Cylindro, vel parallelepipedo, vel prismati cylindros parallelepipeda, vel prismata minora addere, vel auferre.

AD istam propos. operi demandandam sufficit redigere parallelepipedum X, vel cylindrũ,



qui auferendus est, vel addendus ad eandem basim NT ex prop. 25. h. & deinde, vel alteri PV, cui facienda est additio coniungere IN, vel auferre NH æqualem altitudinem inuenti cylindri altitudini ab eo cylindro, vel parallelepipedo, cui auferendum est, vel addendum, & VOIL erit totum ex additione resultans si facta est additio, quod si facta fuerit subductio, HVOP est residuũ parallelepipedum ex VNTO deducto parallelepipedo HT æquali dato X.

PROBL V. PROPOS. LIV.

Plures sphæras in vnam sphæram colligere, vel vnicam in plures diuidere. Idem quoque præstare de sphæroide, deque conoide elliptico, seu parabolico.

CVm ostenderimus suprà, quibus conis ista corpora æquentur: de sphera quidem pr. 43. de sphęroide pr. 36. de conoide parabolico pr. 34. Tract. 34. Si exhibitum quodlibet ex istis corporibus sphæricis, vel conoidalibus in conos æquales redigamus, sicut, & corpora sphærica, vel conoidalia, quę auferẽda sunt, vel addenda, & ex pr. 52. h. conico corpori, cui facienda est additio, addamus alios conos æquales illis corporibus, quæ addenda da sunt, & deinde conum sic adauctum in sphæram, vel sphęroidem, vel conoidem, prout priùs restituamus; habebimus intentum. Et idem de ablatione præstandum erit.

COROLLARIVM.

HInc facilè addisces etiã alia adaugere, etiam si, & intus excauata sint; dummodo aliqua regularitate potiantur, vt ea de quibus supra egimus. Nam aut ad conos, aut ad pyramides, seu prismata redigere poterimus, & ex prop. 52. h. ita augere, vel minuere, & postea in primum statum restituere.

THEOR. I. PROPOS. LV.

Omnia corpora similia triplicatam habent laterum, seu diametrorum proportionem sicut duplicatam basium.

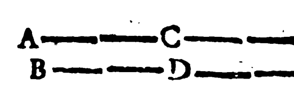
PRobatur. Nam omia corpora similia cylindris similibus, vel pyramidibus, vel prismatibus inscribi possunt, quæ triplicatam laterum proportionem dicunt ex propositionibus passim positis, vt pr. 9. tr. 34. p. 1. & 17. & 23. & ex prop. 9. p. 2. h. & etiam ex 1. Expens. vbi corpora multa similia descripsimus, similes bases describendo, super quas cylindracea similia erigi possint. Ergo etiam ipsa corpora quæcumque ex descriptis triplicatam obtinebunt laterum, vel diametrorum, vel axium, vel ambituum proportionem. & eodem modo probabitur, quod duplicatam basium consequatur proportionem.

COROLLARIVM.

EX præc. colligitur sphæroidem, conoidemque hyperbolicum, & parabolicum, tàm basis circularis, quàm ellipticæ, tum etiam quadratæ, seu rectangulæ dũmodo sint similia corpora esse in triplicata ratione diametrorũ; nedum ob rationem vniuersalem in propos. tactam, sed etiam, quia omnia ista genera corporum conis inscriptis, quæ eorum basibus inixi erant, & eundem diametrum pro diametro suæ basis obtinebant, & eandẽ altitudinẽ, eis ostensa sunt æqualia, vt prop. 43. 34. 36. Tract. 34. illa verò triplicatam diametrorum, seu altitudinum, cum sint similia, proportionem obtinent. Quare etiam corpora conoidalia, quæ eis sunt æqualia. Idem debemus fateri de conis prismaticis similibus, quia coni eiusdem altitudinis, & basis sesquialter ostensus est: sic de conis ellipticam basim obtinentibus similibus, cum sint ęquales conis eandem altitudinem, & æqualem basim obtinentibus. Vnde erunt in triplicata proportione altitudinum, vt coni ipsis æquales; & ita doctrinã, vel generalem, vel specialem applicabis cuicumque corpori simili; quod sit ad aliud simile in triplicata ratione laterum, aut saltem in duplicata basium.

PROBL. VI. PROPOS. LVI.

Datum corpus eorum, quæ triplicatam laterum, vel axium, aut diametrorum, vel altitudinum proportionem obtinent iuxta datam proportionem linearum in aliud simile corpus augere.



SIt datum aliquod corpus, cuius diameter, vel axis, vel latus, vel altitudo A, & debeat aliud corpus constitui, & detur linea B, & vt A ad B; ita sit faciẽdũ corpus aliquod simile corpori ex A; Inter A, & B duæ mediæ proportionales proiciantur C, & D, vt sint in continua proportione A ad C, & C ad D, & D ad B ex prop. 3. Tract. 15. & ex linea C fiat ex dictis ex Expensione 1. corpus simile alteri dato &, similiter positũ vtendo illa eodem munere, quo fungitur linea A, & erit corpus ex linea C descriptum, vt A ad B.

Probatur. Nam A ad B triplicatam obtinet proportionem eius, quam consequitur A ad C, sed corpus erectum super C ex præced. consequitur proportionem triplicatam eius, qua respicit A lineam C. Ergo, vt A ad B, sic corpus ex A descriptam ad corpus simile, & similiter positum ex C descriptum.

PROBL.

PROBL. VII. PROPOS. LVII.

* *Datum corpus eorum, quæ duplicatam proportionem basium consequuntur, iuxta datam proportione basis ad basim adaugere.*

SIt data basis A, & corpus super illam erectum, & superficies B: Sitque faciendum corpus aliud, q̃ se habeat ad A corpus, vt A ad B. Ex pr. 33. tract. 29. inter bases A, & B basis reperiatur media ꝓportionalis C, & super illam erigatur corpus simile, similiterque positum, ac corpus datum, & erit operi demandatum, quod præcipitur.

Probatur. Quia corpora similia duplicatam habent basium proportionem ex prop. 55. h. sed basis A ad B est duplicata proportio eius, quæ est A ad C. Ergo vt basis A ad basim B, sic est corpus ex A ad corpus ex C ædificatum.

PROBL. VIII. PROPOS. LVIII.

* *Duobus datis corporibus tertium proportionale inuenire.*

DEntur duo corpora, quæ si non sint similia in similem figuram redigantur V. g. parallelepipeda, vt docuimus: quorum diametri, vel axes, vel latera, vel altitudines sint A, & B, & duabus A, & B tertia proportionalis reperiatur C, & illa eodem munere fungatur, & constituat aliquod corpus prædictis simile, dico, quod duobus A, & B est tertium corpus proportionale C, quod si hoc C alterius figuræ desideretur per ea, quę diximus Expens. 2. h. ad aliam figuram reuocari poterit.

Probatur. Nam corpora similia sunt in triplicata ratione laterum suorum: Quare cum sit A ad B, vt B ad C ex effectione. Etiam erit triplicata proportio lateris A ad triplicatam rationem lateris B, vt triplicata ratio lateris B ad triplicatã rationem lateris C: Triplicatæ verò rationes, quæ continuè procedunt ex prop. 55. sunt corporum ex A, B, & C constructorum similium.

PROBL. IX. PROPOS. LIX.

* *Duobus datis corporibus corpus medium proportionale inuenire.*

SIt datum corpus ex A, & corpus ex B, quorum latera, vel axes, vel diametri, vel altitudines sint A, & B, & inter eas media inueniatur D, & ex ea eodem munere fungente fiat corpus, simile exhibitis duobus similibus; quod dico esse medium proportionale inter corpora exhibita.

Si verò corpora non essent similia oportet ea redigere ad eandem similitudinem cõuertendo ambo data in parallelepipeda, aut aliam similẽ figurã.

Probatur eadem ratione. Nam corporum est triplicata proportio laterum, aut axium, aut diametrorum, aut altitudinum, cumque sit A ad C vt C ad D, etiam triplicata ratio A ad C erit eadem, quæ triplicata ratio C ad D, quæ est illa ratio, quam inuicem corpora consequuntur.

PROBL. X. PROPOS. LX.

* *Tribus corporibus datis quartum corpus proportionale reperire.*

SIt datum corpus A, & corpus B, & C, & oporteat reperire corpus D, ita vt sit A ad B, vt C ad D. Reperiatur lateribus corporis A, & B, & C, vel axibus, aut altitudinibus, vel diametris; quarta proportionalis D, & super eam pro eodem officio deseruiente axis, aut lateris, & cet. ædificetur corpus simile corpori C, & obtinebimus intentum.

Ratio est eadem præced. propos. & requiritur tantùm, vt diximus de superficiebus, quòd duo corpora A, & B sint inuicem similia licet dissimilia cum tertio C, quod tamen assimilabitur, tum lateribus, tum positione quarto reperiendo D.

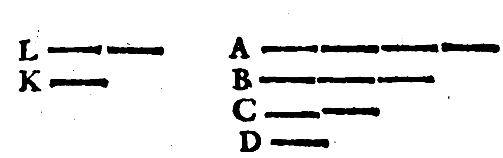
PROBL. XV. PROPOS. LXI.

* *Seriem continuam proportionalium corporum similium, & dissimilium inuenire iuxta datam proportionem.*

SIt data proportio A ad D, & oporteat reperire continuam seriem corporum in ea proportione, quæ est A ad D. Inter A, & D duæ mediæ proportionales interserantur B, & C, ita quod A, B, C, D sint continuè proportionales, & fiat continua progressio linearum A ad B iuxta dicta pr. 2. Tr. 15. superque illas lineas vtendo illis prout corpora cõstituẽda reposcent, vel diametris, vel axibus, vel altitudinibus, vel lateribus corpora similia edificẽtur, & similiter posita, & assero illam seriem corporum obtinere proportionem continuam, quæ est A ad D.

Probatur. Corpus A ad corpus B proportionem obtinet triplicatã eius, quæ est A ad B: sed A ad D proportio est triplicata ipsius A ad B. Ergo, vt A ad D, sic est corpus A ad corpus B, sed corpus B ad corpus C obtinet proportionem triplicatam lateris B ad latus C; Latus verò B ad C est, vt A ad B: latus autem A ad B est triplicata eius proportionis, quam habet A ad D. Ergo etiam corpus B ad corpus C proportionem obtinet, quam A ad D, & sic de alijs.

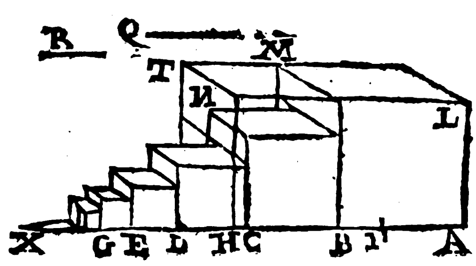
Quod, si libeat seriem à dato corpore incipere, cuius axis, seu latus, seu altitudo, vel diameter notus sit, repertis inter A, & D duabus proportionalibus B, & C fiat A ad B, sic latus V. g. L dati corporis, ad aliud, & reperiatur K: fiatque series continua linearum L ad K, super quas corpora similia construantur vtendo illis pro lateribus, pro vt ponitur linea primo corpori deseruiẽs. Quod si requirantur corpora non similia quęcumque elegeris in alia corpora æqualia quidem; sed dissimilia poteris permutare, & sic obtinebis seriem proportionalium corporum continuam; sed dissimilem.



PROBL. XII. PROP. LXII.

Seriei corporum continua proportione procedentium corpus æquale inuenire, datis duobus lateribus corporum duorum primorum.

DEntur Latera, seu etiam axes, aut diametri, aut altitudines duorum corporum primorum in serie illa, cui reperiendum sit corpus ęquale, sintq; hęc latera AB, & BC. Reperiaturq; eis quarta proportionalis LE continua, vel ei æqualis BI, fiatque vt AI differentia ad AB; sic AB ad aliud, & reperietur HA. Extruatur igitur super AH parallelepipedum æqualis altitudinis primi termini, si primus terminus sit parallelepipedum, vel tale corpus, quod se habeat ad primum terminum, vt latus AH ipsius ad AB: hocque corpus erit seriei infinitorum terminorum æquale.



Probatur. Nam linea HA est æqualis, ex prop. 16. tract. 16. toti seriei basium imparium procedentium in triplicata proportione AB ad BC; scilicet seriei procedentis in ea proportione, quæ est AB ad LE: & ideo singuli termini illius seriei procedentis in proportione AB ad EL, sunt vt solidum AM ad solidum BN; Quare series tota AX solidorum similium ad AM primum corpus est, vt series in ratione AB ad LE ad primum terminum AB cum singuli termini sint in eadem proportione, quare ex Coroll. 2. propos. 19. lib. 5. omnia vnius seriei erunt ad suum primum, vt omnia alterius ad suum primum; corpus verò AT ad corpus AM ex effectione est, vt latus AH ad latus AB; Latus verò AH ad latus AB est, vt series infinita linearum ad lineam AB, cum toti seriei in ratione AB ad LE sit ęqualis linea ex effect. Ideoque erit in eadem proportione corpus AT ad corpus AM; qua infinita series corporum similium AX in ratione AB ad LB ad corpus AM; cum ergo AT corpus corpori AM, & infinita series corporum eidem corpori AM eādem dicant proportionem AH lateris ad AB erunt inuicem æqualia ex prop. 9. l. 5. quod erat probandum.

PROBL. XIII. PROPOS. LXIII.

Datum corpus in infinitam seriem corporum distribuere, quod à dato corpore incipiat.

SIt datum aliquod corpus, quod redigatur facilitatis gratia in cubum AM; & datum corpus, quod debet distribui maius illo, redigatur in parallelepipedum eiusdem altitudinis AT, eiusque basis sit etiam eiusdem altitudinis, ac basis LM ex propos. 25. h.

Deinde fiat, vt AH ad AB; sic AB ad aliud, & inueniatur AI; assumatur itaque differentia IB; & inter BI differentiã, & AB duę mediæ proportionales interponantur, quæ sint Q, R; & deinde instituatur series continua proportionalium in ratione AB ad Q, quæ sit AX, & ex illis ædificentur corpora similia, & similiter posita, vt AM cubus, & erit series cuborum æqualis parallelepipedo AT.

Probatur. Fecimus AH ad AB, vt AB ad AI. Igitur differentia IB lineæ AB, ab AI erit secundus terminus alicuius serei, cui sit æqualis AH: siquidem tunc est *conuertendo* AI differentia IB secundi termini à primo AB, (si IB, vt secundus terminus sumatur) ad primum terminum AB, vt AB ad AH: Quare ex 16. Tract. 16. HA ęquabit omnes lineas procedentes in proportione AB ad BI: sed in ratione AB ad BI, sic procedunt corpora AM, & BN; quia scilicet corpus BN ædificatum ex Q habet triplicatam proportionem lineæ Q ad AB, & ideo quam lineę IB ad AB. Quare omnes termini linearum ad primum suum terminum erunt, vt omnes termini corporum ad primum corpus ex Cor. 2. prop. 19. lib. 5.

Quapropter etiam AH æqualis toti seriei linearum in ratione AB ad BI procedentium erit ad AB vt tota series corporum AM; BN ex Q, & cæt. ad corpus AM, vt autem AH ad AB; sic est AT corpus ex effectione ad AM, ergo erit corpus AT ad corpus AM, vt series corporum super AB, & Q, scilicet AM, BN, & cæt. ad idem corpus AM: Erunt ergo corpora æqualia AT, & infinita series corporum ædificatorum super AB, & Q, scilicet AM, & BN, & cæt. vsque ad X terminum.

EXPENSIO VLTIMA.

De corporum calculatione.

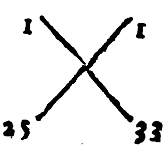
BReuiter nos ab hac tractatione expediemus, siquidem est potius Coroll. prædictorum, quam quod hic sit aliquid ostendendum: Calculare itaque aliquod corpus est corpore quoddam notæ mensuræ illud comparare, & videre, quam proportionem numeris exprimibilem illi obtineat. Verùm, quia non omnia corpora corporibus se accommodant, vt mensura mensurato se accommodare debet; nisi solùm cubus, vel parallelepipedum cubo, vel parallelepipedo; aliæ verò soliditates etiam eiusdem rationis omnia spatia solidorum maiorum implere nequeunt, hinc est quod parallelepipedum, vel cubus ille sit, quibus corpora mensurari possunt. Vnde labor exortus omnia corpora in parallelepipeda, vel cubos conuertendi, vt mensuris subijciantur; Hincque est quod corpora omnia non in propria forma; sed in cubis, vel parallelelepipedis, quibus æquiualent dimetiantur, & ijs rectangulis, vt facilior mensura sit.

PROBL.

PROBL. I. PROPOS. LXIV.

Cubum, vel parallelepipedum numeris mensurare.

DVo latera basis cubi mensurentur, & sint V. g. alterum 25. vnciarum, alterum 33. & ex inde mensuretur altitudo, & sit 40. Vnciarum. Quia itaque rectangula eam obtinent proportione, quæ ex proportione laterum componitur ex prop. 22. lib 6. quadratum vnius vntiæ ad rectangulum habens latera alterum 25. alterum 33. vnciarum erit composita ex proportione 1. ad 25. & 1. ad 33. Itaque adhibenda esset regula, quam tradidimus propos. 9. Tract. 9. part. 1. & multiplicandum esset 1. per 1. & deinde 33. per 25. vt exiret proportio composita rectanguli vnius Vnciæ ad rectangulum laterum 25. & 33. vnciarum, sed quia 1. facit 1. ideo remanet



sola multiplicatio laterum 25. & 33. inuicem, quæ faciunt 825. vncias; Ideoque proportio vnius quadrati vnius vnciæ est ad rectangulum datorum laterum 25. & 33. vt 1. ad 825. sed quia parallelepipeda sub eadem altitudine constituta sunt inuicem, vt bases ex 8. prop. Tract. 34. ideo cubus cuius altitudo est vncia, & basis vncia erit ad parallelepipedum, cuius item altitudo vncia est, sed basis 825. vt basis 1. reperta ad basim 825. super quam constitutum est, ideoque habebimus parallelepipedum constans 825. vnciarum. Verùm, quia parallelepipeda eiusdem basis sunt inuicem vt altitudines ex 20. propos. Tract. 34. ideo solidum vnius vnciæ altitudinis, sed basis rectangulæ 825. vnciarum est ad solidum eiusdem basis 825. vnciarum; sed 40. altitudinis, vt altitudo 1. ad 40. Igitur regula proportionum poterit quæri: si altitudo vnius vnciæ dat vncias 825. soliditatis, idest solidum constans vncijs 825, quid dabit altitudo 40. quadere oportebit multiplicare 825. per 40. vt prodeat solidum, cuius altitudo est vnciarum 40. & facta multiplicatione erit solidum vnciarum 33000. nec hic opus est primum diuidere: quia vnitas diuidens reddit eundem numerum.

PROBL. II. PROP. LXV.

Parallelepipeda obliqua quacumque mensurare.

QVia parallelepipeda quæcumque basis quadrangulæ sunt ad inuicem, vt bases, si sint æqualis altitudinis, siue ea sint æqualium angulorum, siue inæqualium, siue bases sint similes, siue dissimiles, dummodo sint æquales capacitate: Capacitate verò illę bases ęquales sunt ex 36. lib 1. quæ habent latus æquale alteri, etiam si Rhombi, siue Rhomboides, & altitudo eadem, hinc est, quod debeant latus mensurari, & normalis altitudo cadens super latus mensuratum. Multiplicata enim longitudo lateris eius, super quod cadit normalis illa, cum ipsa faciet ex præcedenti basim rectangulam æqualem basi datæ, etiamsi non rectangulæ, quia scilicet est eiusdem basis, & altitudinis, & quia quæcumqte parallelepipeda æqualis basis, & altitudinis sunt æqualia ex prop. 4. 5. & 6. tract. 34. p. 1. ideo etiamsi parallelepipedum esset super basim obliquè constitutum erit æqualè alteri eiusdem basis, & altitudinis rectè cōstituto, & ideo huic rectangulo parallelepipedo. Detur itaque parallelepipedum, cuius basis sit Rhombus, & mensuretur vnum latus, & sit 13. vnciarum, deinde altitudo basis, nempe normalis, quæ super latus mensuratum cadit, & erit 22. vnciarum, & simul multiplicentur, & basis ei erit 286. Postea altitudp ipsius parallelepipedi obliqui scilicet linea, quæ super Rhombum basis normaliter cadat, & sit 12. & simul cum basi multiplicetur eodem modo hac esset parallelepipedum rectum dabit 3432. eritque parallelepipedum æquale parallelepipedo obliquo.

PROBL. III. PROPOS. LXVI.

Prisma triangularis basis mensuris numericis subijcere.

PRisma triangularis basis, seu rectum, seu obliquum, est dimidium parallelepipedi ex prop. 2. Tract. 34. p. 1. eiusdem altitudinis, ideoque mensurata altitudine trianguli basis 11. vnciarum, & latere, super quod normalis cadit 14. vnciarum fiet rectangulum ex 18. & 19. tract. 29. duplum trianguli basis vnciarum 154. quod multiplicatum in altitudinē 7. vnciarum faciet parallelepipedum rectum vnciarum 1078. duplum prismatis, sicut ipsa basis est eius dupla, quod erit æquale cuicumque obliquo prismati æqualis altitudinis, & basis, & ideo duplo cuiuscumque prismatis eiusdem basis item, & altitudinis. Vnde dimidium 539. vnciarum solidum erit æquale exhibito prismati, potest etiam assumi basis 77. nempe non basis dupla: sed æqualis basi prismatis, nam multiplicata per altitudinem id præstabit.

PROBL. IV. PROPOS. LXVII.

Prisma polygonæ basis numeris dimetiri.

CVm prisma polygonæ basis sit ad prisma triangularis, vt basis ad basim ex prop. 19. Tract. 34. quod intelligitur si sit eiusdem altitudinis. Ideo, si diuidatur basis polygona in sua triangula, vt propos. 20. & 21. Tract. 19. docuimus, & numerus basis triangularis ducatur per altitudinem prismatis consequemur prisma triangulare ex propos. 66. h. vt ergo basis triangularis ad polygonam basim, sic erit prisma triangulare ad prisma polygonum ex propos. 19 Tract. 34. part. 1. Si ergo basis triangularis sit 15. & altitudo sit 4. prisma triangulare erit 60. Sit verò nota ex propos. 20. cit. basis polygona 45. partium, & adhibeatur regula aurea dicendo; si 15 dant 45. quid 60. & dabit 180. prisma polygonum: Quod, & obtinebimus multiplicando totam basim in vnum collectam per altitudinem.

PROBL.

PROBL. V. PROPOS. LXVIII.

Pyramidem, vel polygonæ, vel triangularis basis calculo subigere.

QVoniam omnis pyramis æqualis altitudinis scalena, & obliquè sita est æqualis rectę æqualis basis, & altitudinis ex 21. propos. Tract.34. part.1. & ex 22. omnis triangularis pyramis est tertia pars prismatis, quod est dimidium parallelepipedi rectanguli cuiuscumq; quę omnia cum pyramide fint eiusdem basis, & altitudinis; Ideo omnis pyramis, seu recta, seu scalena triangularis erit sexta pars parallelepipedi. Mensuretur itaque latus vnum pyramidis, & sit 15. vnciarum, & altitudo ipsius basis & sit 7. & fiat rectangulum numericum, vt prop.19.Tr. 29. multiplicando inuicem, vt fiant 105. pro basi rectangula; mensuretur postea normalis eleuatio ipsius, & sit 22. vnciarum, qui numerus multiplicetur cum basi, & fiat parallelepipedum 2310. cuius numeri sexta pars 385. est soliditas pyramidis. At si pyramis sit polygona, cum componatur ex Coroll. propos. 25. ex pyramidibus triangularibus in sua triangula dispertita basis, & mensurata, vt supra, dabit soliditatem singularum pyramidum, quæ simul aggregatæ pyramidem totalem constituent.

PROB. VI. PROPOS. LXVI.

Frusto pyramidis numericas mensuras adhibere, si tamen constet basibus parallelis.

QVoniam frustum pyramidis cuius basis quadrata ex propos.25. part.1. Tract.34. ęquatur parallelepipedo, cuius latera sint superioris frusti basis latera, & semidifferentia homologorum laterũ, cum triente parallelepipedi ex semidifferẽtijs, & omnia eiusdem altitudinis. Hoc autem est (quodcumque illud sit) ęquale parallelepipedo rectangulo eiusdem basis, & altitudinis: Hinc est, quod debeat mensurari latus 16. vnciarum supremæ basis, & altitudo 18. eius; sicut latus infimum homologum 28. & altitudo eiusdẽ basis 26. subducatur postea altitudo 18. ab altitudine 26. & restabunt 8. cuius medietas 4. deinde latus 16. à latere 28. & restabunt 12. cuius medietas 6. & altitudo ipsa frusti pyramidis sit 33.

Coniungatur differentia altitudinum 4. ipsarum basium cum minori altitudine, & sit 22. & differentia laterum 6. cum minori latere 16. & sit item 22. qui multiplicentur inuicem, & fiant 484. pro basi parallelepipedi, qui numerus multiplicatus in altitudinẽ 33. dabit 15972. Deinde semidifferentiæ 4. & 6. inuicem multiplicentur, & sint 24. deinde per altitudinem 33. & fient 792. solidum rectangulum semidifferentiarum; cuius triens est 264. quod triens coniunctum cum numero 15972. dat 16236. Parallelepipedum ex lateribus minoribus cum semidifferentijs, & triens parallelepipedi semidifferentiarũ, quę duo æquant frustum pyramidis. Quod si sit frustum triangulare accipies ex Coroll. propos. 25. prædicti numeri dimidium. Quod si sit multilaterum diuides bases in frusta sua triangularia, & calculabis, vt supra.

PROBL. VII. PROPOS. LXVII.

Cylindrum, & Conum acutum, vel prismaticum, rectum, seu obliquum situm super basim circularem, seu Ellipticam, seu Parabolicam, seu super quamcumq; eorum partem, aut quamcumque mensurabilem figuram mensurare.

EX Coroll. propos.3. constat cylindrum esse ęqualem prismati eiusdem basis, & altitudinis, itaque circulum basis in rectangulum rediges ex 5. vel 7. vel ex 9. propos. tract.30. & super illud rectangulum parallelepipedum eiusdem basis, & altitudinis constitues V.g. sit notus diameter circuli 15. vnciarum, quoniam ex prop. 41. lib.6. Euclid. omnes circuli sunt in eadem proportione, ac radij, ideo dicatur si 7. dant 22. circumferentiæ in aliquo circulo ex 5. Tract.18. quid 15. in hoc circulo, & exiet numerus 47. & $\frac{1}{7}$. Multiplicabimus itaque hos numeros simul, & ex prop.5. Tract.30. efficietur rectangulum quadruplum areæ circuli 707. $\frac{1}{7}$ eius igitur quarta pars erit 176. $\frac{1}{2}\frac{2}{8}$ areę circuli æquale rectangulum, quod ductum in altitudinem cylindri 29. V.g. vnciarum expromet numerum soliditatis cylindri 5126. $\frac{1}{2}\frac{2}{8}$ hoc autem intelligitur, seu rectus sit cylindrus, seu scalenus, quia sunt æquales dummodo sit eadem basis, & altitudo ex prop.4. tr.34.

At quia conus omnis, seu rectus, seu scalenus in punctum desinens est tertia pars cylindri ex propos. 7. Tract.34. ideo si detur conus, qui pro diametro obtineat 15. vncias. & pro altitudine 29. cylindri eius tripli soliditas erit 5126. $\frac{1}{2}\frac{2}{8}$ assignata vnciarum cubarum, cuius tertia pars conum præstabit 1708. $\frac{7}{8}\frac{8}{4}$.

At quia conus prismaticus ex prop.27. part.2. Tract. 34. est $\frac{1}{2}$ coni acuti, ideo si detur talis conus, cuius diameter sit 15. vnciarum, & altitudo 29. eius soliditas erit maior numero 854. $\frac{1}{3}\frac{1}{4}$ eiusdem 1708. $\frac{7}{8}\frac{8}{4}$ numeri medietate, nempe 2563. $\frac{3}{8}\frac{3}{4}$.

At si cylindrus sit ellipticus, & maior diameter illius ellipsis, quæ basim substernit cylindro, sit 15. minor 12. tunc ellipsis ad rectangulum redigetur, & quia ex prop. 24. Tract.30. est circulus maiori axe descriptus ad planum ellipticum, vt axis maior ad minorem dices regula aurea; si 15. axis dat 12. axem, quid Area circuli 176 $\frac{1}{2}\frac{2}{8}$, & offert 141. $\frac{1}{4}\frac{1}{2}\frac{8}{6}$, idest $\frac{1}{7}$, sed quia omne corpus cylindraceum, vt est cylindrus ellipticus est ad aliud, vt altitudo ad altitudinem si habeant bases æquales, licet non similes. Ergo cylindrus, cuius basis erit 141. $\frac{1}{7}$. ellipsis ad cylindrum eiusdem basis, & altitudinis vnciarum 29. erit æqualis.

Quadere si multiplicemus in altitudinem 29. vnciarum prędictum numerum 141 $\frac{1}{7}$, & dabit

soliðisoliditatem cylindri elliptici 4100. $\frac{1}{7}$. Quod si detur conus ellipticus, iste ex prop.27. Tract.34. part.2. æquabitur circulari eiusdem basis, & altitudinis, at circularis eiusdem basis, & altitudinis æquatur tertiæ parti cylindri eiusdem basis,& eleuationis. Quare erit tertia pars soliditatis inuentæ cylindricæ conus ellipticus, nempe 1367. $\frac{1}{7}$.

Id etiam, & æquo pacto concludit de cylindraceis corporibus quamcumque basim habentibus, quorum multiplicata planities basis cognitæ in altitudinem normalem soliditatē præstabit: Quadere si sit aliquis cylindrus, qui obtineat basim parabolam, cuius area prop.33. tract.30. ad triangulum, & ideo ad rectangulum reducatur, vel quæcūque eius cognitæ partes ex eadem prop. 36. sicut & portiones ellipsium, quæ cognosci possunt ex 28. aut etiam circulorum, quæ indagantur ex 4. Tract.30. quæ se substernant pro basibus alicuius corporis cylindracei ex Coroll. propos.4. & 24. Tract.34. eodem modo mensurabitur, & eius soliditas nota euadet.

PRORL. VIII. PROPOS. LXIX.

Frusta Conorum quorumcumque numeris subigere:

PRimo mensurabitur eodem modo, quo frustum pyramidis, vt coni circularis frusti soliditas inueniatur ex 13. Tract.34. part.2. Verùm pro lateribus duobus maioribus adhibetur radius, & peripheria basis maioris inferioris, & pro minoribus basis superioris, & minoris radius, item, & peripheria, quibus vnita semidifferentia diametrorum, & peripheriarū maioris basis à minori cōstituit duo latera prismatis æquealti frusto conico æquali cum triente prismatis, cui semidifferentiæ eędem constituunt latera basis triangularis.

Secundò vniuersaliter. Duo coni ad calculum redigentur, vt præc.prop. quorum conus sit situs super basim frusti maiorē alius situs super basim frusti minorem, & inuenta eorum soliditate minor à maiore eximetur, & restabit cognitum frustum, quodcumque: qui modus poterit adhiberi, cum bases non sunt parallelæ.

Tertiò, quia ex prop.7.h.coni basibus parallelis diuiduntur in conos similes, qui ex pr.55.h. sunt in triplicata ambituū ratione, seu diametrorū, seu altitudinum: hinc est, quod si coni, cuius segmentum quæritur, constet diametro basis maioris, & minoris poterit triplicari eorum proportio, & ex nota soliditate minoris per regulam auream cognoscere soliditatem maioris. Sit ergo pręcedens conus, cuius basis diameter est 15 & conus prolungatus intelligatur, ita quod basis illius ita prolungati sit 30. triplicetur hæc proportio 15. ad 30. dabit soliditatem maioris coni. Triplicetur itaque dicendo si 15. dant 30. quid 30. & dabunt 60. iterumque dices si 30. dant 60. quid 60. & dabunt 120. & erit 15. ad 120. triplicata proportio 15. ad 30 Quà acquisita dices si 15. dant 120. quid dabit soliditas minoris coni 1708 $\frac{7}{8}\frac{8}{4}$, & exhibebit soliditatem maioris 13671. $\frac{5}{1}\frac{4}{2}\frac{}{6}\frac{0}{0}$ idest $\frac{5}{8}\frac{6}{4}$, à qua soliditate deducta minor soliditas minoris coni versùs acumen 1708 $\frac{7}{8}\frac{8}{4}$ dabit frustum conicum 11962 $\frac{4}{8}\frac{2}{7}$.

Hic verò secundus, & tertius modus poterit adhiberi etiam quacumque pyramide, secundo quidem si secta planis non parallelis, tertio si planis parallelis sit secta.

PROBL. IX. PROPOS. LXXII.

Rhombum conicum mensura numerica depromere, & residuum frusti coni, vel Rhombi ablato cono inuerso.

QVoniam soliditas Rhombi conici æquatur cono illi, qui habeat altitudinem conorum compositorum altitudini æqualem, & basem basi compositorum eorundem ex 15. tract.34. sufficiet hunc conum computare, vt supra.

Quod si à coni aliquo frusto intelligatur ablatus conus inuentus adhuc hoc residuum calculabimus ex prop.17. tract.34. Sit V. g. conus, cuius trianguli per axem latus sit 25. vnciarum; basis verò supremæ radius 12. alter infimæ, & maioris 20. latus frusti conici sit 15. primo reperienda est coni superficies ex 32. tract.31. sic Addantur simul 12.& 20. & fiant 32. deinde inter 32. & 15. reperiatur numerus medius proportionalis ex 21. tract.13. part.2. & erit proxime 22. & hic erit radius: hoc itaque numero 22. tamquam diametro exquiratur peripheria circuli ex 5. tract.30. dicendo si diametri 7. dant 22. peripheriæ in aliquo circulo, quid 44. diametri, & inuenietur peripheria 134. $\frac{2}{7}$, deinde multiplicabimus 44. & 134. $\frac{2}{7}$ simul, & postea producti accipiemus quartam partem, aut dimidiam peripheriā 74. $\frac{1}{7}$, & radium 22. inuicem multiplicabimùs, & erit area 1631. $\frac{1}{7}$ frusti conici ex 32. tract.31. Mensurata autem normali à centro maioris basis cadente in superficiem coni iuxta dicta pr.13.h. & vt exposcit pr.32. cit. sit 9 $\frac{1}{7}$.

Itaque calculetur conus, cuius altitudo sit 9 $\frac{1}{7}$, & basis 1631 $\frac{1}{7}$, & erit ea soliditas frusti coni ablato cono inuerso, idest super basem eius minorem constituto.

Eodem modo exquiretur soliditas frusti Rhombi ablato Rhombo, quod corpus figura expressimus 18. tract.34. part.2. Quæ constat ex frusto coni, & ex cono super maiorem basim constituto, deducto cono super minorem basim. Nam inuenietur superficiei frusti conici circulus æqualis, & conus eiusdem basis; at altitudinis normalis à vertice coni in superficiem oppositam productam cadente.

PROBL.

PROBL. X. PROPOS. LXXIII.

Annuli plani soliditatem numeris exprimere.

Sit quidam annulus quadrata mole in gyrum se flectente constans, quem exibuimus prop.19. tract.24. part.2. & circuli maioris diameter notus sit 15. vnciarum, minoris vero 5. ita quod eius annuli plani latitudo sit 10. vnciarum, & circumferentia ferè 31. $\frac{1}{2}$ ex prop. itaque 12. tr.30. multiplicatis istis numeris 10.& 31.$\frac{1}{2}$ simul productũ erit rectãgulũ æquale plano annulo 315. Exhibeatur verò altitudo normalis Annuli, quę sit V.g. 11. vnc. qui multiplicatus in 315. exhibebit soliditatẽ annuli 3465. Quod si sit rotũdus, vel cuiuscũq; datæ figuræ; sed eius sectio exhibeat circulum, aut aliquod polygonum regulare; reperto circulo medio inter maiorem, & minorem circulum secundùm quos curuatur, prædicto modo, qui sit vnc. 63. deinde sectionis illius reperietur superficies, cuius diameter notus est 10. partium, & ideo peripheria 31. vnciarum, & $\frac{3}{7}$, & hic ipse circuli discus vnciarum 78. $\frac{4}{7}$: Si ergo per prædicti circuli 63. ambitum multiplicetur hæc superficies ex prop. illa 20. Tract.34. part.2. constabit soliditas annuli rotundi Vncijs cubis 4952.

Quod autem dicitur de circulo ex ea 20. prop. Tract.34. part.2. valet de quocumque annulo polygono dummodo eius sectionis area constet, quę 5. vel 20. prop. Tract.29. perscrutari potest: si sit figuræ regularis.

THEOR. I. PROPOS. LXXIV.

Omnia corpora, quæ conos, vel pyramides, vel parallelepipeda æqualia, vel cylindros obtinent, calculationi subigere.

Quia supra diuersis propositionibus Tract. 34. multa corpora cubauimus redigendo ea, aut ad cylindros, aut parallelepipeda, aut pyramides, aut conos, vel omnino solidos, vel aliquo alio corpore vacuatos ex prædictis, ideo sufficiet hic monuisse ea corpora mensurare, & numeris supponere calculando corpora *illis æqualia*. Consideretur itaque quænam corpora illis sint æqualia, & ea numeris tractentur, & simul corpora, quibus equantur, mensurata erunt.

Gratias, Gratias Deo, & B. V. & cæt. infinitas, immensas: hìc quies.

AMICE LECTOR,

Errores aliqui, qui in characteribus figurarum indicibus occurrerunt ex imprimentium fatalitate hic notantur, quos benigniùs corriges.

TRACTATV III.

	Mendum	*correctio.*
Def. 10.	BCA.	CBA

TRACT. IV.

Pr. 5. l. pen.		BC
Pr. 14. l. 10.	DFA.	BAF
P. 29. l. 19.	AD.	AB
P. 28. l. 29.	DH.	GH

TRACT. VI.

P. 12. l. 3.	AOB.	AD
P. 48. l. 39.	BAD.	ABD

TRACT. IX. *Pars.* 2.

P. 4. l. 53.	N	K
P. 16. l. 51.	L.	G
Cor. 2. p. 21. l. 6.	AB	AC

TRACT. X.

Pr. 4. C. l. 2.	AF.	AP
P. 5. l. 3.	DE	DH
P. 10. l. 7.	DO.	DB
P. 19. l. 5.	C	B
P. 31. l. 35.	AB.	YB

TRACT. XII.

Pr. 2. l. 8.	E	C
14. l. 10.	A	AB
25. l. 33.	EL.	BL
33. l. 68.	IH.	IK

TRACT. XV.

P. 4. vbiq;	PT ad OP.	OP ad TP
l. 34.	IP ad NO.	NO ad IP
25. l. 51.	OCI.	EFI

TRACT. XVI. *Pars.* 1.

Pr. 5. l. 3.	HE	HF
7. l. 4.	D ad H.	H ad D
7. l. 5.	E ad I.	I ad E
	Pars. 2.	
Pr. 1. l. 40.	OE.	OR
l. 45.	BH.	vt BH
Pr. 5. l. 5.	EF.	BF
l. 13.	TZ.	TQ
l. 26.	ED.	EB
Pr. 7. l. 32.	EH.	FH
l. 25.	CA.	CE

TRACT. XVIII.

P. 15. l. pen.	AER.	R
17. l. 13.	TS	TI
19. l. 53.	PL.	FL
C. 2. l. 17.	XI.	XY

TRACT. XIX.

Pr. 13. l. vlt.	BL.	BF

TRACT. XX.

	Mendum	*correctio.*
Pr. 7. l. 15.	AF	AB
13. l. 2.	ABIG.	ABI
9. l. 16. & 17.	AF.	AE

TR. XXII.

Pr. 1. 5.	EF.	BF
13. l. 1.	PL.	PR
27. l. 7.	LM.	M

TR. XXIII. *Pars.* 2.

Pr. 15. l. 2.	BE.	BX
	ZI.	ZX
Pr. 24. l. 26.	DF.	DE
Pr. 25. l. 12.	YL.	XY
& 63.	BN.	BE
& C l. 4.	XZ.	VZ
Pr. 29. l. 19.	VBE.	BVE
& l. 30	in arcu.	in D arcus
	Pars. 3.	
Pr. 32. l. 9.	F	E
Pr. 36. l. penul.	DC.	BC

TR. XXIV.

Pr. 8. l. 40.	CX.	HX
Pr. 10. l. vlt.	PF.	BF
P. 13. l. 18.	NM.	NT
Pr. 23. l. 40.	CFH.	GFH
Pr. 54. l. 5.	CD.	CA

TR. XXV.

Pr. 1. l. 21.	XQZ.	XTZ
Pr. 10. l. vlt.	DIS.	OIS
P. 16. l. 19.	A.	EA
Pr. 19. l. 20.	V.	VP

TR. XXVI. P. 1.

Pr. 11. l. 61.	DB.	DE
	Pars 2.	
P. 7 l. 1.	AG.	dele
P. 8. l. 31.	VC.	CL

TR. XXVII. P. 1.

Pr. 21. l. 4.	OP.	RP
	OM.	MR
Pr. 15. l. 9.	G53.	G153
	Pars. 2.	
Pr. 16. l. 17.	IV.	IO
Pr. 22. l. 4.	AE.	AB
Pr. 50. l. 6.	QR.	GO
l. 51.	E.	F
Pr. 80. l. 30.	H.	K

TRACT. XXVIII.

	Mendum	*correctio.*
Pr. 8. l. 11.	LA.	LV
Pr. 13. l. 41.	DG.	BG
l. 57.	T.	t

TR. XXIX.

Pr. 11. l. 7.	in L.	in I
Pr. 19. l. 1.	AD.	VD
Pr. 24. l. 13.	CV	DV
Pr. 24. l. 19.	KL.	KM
P. 25. l. 31.	P.	B
P. 28. l. 12.	D.	B
Pr. 29. l. 6.	K.	KI
l. 11.	D	O
Pr. 35. l. 24. & 26.		dele P
Pr. 49. l. 9.	CE ad EF.	EF ad EI
P. 47. l. 31.	CD.	GE

TR. XXX.

Pr. 24. l. 30.	CE.	PE
l. 36.	CE.	PE
Pr. 26. l. 8.	FD.	FB
Pr. 50. l. 6.	BA.	BP
Pr. 60. l. 3.	ALC.	adde I

TR. XXXI.

Pr. 14. l. 12.	AIM.	AIN
Pr. 19 C. 3. l. 4.	ITEX.	In AX
Pr. 21. l. 10.	XC.	NC
l. 11.	MQS	NQS

TR. XXXIII.

Pr. 1. l. 17.	BAE.	BE

TR. XXXIV. P. 1.

Pr. 20. l. 12.	GC.	GD
Pr. 23. l. 8.	FDH.	FGH
Pr. 25. l. 8.	NK.	MK
	Pars. 2.	
Pr. 12. l. 22.	DC.	DCB
Pr. 18. l. 9.	RLt.	RST
l. 22.	RLT.	RLT
Pr. 19. l. 2.	NR.	TR
Pr. 21. l. 29.	It.	IT
Pr. 51. C. 2. l. 9.	DA.	CA
l. 10.	CIH.	CH
P. 56. l. 22.	KG.	IG
	HT.	KT

TR. XXXV.

Pr. 27. l. 30.	QV.	IV
	& QI.	VI

Sss VSVS

VSVS TABVLÆ SEQVENTIS SINVVM, TANGENTIVM, ET LOGARITHMORVM.

CVM iam logarithmicas tabulas excerptas à Canone magnò triangulorum seu tabula artificialium Herinci Brigij vulgauerit Cauallerius, placuit nobis ipsos Neperianos logarithmos varietatis gratia exhibere, qui ab ipso Nepero inuentore eorum conditi fuere, cuius tabulæ vsus talis est.

Arcus, & angulus si quærendus sit, vel non eccedet gradum 45. vel superabit: si non eccedat quærendus est in prima columna sinistra reperiendo gradum in fronte, minuta descendendo per ipsam columnam. Si verò superent dati gradus & minuta Gr. 45. quærendi sunt gradus in calce nonæ columnæ & minuta ascendendo. Eccipientur autem sinus correspondentes procedendo directè per eandem tesseram à sinistra ad dextram in secunda columna sinistra, si gradus minores quam 45. inuenti fuerint, at si maiores in octaua columna procedendo per eandem tesseram à dextra in sinistram versùs medium areæ Logarithmi verò sinuum in tertia columa, & septima. Tangentes in quarta, & sexta, & logarithmi tangentium in media quintaque columna inuenientur, qui deseruient pro tangentibus graduum non eccedentium gr. 45. descendendo; at verò ascendendo pro tangentibus graduum maiorum; quam gradus 45. diuersimodè tamen. Nam descendendo & prout deseruiunt tangentibus sinistris, illis vtemur secundum regulam V.g. si sit adhibeda subtractio, subtrahemus, si additio, addemus. At si deseruiant tangentibus dextris, & ascendendo reperta fuerint, cum subtrahendum est, tunc addemus; cum addendum est, subducemus, vt dixi exp. 6. tract. 21.

Sinus si cognoscamus, & velimus cognoscere angulum, vel arcum reperiemus eos in secunda, vel octaua columna & è regione in eadem tessera inueniemus arcum vel angulum correspendem; Logarithmos verò sinuum in tertia & septima; Tangentes in quarta, & sexta; Logarithmos verò tangentium in media.

Qui prout illis vtemur deseruient Gradibus minoribus gr. 45 & eorum tangentibus iuxta regulam exhibiti, contra verò regulam deseruient tangentibus maioribus quam gr. 45. & gradibus correspondentibus.

Si verò, quis cupiat Graduum minutorum, & etiam secundorum sinus, qui in tabula non ponuntur per regulam auream intentum cõsequetur. Nam reperto sinu arcus, & minutorum adhærentium, is subtrahatur à sinu proximè maiori, & obtinebitur differentia; Dices ergo regula trium: si secunda 60. dant v. g secunda 20. quid differentia reperta? & inuenies differentiam secundis datis congruentem, quæ addetur sinui minori reperto, & fiet sinus arcus dati notus nedum quo ad gradus, & minuta, sed etiam quo ad secunda. v. g. detur arcus G. 8. 32. S. 20 sinus erit G. 8 M 32. P. 1483848. at proximè maior G 8. minut. 33. sinus 1486724. differentia est 2876. Dices itaque si 60. dant 20 quid 2876. differentia? & prodibit. proportionalis congruens 958. quæ addita sinui minoris arcus 1483848. constituet sinum 1484806. G. 8. M. 32. S. 20. Eodemque modo logarith. sinuum, tangentes, logarithmosq; ipsarum vsque ad secunda Graduum obtineri poterunt.

Si verò detur sinus, qui non reperiatur in tabulis, & quis cupiat cognoscere quot Gradus minuta & secunda illi respondeant per eandem regulam auream id consequi poterimus. Nam reperto sinu proximè minori, & à maiori dato subducto restabit differentia: Iterumque eodem subducto à maiori proximè sinu reperto in tabulis restabit alia differentia maior; Dices itaque si hæc differentia maior dat illam minorem, quid dabunt secunda 60. & obtinebis secunda tuæ differentiæ competentia sinus dati à proximè minori v. g. detur sinus 1484810.

Qui non reperitur in tabula sinuum, sed proximè minor est 1483848. qui subductus à maiori dato 1484810. relinquit differentiam 962. subductus verò iterum ipse repertus sinus 1483848. à maiori proximè reperto in tabulis 1486724. relinquit differentiam maiorem 2876. dico itaque si differentia 2876. dat differentiam 962. quid dabunt secunda 60. & restituent sec. 20. & sic agendum est in tangentibus vel logarithmis in tabula non repertis; si quis scrupulosum computum exoptet. Verum tutè semper poterit accipi pro dato sinu proximè minor, si non adeò exacta requiratur supputatio.

Sinus versus reperitur arcus infra Gr. 90. si accipiatur dati arcus complementi sinus, & subducatur à sinu toto. Nam residuum erit sinus versus illius arcus, at si superet G. 90. cape eccessum sup. Gr. 90 illiusque quære sinum, additus enim sinus sinui toti constituet sinum versum illius arcus.

Si verò quis cupiat alicuius dati sinus versi arcum inuenire demat à sinu toto, si ipso minor sit vel vice versâ si sit maior & residui inueniatur arcus, qui demptus à quadrante in priori casu reliquit illius sinus versi arcum, & in posteriori casu additus quadranti idem præstat.

Tandem si quæratur complementum alicuius arcus quærendus est in altera è regione graduum, & minutorum columna. v. g. si sit quærendum complementum G. 8. M. 30. columnæ primæ sinistræ complementum erit in extrema dextra G. 81. M. 30. & vice versa Et idem asseras de sinubus, tangentibus: atque logarithmis ipsorum, quorum complementa sunt in columna correspondente: sub correspondentibus arcuum complementis.

Ita sinus complementi arcus G. 10. M. 15. erit sinus arcus, qui illum cõplet G. 79. M. 45. qui est 9840407 sicuti sinus complementi arcus G 79 M. 45 est sinus arcus G. 10. M. 15. nimirum sinus 1779415.

Denique si quis desideret logarithmos secantium is poterit adhibere logarithmos sinuum; sed semper vtendo ipsis contra regulam, vt dixi tract. 22. propos. 29. Curauimus autem has tabulas omnino ab erroribus absolutas tibi exhibere, quibus tuto vti possis, vt exactissimè præstitimus.

TABVLA

TABVLA LOGARITHMICA

EIVSQVE VSVS EXPLICATVS.

DOcuimus coroll. prop. Tr. 22. logarithmos applicatos numeris geometricis in tabulis sinuum, atq; tangētium Regulę aureę muneri deseruire, & inuentioni quarti proportionalis, & hoc fieri addendo simul logarithmos, cū in ea multiplicatio requiritur, vel subducendo, cum diuisio ab ea imperatur: dummodo logarithmi sint eiusdem naturæ, vt dixi pr. 26. Tr 22. sūma verò est logarithmus abundans, si collecti logarithmi fuere abundantes, at deficiens, si fuere deficientes; sicut, & residuum à subductione, abundans erit; si logarithmi subducti, & is à quo subducitur; fuit abundans: at deficiens, si ijdem fuere deficientes. Scire verò hoc deseruit, vt cognoscamus, cuius naturæ sit quartus proportionalis, qui ellicitur; stat enim loco sinus summa, vel residuum abundans, cum Problema pro quarto proportionali promittit sinum, vel tangentis minoris quàm grad. 45. si promittat tangentem: stat autem loco secantis, cum est residuū deficiens, & Prob. secantem promittit, quod si promittat inueniendam tangentem, illa tangens, vt pote deficiens, erit Graduum maiorum quàm G. 45. vt dicimus expen. 6. trac. 21.

At si casus ferat quod vtamur logarithmis diuersæ naturæ, scilicet, quòd sit vnus deficiens, alter abundans, vt logarithmo sinuum, & logarithmo tangentium Graduum maiorum quā, G. 45 vel logarithm. vt sinuum, & logarithmis ipsis vt secantium, tunc cum regula aurea docet vti multiplicatione, in logarithmis vtendum est subductione, & quod restat à maiori logarithmo, à quo subductio facta est, denominatur, & si ille erat abundans residuum, quoq; est abundans, si deficiens residuum quoq; est deficiens. Cum autem regula aurea vtitur diuisione; si logarithmi sint diuersæ naturæ, vtendum est additione, vt dixi coroll. prop. 26. Tr. 22. & totum quod conflatur à maiori logarithmo additorum, vocatur abundans, vel deficiens: quare si fiat additio residuo à subductione, qui ex dictis apelletur abundans, & istud sit maius summa, quoq; erit abundans, secus si deficiens. Vnde scies, vt supra cuius, naturæ sit quartus proportionalis, vt ipsū reperias in Tabulis.

Ratio huius rei est, quia si addas logarithmū, o. vnitatibus 3. restat 3. Ergo si addas 2. deficiens, idest defectum duarum vnitatum log. 3. oportet, quod restet minus, quam 3. cum ponere rei defectum sit ipsam rem auferre, & ideo remanet 1. abundans. Sic si defectiuo log. Vg. 3. addas 2. logarithmum positiuum oportet, vt remaneat minus quam 3. defectiuum, idest 1. quia ponere quid verum, & positiuum est auferre defectum. Vnde addere est idem, ac subducere. At si subducas, o. a 3. log. abundante remanet 3. Ergo si auferas 2. minus quam o. idest defectum duarum vnitatum, oportet, quod crescat & sit 5. quia subducis defectum 2. tollitur autem defectus per rem positiuam, vnde subducere defficientes logarithmos ab abundantibus erit addere abundantibus; ideoque id quod conflatur, erit positiuum, & abundans: Verum si à. 3. defectiuo auferas logarith. positiuum, & abundantē nempe 2. facies vtique magis deficientē, nempe 5. vnitatibus infra o. cui enim magis aufertur rei positiuæ, magis deficit. Vndę auferre ēst idem quod addere, & id quod fit est negatiuum magis. Si verò à negatiuo auferas negatiuum, clarum est quod erit minus negatiuum, & si addas erit magis negatiuum. Vnde solum in additione, vel subductione logarithmorum oppositę naturæ mutatur subductio in additionem, & additio in substractionem. Ideoque in tangentium logarithmis superscribitur secundum regulam, inferiùs contra regulā quia cum, vt deficientes sumantur ferè semper cum abundantibus sinubus, vel tangentibus adhibentur, & idem dicendum est de logaritmhis sinuum, si vsurpentur, vt secantium, ferè enim semper contra regulam adhibendi, quia cum sinibus adhibentur.

MONITVM.

Cum literarius cusor aliqua sibi clam impresserit exemplaria mancha omninò folijsque recisis, & figuris deficientia, Priuilegium à Celsitudine Regali Sabaudię Ducis, &c. obtinere coactus sum, ne alius quam à me destinatus bibliopola, hos nostros libros exponat: Sed quia non vbique locorum hoc Priuilegium extenditur; ideo omnes monere cogor, ne huiusmodi imperfecta volumina, in sui incommodum, meique detrimentum emant; At ne folium sine sua vtilitate libro imponeretur, superiorem doctrinam calculi logarithmici penitus explicatiuam tibi communicaui.

TABVLA
SINVVM, ATQVE TANGENTIVM
LOGARITHMIS NEPERIANIS
EXORNATA
DILIGENTER EMENDATA,

QVAE OMNI, TVM GEOMETRICAE, TVM ARITHMETICÆ SVPPVTATIONI APPRIME DESERVIT.

M.	Sinus	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	0	Infinitum	0000	Infinitum	Infinita	0	10000000	60
1	2909	81425681	2909	81425680	34376070815	1	10000000	59
2	5818	74494213	5818	74494211	17188033688	2	9999998	58
3	8727	75439556	8727	70439560	11458686834	4	9999996	57
4	11636	67562746	11636	67562739	8594012547	7	9999993	56
5	14544	65331315	17544	65331304	6875680006	11	9999989	55
6	17453	63508099	17452	63508083	5729633839	16	9999986	54
7	20362	61966595	20361	61966573	4911098124	22	9999980	53
8	23271	60631284	23270	60631256	4297181900	28	9999974	52
9	26180	59453453	26179	59453418	3819696333	35	9999967	51
10	29088	58399557	29088	58399814	3437829002	43	9999959	50
11	31997	57446759	31996	57446707	3125276745	52	9999950	49
12	34906	56576646	34905	56576584	2864819229	62	9999940	48
13	37815	55776222	37814	55776149	2644433955	73	9999928	47
14	40724	55035148	40723	55035064	2455533838	84	9999917	46
15	43632	54345225	43632	54345129	2291873854	96	9999905	45
16	46541	53699843	46541	53699734	2148619711	109	9999892	44
17	49450	53093600	49450	53093577	2022219818	123	9999878	43
18	52359	52522019	52359	52521881	1909864971	138	9999863	42
19	55268	51981356	55268	51981202	1809337410	154	9999847	41
20	58177	51468431	58177	51468361	1718863124	170	9999831	40
21	61086	5 980537	61086	50980450	1637005697	187	9999813	39
22	63995	50515342	63995	50515137	1562590046	205	9999795	38
23	66904	50070827	66904	50070603	1494645462	224	9999776	37
24	69813	49645239	69813	49644995	1432363027	244	9999756	36
25	72721	49237030	72722	49236765	1375082163	265	9999736	35
26	75630	48844826	75631	48844539	1322188681	287	9999714	34
27	78539	48467431	78540	48467122	1273213435	309	9999692	33
28	81448	48103763	81450	48103431	1227736470	332	9999668	32
29	84357	47752759	84359	47752503	1185395877	356	9999644	31
30	87265	47413852	87268	47413471	1145801136	381	9999619	30
31	90174	47085554	90177	47085554	1108932084	407	9999593	29
32	93083	46768049	93086	46768049	1074263399	434	9999566	28
33	95991	46460773	95995	46460312	1041705454	461	9999482	27
34	98901	46162254	98904	46161765	1011062679	489	9999511	26
35	101809	45872392	101814	45871874	982180553	518	9999482	25
36	104718	45590688	104723	45590140	954893332	548	9999452	24
37	107627	45316714	107632	45316135	929081086	579	9999421	23
38	110536	45050041	110541	45049430	904627361	611	9999389	22
39	113445	44790296	113450	44789652	881427652	644	9999357	21
40	116353	44537132	116360	44536455	859395374	677	9999323	20
41	119262	44290216	119269	44289505	838430438	711	9999289	19
42	122171	44049255	122178	44048509	818463792	746	9999254	18
43	125079	43813959	125088	43813177	799432199	782	9999218	17
44	127988	43584078	127997	43583259	781259259	819	9999281	16
45	130896	43359360	130906	43358503	763899813	857	9999143	15
46	133805	43139582	133816	43138686	747289264	896	9999105	14
47	136714	42924534	136725	42923599	731385593	935	9999065	13
48	139622	42714014	139635	42713039	716149676	975	9999025	12
49	142531	42507833	142544	42506817	701531474	1016	9998984	11
50	145439	42305826	145454	42304768	687500739	1058	9998942	10
51	148348	42107812	148363	42106711	674016435	1101	9998900	9
52	151257	41913644	151273	41912499	661050728	1145	9998856	8
53	154164	41723175	154182	41721986	648578536	1189	9998811	7
54	157075	41536271	159092	41535037	636564040	1234	9998766	6
55	159982	41352795	160001	41351515	624990311	1280	9998720	5
56	162891	41172626	162911	41171299	613825994	1327	9998673	4
57	165799	41006643	165820	41005268	603057015	1375	9998625	3
58	168708	40821746	168730	40820322	592655713	1424	9998577	2
59	171616	40650816	171640	40649343	582610426	1473	9998527	1
60	174524	40482764	174550	40481241	572899830	1523	9998477	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentia & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	174524	40482764	174550	40481241	572899830	1523	9998477	60
1	177433	40317483	177459	40315900	563504309	1574	9998426	59
2	180341	40154899	180369	40153273	554414914	1626	9998374	58
3	183250	39994918	183279	39993239	545610968	1679	9998321	57
4	186158	39837447	186189	39835715	537085003	1733	9998207	56
5	189066	39682421	189100	39680633	528821258	1788	9998212	55
6	191975	39529765	192010	39527922	520805157	1843	9998157	54
7	194883	39379407	194920	39377598	513030946	1899	9998101	53
8	197792	39231274	197830	39229318	505482730	1956	9998044	52
9	200700	39085307	200740	39083293	498155754	2014	9997986	51
10	203608	38941441	203650	38936368	491038024	2073	9997927	50
11	206517	38799612	206561	38797479	484118353	2133	9997867	49
12	209425	38659767	209471	38657573	477393195	2194	9997806	48
13	212333	38521858	212381	38519603	470852152	2255	9997745	47
14	215241	38385824	215291	38383507	464487853	2317	9997683	46
15	218149	38251613	218201	38249233	458293185	2380	9997620	45
16	221057	38119183	221111	38116739	452261453	2444	9997556	44
17	223965	37988481	224022	37985972	446386310	2509	9997491	43
18	226873	37859471	226932	37856896	440661780	2575	9997425	42
19	229781	37732105	229842	37729464	435082056	2641	9997359	41
20	232689	37606339	232752	37603631	429641796	2708	9997292	40
21	235597	37482135	235663	37479359	424335793	2776	9997224	39
22	238505	37359458	238574	37356613	419159137	2845	9997155	38
23	241413	37238269	241485	37235354	414111295	2915	9997085	37
24	244321	37118532	244395	37115546	409175388	2986	9997014	36
25	247229	37000208	247306	36997150	404359642	3058	9996943	35
26	250137	36883272	250217	26889142	399655828	3130	9996871	34
27	253045	36767690	253128	36764487	395060088	3203	9996798	33
28	255953	36653428	256038	36650151	390568737	3277	9996724	32
29	258861	36540448	258949	36537096	386178258	3352	9996649	31
30	261769	36428748	261859	36425320	381885288	3428	9996573	30
31	264677	36318272	264770	36314768	377686614	3504	9996496	29
32	267585	36209009	267681	36205427	373579199	3582	9996419	28
33	270493	36100924	270592	36097264	369560062	3660	9996341	27
34	273401	35994000	273503	35990261	365626388	3739	9996262	26
35	276308	35888207	276414	35884388	361776788	3819	9996182	25
36	279216	35783520	279325	35779620	358006024	3900	9996101	24
37	282124	35679917	282237	35755935	354312962	3982	9996019	23
38	285032	35577380	285148	35573316	350695255	4064	9995937	22
39	287940	35475892	288059	35471745	347150587	4147	9995854	21
40	290847	35375415	290970	35371184	343677949	4231	9995770	20
41	293755	35275935	293882	35271619	340272744	4316	9995685	19
42	296663	35177444	296794	35173042	336934467	4402	9995599	18
43	299570	35079909	299705	35075420	333661982	4489	9995512	17
44	302478	34983320	302617	34978743	330451272	4577	9995424	16
45	305385	34887652	305528	45882987	327302782	4665	9995336	15
46	308293	34792895	308439	34788141	324212583	4754	9995247	14
47	311200	34699029	311351	34794185	321181137	4844	9995157	13
48	314108	34606036	314202	34601101	318204757	4935	9995066	12
49	317015	34413899	317174	34508872	315283945	5027	9994974	11
50	319922	34422606	320085	34417486	312416191	5120	9994881	10
51	322830	34332140	322997	34326926	309599077	5214	9994787	9
52	325737	34242484	325909	34237176	306833212	5308	9994693	8
53	328645	34153629	328821	34148226	304115322	5403	9994598	7
54	331552	34076549	331733	34071050	301445987	5499	9994502	6
55	334459	33978346	334645	33972650	398823024	5596	9994405	5
56	337367	33891701	337558	33886007	296244357	5694	9994307	4
57	340274	33805893	340470	33800100	263719598	5793	9994208	3
58	343181	33720820	343382	33714927	291219764	5893	9994109	2
59	346088	33636464	346295	33630476	288770746	5993	9994009	1
60	348994	33552817	349207	33546723	286362498	6094	9993908	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiae & Logarit. Tangent.	Tangentes.	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	348995	33552817	349207	33546723	286362498	6094	9993908	60
1	351902	33469860	352120	33463664	283994009	6196	9993806	59
2	354809	33387588	355033	33381289	281664304	6299	9993703	58
3	357716	33305993	357945	33299590	279372435	6403	9993599	57
4	360623	33225056	360858	33218549	277117516	6507	9993495	56
5	363530	33144770	365770	33138158	274898633	6612	9993490	55
6	366437	33065128	366683	33058410	272714927	6718	9993284	54
7	369344	32986107	369596	32979282	270565570	6825	9993177	53
8	372251	32907712	372508	32900779	268449755	6933	9993069	52
9	375158	32829925	375421	32422881	266366704	7042	9992960	51
10	378065	32752740	378334	32745588	264316358	7152	9992850	50
11	380971	32676149	381247	32668887	262296605	7262	9992740	49
12	383878	32600139	384160	32592866	260307416	7373	9992629	48
13	386785	32524706	387073	32517221	258348100	7485	9992517	47
14	389692	32449837	389987	32442239	256417991	7598	9992404	46
15	392598	32375526	392900	32367814	254517088	7712	9992290	45
16	395505	32301761	395814	32293934	252643455	7827	9992175	44
17	398412	32228539	398727	32220596	250797165	7943	9992060	43
18	401318	32155852	401641	32147793	248978216	8059	9991944	42
19	404225	32083692	404554	32075516	247184785	8176	9991827	41
20	407131	32012045	407468	32500751	245417543	8294	9991709	40
21	410038	31940909	410382	31932496	243674732	8413	9991590	39
22	412944	31870276	413295	31861743	241957021	8533	9991470	38
23	415851	31800141	416209	31791887	240262714	8654	9991349	37
24	418757	31730492	419123	31721716	238592501	8776	9991228	36
25	421663	31661332	422037	31652434	236945285	8898	9991106	35
26	424570	31592644	424951	31583623	235320041	9021	9990983	34
27	427476	31524424	427866	31515279	233717425	9145	9990859	33
28	430382	31456672	430780	31447402	232146427	9270	9990734	32
29	433288	31389371	433694	21379975	230576614	9396	9990608	31
30	436194	31322524	436609	31313001	229037584	9523	9990482	30
31	439100	31256121	439523	31246471	227518902	9650	9990355	29
32	442006	31190158	442438	31180380	226020167	9778	9990227	28
33	444912	31124626	445353	31114719	224540987	9907	9990098	27
34	447818	31059521	448267	31049484	223080983	10037	9989968	26
35	450724	30994841	451182	30984673	221639784	10168	9989837	25
36	453630	30930577	454097	30920277	220217049	10300	9989706	42
37	456536	30866722	457012	30856290	218812405	10432	9989574	23
38	459442	30803277	459927	30792712	217425507	10565	9989441	22
39	462348	30740220	462842	30729531	216056022	10699	9989307	21
40	465253	30677578	465757	30666744	214704085	10834	9989172	20
41	468159	30615317	468672	30604347	213368514	10970	9989036	19
42	471065	30553442	471588	30542335	212049271	11107	9988899	18
43	473970	30491949	474503	30480704	210746693	11245	9988761	17
44	476876	30430834	477419	30419451	209459545	11383	9988623	16
45	479781	30370090	480335	30358568	208188402	11522	9988484	15
46	482687	30309715	483251	30298053	206932111	11662	9988344	14
47	485592	30249702	486166	30237899	205691260	11803	9988203	13
48	488498	30190049	489082	30178104	204464726	11945	9988601	12
49	491403	30130749	491997	30118661	203253093	12088	9987918	11
50	494308	30071797	494913	30059565	202055705	12232	9987775	10
51	497214	30013193	497829	30000817	200871878	12376	9987631	9
52	500119	29954933	500745	29942412	199702191	12521	9987486	8
53	503024	29897014	503662	29884347	198545993	12667	9987340	7
54	505929	29839424	506578	29826610	197403054	12814	9987193	6
55	508835	29782165	509495	29769203	196273146	12962	9987045	5
56	511740	29725236	512411	29712125	195155685	13111	9986897	4
57	514645	29668628	515328	29655367	194051200	13261	9986748	3
58	517550	29612331	518244	39598920	192959095	13411	9986598	2
59	520455	29556458	521161	29542796	191879163	13562	9986447	1
60	524360	29500706	524078	29486992	160811200	13714	9986295	0
								M

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes.	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	523360	29500706	524078	29486992	190811200	13714	9986295	60
1	526265	29445354	526995	29431487	189755928	13867	9986143	59
2	529170	29390307	529911	29376286	188710414	14021	9985989	58
3	532075	29335565	532828	29321389	187677207	14176	9985835	57
4	534980	29281122	535745	29266791	186655202	14331	9985680	56
5	537884	29226973	538663	29212486	185644562	14487	9985524	55
6	540789	29173115	541580	29158471	184644417	14644	9985367	54
7	543694	29119548	544498	29104746	183654941	14802	9985209	53
8	546598	29066270	547415	29051309	182676299	14961	9985050	52
9	549503	29013273	550333	28998152	181707670	15121	9984891	51
10	552407	28960557	553251	28945276	180749537	15281	9984731	50
11	555312	28908117	556169	28892675	179801085	15442	9984570	49
12	558216	28855951	559087	28850347	178862806	15604	9984408	48
13	561120	28804057	562005	28788290	177934219	15767	9984245	47
14	564024	28752430	564923	28736499	177015180	15931	9984081	46
15	566928	28701071	567841	28684975	176105555	16096	9983917	45
16	569832	28649975	570759	28633714	175205183	16261	9983752	44
17	572736	28599142	573678	28582715	174311925	16427	9983586	43
18	575640	28548570	576596	28531976	173431641	16594	9983419	42
19	578544	28498247	579514	28481485	172558198	16762	9983251	41
20	581448	28448177	582433	28431246	171693461	16931	9983082	40
21	584352	28398354	585352	28381253	170837304	17101	9982912	39
22	587256	28348782	588270	28331510	169989613	17272	9982742	38
23	590160	28298459	591189	28282015	169150247	17444	9982571	37
24	593064	28250377	594108	28232761	168319085	17616	9982399	36
25	595967	28201535	597028	28185746	167496287	17789	9982226	35
26	598871	28152930	599947	28134967	166681172	17963	9982052	34
27	601775	28104561	602866	28086423	165873906	18138	9981877	33
28	604678	2805642	605786	28038114	165074651	18314	9981701	32
29	607582	28008424	608705	27990033	164282764	18491	9981525	31
30	610485	27960848	611625	27942178	163498660	18670	9981348	30
31	613389	27913400	614544	27894552	162721698	18848	9981170	29
32	616292	27866180	617464	27847158	161952305	19027	9980991	28
33	619196	27819184	620384	27799977	161189849	19207	9980811	27
34	622099	27772408	623304	27753020	160434770	19388	9980631	26
35	625052	27725848	626225	27706278	159686753	19570	9980450	25
36	627905	27679504	629145	27659752	158945509	19752	9980268	24
37	630808	27633374	632066	27613439	158211136	19935	9980085	23
38	633711	27587457	634986	27567338	157483474	20119	9979901	22
39	636614	27541753	637907	27521449	156762433	20304	9979716	21
40	639517	27496257	640828	27475767	156047923	20490	9979530	20
41	642420	27450968	643749	27430291	155339855	20677	9979343	19
42	645323	27405885	646671	27385020	154638158	20865	9979156	18
43	648226	27361003	649592	27339950	153942729	21053	9978968	17
44	651129	27316323	652514	27295081	153253487	21242	9978779	16
45	654031	27271843	655435	27250411	152570581	21432	9978589	15
46	656934	27227563	658357	27205940	151893462	21623	9978398	14
47	659837	27183476	661278	27161661	151222301	21815	9978207	13
48	662739	27139581	664100	27117573	150557233	22008	9978015	12
49	665642	27095878	667121	27073676	149897753	22202	9977822	11
50	668544	27052373	670043	27029976	149244148	22397	9977628	10
51	671447	27009057	672965	26986465	148595987	22592	9977433	9
52	674349	26965926	675888	26943138	147953611	22788	9977237	8
53	677251	26922980	678810	26899995	147316726	22985	9977040	7
54	680153	26880218	681733	26857035	146685275	23183	9976843	6
55	683055	26837639	684656	26812757	146059175	23382	9976645	5
56	685957	26795243	687578	26771661	145438358	23582	9976445	4
57	688859	26753027	690501	26729244	144822775	23783	9976245	3
58	691761	26710988	693423	26687003	144212307	23985	9976044	2
59	694663	26669126	696346	26644939	143606943	24187	9975842	1
60	697565	26627442	699269	26603052	143006601	24390	9975640	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	697565	26627442	699269	26603052	143006601	24390	9975640	60
1	700467	26585929	702193	26561335	142411234	24594	9975437	59
2	703369	26544587	705116	26519788	141820765	24799	9975233	58
3	706270	26503416	708039	26478411	141235335	25005	9975028	57
4	709172	26462418	710962	26437207	140654481	25211	9974822	56
5	712073	26421589	713886	26396171	140078545	25418	9974615	55
6	714975	26380927	716809	26355301	139507087	25626	9974408	54
7	717876	26340428	719733	26314593	138940429	25835	9974200	53
8	720777	26300094	722657	26284050	138378319	26044	9973991	52
9	723678	26259923	725580	26233669	137820702	26254	9973781	51
10	726579	26219913	728504	26193448	137267523	26465	9973570	50
11	729480	26180067	731428	26153390	136718731	26677	9973358	49
12	732381	26140377	734353	26113487	136174272	26890	9973145	48
13	735282	26100842	737277	26073738	135634096	27104	9972931	47
14	738183	26061465	740202	26034146	135098153	27319	9972717	46
15	741084	26022244	743127	25994709	134566419	27535	9972502	45
16	743985	25983176	746052	25955424	134038804	27752	9972286	44
17	746886	25944260	748978	25916290	133515636	27970	9972069	43
18	749787	25905496	751903	25877308	132995769	28188	9971851	42
19	752688	25866884	754829	25838477	132480297	28407	9971633	41
20	755588	25828423	757754	25799796	131968930	28627	9971414	40
21	758589	25790110	760680	25751262	131461286	28848	9971194	39
22	761389	25751942	763606	25722872	130957670	29070	9970973	38
23	764290	25713920	766532	25684727	130457692	29293	9970751	37
24	767190	25676043	769459	25646527	129991652	29516	9970528	36
25	770090	25638310	772385	25608570	129469305	29740	9970304	35
26	772991	25600722	775311	25570757	128980531	29965	9970079	34
27	775891	25563273	778238	25533082	128495548	30191	9969854	33
28	778791	25525966	781164	25495548	128014165	30418	9969628	32
29	781691	25488798	784091	25458152	127536341	30646	9969401	31
30	784591	25451769	787017	25420894	127062036	30875	9969173	30
31	787491	25414876	789944	25383772	126591211	31104	9968944	29
32	790391	25378119	792871	25346785	126123842	31334	9968715	28
33	793291	25341498	795799	25309933	125659878	31565	9968485	27
34	796191	25305013	798726	25273216	125199280	31797	9968254	26
35	799090	25268662	801653	25236632	124742169	32030	9968022	25
36	801990	25232442	804581	25200178	124288195	32264	9967789	24
37	804889	25196355	807509	25163857	123837634	32498	9967555	23
38	807789	25160399	810437	25127666	123390142	32733	9967320	22
39	810688	25124571	813365	25091602	122946003	32969	9967085	21
40	813587	25088870	816293	25055664	122505017	33206	9966849	20
41	816486	25053298	819221	25019854	122067151	33444	9966612	19
42	819385	25017853	822150	24984170	121632370	33683	9966374	18
43	822284	24982533	825079	24948610	121200643	33923	9966135	17
44	825183	24947340	828008	24913177	120771937	34163	9965895	16
45	828082	24912272	830937	24877866	120346233	34404	9965655	15
46	830981	24877326	833866	24842680	119923488	34646	9965414	14
47	833880	24842502	836795	24807613	119503669	34889	9965172	13
48	836778	24807799	839724	24772666	119086890	35133	9964929	12
49	839677	24773219	842653	24737841	118672834	35378	9964685	11
50	842575	24738761	845583	24703138	118261757	35623	9964440	10
51	845474	24704420	848513	24668551	117853346	35869	9964194	9
52	848372	24670196	851443	24634080	117447864	36116	9963948	8
53	851271	24636090	854374	24599726	117044995	36364	9963701	7
54	854169	24602100	857304	24565487	116644985	36613	9963453	6
55	857067	24568228	860234	24531365	116247668	36863	9963204	5
56	859965	24534473	863164	24497359	115853017	37114	9962954	4
57	862863	24500829	866095	24463463	115461005	37366	9962703	3
58	865761	24467298	869025	24429679	115071619	37619	9962452	2
59	868659	24433880	871956	24396008	114684819	37872	9962200	1
	871557	24400578	874886	24362452	114300579	38126	9961947	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes.	Differentia & Logarit. Tangent.	Tangentes.	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	871557	24400578	874886	24362452	114300579	38126	9961947	60
1	874455	24367384	877817	24329003	113918875	38381	9961693	59
2	877353	24334302	880748	24295665	113539681	38637	9961438	58
3	880250	24301329	883680	24262435	113163656	38894	9961183	57
4	883148	24268467	886611	24229316	112788878	39151	9960927	56
5	886045	24235712	889543	24196303	112417202	39409	9960670	55
6	888943	24203064	892475	24163396	112047814	39668	9960412	54
7	891840	24170523	895407	24130595	111680940	39928	9960153	53
8	894737	24138089	898339	24097900	111316432	40189	9959893	52
9	897634	24105760	901271	24065309	110954164	40451	9959632	51
10	900531	24073540	904204	24032827	110594415	40713	9959370	50
11	903428	24041422	907137	24000446	110236764	40976	9959107	49
12	906325	24009408	910070	23968168	109881598	41240	9958844	48
13	909222	34977495	913003	23935990	109528589	41505	9958580	47
14	912119	23945985	915936	23903914	109177805	41771	9958315	46
15	915016	23913978	918870	23871940	108829233	42038	9958049	45
16	917913	23882373	921804	23840067	108482852	42306	9957782	44
17	920809	23850867	924738	23808292	108138767	42579	9957515	43
18	923706	23819460	927761	23776615	107796712	42845	9957247	42
19	926602	23788153	930605	23745038	107456902	43115	9956978	41
20	929498	23756943	933539	23713557	107119198	43386	9956708	40
21	932395	23725832	936473	23682174	106783466	43658	9956437	39
22	935291	23694818	939407	23650887	106449917	33931	9956165	38
23	938187	23663900	942343	23619695	106118428	44205	9955893	37
24	941083	23633080	945277	23588601	105788969	44479	9955620	36
25	943979	23602355	948212	23557601	105461519	44754	9955346	35
26	946875	23571725	951147	23526695	105136063	45030	9955071	34
27	949771	23541190	954083	23495883	104812581	45307	9954795	33
28	952667	23510748	957019	23465163	104491055	45585	9954518	32
29	955563	23480290	959954	23434535	104171468	45864	9954240	31
30	958458	23450143	962890	23403999	103853919	46144	9953962	30
31	961354	23419980	965826	23373556	103538166	46424	9953683	29
32	964249	23389908	968763	23343203	103224405	46705	9953403	28
33	967144	23359927	971699	23312940	102912514	46987	9953122	27
34	970039	23330036	974636	23282766	102602473	47270	9952840	26
35	972934	23300235	977573	23252681	102294266	47554	9952557	25
36	975829	23270525	980509	23222686	101987889	47839	9952274	24
37	978724	23240903	983446	23192778	101683314	48125	9951990	23
38	981619	23211368	986383	23162956	101380525	48412	9951705	22
39	984514	23181920	989320	23133220	101079507	48700	9951419	21
40	987408	23152560	992257	23103572	100780346	48988	9951132	20
41	990303	23123287	995195	23074010	100482822	49277	9950844	19
42	993198	23094100	998133	23044933	100187022	49567	9950555	18
43	996092	23064999	1001072	23015141	99893042	49858	9950266	17
44	998987	23035985	1004010	22985836	99600655	50149	9949976	16
45	1001881	23007056	1006949	22956615	99310047	50441	9949685	15
46	1004775	22978212	1009887	22927478	99021104	50734	9949393	14
47	1007669	22949449	1012825	22898421	98733810	51028	9949100	13
48	1010563	22920769	1015763	22869446	98448162	51323	9948807	12
49	1013457	22892172	1018702	22840553	98164135	51619	9948513	11
50	1016351	22863658	1021641	22811742	97881716	51916	9948218	10
51	1019245	22835227	1024580	22783013	97600790	52214	9947922	9
52	1022139	22806878	1027519	22754366	97321746	52512	9947625	8
53	1025032	22778609	1030459	22725798	97044063	52811	9947327	7
54	1027926	22750420	1033399	22697309	96767939	53111	9947028	6
55	1030819	22722311	1036339	22668899	96493467	53412	9946729	5
56	1033713	22694283	1039279	22640569	96220411	53714	9946429	4
57	1036606	22666333	1042219	22612316	95948971	54017	9946128	3
58	1039499	22638461	1045160	22584140	95679034	54321	9945825	2
59	1042392	22610667	1048101	22556041	95410585	54626	9945523	1
60	1045285	22582951	1051042	22528019	95143611	54932	9945219	0
								M.

G.6 | Iuxta Regulam adhibendi.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	1045285	22582951	1051042	22528019	95143611	54932	9945218	60
1	1048178	22555313	1053983	22500075	94878103	55238	9944914	59
2	1051070	22527752	1056924	22472207	94614055	55545	9944609	58
3	1053963	22500267	1059866	22444414	94351448	55853	9944303	57
4	1056857	22472859	1062808	22416697	94090170	56162	9943996	56
5	1059749	22445527	1065750	22389055	93830595	56472	9943688	55
6	1062642	22418272	1068692	22361490	93572238	56782	9943379	54
7	1065534	22391091	1071634	22333998	93315361	57093	9943069	53
8	1068426	22363984	1074576	22306579	93059875	57405	9942759	52
9	1071318	22336951	1077518	22279233	92805759	57718	9942448	51
10	1074210	22309991	1080461	22251959	92553036	58032	9942136	50
11	1077102	22283104	1083404	22224757	92301618	58347	9941823	49
12	1079994	22256290	1086347	22197627	92051546	58663	9941509	48
13	1082886	22229549	1089291	22170570	91802810	58979	9941194	47
14	1085778	22202881	1092234	22143585	91555401	59296	9940879	46
15	1088669	22176285	1095178	22116671	91309309	59614	9940563	45
16	1091561	22149762	1098122	22089829	91064526	59933	9940246	44
17	1094452	22123308	1101066	22063055	90821043	60253	9939928	43
18	1097344	22096925	1104010	22036351	90578848	60574	9939609	42
19	1100235	22070612	1106954	22009717	90337927	60895	9939290	41
20	1103126	22044368	1109899	21983151	90098268	61217	9938970	40
21	1106017	22018195	1112844	21956655	89859858	61540	9938649	39
22	1108908	21992090	1115789	21930226	89622688	61864	9938327	38
23	1111799	21966054	1118734	21903865	89386745	62189	9938004	37
24	1114690	21940086	1121680	21877571	89152021	62515	9937680	36
25	1117580	21914186	1124625	21851344	88918508	62842	9937355	35
26	1120471	21888355	1127571	21825185	88686196	63170	9937029	34
27	1123361	21862590	1130517	21799091	88455079	63499	993670[illegible]	33
28	1126252	21836892	1133463	21773064	88225146	63828	9936376	32
29	1129142	21811261	1136409	21747103	87996394	64158	9936048	31
30	1132032	21785698	1139355	21721209	87768816	64489	9935719	30
31	1134922	21760199	1142302	21695378	87542404	64821	9935389	29
32	1137812	21734767	1145249	21669613	87317150	65154	9935058	28
33	1140702	21709400	1148196	21643912	87093043	65488	9934727	27
34	1143592	21684100	1151144	21618278	86870072	65822	9934395	26
35	1146482	21658865	1154092	21592708	86648225	66157	9934062	25
36	1149372	21633695	1157040	21567202	86427493	66493	9933728	24
37	1152261	21608586	1159988	21541756	86207866	66830	9933393	23
38	1155151	21583540	1162936	21516372	85989335	67168	9933057	22
39	1158040	21558557	1165884	21491050	85771891	67507	9932720	21
40	1160929	21533639	1168832	21465793	85555525	67846	9932383	20
41	1163818	21508781	1171781	21440595	85340229	68186	9932046	19
42	1166707	21483986	1174730	21415459	85125995	68527	9931707	18
43	1169596	21459254	1177679	21390385	84912817	68869	9931367	17
44	1172485	21434585	1180628	21365373	84700687	69212	9931025	16
45	1175374	21409979	1183577	21340423	84489598	69556	9930685	15
46	1178263	21385434	1186527	21315533	84279571	69901	9930342	14
47	1181151	21360949	1189478	21290702	84070565	70247	9930000	13
48	1184040	21336524	1192427	2126593[illegible]	83862572	70593	9929655	12
49	1186928	21312160	1195377	21241220	83655585	70940	9929310	11
50	1189816	21287855	1198328	21216567	83449598	71288	9928964	10
51	1192704	21263609	1201279	21191972	83244610	71637	9928617	9
52	1195592	21239423	1204230	21167436	83040614	71987	9928270	8
53	1198480	21215297	1207181	21142959	82837603	72338	9927922	7
54	1201368	21191230	1210132	21118540	82635570	72690	9927573	6
55	1204255	21167222	1213084	21094179	82434508	73043	9927223	5
56	1207143	21143273	1216036	21069877	82234410	73396	9926872	4
57	1210031	21119381	1218988	21045631	82035268	63750	9926521	3
58	1212918	21095546	1221940	21021441	81837074	74105	9926169	2
59	121580[illegible]	21071769	1224892	20997308	81639821	74461	9925816	1
60	1218693	21048049	1227845	20973231	81443502	74818	9925462	0
								M.

Contra regulam adhibend.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes.	Differentia & Logarit. Tangent.	Tangentes.	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	1218693	21048049	1227846	20973231	81443502	74818	9925461	60
1	1221580	21024385	1230798	20949209	81248110	75176	9925106	59
2	1224467	21000779	1233751	20925245	81053639	75534	9924750	58
3	1227354	20977230	1236704	20901337	80860083	75893	9924393	57
4	1230241	20953738	1239658	20877485	80667435	76253	9924036	56
5	1233128	20930302	1242612	20853688	80475688	76614	9923678	55
6	1236015	20906922	1245566	20829946	80284835	76976	9923319	54
7	1238901	20883595	1248520	20806256	80094869	77339	9922959	53
8	1241788	20860323	1251474	20782620	79905783	77703	9922598	52
9	1244674	20837106	1254428	20759038	79717572	78068	9922236	51
10	1247560	20813945	1257383	20735512	79530231	78433	9921874	50
11	1250446	20790838	1260338	20712039	79343754	78799	9921511	49
12	1253332	20767785	1263293	20688619	79158136	79166	9921147	48
13	1256218	20744785	1266249	20665251	78973371	79534	9920782	47
14	1259104	20721838	1269205	20641935	78789454	79903	9920416	46
15	1261990	20698946	1272161	20618946	78606379	80272	9920049	45
16	1264876	20676107	1275117	20595465	78724142	80642	9919682	44
17	1267761	20653321	1278073	20572308	78242737	81013	9919314	43
18	1270647	20630588	1281029	20549203	78062159	81385	9918945	42
19	1273532	20607906	1283986	20526148	77882402	81758	9918575	41
20	1276417	20585278	1286943	20503146	77703459	82132	9918204	40
21	1279302	20562701	1289900	20480194	77525324	82507	9917832	39
22	1282187	20540176	1292857	20457293	77347991	82883	9917459	38
23	1285072	20517703	1295815	20434444	77171455	83259	9917086	37
24	1287957	20495281	1298773	20411645	76995710	83636	9916712	36
25	1290841	20472909	1301731	20388895	76820751	84014	9916337	35
26	1293726	20450587	1304689	20366194	76646573	84393	9915961	34
27	1296610	20428316	1307648	20343543	76473170	84773	9915584	33
28	1299494	20406096	1310607	20320942	76300536	85154	9915206	32
29	1302378	20383925	1313566	20298389	76128666	85536	9914828	31
30	1305262	20361806	1316525	20275887	75957554	85919	9914449	30
31	1308146	20339737	1319485	20253435	75787195	86302	9914069	29
32	1311030	20317717	1322445	20231031	75617584	86086	9913688	28
33	1313914	20295746	1325405	20208675	75448716	87071	9913306	27
34	1316798	20273822	1328365	20186365	75280586	87457	9912923	26
35	1319681	20251947	1331325	20164103	75113189	87844	9912540	25
36	1322564	20230120	1334285	20141888	74946521	88232	9912156	24
37	1325447	20208341	1337246	20119720	74780577	88621	9911771	23
38	1328330	20186611	1340207	20097600	74615354	89011	9911385	22
39	1331213	20164931	1342168	20075530	74450847	89401	9910998	21
40	1334096	20143301	1346129	20053509	74287052	89792	9910610	20
41	1336979	20121717	1349891	20031533	74123964	90184	9910221	19
42	1339862	20100180	1352453	20009603	73961579	90577	9909832	18
43	1342744	20078689	1355015	19987718	73799892	90971	9909442	17
44	1345627	20057245	1357977	19965880	73638898	91365	9909051	16
45	1348509	20035846	1360940	19944086	73478593	91760	9908659	15
46	1351392	20014494	1363903	19922338	73318972	92156	9908266	14
47	1354274	19993189	1366866	19900036	73160031	92553	9907873	13
48	1357156	19971931	1369830	19878980	73001766	92951	9907479	12
49	1360038	29950718	1372793	19857368	72844173	93350	9907084	11
50	1362920	19929552	1375757	19829852	72687247	93750	9906688	10
51	1365802	19908432	1378721	19814281	72530983	94151	9906291	9
52	1368683	19887357	1381686	19792805	72375376	94552	9905893	8
53	1371564	19866327	1384650	19771373	72220422	94954	9905494	7
54	1374446	19845341	1387615	19749984	72066117	95357	9905095	6
55	1377327	19824400	1390580	19728639	71912459	95761	9904695	5
56	1380208	19803504	1393545	19707338	71759440	96166	9904294	4
57	1382089	19782652	1396510	19686080	71607058	96572	9903892	3
58	1385970	19761844	1399476	19664865	71455313	96979	9903489	2
59	1388851	19741081	1402442	19643694	71304198	97387	9903084	1
60	1391731	19720362	1405408	19622566	71153707	97796	9902681	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentia & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	1391731	19720362	1405408	19622566	71153706	97796	9902681	60
1	1394612	19699687	1408374	19601482	71003833	98205	9902276	59
2	1397492	19679054	1411341	19580439	70854576	98615	9901870	58
3	1400373	19658464	1414308	19455438	70705932	99026	9901463	57
4	1403253	19637917	1417275	19538479	70557898	99438	9901055	56
5	1406133	19617413	1420242	19517562	70410470	99851	9900646	55
6	1409013	19596952	1423210	19496687	70263645	100265	9900237	54
7	1411893	19576535	1426178	19475756	70117419	100679	9899827	53
8	1414772	19556160	1429146	19455066	69971789	101094	9899416	52
9	1417652	19535827	1432115	19434317	69826751	101510	9899004	51
10	1420531	19515538	1435084	19413611	69682302	101927	9898591	50
11	1423410	19495290	1438053	19392945	69538439	102345	9898177	49
12	1426289	19475084	1441022	19372320	69395158	102764	9897762	48
13	1429168	19454918	1442992	19351734	69252455	103184	9897347	47
14	1432047	19434794	1446961	19331190	69110326	103604	9896931	46
15	1434926	19414711	1449931	19310686	68968768	104025	9896514	45
16	1437805	19334669	1452901	19290222	68827777	104447	9896096	44
17	1440684	19374668	1455871	19269798	68687250	104870	9895677	43
18	1443562	19354708	1458842	19249414	68547438	105394	9895257	42
19	1446441	19334787	1461813	19229068	68408173	105719	9894837	41
20	1449319	19314908	1464784	19208763	68269416	106145	9894416	40
21	1452197	19295052	1467755	19188501	68131209	106071	9893994	39
22	1455075	19275275	1470727	19168277	67993549	106998	9893571	38
23	1457953	19255517	1473699	19148091	67856423	107426	9893147	37
24	1460831	19235798	1476671	19127943	67719855	107855	9892723	36
25	1463708	19216118	1479644	19107833	67583815	108285	9892298	35
26	1466786	19196477	1482617	19087761	67448309	108716	9891872	34
27	1469463	19176875	1485590	19067727	67313334	109148	9891445	33
28	1472340	19157313	1488563	19047732	67178887	109581	9891017	32
29	1475217	19137792	1491536	19027777	67044965	110015	9890588	31
30	1478094	19118310	1494510	19007861	66911564	110449	9890159	30
31	1480971	19098865	1497484	18987981	66778681	110884	9889729	29
32	1483848	19079459	1500458	18968139	66646313	111320	9889298	28
33	1486724	19960091	1503433	18908334	66514457	111757	9888866	27
34	1489601	19040761	1506408	18928566	66383110	112195	9888433	26
35	1492477	19021469	1509383	18908835	66252268	112634	9887999	25
36	1495353	19002215	1512358	18889141	66121928	113074	9887564	24
37	1498229	19982999	1515334	18869485	65992087	113514	9887128	23
38	1501105	18963822	1518310	18849867	65862743	113955	9886692	22
39	1503981	18044682	1521286	18830285	65733894	114397	9886255	21
40	1506857	18925581	1524262	18810741	65605537	114840	9885817	20
41	1509733	18906517	1527239	18791233	65477669	115284	9885378	19
42	1512608	18887489	1530216	18771760	65350287	115729	9884938	18
43	1515484	18868498	1533193	18752323	65223388	116175	9884498	17
44	1518359	18849543	1536170	18732921	65096969	116622	9884057	16
45	1521234	18830625	1539148	18713556	64971028	117069	9883615	15
46	1524109	18811744	1542126	18694227	64845563	117517	9883172	14
47	1526984	18792899	1545104	18674933	64720571	117966	9882728	13
48	1529859	18774090	1548082	18655674	64596049	118416	9882283	12
49	1532734	18755318	1551061	18636451	64471994	118867	9881838	11
50	1535608	18736581	1554040	18617262	64348404	119319	9881392	10
51	1538482	18717882	1557019	18598111	64225276	119771	9880945	9
52	1541356	18699218	1559999	18578994	64102607	120224	9880497	8
53	1544230	18680589	1562979	18559911	63980394	120678	9880048	7
54	1547104	18661995	1565959	18540862	63858635	121133	9879598	6
55	1549978	18643437	1568939	18521848	63737327	121589	9879148	5
56	1552755	18624915	1571920	18502869	63616468	122046	9878697	4
57	1555725	18606428	1574901	18483924	63496056	122504	9878245	3
58	1558599	18587975	1577882	18465013	63376089	122962	9877792	2
59	1561472	18569557	1580863	18446136	63256564	123421	9877338	1
60	1564345	18551174	1583844	18427293	63137478	123881	9876883	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	1564345	18551174	1583844	18427293	63137478	123881	9876883	60
1	1567218	18532826	1586826	18408484	63018829	124342	9876427	59
2	1570091	18514511	1589808	18389707	62900615	124804	9875971	58
3	1572964	18496231	1592791	18370964	62782833	125267	9875514	57
4	1575837	18477984	1595774	18352253	62665481	125731	9875056	56
5	1578709	18459772	1598757	18333576	62548556	126196	9874597	55
6	1581681	18441594	1601740	18314933	62432056	126661	9874137	54
7	1584453	18423451	1604723	18296324	62315979	127127	9873677	53
8	1587325	18405341	1607707	18277747	62200323	127594	9873216	52
9	1590197	18387265	1610691	18259203	62085085	128062	9872754	51
10	1593069	18369223	1613675	18240692	61970263	128531	9872291	50
11	1595941	18351214	1616660	12222213	61855854	129001	9871827	49
12	1598812	18333237	1619645	18203765	61741856	129472	9871362	48
13	1601684	18315294	1622630	18185351	61628267	129943	9870897	47
14	1604555	18297384	1625615	18166969	61515085	130415	9870431	46
15	1607426	18279507	1628601	18148619	61402307	130888	9869964	45
16	1610297	18261663	1631587	18130301	61289930	131362	9869496	44
17	1613168	18243851	1634573	18112014	61177952	131837	9869027	43
18	1616038	18226071	1637560	18093758	61066370	132313	9868557	42
19	1618909	18208323	1640547	18075533	60955184	132790	9868087	41
20	1621779	18190606	1643534	18057338	60844392	133268	9867616	40
21	1624629	18172624	1646522	18039177	60733992	133747	9867144	39
22	1627519	18155273	1649510	18021047	60623981	134226	9866671	38
23	1630389	18137655	1652499	18002948	60514358	134706	9866197	37
24	1633259	18120067	1655488	17984885	60405121	135187	9865722	36
25	1636129	18102511	1658477	17966842	60296268	135669	9865246	35
26	1638999	18084987	1661466	17948835	60187796	136152	9864770	34
27	1641868	1806749[illegible]	1664456	17930859	60079703	136636	9864293	33
28	1644738	18050034	1667446	17912913	59971987	137121	9863815	32
29	1647607	18032604	1670436	17894997	59864646	137607	9863336	31
30	1650476	18015207	1673426	17877114	59757678	138093	9862856	30
31	1653345	17997839	1676417	17859259	59651081	138580	9862376	29
32	1656214	17980503	1679408	17841435	59544852	139068	9861895	28
33	1659082	17963198	1682399	17823641	59438989	139557	9861413	27
34	1661951	17945922	1685390	17805875	59333490	140047	9860930	26
35	1664819	17928677	1688382	17788139	59228353	140538	9860446	25
36	1667687	17911463	1691374	17770433	59123576	141030	9859961	24
37	1670555	17894281	1694366	17752759	59019157	141522	9859475	23
38	1673423	17877128	1697358	17735113	58915095	142015	9858989	22
39	1676291	17860006	1700351	17717497	58811388	142509	9858502	21
40	1679159	67842915	1703344	17699911	58708035	143004	9858014	20
41	1682027	17825852	1706337	17682352	58605034	143500	9857525	19
42	1684894	17808820	1709331	17664823	58502385	143997	9857035	18
43	1687761	17791817	1712325	17647322	58400087	144495	9856544	17
44	1690628	17774843	1715319	17629849	58298138	144994	9856053	16
45	1693495	17757899	1718313	17612406	58196536	145493	9355561	15
46	1696362	17740985	1721308	17594992	58095279	145993	9855068	14
47	1699229	17724100	1724304	17577606	57994366	146494	9854574	13
48	1702095	17707244	1727300	17560248	57893795	146996	9854079	12
49	1704962	17690418	1730296	17542919	57793564	147499	9853583	11
50	1707828	17673622	1733292	17525619	57693670	148003	9853087	10
51	1710694	17656856	1736287	17508349	57594111	148507	9852590	9
52	1713560	17640118	1739284	17491106	57494885	149012	9852092	8
53	1716426	17623408	1742281	17473890	57395990	149518	9851593	7
54	1719292	17606726	1745278	17456701	57297425	150025	9851093	6
55	1722157	17590073	1748275	17439540	57199188	150533	9850593	5
56	1725022	17573448	1751273	17422406	57101277	151042	9850092	4
57	1727887	17556851	1754271	17405299	57003690	151552	9849590	3
58	1730752	17540283	1757270	17388220	56906425	152063	9849087	2
59	1733617	17523744	1760269	17371169	56809480	152575	9848583	1
60	1736482	17507234	1763268	17354146	56712854	153088	9848078	0
								M.

M	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentia & Logarit. Tangent.	Tangentes.	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	1736482	17507234	1763268	17354146	56712854	153088	9848078	60
1	1739347	17490751	1766268	17337150	56616545	155601	9847572	59
2	1742211	17474296	1769268	17320181	56520550	154115	9847066	58
3	1745075	17457869	1772268	17303239	56424868	154630	9846559	57
4	1747939	17441470	1775269	17286324	56239498	155146	9846051	56
5	1750803	17425098	1778270	17269435	56234439	155663	9845542	55
6	1753667	17408754	1781271	17252573	56139689	156181	9845032	54
7	1756531	17392438	1784272	17235738	56045247	156700	9844521	53
8	1759394	17376149	1787274	17218929	55951112	157220	9844010	52
9	1762258	1735988[illegible]	1790276	17202147	55857283	157740	9843498	51
10	1765121	17343652	1793278	17185391	55763759	158261	9842985	50
11	1767984	17327444	1796281	17168661	55670539	158783	9842471	49
12	1770847	17311263	1799284	17151957	55577622	159306	9841956	48
13	1773710	17295109	1802287	17135279	55485007	159830	9841440	47
14	1776573	17278982	1805291	17118627	55392692	160355	9840924	46
15	1779435	17262882	1808295	17182001	55300676	160881	9840407	45
16	1782298	17246809	1811299	17085401	55208958	161408	9839889	44
17	1785160	17230762	1814303	17068827	55117535	161935	9839370	43
18	1788022	16214742	1817308	17052279	55029406	162463	9838850	42
19	1790884	17198749	1820313	17035757	54935569	162992	9838329	41
20	1793746	1718278[illegible]	1823318	17019261	54845022	163522	9837808	40
21	1796608	1716684[illegible]	1826324	17002790	54754764	164053	9837286	39
22	1799469	17150929	1829329	16986344	54664793	164585	9836763	38
23	1802331	1713504[illegible]	1832335	16969924	54575107	165117	9836239	37
24	1805192	17119179	1835342	16953529	54485705	165650	9835714	36
25	1808053	17103342	1838349	16937158	54396586	166184	9835189	35
26	1810914	17087531	1841357	16920812	54307748	166719	9834663	34
27	1813774	17071746	1844365	16904491	54219190	167255	9834136	33
28	1816634	17055987	1847373	16888195	54130911	167792	9833608	32
29	1819495	17040154	1850382	16871924	54042909	168330	9833079	31
30	1822355	17024547	1853391	16855678	53955183	168869	9832549	30
31	1825215	17008866	1856400	16839458	53867731	169408	9832019	29
32	1828075	16993210	1859409	16823262	53780552	169948	9821488	28
33	1830935	16977579	1862419	16807090	53693644	170489	9830956	27
34	1833795	16961973	1865429	16790942	53607006	171031	9830423	26
35	1836654	16946392	1868439	16774818	53520637	171574	9829889	25
36	1839513	16930836	1871449	16758718	53434536	172118	9829354	24
37	1842372	16915305	1874460	16742642	53348702	172663	9828818	23
38	1845231	16899799	1877471	16726590	53263134	173209	9828282	22
39	1848090	16884217	1880482	16710561	53177831	173756	9827744	21
40	1850949	16868860	1883494	16694557	53092792	174303	9827200	20
41	1853808	16853429	1886506	16678577	53008016	174851	9826667	19
42	1856666	16838021	1889518	16662621	52923503	175400	9826128	18
43	1859524	16822638	1892531	16646688	52839251	175950	9825587	17
44	1862382	16807280	1895544	16630779	52755259	176501	9825046	16
45	1865240	16791946	1898558	16614893	52671525	177053	9824504	15
46	1868098	16776636	1901572	16599030	52588048	177606	9823961	14
47	1870956	16761351	1904586	16583191	52504826	178160	9823417	13
48	1873813	16746090	1907601	16567375	52421857	178715	9822872	12
49	1876670	16730853	1910616	16551583	52339140	179270	9822227	11
50	1879527	16715640	1913632	16535814	52256673	179826	9821781	10
51	1882384	16700451	1916648	16520068	52174455	180383	9821234	9
52	1885241	16685286	1919664	16504345	52092485	180941	9820686	8
53	1888098	16670145	1922680	16488645	52010762	181500	9820137	7
54	1890954	16655028	1925697	16472968	51929285	182060	9819587	6
55	1893810	16639934	1928714	16457313	51848053	182621	9819037	5
56	1896666	16624864	1931731	16441681	51767065	183183	9818486	4
57	1899522	16609817	2934749	16426072	51686321	183745	9817934	3
58	1902378	16594794	1937767	16410486	51605820	184308	9817381	2
59	1905234	16579794	1940785	16394922	51525561	184872	9816827	1
60	1908090	18564818	1943803	16379381	51445543	185437	9816272	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	1908090	16564818	1943803	16379381	51445543	185437	9816272	60
1	1910945	16549865	1946822	16363862	51365765	186003	9815716	59
2	1913800	16534935	1949841	16348365	51286225	186570	9815160	58
3	1916655	16520028	1952861	16332890	51206922	187138	9814603	57
4	1919510	16505544	1955881	16317438	51127855	187706	9814045	56
5	1922365	16490283	1658901	16302008	51049023	277175	9813486	55
6	1925220	16475445	1961922	16286600	50970425	188845	9812926	54
7	1928074	16460630	1964943	16271214	50892060	189416	9812366	53
8	1930928	16445837	1967964	16255849	50813927	189988	9811850	52
9	1933782	16431067	1970985	16240506	50736025	190561	9811243	51
10	1936636	16416320	1974007	16225185	50658353	191135	9810680	50
11	1939490	16401596	1977029	16209886	50580910	191710	9810116	49
12	1942344	16386895	1980052	16194610	50503695	192285	9809551	48
13	1945197	16372216	1983075	16179355	50426707	192861	9808986	47
14	1948050	16357559	1986098	16164121	50349935	193438	9808420	46
15	1950903	16342924	1989122	16148908	50273407	194016	9807853	45
16	1953756	16328311	1992146	16133716	50197092	194595	9807285	44
17	1956609	16313720	1995171	16118545	50120999	195175	9806716	43
18	1959462	16299151	1998196	16103395	50045127	195756	9806147	42
19	1962314	16284604	2001221	16088266	49969475	196338	9805577	41
20	1965166	16270079	2004247	16073159	49894042	196920	9805006	40
21	1968018	16255576	2007273	16058073	49818827	197503	9804434	39
22	1970870	16241095	2010299	16043008	49743829	198087	9803861	38
23	1973722	16226636	2013326	16027964	49669047	198672	9803287	37
24	1976574	16212198	2016353	16012940	49594481	199258	9802712	36
25	1979425	16197782	2019380	15997937	49520130	199845	9802137	35
26	1982276	16183388	2022408	15982955	49445993	200433	9801561	34
27	1985127	16169016	2025436	15967994	49372069	201022	9800984	33
28	1987978	16154665	2028464	15953053	49298357	201612	9800406	32
29	1990829	16140336	2031493	15938133	49224856	202203	9799827	31
30	1993679	16126028	2034522	15923233	49151565	202795	9799247	30
31	1996530	15111742	2037552	15908355	49078483	203387	9798667	29
32	1999380	16097477	2040582	15893497	49005610	203980	9798086	28
33	2002230	19083232	2043612	15878658	48932945	204574	9797504	27
34	2005080	16069008	2046643	15863839	48860488	205169	9796921	26
35	2007930	16054805	2049674	15849040	48788238	205765	9796337	25
36	2010780	16040623	2052705	15834261	48716193	206362	9795753	24
37	2013629	16026462	2055737	15819502	48644352	206960	9795168	23
38	2016478	16012322	2058769	15804764	48572714	207558	9794582	22
39	2019327	15998203	2061801	15790046	48501278	208157	9793995	21
40	2022176	15984105	2064834	15775348	48430043	208757	9793407	20
41	2025025	15970028	2067867	15760670	48359008	209358	9792818	19
42	2027874	15955972	2070900	15746012	48288171	209960	9792228	18
43	2030722	15941936	2073934	15731373	48217531	210163	9791638	17
44	2033570	15927921	2076968	15716754	48147088	211167	9791047	16
45	2036418	15913926	2080002	15702154	48076841	211772	9790455	15
46	2039266	15899951	2083037	15687573	48006790	212378	9789862	14
47	2042114	15885996	2086073	15673012	47936934	212984	9789268	13
48	2044962	15872062	2089109	15658461	47867274	213591	9788674	12
49	2047809	15858148	2092145	15643949	47797809	214199	9788079	11
50	2050656	15844254	2095182	15629446	47728538	214808	9787483	10
51	2053503	15830371	2098219	15614953	47659460	215418	9786886	9
52	2056350	15816518	2101256	15600489	47590575	216029	9786288	8
53	2059197	15802685	2104293	15586044	47521882	216641	9785689	7
54	2062043	15788871	2107331	15571617	47453380	217254	9785090	6
55	2064889	15775077	2110369	15557210	47385067	217867	9784490	5
56	2067735	15761303	2113407	15542822	47316942	218481	9783889	4
57	2070581	15747559	2116446	15528463	47249003	219096	9783287	3
58	2073427	15733824	2119485	15514112	47181249	219712	9782684	2
59	2076272	15720169	2122525	15499780	47113680	220329	9782080	1
60	2079117	15706414	2125565	15485467	47046295	220947	9781476	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	2079137	15706414	2125565	15485467	47046295	220947	9781476	60
1	2081962	15692738	2128605	15471172	46979093	221566	9780871	59
2	2084807	15679082	2141646	15456896	46912075	222186	9780265	58
3	2087652	15665445	2134687	15442639	46845240	222806	9779658	57
4	2090497	15651828	2137729	15428401	46778587	223427	9779050	56
5	2093342	15638230	2140771	15414181	46712115	224049	9778442	55
6	2096180	15624651	2143814	15399979	46645823	224672	9777833	54
7	2099030	15611092	2146857	15385796	46579711	225296	9777223	53
8	2101874	15597552	2149900	15371632	46513778	225921	9776612	52
9	2104718	15584031	2152944	15357484	46448023	226547	9776000	51
10	2107562	15570530	2155988	15343356	46382445	227174	9775387	50
11	2110405	15557048	2159032	15329246	46317043	227802	9774773	49
12	2113248	15543585	2162077	15315155	46251817	228430	9774157	48
13	2116091	15530141	2165122	15301062	46186767	229052	9773544	47
14	2118934	15516715	2168167	15287026	46121892	229689	9772928	46
15	2121777	15503308	2171213	15272988	46057192	230320	9772311	45
16	2124620	15489920	2174259	15258968	45992666	230953	9771693	44
17	2127462	15476551	2177306	15244966	45928314	231585	9771075	43
18	2130304	15463200	2180352	15230981	45864135	232219	9770456	42
19	2133146	15449868	2183400	15217014	45800128	232854	9769836	41
20	2135988	15436554	2186448	15203064	45736291	233490	9769215	40
21	2138830	15423259	2189496	15189133	45672623	234126	9768593	39
22	2141671	15409982	2192544	15175219	45609123	234763	9767970	38
23	2144512	15396724	2195593	15161323	45545790	235401	9767347	37
24	2147353	15383484	2198642	15147444	45482623	236040	9766723	36
25	2150194	15370262	2201692	15133582	45419621	236680	9766098	35
26	2153035	15357059	2204742	15119738	45356785	237321	9765472	34
27	2155876	15343874	2207792	15105911	45294114	237963	9764845	33
28	2158716	15330708	2210843	15092102	45231607	238600	9764217	32
29	2161556	15317560	2213894	15078310	45169263	239250	9763589	31
30	2164396	15304430	2216946	15064535	45107083	239895	9762960	30
31	2167236	15291319	2219998	15050779	45045065	240540	9762330	29
32	2170076	15278226	2223051	15037040	44983211	241186	9761699	28
33	2172916	15265150	2226104	15023317	44921521	241833	9761067	27
34	2175755	15252092	2229157	15009611	44859993	242481	9760435	26
35	2178594	15239052	2232211	14995922	44798626	243130	9759802	25
36	2181433	15226030	2235265	14982250	44737419	243780	9759168	24
37	2184272	15213025	2238319	14968594	44676371	244431	9758533	23
38	2187111	15200038	2241374	14954955	44615481	245083	9757897	22
39	2189948	15187068	2244429	14941333	44554749	245735	9757260	21
40	2192787	15174116	2247485	14927728	44494174	246388	9756623	20
41	2195625	15161182	2250541	14914140	44433756	247042	9755985	19
42	2198463	15148266	2253597	14900569	44373494	249697	9755346	18
43	2201300	15135367	2256654	14887014	44313387	248353	9754706	17
44	2204137	15122485	2259711	14873475	44253435	249010	9754065	16
45	2206974	15109621	2262769	14859953	44193637	249668	9753423	15
46	2209811	15096774	2265827	14846447	44133992	250327	9752781	14
47	2212648	15083944	2268885	14832957	44074501	250987	8752138	13
48	2215485	15071132	2271944	14819485	44015263	251647	9751494	12
49	2218322	15058337	2275003	14806029	43955977	252308	9750849	11
50	2221158	15045559	2278063	14792589	43896942	252970	9750203	10
51	2223994	15032799	2281123	14779166	43838057	253633	9749557	9
52	2226830	15020056	2284183	14765759	43779321	254297	9748910	8
53	2229666	15007330	2287244	14752368	43720733	254962	9748262	7
54	2232502	14994620	2290305	14738992	43662293	255628	9747613	6
55	2235337	14981927	2293367	14725632	43604000	256295	9746963	5
56	2238172	14969251	2296429	14712288	43545855	256963	9746312	4
57	2241007	14956592	2299492	14698960	43487857	257632	9745660	3
58	2243842	14943950	2302555	14685649	43430006	258301	9745008	2
59	2246677	14931325	2305618	14672354	43372301	258971	9744355	1
60	2249511	14918717	2308682	14659075	43314742	256942	9743700	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentia & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	2249511	14918717	2308682	14659075	43314749	259642	9743001	60
1	2252345	14906126	2311746	14645812	43257328	260314	9743045	59
2	2255179	14893551	2314810	14632564	43200060	260987	9742389	58
3	2258013	14880993	2317875	14619332	43142947	261661	9741733	57
4	2260847	14868452	2320940	14606116	43085958	262336	9741076	56
5	2263680	14855927	2324006	14592916	43029122	263011	9740418	55
6	2266513	14843419	2327072	14579732	42972429	263687	9739759	54
7	2269346	14830928	2330139	14566564	42915878	264364	9739099	53
8	2272179	14818453	2333206	14553411	42859468	265042	9738439	52
9	2275012	14805995	2336273	14540274	42803199	265721	9737778	51
10	2277844	14793553	2339341	14527152	42747070	266401	9737116	50
11	2280676	14781128	2342419	14514046	42691080	267082	9736453	49
12	2283508	14768719	2345478	14500955	42635228	267764	9735789	48
13	2286340	14756325	2348547	14487878	42579514	268447	9735124	47
14	2289172	14743947	2351616	14474817	42523937	269130	9734459	46
15	2292004	14741585	2354686	14461771	42468497	269814	9733793	45
16	2294835	14719239	2357757	14448740	42413193	270499	9733126	44
17	2297666	14706909	2360828	14435724	42358025	271185	9732458	43
18	2300497	14694595	2363899	14422723	42302993	271872	9731789	42
19	2303328	14682297	2366971	14409737	42248006	272560	9731120	41
20	2306159	14670015	2370043	14396766	42193334	273249	9730450	40
21	2308989	14657749	2373116	14383810	42138706	273939	9729779	39
22	2311819	14645498	2376189	14370868	42084211	274630	9729107	38
23	2314649	14633263	2379263	14357941	42029848	275322	9728434	37
24	2317479	14621044	2382337	14345029	41975617	276015	9727760	36
25	2320309	14608841	2385411	14332132	41921518	276709	9727085	35
26	2323138	14596654	2388486	14319250	41867550	277404	9726409	34
27	232596	14584483	2391561	14306384	41813712	278099	9725733	33
28	2328794	14572328	2394636	14293533	41760003	278795	9725056	32
29	2331625	14560189	2397712	14280697	41706424	279492	9724378	31
30	2334454	14548066	2400788	14267876	41652974	280190	9723699	30
31	2337282	14535958	2403865	14255069	41599653	280889	9723020	29
32	2340110	14523866	2406942	14242277	41546464	281589	9722340	28
33	2342938	14511789	2410020	14229500	41493407	282289	9721659	27
34	2345766	14499727	2413098	14216737	41440480	282990	9720977	26
35	2348594	14487680	2416176	14203988	41387683	283692	9780294	25
36	2351421	14475648	2419255	14191253	41335015	284395	9719610	24
37	2354248	14463632	2422334	14178533	41282475	285099	9718926	23
38	2357075	14451631	2425414	14165827	41230062	285804	9718241	22
39	2359902	14439645	2428494	14153135	41177775	286510	9717555	21
40	2362729	14427674	2431574	14140457	41125614	287217	9716868	20
41	2365555	14415718	2434655	14127793	41073577	287925	9716180	19
42	2368381	14403777	2437736	14115143	41021663	288934	9715491	18
43	2371207	14391851	2440818	14102507	40969871	289344	9714802	17
44	2374033	14379941	2443900	14089887	40918201	290054	9714112	16
45	2376859	14368046	2446983	14077281	40866652	290765	9713421	15
46	2379684	14356166	2450066	14064689	40815224	291477	9712729	14
47	2382509	14344301	2453150	14052111	40763917	292190	9712036	13
48	2385334	14332451	2456234	14039547	40712731	292904	9711343	12
49	2388159	14320616	2459319	14026997	40661665	293619	9710649	11
50	2390983	14308796	2462404	14014461	40610718	294335	9709954	10
51	2393808	14296991	2465490	14001939	40559890	295052	9709258	9
52	2396632	14285200	2468576	13989430	40509183	295770	9708561	8
53	2399456	14273424	2471662	13976935	40458596	296489	9707863	7
54	2402280	14261662	2474749	13964453	40408129	297209	9707165	6
55	2405104	14249915	2477836	13951986	40357781	297929	9706466	5
56	2407927	14238182	2480924	13939532	40307552	298650	9705766	4
57	2410750	14226464	2484012	13927092	40257440	299372	9705065	3
58	2413574	14214761	2487101	13914666	40207446	300095	9704363	2
59	2416396	14203072	2490191	13902253	40157560	300819	9703660	1
60	2419219	14191398	2494280	13889854	40107808	301544	9702957	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentia & Logarit. Tangent.	Tangentes.	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	2419219	14191398	2493280	13889854	40107809	301544	9702957	60
1	2422041	14179738	2496370	13877468	40058165	302270	9702253	59
2	2423863	14168092	2499411	13865095	40008633	302997	9701548	58
3	2427685	14156461	2502552	13852737	39959218	303724	9700842	57
4	2430507	14144844	2505643	13840392	39909917	304452	9700135	56
5	2433329	14133242	2508735	13828061	39860729	305181	9699428	55
6	2436150	14121654	2511827	13815743	39811654	305911	9698720	54
7	2438971	14110081	2514920	13803439	39762695	306642	9698011	53
8	2441792	14098522	2518013	13791148	39713852	307374	9697301	52
9	2444613	14086977	2521106	13778870	39665124	308107	9696590	51
10	2447434	14075447	2524200	13766606	39616509	308841	9695879	50
11	2450254	14063931	2527294	13754355	39568006	309576	9695167	49
12	2453074	14052429	2530389	13742117	39519614	310312	9694454	48
13	2455894	14040940	2533484	13729891	39471331	311049	9693740	47
14	2458714	14029465	2536580	13717679	39423158	311786	9693025	46
15	2461533	14018004	2539676	13705480	39375094	312524	9692309	45
16	2464352	14006557	2542773	13693294	39327139	313263	9691593	44
17	2467171	13995124	2545870	13681121	39279294	314003	9690876	43
18	2469990	13983705	2548968	13668961	39231557	314744	9690158	42
19	2472809	13972300	2552066	13656814	39183929	315486	9689439	41
20	2475628	13960909	2555165	13644680	39136409	316229	9688719	40
21	2478446	13949532	2558264	13632559	39088998	316973	9687998	39
22	2481264	13938168	2561364	13620450	39041695	317718	9687277	38
23	2484082	13926818	2564464	13608354	38994501	318464	9686555	37
24	2486900	13915482	2567564	13596272	38947416	319210	968[illegible]52	36
25	2489717	13904159	2570665	13584202	38900438	319957	9685108	35
26	2492534	13892850	2573766	13572145	38853567	320705	9684383	34
27	2495351	13881554	2576868	13560100	38806801	321454	9683657	33
28	2498168	13870272	2579970	13548068	38760139	322204	9682931	32
29	2500984	13859004	2583073	13536049	38713580	322955	9682204	31
30	2503800	13847749	2586176	13524042	38667125	323707	9681476	30
31	2506616	13836508	2589280	13512048	38620772	324460	9680747	29
32	2509431	13825280	2592384	13500066	38574525	325214	9680017	28
33	2512248	13814066	2595489	13488097	38528384	325969	9679287	27
34	2515064	13802865	2598594	13476141	38482347	326724	9678556	26
35	2517879	13791678	2601700	13464198	38436414	327480	9677824	25
36	2520694	13780504	2604806	13452267	38390584	328237	9677091	24
37	2523509	13769343	2607912	13440348	38344857	328995	9676357	23
38	2526324	13758193	2611019	13428441	38299232	329754	9675623	22
39	2529138	13747061	2614126	13416547	38253708	330514	9674888	21
40	2531952	13735940	2617234	13404665	38208285	331275	9674152	20
41	2534766	13724833	2620342	13392796	38162963	332037	9673415	19
42	2537580	13713739	2623451	13380939	38117740	332800	9672677	18
43	2540391	13702658	2626560	13369094	38072616	333564	9671938	17
44	2543206	13691590	2629670	13357262	38027592	334328	9671199	16
45	2546019	13680535	2632780	13345442	37982666	335093	9670459	15
46	2548831	13669493	2635891	13333634	37937838	335859	9669718	14
47	2551645	13658464	2639002	13321838	37893109	336626	9668976	13
48	2554458	13647448	2642114	13310054	37848479	337394	9668233	12
49	2557270	13636445	2645226	13298282	37803948	338163	9667490	11
50	2560082	13625454	2648339	13286521	37759515	338933	9666746	10
51	2562894	13614476	2651452	13274772	37715180	339704	9666001	9
52	2565706	13603511	2654566	13263035	37670943	340476	9665255	8
53	2568517	13592559	2657680	13251310	37626803	341249	9664508	7
54	2571328	13581620	2660795	13239597	37582760	342023	9663761	6
55	2574139	13570694	2663910	13227896	37538814	342798	9663013	5
56	2576950	13559781	2667026	13216208	37494964	343573	9662264	4
57	2579760	13548880	2670142	13204531	37451210	344349	9661514	3
58	2582570	13537992	2673258	13192866	37407551	345126	9660763	2
59	2585380	13527117	2676375	13181213	37363987	345904	9660011	1
60	2588190	13516255	2679492	13165572	37320517	346683	9659258	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	2588190	13516255	2679492	13165572	37320517	346683	9659258	60
1	2591000	13505406	2682610	13157943	37277141	347463	9658505	59
2	2593810	13494570	2685728	13146326	37233859	348244	9657751	58
3	2596618	13483746	2688847	13134720	37190670	349026	9656996	57
4	2599427	13472934	2691966	13123126	37147574	349808	9656240	56
5	2602236	13462435	2695086	13111544	37104570	350591	9655484	55
6	2605045	13451348	2698206	13099973	37061659	351375	9654727	54
7	2607853	13440573	2701327	13088413	37018840	352160	9653969	53
8	2610661	13429810	2704448	13076864	36976114	352946	9653210	52
9	2613469	13419060	2707570	13065327	36933479	353733	9652450	51
10	2616277	13408322	2710693	13053801	36890936	354521	9651689	50
11	2619084	13397596	2713816	13042286	36848483	355310	9650927	49
12	2621891	13386183	2716940	13030783	36806121	356100	9950165	48
13	2624698	13376182	2720064	13019291	36763849	356891	9649402	47
14	2627505	13365493	2723189	13007810	36721666	357683	9648638	46
15	2630312	13354817	2726314	12996341	36679574	358476	9647873	45
16	2633118	13344153	2729439	12984883	36637572	359270	9647108	44
17	2635924	13333502	2732565	12973438	36595659	360064	9646342	43
18	2638730	13322863	2735691	12962004	36553836	360859	9645575	42
19	2641536	13312237	2738818	12950582	36512103	361655	9644807	41
20	2644342	13301623	2741945	12939171	36470459	362452	9644038	40
21	2647147	13291022	2745073	12927772	36428903	363250	9643268	39
22	2649952	13280432	2748201	12916383	36387437	364049	9642498	38
23	2652757	13269854	2751330	12905005	36346060	364849	9641727	37
24	2655562	13259288	2754459	12893638	36304771	365650	9640955	36
25	2658366	13248734	2757589	12882282	36263570	366452	9640182	35
26	2661170	13238191	2760729	12870936	36222456	367255	9639408	34
27	2663974	13227660	2763850	12859601	36181427	368059	9638633	33
28	2666777	13217141	2766981	12848278	36140483	368863	9637858	32
29	2669580	13206633	2770113	12836965	36099623	369668	9637082	31
30	2672383	13196137	2773245	12825663	36058848	370474	9636305	30
31	2675186	13185653	2776378	12814372	36018156	371281	9635527	29
32	2677989	13175181	2779511	12803092	35977550	372089	9634748	28
33	2680792	13164721	2782645	12791825	35937029	372898	9633969	27
34	2683595	13154273	2785779	12780565	35896593	373708	9633189	26
35	2686397	13143837	2788914	12769318	35856241	374516	9632408	25
36	2689199	13133413	2792050	12758082	35815973	375331	9631626	24
37	2692001	13123000	2795186	12746856	35775789	376144	9630843	23
38	2694802	13112599	2798323	12735641	35735689	376958	9630059	22
39	2697603	13102210	2801460	12724438	35695692	379772	9629275	21
40	2700404	13091833	2804597	12713246	35655739	378587	9628490	20
41	2703205	13081468	2807735	12702065	35615888	379403	9627704	19
42	2706005	13071114	2810873	12690894	35576121	380220	9626917	18
43	2708805	13060771	2814012	12679733	35536438	381038	9626129	17
44	2711605	13050440	2817151	12668583	35496838	381857	9625341	16
45	2714405	13040120	2820291	12657443	35457320	382677	9624552	15
46	2717204	13029812	2823432	12646314	35417883	383498	9623762	14
47	2720003	13019515	2826573	12635195	35378528	384320	9622971	13
48	2722802	13005229	2829714	12624086	35339253	385143	9622179	12
49	2725601	12998955	2832856	12612988	35300059	385967	9621387	11
50	2728400	12988692	2835999	12601901	35260945	386791	9620594	10
51	2731198	12978441	2839142	12590825	35221911	387616	9619800	9
52	2733996	12968291	2842286	12579759	35182956	388442	9619005	8
53	2736794	12957972	2845430	12568793	35144080	389269	9618209	7
54	2739592	12947755	2848575	12557658	35105283	390097	9617413	6
55	2742389	12937549	2851720	12546623	35066565	390926	9616616	5
56	2745186	12927354	2854866	12535598	35027925	391756	9615818	4
57	2747983	12917171	2858012	12524584	34989364	392587	9615019	3
58	2750789	12906999	2861159	12513580	34950881	393419	9614219	2
59	2753577	12896838	2864306	12502586	34912477	394252	9613418	1
60	2756373	12886689	2867454	12491603	34874151	395086	9612617	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes.	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	2756373	12886689	2867453	12491603	34874151	395086	9612617	60
1	2759169	12876551	2870601	12480630	34835903	395921	9611815	59
2	2761965	12866423	2873749	12459667	34797733	396756	9611012	58
3	2764761	12856306	2876898	12458714	34759640	397592	9610208	57
4	2767556	12846200	2880048	12447771	34721625	398429	9609403	56
5	2770351	12836105	2883198	12436838	34683686	399267	9608598	55
6	2773146	12826021	2886349	12425915	34645824	400106	9607792	54
7	2775941	12815948	2889501	12415002	34608038	400946	9606985	53
8	2778735	12805886	2892653	12404099	34570327	401787	9606177	52
9	2781529	12795835	2895806	12393206	34532692	402629	9605368	51
10	2784323	12785795	2898960	12382323	34495132	403472	9604559	50
11	2787117	12775766	2902114	12371450	34457647	404316	9603749	49
12	2789911	12765748	2905268	12360587	34420237	405161	9602938	48
13	2792704	12755741	2908423	12349734	34382903	406007	9602126	47
14	2795497	12745745	2911578	12338891	34345644	406884	9601313	46
15	2798290	12735760	2914734	12328059	34308459	407701	9600499	45
16	2801082	12725785	2917890	12317236	34271348	408549	9599685	44
17	2803874	12715821	2921047	12306423	34234310	409398	9598870	43
18	2806666	12705868	2924204	12295620	34197345	410248	9598054	42
19	2809458	12695926	2927362	12284827	34160453	411099	9597237	41
20	2812250	12685995	2930520	12274044	34123634	411951	9596419	40
21	2815041	12676075	2933679	12263271	34086888	412804	9595600	39
22	2817832	12666166	2936839	12252508	34050215	413658	9594781	38
23	2820623	12656267	2939999	12241754	34013615	414513	9593961	37
24	2823414	12640379	2943160	12231010	33977088	415369	9593140	36
25	2826205	12636501	2946321	12220275	33940634	416226	9592318	35
26	2828994	12626633	2949483	12209550	33904252	417083	9591495	34
27	2831784	12616776	2952645	12197835	33867942	417941	9590672	33
28	2834574	12606029	2955808	12188129	33831703	418800	9589848	32
29	2837364	12597093	2958971	12177433	33795535	419660	9589023	31
30	2840153	12587267	2962135	12166746	33759438	420521	9588197	30
31	2842942	12577452	2965299	12156069	33723410	421383	9587371	29
32	2845731	12567647	2968464	12145401	33687453	422246	9586544	28
33	2848520	12557853	2971629	12134743	33651566	423110	9585716	27
34	2851308	12548069	2974795	12124094	33615750	423975	9584887	26
35	2854096	12538296	2977962	12113455	33580005	424841	9584057	25
36	2856884	12528533	2981129	12102825	33544330	425708	9583226	24
37	2859672	12518780	2984297	12092204	33508725	426576	9582395	23
38	2862459	12509038	2987465	12081593	33473188	427445	9581563	22
39	2865246	12499306	2990634	12070992	33437720	428314	9580730	21
40	2868033	12489565	2993804	12060401	33402321	429184	9579896	20
41	2870819	12479874	2996973	12049819	33366990	430055	9579061	19
42	2873605	12470174	3000143	12039247	33331728	430927	9578225	18
43	2876391	12460484	3003314	12028684	33296534	431800	9577389	17
44	2879177	12450804	3006486	12018130	33261408	432674	9576552	16
45	2881963	12441134	3009658	12007585	33226351	433549	9575714	15
46	2884748	12431474	3012831	11997949	33191362	434425	9574875	14
47	2887533	12421824	3016004	11986522	33156441	435302	9574036	13
48	2890318	12412184	3019178	11976004	33121588	436180	9573196	12
49	2893103	12402554	3022353	11965495	33086802	437059	9572355	11
50	2895888	12392934	3025528	11954996	33052082	437938	9571513	10
51	2898672	12383324	3028703	11944506	33017427	438818	9570670	9
52	2901456	12373724	3031879	11934025	32982839	439699	9569826	8
53	2904240	12364134	3035055	11923553	32948317	440581	9568982	7
54	2907023	12354554	3038232	11913090	32913862	441464	9568137	6
55	2909806	12344984	3041410	11902636	32879487	442348	9567291	5
56	2912589	12335425	3044588	11892192	32845153	443233	9566444	4
57	2915371	12325876	3047767	11881757	32810898	444119	9565596	3
58	2918153	12316337	3050946	11871330	32776709	445007	9564747	2
59	2920935	12306808	3054126	11860912	32742586	445896	9563898	1
60	2923717	12297289	3057307	11850503	32708528	446786	9563048	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes.	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes.	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
	2923717	12297289	3057307	11850503	32708528	446786	6563048	60
	2926499	12287780	3060487	11840104	32674536	447676	9562197	59
	2929280	12278280	3063669	11829713	32640597	448567	9561345	58
	2932061	12268790	3066851	11819331	32606731	449459	9560492	57
	2934842	12259310	3070034	11808958	32572937	450352	9559639	56
	2937623	12249840	3073218	11798594	32539196	451246	9558785	55
	2940403	12240379	3076402	11788239	32505517	452140	9557930	54
	2943183	12230928	3079587	11777893	3247[illegible]901	453035	9557074	53
8	2945953	12221487	3082772	11767556	32438348	453931	9556217	52
9	2948743	12212056	3085958	11757228	32404858	454828	9555360	51
10	2951523	12202634	3089144	11746908	32371430	455726	9554502	50
11	2954302	12193222	3092331	11736597	32338074	456625	9553643	49
12	2957081	12183820	3095518	11726295	32304762	457525	9552783	48
13	2959860	12174427	3098706	11716001	32271534	458426	9551922	47
14	2962630	12165044	3101895	11705716	32238349	459328	9551061	46
15	2965416	12155671	3105084	11695440	32205237	460231	9550199	45
16	2968194	12146308	3108274	11685173	32172187	461135	9549[illegible]36	44
17	2977209	12136954	3111464	11674914	32139200	462040	9548472	43
18	2973750	12127610	3114655	11664695	32106275	462945	9547607	42
19	2976527	12118276	3117846	11654425	32073413	463851	9546742	41
20	2979304	12108952	3121038	11644194	32040613	464758	9545876	40
21	2982080	12099637	3124230	11633971	32007875	465666	9545009	39
22	2984857	12090332	3127423	11623757	31975197	466575	9544141	38
23	2987633	12081036	3130617	11613551	31942580	467485	9543272	37
24	2990409	12071749	3133811	11603353	31910024	468396	9542403	36
25	2993185	12062472	3137006	11593164	31877528	469308	9541533	35
26	2995960	12053204	3140201	11582983	31845093	470221	9540662	34
27	2998735	12043945	3143397	11572810	31812717	471135	9539790	33
28	3001510	12034696	3146594	11562646	31780401	472050	9538917	32
29	3004284	12025456	3149791	11552490	31748144	472966	9538043	31
30	3007058	12016225	3152989	11542341	31715946	473884	9537169	30
31	3009832	12007004	3156187	11532202	31683807	474802	9536294	29
32	3012606	11997792	3159386	11522071	31651727	475721	9535418	28
33	3015380	11988589	3162585	11511948	31619705	476641	9534541	27
34	3018153	11979396	3165785	11501835	31587742	477561	9533664	26
35	3020926	11970212	3168986	11491730	31555838	478482	9532786	25
36	3023699	11961037	3172187	11481633	31523992	479404	9531907	24
37	3026472	11951872	3175389	11471545	31492205	480327	9531027	23
38	3029244	11942716	3178591	11461465	31460476	481251	9530146	22
39	3032016	11933569	3181794	11451393	31428805	482176	9529264	21
40	3034788	11924431	3184998	11441329	31397191	483102	9528382	20
41	3037559	11915303	3188202	11431274	31365636	484029	9527499	19
42	3040339	11906184	3191407	11421227	31334138	484957	9526615	18
43	3043101	11897074	3194613	11411188	31302698	485886	9525730	17
44	3045872	11887973	3197819	11401157	31271315	486816	9524844	16
45	3048643	11878881	3201026	11391134	31239989	487747	9523958	15
46	3051413	11869798	3204233	11381119	31208720	488679	9523071	14
47	3054183	11860724	3207441	11371113	31177508	489611	9522183	13
48	3056953	11851659	3210649	11361115	31146352	490544	9521294	12
49	3059723	11842603	3213858	11351125	31115252	491478	9520404	11
50	3062492	11833557	3217067	11341144	31084208	492413	9519514	10
51	3065261	11824520	3220277	11331171	31053221	493349	9518623	9
52	3068030	11815492	3223488	11321206	31022289	494286	9517731	8
53	3070798	11806473	3226699	11311249	30991413	495224	9516838	7
54	3073566	11797463	3229911	11301300	30960593	496163	9515944	6
55	3076334	11788461	3233124	11292358	30929828	497103	9515050	5
56	3079102	11779468	3236337	11281424	30899119	498044	9514155	4
57	3081869	11770484	3239551	11271498	30868465	4[illegible]986	9513259	3
58	3084636	11761509	3242766	11261580	30837866	499929	9512362	2
59	3087403	11752543	3245981	11251670	30807323	509873	9511464	1
60	3090170	11743586	3249197	11241768	30776834	501818	9510565	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	3090170	11743586	3249197	11241768	30776834	501818	9510565	60
1	3092936	11734638	3252413	11231874	30746400	502764	9509666	59
2	3095702	11725699	3255630	11221988	30716020	503711	9508766	58
3	3098468	11716768	3258848	11212109	30685695	504659	9507865	57
4	3101234	11707846	3262066	11202239	30655423	505607	9506963	56
5	3103999	11698933	3265285	11192377	30625205	596556	9506061	55
6	3106764	11690029	3268504	11182523	30595041	507506	9505158	54
7	3109529	11681133	3271724	11172676	30564930	508457	9504254	53
8	3112294	11672246	3274944	11162837	30534872	509409	9503349	52
9	3115058	11663368	3278165	11153006	30504867	510362	9502443	51
10	3117822	11654499	3281387	11143184	30474915	511316	9501536	50
11	3120586	11645638	3284609	11133367	30445015	512271	9500629	49
12	3123349	11636786	3287832	11123559	30415169	513227	9499721	48
13	3126112	11627943	3291055	11113759	30385375	514184	9498812	47
14	3128875	11619199	3294280	11103967	30355635	515142	9497902	46
15	3131639	11610283	3297505	11094182	30325947	516101	9496991	45
16	3134400	11601466	3300731	11084405	30296312	517061	9496080	44
17	3137162	11592658	3303957	11074637	30266730	518021	9495168	43
18	3139924	11583858	3307184	11064876	30237200	518982	9494255	42
19	3142686	11575067	3310411	11055123	30207723	519944	9493341	41
20	3145448	11566285	3313639	11045378	30178299	520907	9492427	40
21	3148209	11557511	3316868	11035640	30148927	521871	9491512	39
22	3150970	11548746	3320097	11025910	30119605	522836	9490596	38
23	3153731	11539989	3323327	11016178	30090334	523802	9489679	37
24	3156491	11531240	3326558	11006471	30061113	524769	9488761	36
25	3159251	11522500	3329789	10996763	30031943	525737	9487842	35
26	3162011	11513768	3333020	10987062	30002823	526706	9486923	34
27	3164770	11595045	3336252	10977369	29973753	527676	9486003	33
28	3167529	11496330	3339485	10967683	29944734	528647	9485082	32
29	3170288	11487624	3342719	10958004	29915765	529620	9484160	31
30	3173047	11478926	3345953	10948332	29886847	530594	9483237	30
31	3175805	11470237	3349188	10938669	29857978	531568	9482314	29
32	3178563	11461556	3352423	10929013	29829160	532543	9481390	28
33	3181321	11452883	3355659	10919364	29[illegible]00392	533519	9480465	27
34	3184079	11444219	3358896	10909723	29771674	534496	9479539	26
35	3186837	11435563	3362133	10900090	29743006	536473	9478612	25
36	3189594	11426915	3365371	10890464	29714388	536451	9477685	24
37	3192351	11418275	3368610	10880845	29685822	537430	9476757	23
38	3195107	11409644	3371850	10871234	29657301	538410	9475828	22
39	3197864	11401021	3375090	10861630	29628831	539391	9474898	21
40	3200620	11392406	3378331	10852033	29690411	540373	9473967	20
41	3203374	11383800	3381572	10842444	29572041	541356	9473035	19
42	3206130	11375202	3384814	10832862	29543719	542340	9472103	18
43	3208885	11366612	3388057	10823287	29515446	543325	9471170	17
44	3211640	11358030	3391300	10813819	29487221	544311	9470236	16
45	3214395	11349456	3394544	10804158	29459043	545298	9469301	15
46	3217150	11340891	3397788	10795605	29430913	546286	9468366	14
47	3219904	11332334	3401033	10785059	29402831	547275	9467430	13
48	3222658	11323785	3404279	10775520	29374807	548265	9466493	12
49	3225410	11315244	3407524	10765988	29346811	549256	9465555	11
50	3228164	11306711	3410771	10756462	29318873	550249	9464616	10
51	3230917	11298186	3414029	10846944	29290982	551242	9463677	9
52	3233671	11289670	3417267	10737434	29263139	552236	9462737	8
53	3236412	11281162	3420516	10727931	29235343	553231	9461796	7
54	3239174	11272662	3423766	10718436	29207595	554226	9460854	6
55	3241926	11264170	3427016	10708948	29179895	555222	9459911	5
56	3244678	11255686	3430266	10699467	29152243	556219	9458968	4
57	32474[illegible]9	11247210	3433518	10689993	29124638	557217	9458024	3
58	3250180	11238742	3436770	10680526	29097080	558216	9457079	2
59	3252932	11230282	3440023	10671066	29069569	559216	9456133	1
60	3255682	11221830	3443276	10661623	29042105	560217	9455186	0
								M

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes.	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes.	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	3255682	11221830	3443276	10661613	29042109	560217	9455186	60
1	3258432	11213386	3446530	10652167	29014688	561219	9454239	59
2	3261182	11204950	3449785	10642728	28987318	562222	9453291	58
3	3263931	11196522	3453040	10633296	28959988	563226	9452342	57
4	3266681	11188102	3456296	10623871	28932707	564231	9451392	56
5	3269430	12179690	3459553	10614453	28905472	565237	9450441	55
6	3272179	11171286	3462810	10605042	28878283	566244	9449490	54
7	3274927	11162889	3466068	10595637	28851139	567252	9448538	53
8	3277675	11154500	3469326	10586239	28824040	568291	9447585	52
9	3280423	11146119	3472585	10576849	28796987	569270	9446631	51
10	3283171	11137746	3475845	10567466	28769979	570280	9445676	50
11	3285918	11129381	3479105	10558090	28743015	571291	9444720	49
12	3288665	11121024	3482366	10548721	28716096	572303	9443764	48
13	3291412	11112675	3485628	10539359	28689222	573316	9442807	47
14	3294159	11104334	3488891	10530004	28662393	574330	9441849	46
15	3296906	11096000	3492154	10520655	28635608	575345	9440890	45
16	3299652	11087674	3495418	10511313	28608868	575361	9439931	44
17	3302398	11079356	3498683	10501997	28582172	577370	9438971	43
18	3305144	11071046	3501949	10492648	28555520	578398	9438010	42
19	3307889	11062744	3505215	10483326	28528913	579418	9437048	41
20	3310634	11054449	3508482	10474010	28502350	580439	9436085	40
21	3313379	11046162	3511749	10464702	28475832	581460	94 5122	39
22	3316123	11037883	3515017	10455401	28449357	582482	9434158	38
23	3318867	11029612	3518286	10446107	28422926	583505	943319	37
24	3321611	11021348	3521555	10436819	28396539	584529	9432227	36
25	3324355	11013092	3524825	10427538	28370195	585554	9431260	35
26	3327098	11004843	3528096	10518263	28343895	586580	9430293	34
27	3329841	10996602	3531368	10408995	28317638	587607	9429325	33
28	3332585	10988368	3534640	10399733	28291424	588635	9428356	32
29	3335327	10980142	3537913	10390479	28265253	589663	9427386	31
30	3338069	10971923	3541186	10381231	28239125	590692	9426415	30
31	3340811	10963712	3544460	10371990	28213040	591722	9425444	29
32	3343553	10955509	3547735	10362756	28186998	592753	9424472	28
33	3346294	10947313	3551010	10353528	28160999	593785	9423499	27
34	3349035	10939125	3554286	10344307	28135043	594818	9422525	26
35	3351776	10930944	3557563	10335092	28109129	595852	9421550	25
36	3354516	10922771	3560840	10325884	28083258	596887	9420575	24
37	3357256	10914606	3564118	10316682	28057429	597924	9419599	23
38	3359996	10906448	3567397	10307486	28031642	598962	9418622	22
39	3362736	10898298	3570676	10298397	28005898	600001	9417644	21
40	3365475	10890156	3573956	10289115	27980196	601041	9416665	20
41	3368214	10882021	3577237	10279940	27954536	602081	9415685	19
42	3370953	10873894	3580519	10270772	27928917	603122	9414705	18
43	3373691	10865774	3583801	10261610	27903339	604264	9413724	17
44	3376429	10857661	3587084	10252454	27877803	605207	9412742	16
45	3379167	10849555	3590367	10243304	27852308	606251	9411760	15
46	3381905	10841457	3593651	10234161	27826855	607296	9410777	14
47	3384642	10833366	3596936	10225024	27801443	608342	9409793	13
48	3387379	10825282	3600221	10215893	27776072	609389	9408808	12
49	3390116	10817206	3603507	10206770	27750742	610436	9407822	11
50	3392852	10809137	3606794	10197653	27725453	611484	9406836	10
51	3395588	10801075	3610082	10188542	27700204	612533	9405849	9
52	3398324	10793021	3613370	10179438	27674995	613583	9404861	8
53	3401060	10784974	3616659	10170340	27649827	614634	9403872	7
54	3403795	10776934	3619949	10161248	27624699	615686	9402882	6
55	3406530	10768902	3623239	10152162	27599612	616740	9401891	5
56	3409265	10760877	3626530	10143082	27574565	617795	9400900	4
57	3411999	10752860	3629822	10134009	27549559	618851	9399908	3
58	3414733	10744850	3633115	10124942	27524592	619908	9398915	2
59	3417467	10736847	3636408	10115881	27499665	620966	9397921	1
60	3420201	10728852	3639702	10106827	27474777	622025	9396926	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	3420201	10728852	3639702	10106827	27474777	622025	939692[illegible]	60
1	3422934	10720865	3642997	10097781	27449929	623084	9395931	59
2	3425667	10712885	3646293	10088741	27425120	624144	9394935	58
3	3428400	10704912	3649589	10079707	27400350	625205	9393938	57
4	3431133	10696945	3652886	10070678	27375620	626267	9392940	56
5	3433865	10688984	3656183	10061654	27350929	627330	9391941	55
6	3436597	10681030	3659481	10052636	27326278	628394	9390942	54
7	3439329	10673085	3662780	10043626	27301667	629459	9389942	53
8	3442060	10665147	3666079	10034822	27277095	630525	9388941	52
9	3444791	10657216	3669379	10025624	27252563	631592	9387939	51
10	3447522	10649292	3672680	1001[illegible]632	27228070	632660	9386937	50
11	3450253	10641375	3675982	10007646	27203616	633729	9385934	49
12	3452983	10633465	3679284	9998666	27179200	634799	9384930	48
13	3455713	10625562	3682587	9989692	27154823	635870	9383925	47
14	3458442	10617667	3685891	9980725	27130484	626942	9382919	46
15	3461171	10609779	3689195	9971764	27106184	638015	9381913	45
16	3463900	10601898	3692500	9962810	27081922	639088	9380906	44
17	3466629	10594024	3695806	9953862	27057698	640162	9379898	43
18	3469357	10586157	3699113	9944920	27033511	641237	9378889	42
19	3472085	10578297	3702420	9935984	27009362	642313	9377880	41
20	34748[illegible]	10570444	3705728	9927054	26985251	643390	9376870	40
21	3477540	10562598	3709037	9918130	26961177	644468	9375859	39
22	348026[illegible]	10554760	3712347	9909213	26937141	645547	9374847	38
23	3482994	10546929	3715657	9900302	26913143	646627	9373834	37
24	3485721	10539104	3718968	9891396	26889183	64770[illegible]	9372820	36
25	3488447	10531286	3722279	9882496	26865200	648790	9371806	35
26	3491173	10523474	3725591	9873601	26841383	64987[illegible]	9370791	34
27	3493890	10515669	3728904	9864711	26817535	650958	9369775	33
28	349662[illegible]	10507871	3732218	9855827	26793726	652044	9368758	32
29	3499349	10500080	3735533	9846949	26769942	653131	9367740	31
30	3502074	10492295	3738848	9838076	26746206	654219	9366722	30
31	3504799	10484516	3742164	9829209	26722507	655307	9365703	29
32	3507523	10476745	3745480	9820349	26698845	656396	9364683	28
33	3510247	10468981	3748797	9811495	26675220	657486	9363662	27
34	3512971	10461225	3752115	9802648	26651631	658577	9362640	26
35	3515694	10453476	3755434	9793807	26628079	659669	9361618	25
36	3518417	10445734	3758753	9784972	26604563	660762	9360595	24
37	3521140	10437999	3762073	9776143	26581084	661856	9359571	23
38	3523862	10430271	3765394	9767320	26557641	662951	9358546	22
39	3526584	10422550	3768716	9758503	26534234	664047	9357521	21
40	3529306	10414836	3772038	9749693	26510863	665143	9356495	20
41	3532027	10407129	3775361	9740889	26487528	666240	9355468	19
42	3534748	10399429	3778685	9732091	26464229	667338	9354440	18
43	3537469	10391735	3782010	9723298	26440966	668437	9353411	17
44	3540190	10384047	3785335	9714510	26417738	669537	9352382	16
45	3542910	10376366	3788661	9705728	26394546	670638	9351352	15
46	3545630	10368692	3791988	9696951	26371390	671741	9350321	14
47	3548350	10361024	3795315	9688179	26348270	672845	9349289	13
48	3551070	10353362	3798643	9679412	26325185	673950	9348257	12
49	3553789	10345706	3801972	9670650	26302135	675056	9347224	11
50	3556508	10338057	3805302	9661894	26279120	676163	9346190	10
51	3559227	10330415	3808632	9653144	26256141	677271	9345155	9
52	3561945	10322780	3811963	9644400	26233196	678380	9344119	8
53	3564663	10315152	3815295	9635662	26210286	679490	9343082	7
54	3567380	10307531	3818628	9626930	26187411	680601	9342045	6
55	3570097	10299916	382196[illegible]	9618204	26164571	681712	9341007	5
56	3572814	10292308	38[illegible]5295	9609484	26141766	682824	9339968	4
57	3575531	10284707	3828630	9600770	26118996	683937	9338928	3
58	3578247	10277113	3831966	9592062	26096260	685051	9337887	2
59	3580963	10269526	3835303	9583360	26073559	686166	9378847	1
60	3583679	10261946	3838640	9574664	26050893	687282	9335804	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiae & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	3583679	10261946	3838640	9574664	26050893	687282	9335804	60
1	3586395	10254372	3841978	6565973	26028264	688399	9334761	59
2	3589110	10246804	3845316	9557287	26005663	689517	9333717	58
3	3591825	10239243	3848655	9548607	25983099	690636	5332673	57
4	3594540	10231688	3851995	9539932	25960569	691756	9331628	56
5	3597254	10224140	3855336	9531263	25938073	692877	9330582	55
6	3599968	10216598	3858678	9522599	25915610	693999	9329535	54
7	3602682	10209063	3862020	9513941	25893181	695122	9328488	53
8	3605395	10201534	3865363	9505288	25870786	696246	9327440	52
9	3608108	10194012	3868707	9496642	25848424	697370	9326391	51
10	3610821	10186496	3872052	9488001	25826096	698495	9325341	50
11	3613533	10178987	3875397	9479366	25803801	699621	9324290	49
12	3616245	10171484	3878743	9470736	25781540	700748	9323238	48
13	3618957	10163988	3882090	9462111	25759312	701877	9322186	47
14	3621669	10156498	3885438	9453491	25737118	703007	9321133	46
15	3624380	10149015	3888787	9444877	25714957	704138	9320079	45
16	3627091	10141538	3892136	9436268	25692830	705270	9319024	44
17	3629802	10134067	3895486	9427664	25670736	706403	9317969	43
18	3632512	10126603	3898837	9419066	25648675	707537	9316913	42
19	3635222	10119145	3902188	9410473	25626647	708672	9315856	41
20	3637932	10111694	3905540	9401886	25604651	709808	9314798	40
21	3640642	10104249	3908893	9393305	25582688	710944	9313739	39
22	3643351	10096811	3912247	9384730	25560758	712081	9312680	38
23	3646060	10089379	3915601	9376160	25538860	713219	9311620	37
24	3648768	10081953	3918956	9367595	25516995	714358	9310559	36
25	3651476	10074533	3922312	9359035	25495162	715498	9309497	35
26	3654184	10067120	3925669	9350481	25473362	716639	9308434	34
27	3656892	10059713	3929027	9341931	25451594	717782	9307371	33
28	3659599	10052312	3932385	6333386	25429858	718926	9306307	32
29	3662306	10044918	3935744	9324847	25408154	720071	9305242	31
30	3665012	10037530	3939104	9316313	25386482	721217	9304176	30
31	3667718	10030148	3942465	9307784	25364841	722364	9303109	29
32	3670424	10022773	3945826	9299261	25343232	723512	9302042	28
33	3673130	10015404	3949188	9290744	25321655	724660	9300974	27
34	3675835	10008041	3952551	9282232	25300110	725809	9299905	26
35	3678541	10000685	3955915	9273726	25278597	726959	9298836	25
36	3681246	9993335	3959280	9265215	25257116	728110	9297766	24
37	3683951	9985991	3962646	9256729	25235666	729262	9296695	23
38	3686655	9978653	3966012	9248238	25214248	730415	9295623	22
39	3689359	9971322	3969379	6239753	25192861	731569	9294550	21
40	3692062	9963997	3972746	9231273	25171506	732724	9293476	20
41	3694765	9956678	3976114	9222798	25150183	733880	9292401	19
42	3697468	9949366	3979483	9214326	25128891	735037	9291326	18
43	3700170	9942060	3982853	9205865	25107629	736195	9290250	17
44	3702872	9934760	3986224	9197406	25086398	737354	9289173	16
45	3705574	9927466	3989596	9188952	25065198	738514	9288096	15
46	3708276	9920178	3992969	9180503	25044029	739675	9287018	14
47	3710977	9912896	3996342	9172059	25022890	740837	9285939	13
48	3713678	9905620	3999716	9163620	25001782	742000	9284859	12
49	3716379	6898350	4003090	9155186	24980705	743164	9283778	11
50	3719080	9891086	4006465	9146757	24959659	744329	9282697	10
51	3721780	9883828	4009841	9138333	24938644	745495	9281615	9
52	3724480	9876577	4013217	9129915	24917659	746662	9280532	8
53	3727179	9869332	4016594	9121502	24896704	747830	9279448	7
54	3729878	9862093	4019972	9113094	24875780	748999	9278363	6
55	3732577	9854860	4023351	910469[illegible]	24854887	750169	9277278	5
56	3735275	9847633	4026731	9096293	24834024	751340	9276192	4
57	3737973	9840412	4030112	9087900	24813191	752512	9275105	3
58	3740671	9833192	4033494	9079512	24792387	753685	9274017	2
59	3743369	9825988	4036877	9671129	24771613	754859	9272928	1
60	3746066	9818785	4040262	9062752	24750869	756033	9271839	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes.	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	3746066	9818785	4040262	9062752	24750869	756033	9271839	60
1	3748763	9811589	4043647	9054381	24730154	757208	9270749	59
2	3751460	9804399	4047031	9046015	24709469	758384	9269658	58
3	3754156	9797215	4050416	9037654	24688814	759561	9268566	57
4	3756852	9790036	4053802	9029296	24668189	760740	9267474	56
5	2759548	9782863	4057189	9020943	24647594	761920	9266381	55
6	3762243	9775696	4060577	9012595	24627028	763101	9265287	54
7	2764938	9768535	4063966	9004252	24606492	764283	9264192	53
8	3767633	9761380	4067356	8995914	24585986	765466	9263096	52
9	3770327	9754231	4070747	8987581	24565509	766650	9262000	51
10	3773021	9747088	4074139	8979253	24545061	767835	9260903	50
11	3775715	9739950	4077531	8970929	24524642	769021	9259805	49
12	3778408	9732818	4080924	8962610	24504252	770208	9258706	48
13	3781101	9725693	4084318	8954297	24483891	771396	9257606	47
14	3783794	9718574	4087713	8945989	24463559	772585	9256506	46
15	3786486	9711461	4091109	8937686	24443256	773775	9255405	45
16	3789178	9704354	4094506	8929388	24422981	774966	9254303	44
17	3791870	9697353	4097903	8921196	24402735	776157	9253200	43
18	3794562	9690158	4101301	8912809	24382518	777349	9252097	42
19	3797253	1683069	4104699	8904527	24362329	778542	9250993	41
20	3799944	9675986	4108097	8896259	24342169	779736	9249888	40
21	3802635	9668908	4111497	8887977	24322037	780931	9248782	39
22	3805325	9661836	4114898	8879709	24301937	782127	9247676	38
23	3808015	9654770	4118300	8871446	24281860	783324	9246569	37
24	3810704	9647709	4121703	8863187	24261815	784522	9245461	36
25	3813393	9640654	4125107	8854933	24241798	785721	9244352	35
26	3816082	9633605	4128511	8846683	24221809	786922	9243242	34
27	3818771	9626562	4131916	8838438	24201849	788124	9242131	33
28	3821459	5619525	4135322	8830198	24181917	789327	9241020	32
29	3824147	9612494	4138728	8821963	24162013	790531	9239908	31
30	3826834	9605468	4142135	8813732	24142137	791736	9238795	30
31	3829521	9598448	4145544	8805506	24122289	792942	9237682	29
32	3832208	9591434	4148953	8797285	24102468	794149	9236568	28
33	3834895	9584426	4152363	8789069	24082675	795357	9235453	27
34	3837581	9577424	4155773	8780859	24062910	796565	9234337	26
35	3840267	9570427	4159184	8772653	24043172	797774	9233220	25
36	3842953	9563436	4162596	8764452	24023462	798984	9232103	24
37	3845638	9556451	4166009	8756256	24003779	800195	9230985	23
38	3848323	9549472	4169423	8748065	23984124	801407	9229866	22
39	3851008	9542498	4172838	8739878	23964496	802620	9228746	21
40	3853692	9535530	4176255	8731696	23944895	803834	9227625	20
41	3856376	9528567	4179672	8723518	23925320	805049	9226504	19
42	3859060	9521610	4183090	8715345	23905773	806265	9225382	18
43	3861743	9514659	4186509	8707177	23886254	807482	9224259	17
44	3864426	9507713	4189928	8699013	23866762	808700	9223135	16
45	3867109	9500373	4193348	8690854	23847297	809919	9222010	15
46	3869791	9493839	4196769	8682700	23827859	811139	9220884	14
47	3872473	9486911	4200191	8674551	23808448	812360	9219758	13
48	3875155	9479988	4203613	8666403	23789064	813583	9218631	12
49	3877837	9473071	4207036	8658264	23769706	814807	9217504	11
50	3880518	9466160	4210460	8650128	23750375	816032	9216376	10
51	3883199	9459254	4213885	8641996	23731071	817258	9215247	9
52	3885880	9452354	4217311	8633870	23711793	818484	9214117	8
53	3888560	9445460	4220738	8625749	23692542	819711	9212986	7
54	3891240	9438571	4224165	8617632	23673318	820939	9211855	6
55	3893919	9431688	4227593	8609520	23654121	822168	9210723	5
56	3896598	9424810	4231022	8601412	23934950	823398	9209590	4
57	3899277	9417938	4234452	8593509	23615805	824629	9208456	3
58	3901955	9411071	4237883	8585210	23596687	825861	9207323	2
59	3904633	9404210	4241315	8577116	23577595	827094	9206185	1
60	8907311	9397354	4244748	8569026	23558529	828328	9205049	0
								M.

Iuxta Regulam adhibendi.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes.	Differentia & Logarit. Tangent.	Tangentes.	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	3907311	9397354	4244748	8569026	23558529	82831	920504[illegible]	60
1	3909989	9390504	4248182	8560941	23539489	829563	9203912	59
2	3912666	9383660	4251617	8552861	23520475	830799	9202774	58
3	3915343	9376821	4255052	8544785	23501486	832036	920163[illegible]	57
4	3918020	9369988	4258488	8536714	23482523	833274	9200496	56
5	3920696	9363160	4261925	8528647	23463586	834513	9199[illegible]56	55
6	3923372	9356337	4265363	8520584	23444674	835753	9198215	54
7	3926048	9349520	4268801	8512525	23425788	836995	9197073	53
8	3928723	9342708	4272240	8504470	23406927	838238	9195931	52
9	3931398	9335902	4275680	8496420	23388092	839482	9194788	51
10	3934072	9329101	4279121	8488374	23369282	840727	9193644	50
11	3936746	9322306	4282563	8480333	23350498	841973	9192499	49
12	3939420	9315516	4286006	8472296	23331740	843220	9191353	48
13	3942093	9308731	4289450	8464263	23313012	844468	9190207	47
14	3944766	9301952	4292895	8456236	23294302	845716	9189060	46
15	3947439	9295178	4296340	8448213	23275621	846965	9187912	45
16	3950112	9288410	4299786	8440195	23256965	848215	9186763	44
17	3952784	9281647	4303233	8432181	23238335	849466	9185614	43
18	3955456	9274890	4306681	8424172	23219730	850718	9184464	42
19	3958128	9268138	4310130	8416167	23201151	851971	9183313	41
20	3960799	9261392	4313580	8408167	23182597	853225	9182161	40
21	3963470	9254651	4317031	8400171	23164068	854480	9181009	39
22	3966140	9247915	4320482	8392179	23145565	855736	9179856	38
23	3968810	9241185	4323934	8384192	23127086	856993	9178702	37
24	1971480	9234460	4327387	8376209	23108632	858251	9177547	36
25	3974149	9227741	4330841	8368231	23090203	859510	9176391	35
26	3976818	9221027	4334296	8360257	23071798	860770	9175235	34
27	3979487	9214319	4337752	8352288	23053418	862031	9174078	33
28	3982155	9207616	4341209	8344322	23035062	863294	6172920	32
29	3984823	9200918	4344666	8339360	23016731	864558	9171761	31
30	3987491	9194226	4348124	8328403	22998424	865823	9170601	30
31	3990159	9187539	4351583	8320450	22980141	867089	9169440	29
32	3992826	9180857	4355043	8312501	22961883	868356	9168279	28
33	3995493	9174181	4358504	8304558	22943650	869623	9167117	27
34	3998159	9167510	4361966	8296616	22925441	870891	9165955	26
35	4000825	9160844	4365429	8288684	22907256	872160	9164792	25
36	4003491	9154183	4368893	8280753	22889096	873430	9163628	24
37	4006156	9147528	4372357	8272827	22870960	874701	9162463	23
38	4008821	9140878	4375822	8264905	22852848	875973	9161297	22
39	4011486	9134233	4379288	8256987	22834760	877246	9160131	21
40	4014150	9127593	4382755	8249073	22816696	878520	9158964	20
41	4016814	9120959	4386223	8241164	22798656	879795	9157796	19
42	4019478	9114330	4389692	8233259	22780639	881071	9156627	18
43	4022141	9107706	4393162	8225358	22762646	882348	9155457	17
44	4024804	9101087	4396633	8217461	22744676	883626	9154286	16
45	4027467	9094473	4400105	8209568	22726730	884905	9153115	15
46	4030130	9087865	4403578	8201679	22708808	886186	9151943	14
47	4032792	9081262	4407051	8193794	22690909	887468	9150770	13
48	4035454	9074664	4410525	8185913	22673034	888751	9149597	12
49	4038115	9068071	4414000	8178036	22655183	890035	9148423	11
50	4040776	9061483	4417476	8170163	22637355	891320	9147248	10
51	4043437	9054901	4420953	8162295	22619551	892606	9146072	9
52	4046097	9048324	4424431	8154431	22601771	893893	9144895	8
53	4048757	9041752	4427910	8146571	22584014	895181	9143718	7
54	4051416	9035185	4431390	8138715	22566281	896470	9142540	6
55	4054075	9028623	4434871	813086[illegible]	22548571	897760	9141361	5
56	4056734	9022066	4438352	8123015	22530885	899051	9140181	4
57	4059392	9015514	4441834	8115172	22513222	900342	913900[illegible]	3
58	4062050	9008968	4445317	8107334	22495582	901634	9137820	2
59	4064708	9002427	4448801	8099500	22477965	902927	91366[illegible]8	1
60	4067366	8995891	4452286	8091670	22460371	904221	9135455	0
								M.

Contra regulam adhibendi

M	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	4067366	8995891	4452286	8091670	22460371	904221	9135455	60
1	4070023	8989360	4455772	8083844	22442800	905516	9134271	59
2	4072680	8982834	4459259	8076022	22425252	906812	9133087	58
3	4075337	8976313	4462747	8068204	22407726	908109	9131902	57
4	4077993	8969797	4466236	8060389	22390223	909408	9130716	56
5	4080649	8963286	4469726	8052578	22372742	910708	9129529	55
6	4083305	8956780	4473216	8044771	22355284	912009	9128342	54
7	4085960	8950280	4476707	8036969	22337848	913311	9127154	53
8	4088615	8943785	4480199	8029171	22320435	914614	9125965	52
9	4091269	8937295	4483692	8021377	22303044	915918	9124775	51
10	4093923	8930810	4487186	8013587	22285675	917223	9123584	50
11	4096577	8924330	4490681	8005801	22268328	918529	9122493	49
12	4099231	8917855	4494177	7998019	22251004	919836	9121200	48
13	4101884	8911385	4497674	7990241	22233703	921144	9120007	47
14	4104537	8904920	4501172	7982467	22216424	922453	9118814	46
15	4107189	8898460	4504671	7974697	22199168	923763	9117620	45
16	4109841	8892005	4508171	7966931	22181935	925074	9116425	44
17	4112493	8885555	4511672	7959169	22164725	926386	9115229	43
18	4115144	8879110	4515173	7951411	22147537	927699	9114032	42
19	4117795	8872670	4518675	7943657	22130372	929013	9112835	41
20	4120446	8866235	4522178	7935908	22113229	930327	9111637	40
21	4123096	8859804	4525682	7928161	22096109	931643	9110438	39
22	4125746	8853379	4529187	7920419	22079011	932960	9109238	38
23	4128395	8846959	4532693	7912681	22061934	834278	9108038	37
24	4131044	8840544	4536200	7904947	22044879	935597	9106837	36
25	4133693	8834134	4539708	7897217	22027846	936917	9105635	35
26	4136341	8827729	4543217	7889491	22010834	938238	9104432	34
27	4138989	8821329	4546727	7881769	21993843	939560	9103228	33
28	4141637	8814934	4550238	7874051	21976874	940883	9102024	32
29	4144285	8808544	4553750	7866337	21959926	942207	9100819	31
30	4146932	8802159	4557264	7858627	21943000	943532	9099613	30
31	4149579	8795779	4560778	7850921	21926094	944858	9098406	29
32	4152226	8789404	4564293	7843219	21909210	946185	9097198	28
33	4154872	8783033	4567809	7835520	21892348	947513	9095990	27
34	4157518	8776667	4571326	7827825	21875508	948842	9094781	26
35	4160163	8770306	4574843	7820134	21858689	950172	9093572	25
36	4162808	8763959	4578361	7812456	21841892	951503	9092362	24
37	4165453	8757599	4581880	7804764	21825116	952835	9091151	23
38	4168097	8751253	4585400	7797085	21808362	954168	9089939	22
39	4170741	8744912	4588921	7789409	21791629	955503	9088726	21
40	4173385	8738575	4592443	7781736	21774918	956839	9087512	20
41	4176028	8732243	4595966	7774067	21758228	958176	9086297	19
42	4178671	8325916	4599490	7766402	21741559	959514	9085082	18
43	4181313	8719594	4603015	7758741	21724911	960853	9083866	17
44	4183955	8713277	4606541	7751084	21708283	962193	9082649	16
45	4186597	8706965	4610068	7743431	21691676	963534	9081432	15
46	4189239	8700657	4613596	7735782	21675090	964875	9080214	14
47	4191880	8694354	4617125	7728137	21658525	966217	9078995	13
48	4194521	8688056	4620654	7720496	21641981	967560	9077775	12
49	4197162	8681763	4624184	7712859	21625458	968904	9076555	11
50	4199802	8675475	4627715	7705226	21608956	970249	9075334	10
51	4202442	8669192	4631247	7697597	21592475	971595	9074112	9
52	4205081	8662913	4634780	7689970	21576015	972943	9072889	8
53	4207720	8656639	4638314	7682347	21559575	974292	9071665	7
54	4210359	8650370	4641849	7674281	21543155	975642	9070441	6
55	4212997	8644106	4645385	7667113	21526756	976993	9069215	5
56	4215635	8637846	4648922	7659501	21510377	978345	9067989	4
57	4218273	8631591	4652460	7651893	21494019	979698	9066763	3
58	4220910	8625341	4655999	7644289	21477681	981052	9065535	2
59	4223547	8619096	4659540	7636689	21461364	982407	9064307	1
60	4226183	8612856	4663081	7629093	21445067	983763	9063078	0
								M

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiae & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	4226183	8612856	4663081	7629093	21445067	983763	9063078	60
1	4228819	8606620	4666623	7621500	21428790	985120	9061848	59
2	4231455	8600389	4670166	7613611	21412534	986478	9060618	58
3	4234090	8594163	4673710	7606326	21396298	987837	9059387	57
4	4236725	8587942	4677255	7598745	21380083	989197	9058155	56
5	4239360	8581725	4680801	7591167	21363888	990558	9056922	55
6	4241994	8575513	4684348	7583593	21347713	991920	9055688	54
7	4244628	8569306	4687896	7576023	21331558	993283	9054454	53
8	4247262	8563103	4691444	7568456	21315423	994647	9053219	52
9	4249895	8556951	4694993	7560893	21299308	996012	9051983	51
10	4252528	8550712	4698543	7553333	21283213	997379	9050746	50
11	4255161	8544523	4702094	7545776	21267138	998747	9049508	49
12	4257793	8538339	4705646	7538223	21251083	1000116	9048270	48
13	4260425	8532160	4709199	7530674	21235048	1001486	9047031	47
14	4263056	8525985	4712753	7523129	21219032	1002856	9045791	46
15	4265687	8519815	4716308	7515588	21203036	1004227	9044551	45
16	4268318	8513650	4719864	7508051	21187059	1005599	9043310	44
17	4270949	8507489	4723422	7500517	21171102	1006972	9042068	43
18	4273579	8501333	4726981	7492987	21155164	1008346	9040825	42
19	4276209	8495181	4730541	7485460	21139246	1009721	9039582	41
20	4278838	8489034	4734102	7477937	21123347	1011097	9038338	40
21	4281467	8482892	4737664	7470418	21107468	1012474	9037093	39
22	4284096	8476754	4741227	7462902	21091609	1013852	9035847	38
23	4286724	8470621	4744790	7455389	21075769	1015232	9034600	37
24	4289352	8464493	4748354	7447880	21059949	1016613	9033353	36
25	4291979	8458369	4751919	7440374	21044148	1017995	9032105	35
26	4294606	8452250	4755485	7432872	21028367	1019378	9030856	34
27	4297233	8446135	4759052	7425373	21012605	1020762	9029606	33
28	4299859	8440025	4762620	7417878	20996863	1022147	9028356	32
29	4302485	8433919	4766189	7420386	20981140	1023533	9027105	31
30	4305111	8427818	4769759	7402898	20965436	1024920	9025853	30
31	4307736	8421722	4773330	7395414	20949752	1026308	9024600	29
32	4310361	8415630	4776902	7387933	20934086	1027697	9023347	28
33	4312986	8409543	4780475	7380456	20918439	1029087	9022093	27
34	4315610	8403560	4784049	7372982	20902811	1030478	9020838	26
35	4318234	8397382	4787624	7365512	20887202	1031870	9019582	25
36	4320858	8391308	4791200	7358045	20871612	1033263	9018326	24
37	4323481	8385239	4794777	7350582	20856040	1034657	9017069	23
38	4326104	8379174	4798355	7343122	20840487	1036052	9015811	22
39	4328726	8373114	4801934	7335665	20824953	1037449	9014552	21
40	4331348	8367059	4805515	7328212	20809438	1038847	9013292	20
41	4333970	8361008	4809096	7320762	20793941	1040246	9012031	19
42	4336591	8354962	4812678	7313316	20778463	1041646	9010770	18
43	4339212	8348920	4816261	7305873	20763004	1043047	9009508	17
44	4341833	8342883	4819845	7298434	20747564	1044449	900824[illegible]	16
45	4344453	8336850	4823430	7290998	20732142	1045852	9006982	15
46	4347073	8330822	4827016	7283566	20716739	1047256	9005718	14
47	4349693	8324798	4830603	7276138	20701355	1048660	900445[illegible]	13
48	4352312	8318778	4834191	7268713	20685989	1050065	9003187	12
49	4354931	8312763	4837780	7261292	20670642	1051471	9001921	11
50	4357549	8306752	4841371	7253874	20655313	1052878	9000654	10
51	4360167	8300746	4844962	7246459	20640003	1054287	8999386	9
52	4362785	9294744	4848554	7239047	20624711	1055697	899[illegible]117	8
53	4365402	8288747	4852147	7231639	20609437	1057108	8996848	7
54	4368019	8282754	4855741	7224234	20594182	1058520	89955[illegible]8	6
55	4370635	8276765	4859336	7216832	20578945	1059933	8994[illegible]07	5
56	4373251	8270781	4862932	7209434	20563726	1061347	8993035	4
57	4275867	8264801	4866529	7202039	20548526	1062762	8991762	3
58	4378482	8298826	4870127	7194648	20533344	1064178	8990489	2
59	4381097	8252855	4873726	7187260	20518180	1065595	8989215	1
60	4383712	8246889	4877328	7179875	20503034	1067014	8987940	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentia & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	4383712	8246889	4877328	7179875	20503034	1067014	8987940	60
1	4386326	8240927	4880930	7172493	20487906	1068434	8986664	59
2	4388940	8234970	4884533	7165115	20472797	1069855	8985388	58
3	4391554	8229017	4888137	7157740	20457706	1071277	8984111	57
4	4394167	8223068	4891742	7150368	20442633	1072700	8982833	56
5	4396780	8217124	4895347	7143001	20427577	1074123	8981555	55
6	4399392	8211184	4898953	5135637	20412539	1075547	8980276	54
7	4402004	8205249	4902560	7128277	20397519	1076972	8978996	53
8	4404616	8199318	4906168	7120920	20382516	1078398	8977715	52
9	4407227	8193391	4909777	7113566	20367531	1079825	8976433	51
10	4409838	8187469	4913387	7106216	20352563	1081253	8975151	50
11	4412449	8181551	4916998	7098868	20337613	1082683	8973868	49
12	4415059	8175638	4920610	7091524	20322681	1084114	8972584	48
13	4417669	8169729	4924223	7084183	20307767	1085546	8971299	47
14	4420278	8163824	4927838	7076845	20292870	1086979	8970013	46
15	4422887	8157923	4931454	7069510	20277991	1088413	8968727	45
16	4425496	8152027	4935071	7062179	20263130	1089848	8967440	44
17	4428104	8146135	4938689	7054851	20248286	1091284	8966152	43
18	4430712	8140247	4942308	7047526	20233460	1092721	8964864	42
19	4433326	8134364	4945928	7040205	20218651	1094159	8963575	41
20	4435927	8128485	4949549	7032887	20203860	1095598	8962285	40
21	4438534	8122610	4953171	7025572	20189086	1097038	8960994	39
22	4441140	8116739	4956794	7018260	20174329	1098479	8959702	38
23	4443746	8110873	4960418	7010952	20159590	1099921	8958410	37
24	4446352	8105011	4964043	7003647	20144868	1101364	8957117	36
25	4448957	8099153	4967669	6996345	20130163	1102808	8955824	35
26	4451562	8093299	4971296	6989045	20115475	1104254	8954530	34
27	4454167	8087450	4974924	6981749	20100805	1105801	8953235	33
28	4456771	8081605	4978553	6974456	20086152	1107149	8951939	32
29	4459375	8075764	4982184	6967166	20071516	1108598	8950642	31
30	4461978	8069927	4985816	6959879	20056898	1110048	8949344	30
31	4464581	8064095	4989448	6952596	20042297	1111499	8948045	29
32	4967184	8058267	4993081	6945316	20027709	1112951	8946746	28
33	4469786	8052443	4996716	6938039	20013142	1114404	8945446	27
34	4472388	8046623	5000352	6930765	19998591	1115858	8944146	26
35	4474990	8040808	5003989	6923495	19984057	1117313	8942845	25
36	4477591	8034997	5007627	6916228	19969540	1118769	8941543	24
37	4480192	8029190	5011266	6908964	19955039	1120226	8940240	23
38	4482792	8023387	5014906	6901703	19940555	1121684	8938936	22
39	4485392	8017589	5018547	6894546	19926088	1123143	8937632	21
40	4487992	8011795	5022189	6887191	19911637	1124604	8936327	20
41	4490591	8006005	5025832	6879939	19897203	1126066	8935021	19
42	4493190	8000219	5029476	6872690	19883786	1127529	8933717	18
43	4495788	7994437	5033121	6865444	19868386	1128993	8932406	17
44	4498386	7988660	5036767	6858202	19854002	1130458	8931098	16
45	4500984	7982887	5040414	6850963	19839635	1131924	8929789	15
46	4503582	7977118	5044062	6843727	19825285	1133391	8928479	14
47	4506179	7971353	5047712	6836494	19810951	1134859	8927169	13
48	4508776	7965592	5051363	6829265	19796634	1136327	8925858	12
49	4511372	7959835	5055015	6822039	19782333	1137796	8924546	11
50	4513968	7954083	5058668	6814817	19768048	1139266	8923234	10
51	4516563	7948335	5062322	6807597	19753780	1140738	8921921	9
52	4519158	7942591	5065977	6800380	19739528	1142211	8920607	8
53	4521753	7936851	5069633	6703166	19725293	1143685	8919292	7
54	4524347	7931115	5073290	6785955	19711074	1145160	8917976	6
55	4526941	7925383	5076948	6778747	19696872	1146636	8916659	5
56	4529535	7919655	5080607	6771542	19682686	1148113	8915341	4
57	4532128	7913932	5084267	6764340	19668516	1149592	8914023	3
58	4534721	7908213	5087928	6757141	19654362	1151072	8912704	2
59	4537313	7902498	5091590	6749945	19640225	1152553	8911385	1
60	4539905	7896787	5095254	6742752	19626104	1154035	8910065	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes.	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes.	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	4539905	7896787	5095254	6742752	19626104	1154035	8910065	60
1	4542497	7891080	5098919	6735562	19611999	1155518	8908744	59
2	4545088	7885377	5102585	6728375	19597910	1157002	8907422	58
3	4547679	7879678	5106252	6721191	19583837	1158487	8906099	57
4	4540270	7873983	5109920	6714010	19569780	1159973	8904776	56
5	4552860	7898292	5113589	6706832	19555639	1161460	8903452	55
6	4555450	7862605	5117259	6699657	19541714	1162948	8902127	54
7	4558039	7856923	5120930	6692486	19527704	1164437	8900892	53
8	4560628	7851245	5124602	6685318	19513710	1165927	8899476	52
9	4563216	7845571	5128275	6678153	19499732	1167418	8898149	51
10	4565804	7839901	5131949	6670991	19485770	1168910	8896821	50
11	4568392	7834235	5135625	6663832	19471824	1170403	8895492	49
12	4570979	7828573	5139302	6656676	19457894	1171897	8894163	48
13	4573566	7822915	5142980	6649523	19443980	1173392	8892833	47
14	4576153	7817261	5146659	6642373	19430081	1174888	8891502	46
15	4578739	7811611	5150339	6635225	19416198	1176386	8890171	45
16	4581325	7805965	5154020	6628080	19402331	1177885	8888839	44
17	4583911	7800323	5157702	6620938	19388480	1179385	8887506	43
18	4586496	7794685	5161385	6613799	19374644	1180886	8886172	42
19	4589081	7789051	5165069	6606663	19360824	1182388	8884838	41
20	4591665	7783422	5168755	6599531	19347019	1183891	8883503	40
21	4594249	7777797	5172442	6592402	19333230	1185395	8882167	39
22	4596833	7772176	5176130	6585276	19319456	1186900	8880830	38
23	4599416	7766558	5179819	6578152	19305698	1188406	8879492	37
24	4601999	7760944	5183509	6571031	19291955	1189913	8878154	36
25	4604581	7755334	5187200	6563913	19278228	1191421	8876815	35
26	4607163	7749728	5190892	6556797	19264516	1192931	8875475	34
27	4609744	7744126	5194585	6549684	19250819	1194442	8874134	33
28	4612325	7738528	5198279	6542574	19237138	1195954	8872793	32
29	4614906	7732934	5201974	6197467	19223472	1197467	8871451	31
30	4617486	7727344	5205670	6528363	19209821	1198981	8804108	30
31	4620066	7721757	5209368	6521261	19196185	1200496	8868765	29
32	4622646	7716174	5213067	6514162	19182565	1202012	8867421	28
33	4625225	7710596	5216767	6507065	19168960	1203529	8866076	27
34	4627804	7705022	5220468	6499975	19155370	1205047	8864730	26
35	4630382	6799452	5224170	6492886	19141795	1206566	8863383	25
36	4632960	7693886	5227873	6485800	19128235	1208086	8862035	24
37	4635538	7688324	5231577	6478717	19114691	1209607	8860687	23
38	4638115	7682766	5235283	6471637	19101162	1211129	8859338	22
39	4640692	7677212	5238990	6464560	19087648	1212652	8857989	21
40	4643268	7671662	5242698	6457485	19074149	1214177	8856639	20
41	4645844	7666116	5246407	6450413	19060665	1215703	8855288	19
42	4648420	7660574	5250117	6443344	19047196	1217230	8853936	18
43	4650995	7655035	5253828	6436277	19033741	1218758	8852583	17
44	4653570	7649500	5257540	6429213	19020301	1220287	8851230	16
45	4656145	7643969	5261254	6422152	19006876	1221817	8849876	15
46	4658719	7638442	5264969	6415094	18993466	1223348	8848921	14
47	4661293	7632919	5268685	6408039	18980070	1224880	8847165	13
48	4663866	7627400	5272402	6400987	18966689	1226413	8845809	12
49	4666439	7621885	5276120	6393938	18953323	1227947	8844452	11
50	4669012	7616374	5279839	6386893	18939972	1229481	8843095	10
51	4671584	7610867	5283559	6379850	18926636	1231017	8841737	9
52	4674156	7605363	5287280	6372809	18913314	1232554	8840378	8
53	4676727	7599863	5291003	9365771	18900007	1234092	8839018	7
54	4679298	7592367	5294727	6358735	18886715	1235632	8837657	6
55	4681869	7588875	5298452	6351702	18873437	1237173	8836295	5
56	4684439	7583387	5302178	6344672	18860174	1238715	8834932	4
57	4687009	7577903	5305905	6337645	18846925	1240258	8833569	3
58	4689578	7572422	5309634	6330620	18833691	1241802	8832205	2
59	4692147	7566945	5313363	6323598	18820471	1243347	8830841	1
60	4694716	7561472	5317094	6316578	18807265	1233894	8829476	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	4694716	7561472	5317094	6316578	18807265	1244894	8829476	60
1	4697284	7556003	5320826	6309561	18794074	1246442	8828110	59
2	4699852	7550538	5324559	6302547	18780897	1247991	8826743	58
3	4702419	7645076	5328293	6295535	18767735	1249541	8835375	57
4	4804986	7539618	5332028	6288526	18754587	1251092	8824007	56
5	4707553	7534164	5335765	6281520	18741454	1252644	8822638	55
6	4710119	7528714	5339503	6274517	18728335	1254197	8821268	54
7	4712685	7523268	5343242	6267517	18715231	1255751	8819898	53
8	4715250	7517826	5346982	6260521	18702140	1257305	8818527	52
9	4717815	7512388	5350723	6253528	18689064	1258860	8817155	51
10	4720380	7506954	5354465	6246528	18676002	1260416	8815783	50
11	4722944	7501524	5358209	6239550	18662954	1261974	8814408	49
12	4725508	7496097	5361954	6232564	18649920	1263533	8813034	48
13	4728071	7490674	5365700	6225581	18636900	1265093	8811659	47
14	4730634	7485255	5369447	6218601	18623894	1266654	8810285	46
15	4733197	7479840	5373195	6211624	18610902	1268216	8808907	45
16	4735759	7474428	5376944	6204649	18597925	1269779	8807530	44
17	4738321	7469020	5380694	6197676	18584962	1271344	8806152	43
18	4740882	7463616	5384445	6190706	18572013	1272910	8804773	42
19	4743443	7458216	5388198	6183739	18559078	1274477	8803394	41
20	4746004	7452819	5391952	6176774	18546157	1276045	8802014	40
21	4748564	7447426	5395707	6169812	18533250	1277614	8800633	39
22	4751124	7442037	5399463	6162853	18520357	1279184	8799251	38
23	4753683	7436651	5403221	6155896	18507478	1280755	8797869	37
24	3756242	7431269	5406980	6148942	18494612	1282327	8796486	36
25	4758801	7425891	5410740	6141991	18481760	1283900	8795102	35
26	4761359	7420517	5414501	6135063	18468922	1285474	8793717	34
27	4763917	7415146	5418263	6128096	18456094	1287050	8792332	33
28	4766474	7409779	5422026	6121152	18443287	1288627	8790946	32
29	4769031	7404416	5425791	6114211	18430490	1290205	8789559	31
30	4771588	7399057	5429557	6107273	18417707	1291784	8788171	30
31	4774144	7393701	5433324	6100337	18404938	1293364	8786782	29
32	4776700	7388349	5437092	6093404	18392182	1294945	8785393	28
33	4779255	7483001	5440861	6086474	18379440	1296527	8784003	27
34	4781810	7377657	5444632	6079547	18366712	1298110	8782613	26
35	4784365	7372316	5448404	6072622	18353997	1299694	8781222	25
36	4786919	7366979	5452177	6065700	18341296	1301279	8779830	24
37	4789473	7361646	5455951	6058781	18328608	1302865	8778437	23
38	4792026	7356316	5459726	6051863	18315934	1304453	8777044	22
39	4794579	7350990	5463503	6044948	18303273	1306042	8775650	21
40	4797132	7345668	5467281	6038036	18290626	1307632	8774255	20
41	4799684	7340349	5471060	6031126	18277992	1309223	8772859	19
42	4802236	7335034	5474840	6024219	18265372	1310815	8771462	18
43	4804787	7329723	5478621	6017315	18252765	1312408	8770065	17
44	4807338	7324415	5482404	6010413	18240171	1314002	8768667	16
45	4809888	7319111	5486188	6003514	18227591	1315597	8767267	15
46	4812438	7313811	5489973	5996618	18215024	1317193	8765868	14
47	4814988	7308514	5493759	5989723	18202470	1318791	8764468	13
48	4817537	7303221	5497546	5982831	18189930	1320390	8763068	12
49	4820086	7297931	5501335	5975941	18177403	1321990	8761665	11
50	4822633	7292645	5505125	5969054	18164889	1323591	8760263	10
51	4825183	7287363	5508916	5962170	18152388	1325193	8758860	9
52	4827731	7282084	5512708	5955288	18139901	1326796	8757456	8
53	4830278	7276809	5516501	5948409	18127427	1328400	8756051	7
54	4832825	7271538	5520296	5941533	18114966	1330005	8754646	6
55	4835371	7266270	5524092	5934659	18102518	1331611	8753240	5
56	4837917	7261006	5527889	5927787	18090084	1333219	8751833	4
57	4840462	7255746	5531687	5920918	18077663	1334828	8750425	3
58	4843007	7250489	5535487	5914051	18065255	1336438	8749016	2
59	4845552	7245236	5539288	5907187	18052860	1338049	8747607	1
60	4848096	7239987	5543090	5900326	18040478	1339661	8746197	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes.	Differentia & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	4848096	7239987	5543090	5900326	18040478	1339661	8746197	60
1	4850640	7234712	5546893	5893468	18028109	1341274	8744787	59
2	4853184	7229500	5550697	5886612	18015753	1342888	8743376	58
3	4855727	7224262	5554503	5879759	18003410	1344503	8741964	57
4	4858270	7219027	5558310	5872906	17991079	1346119	8740551	56
5	4860812	7213795	5562118	5866059	17978761	1347736	8739137	55
6	4863354	7208567	5565927	5859213	17966456	1349354	8737722	54
7	4865895	7203342	5569738	5852368	17954164	1350974	8736307	53
8	4868436	7198121	5573550	5845526	17941885	1352595	8734891	52
9	4870977	7192903	5577363	5838686	17929618	1354217	8733475	51
10	4873517	7187689	5581177	5831849	17917364	1355840	8732058	50
11	4876057	7182478	5584993	5825014	17905123	1357464	8730640	49
12	4878596	7177271	5588810	5818182	17892894	1359089	8729221	48
13	4881135	7172068	5592628	5811353	17880678	1360715	8727801	47
14	4883674	7166868	5596447	5804526	17868475	1362342	8726381	46
15	4886212	7161672	5600268	5897701	17856285	1363971	8724960	45
16	4888750	7156480	5604090	5790879	17844107	1365601	8723538	44
17	4891287	7151291	5607913	5784059	17831942	1367232	8722116	43
18	4893824	7146106	5611737	5777242	17819790	1368864	8720693	42
19	4896361	7140924	5615562	5770427	17807651	1370497	8719269	41
20	4898897	7135746	5619388	5763615	17795524	1372131	8717844	40
21	4901433	7130572	5623216	5756806	17783410	1373766	8716418	39
22	4903968	7125401	5627045	5749999	17771309	1375402	8714992	38
23	4906503	7120234	5630875	5743195	17759220	1377039	8713565	37
24	4909037	7115070	5634707	5736392	17747143	1378678	8712138	36
25	4911571	7109909	5638540	5729591	17735079	1380318	8710710	35
26	4914105	7104752	5642374	5722793	17723027	1381959	8709281	34
27	4916638	7099598	5646210	5715997	17710987	1383601	8707851	33
28	4919171	7094448	5650047	5709204	17698960	1385244	8706420	32
29	4921703	7089301	5653885	5702413	17686945	1386888	8704989	31
30	4924235	7084158	5657725	5695625	17674941	1388533	8703557	30
31	4926767	7079018	5661566	5688839	17662951	1390179	8702124	29
32	4929298	7073882	5665408	5682056	17650972	1391826	8700691	28
33	4631829	7068749	5669251	5675275	17639006	1393474	8699257	27
34	4934359	7063620	5673096	5668496	17627052	1395123	8697822	26
35	4936889	7058494	5676942	5661719	17615111	1396775	8696386	25
36	4939418	7053372	5680789	5654945	17603182	1398427	8694949	24
37	4941947	7048253	5684637	5648173	17591266	1400080	8693512	23
38	4944476	7043138	5688486	5641404	17579362	1401734	8692074	22
39	4947004	7038026	5692337	5634637	17567470	1403389	8690636	21
40	4949532	7032918	5696189	5627873	17555591	1405045	8689197	20
41	4952059	7027814	5700043	5621111	17543724	1406703	8687757	19
42	4954586	7022713	5703898	5614351	17531869	1408362	8686316	18
43	4957113	7017615	5707754	5607593	17520026	1410022	8684873	17
44	4959639	7012521	5711611	5600838	17508189	1411683	8683431	16
45	4962165	7007430	5715469	5594085	17496369	1413345	8681988	15
46	4964690	7002342	5719329	5587334	17484559	1415008	8680544	14
47	4967215	6997258	5723190	5580586	17472764	1416672	8679100	13
48	4969740	6992177	5727052	5573840	17460981	1418337	8677655	12
49	4972264	6987099	5730916	5567095	17449210	1420004	8676209	11
50	4974788	6982025	5734781	5560353	17437451	1421672	8674762	10
51	4977311	6576954	5738647	5553613	17425704	1423341	8673314	9
52	4979834	6971886	5742515	5546875	17413969	1425011	8671866	8
53	3982356	6966822	5746384	5540140	17402246	1426682	8670417	7
54	4984878	6961761	5750254	5533407	17390534	1428354	8668968	6
55	4987399	6956704	5754125	5526677	17378834	1430027	8667518	5
56	4989920	6951650	5757998	5519949	17367146	1431701	8666067	4
57	4992441	6946600	5761872	5513224	17355469	1433376	8664615	3
58	4994961	6941553	5765747	5506500	17343804	1435053	8663162	2
59	4997481	6936509	5769624	5499778	17332150	1436731	8661708	1
60	5000000	6931469	5773502	5493059	17320508	1438410	8660254	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	5000000	6931409	5773502	5493059	17320508	1438410	8660254	60
1	5002519	6926432	5777381	5486342	17308878	1440090	8658799	59
2	5005038	6921399	5781262	5479628	17297258	1441771	8657344	58
3	5007556	6916369	5785144	5472916	17285651	1443453	8655888	57
4	5010074	6911342	5789027	5466206	17274056	1445136	8654431	56
5	5012591	6906319	5792911	5459498	17262473	1446821	8652972	55
6	5015108	6901299	5796797	5452792	17250902	1448507	8651514	54
7	5017624	6896282	5800684	5446088	17239342	1450194	8650055	53
8	5020140	6891269	5804572	5439387	17227794	1451882	8648595	52
9	5022656	6886259	5808462	5432688	17216258	1453571	8647134	51
10	5025171	6881253	5812353	5425992	17204734	1455261	8645673	50
11	5027686	6876250	5816245	5419298	17193222	1456952	8644211	49
12	5030200	6871250	5820139	5412605	17181721	1458645	8642748	48
13	5032714	6866254	5824034	5405915	17170231	1460339	8641284	47
14	5035227	6861261	5827930	5399227	17158752	1462034	8639820	46
15	5037740	6856271	5831828	5392541	17147285	1463730	8638355	45
16	5040253	6851285	5835727	5385858	17135829	1465427	8636889	44
17	5042765	6846302	5839627	5379177	17124384	1467125	8635423	43
18	5045277	6841323	5843528	5372499	17112950	1468824	8633956	42
19	5047788	6836347	5847431	5365822	17101527	1470525	8632488	41
20	5050299	6831374	5851335	5359147	17090115	1472227	8631019	40
21	5052809	6826405	5855241	5352475	17078714	1473930	8629549	39
22	5055319	6821439	5859148	5345805	17067325	1475634	8628079	38
23	5057829	6816476	5863056	5339137	17055957	1477339	8626608	37
24	5060338	6811516	5866966	5332471	17044591	1479045	8625137	36
25	5062847	6806560	5870877	5325808	17033236	1480752	8623665	35
26	5065355	6801607	5874789	5319147	17021892	1482460	8622192	34
27	5067862	6796657	5878702	5312488	17010560	1484169	8620718	33
28	5070370	6791710	5882617	5305831	16999239	1485879	8619243	32
29	5072877	6786767	5886533	5299177	16987929	1487590	8617768	31
30	5075384	6781827	5890450	5292525	16976631	1489302	8616292	30
31	5077890	6776890	5894369	5285874	16965344	1491016	8614815	29
32	5080396	6771956	5898289	5279225	16954068	1492731	8613338	28
33	5082901	6767026	5902211	5272579	16942803	1494447	8611860	27
34	5085406	6762099	5906134	5265934	16931549	1496165	8610381	26
35	5087911	6757175	5910058	5259291	16920306	1497884	8608901	25
36	5090415	6752255	5913984	5252651	16909074	1499604	8607420	24
37	5092919	6747338	5917911	5246013	16897853	1501325	8605939	23
38	5095422	6742424	5921839	5239377	16886644	1503047	8604457	22
39	5097925	6737513	5925769	5232743	16875446	1504770	8602975	21
40	5100427	6732606	5929700	5226112	16864259	1506494	8601492	20
41	5102929	6727702	5933633	5219482	16853083	1508220	8600008	19
42	5105430	6722802	5937567	5212855	16841918	1509947	8598523	18
43	5107930	6717905	5941502	5206230	16830764	1511675	8597037	17
44	5110431	6713011	5945438	5199607	16819621	1513404	8595551	16
45	5112931	6708120	5949376	5192986	16808489	1515134	8594064	15
46	5115431	6708232	5953315	5186367	16797367	1516865	8592577	14
47	5117930	6698348	5957255	5179751	16786256	1518597	8591089	13
48	5120429	6693467	5961197	5173137	16775156	1520330	8589600	12
49	5122927	6688589	5965140	5166525	16764067	1522064	8588110	11
50	5125425	6683714	5969084	5159914	16752989	1523800	8586619	10
51	5127922	6678842	5973030	5153305	16741922	1525537	8585127	9
52	5130419	6673974	5976776	5146699	16730866	1527275	8583635	8
53	5132916	6669109	5980926	5140095	16719820	1529014	8582142	7
54	5135412	6664247	5984876	5133493	16708785	1530754	8580649	6
55	5137908	6659388	5988827	5126892	16697760	1532496	8579155	5
56	5140403	6654532	5992780	5120293	16686746	1534239	8577660	4
57	5142898	6649680	5996734	5113697	16675742	1535983	8576164	3
58	5145393	6644831	6000690	5107103	16664749	1537728	8574668	2
59	5147887	6639985	6004647	5100511	16653766	1539474	8573171	1
60	5150381	6635142	6008606	5093921	16642794	1541221	8571673	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes.	Differentia & Logarit. Tangent.	Tangentes.	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	5150381	6635142	6008606	5093921	16642794	1541221	8571673	60
1	5152874	6630302	6012566	5087332	16631833	1542970	8570175	59
2	5155367	6625465	6016528	5080745	16620882	1547720	8568676	58
3	5157859	6620631	6020491	5074160	16609942	1546471	8567176	57
4	5160351	6615801	6024455	5067578	16599013	1548223	8565675	56
5	5162843	6610974	6028420	5060998	16588094	1549976	8564173	55
6	5165333	6606150	6032387	5054420	16577186	1551730	8562671	54
7	5167825	6601329	6036355	5047844	16566289	1553485	8561168	53
8	5170315	6596512	6040324	5041271	16555402	1555241	8559664	52
9	5172805	6591698	6044295	5034700	16544526	1556998	8558160	51
10	5175294	6586887	6048267	5028130	16533660	1558757	8556655	50
11	5177783	6582079	6052241	5021562	16522805	1560517	8555149	49
12	5180271	6577275	6056216	5014997	16511960	1562278	8553643	48
13	5182759	6572474	6060193	5008434	16501126	1564040	8552136	47
14	5185246	6567676	6064171	5001873	16490302	1565803	8550628	46
15	5187733	6562881	6068150	4995313	16479488	1567568	8549119	45
16	5190220	6558089	6072131	4988755	16468685	1569334	8547609	44
17	5192706	6553300	6076113	4982199	16457892	1571101	8546099	43
18	5195192	6548514	6080096	4975645	16447109	1572869	8544588	42
19	5197676	6543731	6084081	4969093	16436337	1574638	8543077	41
20	5200162	6538951	6088067	4962543	16425575	1576408	8541565	40
21	5202646	6534174	6092055	4955994	16414824	1578180	8540052	39
22	5205130	6529400	6096044	4949447	16404083	1579953	8538538	38
23	5207614	6524629	6100035	4942902	16393352	1581727	8537024	37
24	5210097	6519862	6104027	4936360	16382631	1583502	8535509	36
25	5212580	6515098	6108020	4929820	16371920	1585278	8533993	35
26	5215062	6510337	6112015	4923282	16361219	1587055	8532476	34
27	5217544	6505580	6116011	4916747	16350528	1588833	8530958	33
28	5220025	6500826	6120009	4910213	16339847	1590613	8529440	32
29	5222506	6496075	6124008	4903681	16329176	1592394	8527921	31
30	5224986	6491327	6128008	4897151	16318516	1594176	8526402	30
31	5227466	6486583	6132010	4890624	16307866	1595959	8524882	29
32	5229946	6481842	6136013	4884098	16297226	1597744	8523361	28
33	5232425	6477103	6140018	4877573	16286596	1599530	8521839	27
34	5234904	6472367	6144024	4871050	16275976	1601317	8520317	26
35	5237382	6467634	6148032	4864529	19265366	1603105	8518794	25
36	5239860	6462904	6152041	4858010	16254766	1604894	8517270	24
37	5242337	6458177	6156052	4851493	16244176	1606684	8515745	23
38	5244814	6453453	6160064	4844978	16233597	1608475	8514220	22
39	5247290	6448732	6164077	4838465	16223028	1610267	8512094	21
40	5249766	6444014	6168092	4831954	16212469	1612060	8511167	20
41	5252241	6439299	6172108	4825444	16201920	1613855	8509639	19
42	5254716	6434588	6176126	4818937	16191381	1615651	8508111	18
43	5257191	6429880	6180145	4812432	16180852	1617448	8506582	17
44	5259665	6425175	6184168	4805929	16170332	1619246	8505052	16
45	5262139	6420473	6188190	4799427	16159822	1621046	8503522	15
46	5264612	6415774	6192213	4792927	16149322	1622847	8501991	14
47	5267085	6411078	6196237	4786429	19138832	1624649	8500459	13
48	5269557	6406385	6200263	4779933	16128351	1626452	8498927	12
49	5272029	6401695	6204290	4773439	16117880	1628256	8497394	11
50	5274501	6397008	6208319	4766947	16107419	1630061	8495860	10
51	5276972	6392324	6212350	4760456	16096968	1631868	8494326	9
52	5279443	6387643	6216382	4753967	16086527	1633676	8492791	8
53	5281913	6382965	6220416	4747480	16076095	1635485	8491255	7
54	5284383	6378290	6224451	4740995	16065673	1637295	8489718	6
55	5286852	6373618	6228488	4734512	16055261	1639106	8488180	5
56	5289321	6368949	6232526	4728031	16044859	1640918	8486641	4
57	5291789	6364283	6236566	4721552	16034466	1642731	8485102	3
58	5294257	6359620	6240607	4715074	16024083	1644546	8483562	2
59	5296725	6354961	6244649	4708599	16013710	1646362	8482022	1
60	5299192	6350305	6248693	4702126	1600334	1648179	8480481	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiae & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	5299192	6350305	6248693	4702126	16003347	1648179	8480481	60
1	5301659	6345652	6252738	4695655	15992994	1649997	8478939	59
2	5304125	6341002	6256785	4689186	15982651	1651816	8477397	58
3	5306591	6336354	6260834	4682717	15972315	1653637	8475854	57
4	5309056	6331709	6264884	4676240	15961992	1655459	8474310	56
5	5311521	6327067	6268935	4669785	15951676	1657282	8472765	55
6	5313985	6322428	6272988	4663322	15941370	1659106	8471219	54
7	5316449	6317792	6277042	4656861	15931073	1660931	8469673	53
8	5318913	6313159	6281098	4750402	15920785	1662757	8468126	52
9	5321376	6308529	6285155	4643944	15910507	1664585	8466579	51
10	5323839	6303902	6289214	4637488	15900238	1666414	8465031	50
11	5326301	6299278	6293274	4631034	15889979	1668244	8463482	49
12	5328763	6294657	6297336	4624582	15879729	1670075	8461932	48
13	5331224	6190039	6301399	4618131	15869489	1671908	8460381	47
14	5333685	6285424	6305464	4611682	15859259	1673742	8458830	46
15	5336145	6280812	6309530	4605235	15849038	1675577	8457278	45
16	5338605	6276203	6313598	4598790	15838827	1677413	8455725	44
17	5341065	6271597	6317667	4592347	15828625	1679250	8454172	43
18	5343524	6266994	6321738	4585906	15818435	1681088	8452618	42
19	5345983	6262394	6325810	4579467	15808251	1682927	8451064	41
20	5348441	6257797	6329883	4573030	15798078	1684767	8449509	40
21	5350898	6253203	6333958	4566594	15787915	1686609	8447955	39
22	5353355	6248612	6338034	4560160	15777761	1688452	8446396	38
23	5355812	6244024	6342112	4553728	15767616	1690296	8444838	37
24	5358268	6239439	6346191	4547298	15757480	1692141	8443280	36
25	5360724	6234857	6350272	4540859	15747353	1693988	8441721	35
26	5363179	6230278	6354355	4534442	15737285	1695836	8440161	34
27	5365634	6225702	6358439	4528017	15727127	1697685	8438600	33
28	5368088	6221129	6362525	4521594	15717028	5699535	8437039	32
29	5370542	6216559	6366613	4515172	15706938	1701387	8435477	31
30	5372996	6211992	6370702	4508752	15696857	1703240	8433915	30
31	5375449	6207427	6374792	4502333	15686786	1705094	8432352	29
32	5377902	6202865	6378884	4495916	15676724	1706949	8430788	28
33	5380354	6198306	6382977	4489501	15666671	1708805	8429223	27
34	5382806	6293750	6387072	4483088	15656627	1710662	8427658	26
35	5385258	6189197	6391169	4476676	15646592	1712521	8426092	25
36	5387709	6184647	6395267	4470266	15636566	1714381	8424525	24
37	5390159	6180100	6399300	4463858	15626549	1716242	8422957	23
38	5392609	6175556	6403467	4457452	15616541	1718104	8421389	22
39	5395058	6171015	6407569	4451048	15606542	1719967	8419820	21
40	5397507	6166477	6411673	4444646	15596552	1721831	8418250	20
41	5399855	6161942	6415779	4438245	15586571	1723697	8416679	19
42	5402403	6157409	6419886	4431845	15576599	1725564	8415108	18
43	5404851	6152879	6423995	4425447	15566636	1727432	8413536	17
44	5407298	6148352	6428105	4419051	15556682	1729301	8411963	16
45	5409745	6143828	6432216	4412656	15546738	1731172	8410390	15
46	5412191	6139307	6436329	4406263	15536803	1733044	8408816	14
47	5414637	6134789	6440444	4399872	15526877	1734917	8407241	13
48	5417082	6130274	6444560	4393483	15516960	1736791	8405666	12
49	5419527	6125762	6448678	4387096	15507052	1738666	8404090	11
50	5421972	6121253	6452798	4380711	15497153	1740542	8402513	10
51	5424416	6116747	6456919	4374327	15487263	1742420	8400935	9
52	5426859	6112244	6461042	4367945	15477382	1744299	8399357	8
53	5429302	6107744	6465166	4361565	15467510	1746179	8397778	7
54	5431743	6103246	6469292	4355186	15457646	1748060	8396199	6
55	5434186	6098751	6473419	4348809	15447791	1749942	8394619	5
56	5436629	6094259	6477548	4342433	15437945	1751826	8393038	4
57	5439070	6089770	6481678	4336059	15428108	1753711	8391456	3
58	5441510	6085284	6485809	4329687	15418280	5755597	8389873	2
59	5443950	6080800	6489942	4323316	15408461	1757484	8388290	1
60	5446390	6076319	6494076	4316947	15398651	1759372	8386706	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	5446390	6076319	6494076	4316947	15398651	1759372	8386700	60
1	5448829	6071841	6498212	4310579	15388850	1761262	8385121	59
2	5451268	6067366	6502350	4304213	15379057	1763153	8383536	58
3	5453707	6062894	6506489	4297849	15369273	1765045	8381950	57
4	5456145	6058425	6510630	4291487	15359497	1766938	8380363	56
5	5458583	6053958	6514773	4285126	15349730	1798832	8378776	55
6	5461020	6049494	6518917	4278766	15339972	1770728	8377188	54
7	5463456	6045033	6523063	4272408	15330222	1772625	8375599	53
8	5465892	6040575	6527210	4266052	15320481	1774523	8374009	52
9	5468328	6036120	6531359	4259698	15310748	1776422	8372419	51
10	5470763	6031668	6535510	4253346	15301024	1778322	8370828	50
11	5473198	6027218	6539662	4246994	15291309	1780224	8369236	49
12	5475632	6022771	6543816	4240644	15281603	1782127	8367644	48
13	5478066	6018327	6547971	4234296	15271905	1784031	8366051	47
14	5480499	6013886	6552128	4227950	15262216	1785936	8364457	46
15	5482932	6009448	6556287	4221605	15252535	1787843	8362862	45
16	5485364	6005013	6560447	4215262	15242863	1789751	8361266	44
17	5487796	6000580	6564609	4208920	15233200	1791660	8359670	43
18	5490228	5996150	6568772	4202580	15223545	1793570	8358073	42
19	5492659	5991723	6572937	4196241	15213899	1795482	8356476	41
20	5495090	5987299	6577103	4189904	15204261	1797395	8354878	40
21	5497520	5982878	6581271	4183569	15194632	1799309	8353279	39
22	5499950	5978460	6585440	4177236	15185011	1801224	8351680	38
23	5502379	5974044	6589611	4170904	15175398	1803140	8350080	37
24	5504808	5969631	6593784	4164573	15165794	1805058	8348479	36
25	5507236	5965221	6597958	4156244	15156199	1806977	8346877	35
26	5509664	5960814	6602134	4151917	15146612	1808897	8345274	34
27	5512091	5956409	6606312	4145591	15137034	1810818	8343671	33
28	5514518	5952007	6610491	4139267	15127464	1812740	8342067	32
29	5516944	5947608	6614672	4132944	15117903	1814664	8340463	31
30	5519370	5943212	6618855	4126623	15108351	1816589	8338858	30
31	5521795	5938829	6623039	4120314	15098807	1818515	8337252	29
32	5524220	5934438	6627225	4113996	15089271	1820442	8335646	28
33	5526645	5930050	6631413	4107680	15079744	1822370	8334039	27
34	5529069	5925665	6635603	4101366	15070225	1824299	8332431	26
35	5531493	5921272	6639792	4095043	15060714	1826230	8330822	25
36	5533916	5916893	6643984	4088731	15051211	1828162	8329212	24
37	5536338	5912516	6648178	4082421	15041717	1830095	8327602	23
38	5538760	5908142	6652373	4076115	15032231	1832029	8325991	22
39	5541182	5903771	6656570	4069807	15022753	1833964	8324380	21
40	5543603	5899402	6660768	4063501	15013283	1835901	8322768	20
41	5546024	5895036	6664968	4057197	15003821	1837839	8321155	19
42	5548444	5890673	6669170	4050895	14994368	1839778	8319541	18
43	5550864	5886313	6673373	3044594	14984923	1841719	8317927	17
44	5553283	5881955	6677578	4038294	14975486	1843661	8316312	16
45	5555702	5877600	6681785	4031996	14966058	1845604	8314696	15
46	5558120	5873248	6685994	4025700	14956638	1847548	8313079	14
47	5560538	5868899	6690204	4019405	14947226	1849494	8311462	13
48	5962956	5864552	6694416	4013111	14937822	1851441	8309844	12
49	5565373	5860208	6698630	4006819	14928426	1853389	8308226	11
50	5567790	5855867	6702845	4000529	14919038	1855338	8306607	10
51	5570206	5851529	6707062	3994241	14909659	1857288	8304987	9
52	5572622	5847193	6711281	3987953	14900288	1859240	8303367	8
53	5575037	5842860	6715501	3981667	14890925	1861193	8301746	7
54	5577452	5838530	6719723	3975383	14881570	1863147	8300124	6
55	5579866	5834203	6723946	3969101	14872223	1865102	8298501	5
56	5582280	5829878	6728171	3962819	14862884	1867059	8296877	4
57	5584693	5825556	6732397	3956539	14853553	1869017	8295253	3
58	5587105	5821237	6736625	3950261	14844230	1870976	8293628	2
59	5589518	5816920	6740854	3943984	14834916	1872936	8292002	1
60	5591929	5812606	6745085	3937709	14825610	1874897	8290376	0

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentia & Logarit. Tangent.	Tangentes.	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	5591929	5812606	6745085	3937709	14825610	1874897	8290376	60
1	5594340	5808295	6749318	3931435	14816312	1876860	8288794	59
2	5596751	5803987	6753553	3925163	14807022	1878824	8287121	58
3	5599161	5799681	6757789	3918892	14797740	1880789	8285493	57
4	5601571	5795378	6762027	3912623	14788466	1882755	8283864	56
5	5603981	5791078	6766267	3906355	14779200	1884723	8282234	55
6	5606390	5786780	6770508	3900088	14769941	1886692	8280603	54
7	5608798	5782485	6774751	3893823	14760690	1888662	8278972	53
8	5611206	5778192	6778996	3887559	14751447	1890633	8277340	52
9	5613614	5773902	6783243	3881297	14742212	1892605	8275708	51
10	5616021	5769615	6787491	3875036	14732985	1894579	8274075	50
11	5618427	5765330	6791741	3868776	14723765	1896554	8272441	49
12	5620833	5761048	6795993	3862518	14714553	1898530	8270806	48
13	5623239	5756769	6800246	3856261	14705349	1900508	8269170	47
14	5625644	5752493	6804501	3850006	14696153	1902487	8267534	46
15	5628049	5748219	6808758	3843752	14686965	1904467	8265897	45
16	5630453	5743948	6813016	3837500	14677785	1906448	8264259	44
17	5632857	5739680	6817276	3831249	14668613	1908431	8262621	43
18	5635260	5735414	6821538	3824999	14659449	1910415	8260982	42
19	5637663	5731151	6825801	3818751	14650293	1912400	8259343	41
20	5640066	5726891	6830066	3812505	14641146	1914386	8257703	40
21	5642468	5722634	6834333	3806261	14632007	1916373	8256062	39
22	5644869	5718379	6838602	3800017	14622875	1918362	8254421	38
23	5647270	5714127	6842872	3793775	14613750	1920352	8252779	37
24	5649670	5709878	6847144	3787538	14604633	1922343	8251136	36
25	5652070	5705631	6851417	3781296	14595523	1924335	8249492	35
26	5654469	5701387	6855692	3775059	14586421	1926328	8247847	34
27	5656868	5697145	6859969	3768822	14577327	1928323	8246202	33
28	5659266	5692906	6864247	3762587	14568241	1930319	8244556	32
29	5661665	5688670	6868527	3756354	14559162	1932316	8242909	31
30	5664062	5684436	6872809	3750122	14550091	1934314	8241262	30
31	5666459	5680205	6877093	3743891	14541028	1936314	8239614	29
32	5668856	5675976	6881379	3737661	14531972	1938315	8237965	28
33	5671252	5671750	6885666	3731433	14522924	1940317	8236316	27
34	5673648	5667527	6889955	3725206	14513883	1942321	8234666	26
35	5676043	5663306	6894246	3718980	14504850	1944326	8233015	25
36	5678438	5659088	6898539	3712756	14495825	1946332	8231363	24
37	5680832	5654872	6902833	3706532	14486807	1948340	8229711	23
38	5683226	5650659	6907129	3700310	14477797	1950349	8228058	22
39	5685619	5646449	6911426	3694090	14468794	1952359	8226405	21
40	5688012	5642241	6915725	3687871	14459799	1954370	8224751	20
41	5690404	5638036	6920026	3681653	14450812	1956383	8223096	19
42	5692796	5633834	6924329	3675437	14441833	1958398	8221440	18
43	5695187	5629635	6928634	3669223	14432861	1960412	8219784	17
44	5697578	5625438	6932940	3663010	14423896	1962428	8218127	16
45	5699968	5621244	6937248	3656799	14414939	1964445	8216469	15
46	5702358	5617052	6941558	3650588	14405990	1966464	8214810	14
47	5704747	5612863	6945869	3641379	14397048	1968484	8213151	13
48	5707136	5608676	6950182	3638171	14388113	1970505	8211491	12
49	5709524	5604492	6954497	3634965	14379186	1972527	8209831	11
50	5711912	5600311	6958813	3625761	14370266	1974550	8208170	10
51	5714299	5596132	6963131	3619557	14361354	1976575	8206508	9
52	5716686	5591956	6967451	3613355	14352451	1978601	8204846	8
53	5719072	5587782	6971773	3607154	14343552	1980628	8203183	7
54	5721458	5583611	6976097	3600954	14334662	1982657	8201519	6
55	5723844	5579443	6980423	3594756	14325780	1984687	8199854	5
56	5726229	5575277	6984750	3588559	14316905	1986718	8198188	4
57	5728613	5571114	6989079	3582364	14308037	1988750	8196522	3
58	5730997	5566953	6993409	3576169	14299177	1990784	8194855	2
59	5733381	5562795	6997741	3569976	14290325	1992819	8193188	1
60	5735764	5558639	7002075	3563784	14281480	1994855	8191520	0
								M.

M	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiae & Logarit Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	5735764	5558639	7002075	3563784	14281480	1994855	8191520	60
1	5738147	5554486	7006411	3557594	14272643	1996892	8189851	59
2	5740529	5550336	7010749	3551405	14263813	1998931	8188182	58
3	5742911	5546188	7015088	3545217	14254990	2000971	8186512	57
4	5745292	5542043	7019429	3539031	14246174	2003012	8184841	56
5	5747672	5537900	7023772	3531846	14237365	2005054	8183170	55
6	5750052	5533760	7028117	3526662	14228563	2007098	8181498	54
7	5752432	5529622	7032463	3520479	14219769	2009143	8179825	53
8	5754811	5525487	7036811	3514298	14210982	2011189	8178151	52
9	5757190	5521354	7041161	3508118	14202202	2017236	8176477	51
10	5759568	5517224	7045513	3501939	14193429	2015285	8174802	50
11	5761946	5513096	7049867	3495761	14184663	2017335	8173126	49
12	5764323	5508971	7054223	3489585	14175904	2019386	8171449	48
13	5766700	5504849	7058581	3483410	14167153	2021439	8169772	47
14	5769076	5500729	7062940	3477236	14158409	2023493	8168094	46
15	5771452	5466612	7067301	3471064	14149672	2025548	8166416	45
16	5773827	5492497	7071664	3464892	14140943	2027605	8164737	44
17	5776202	5488385	7076029	3458722	14132221	2029663	8163057	43
18	5778576	5484275	7080395	3452553	14123506	2031722	8161376	42
19	5780950	5480168	7084763	3446386	14114708	2033782	8159695	41
20	5783324	5476063	7089133	3440219	14106097	2035844	8158013	40
21	5785697	5471961	7093505	3434054	14097402	2037907	8156330	39
22	5788069	5467861	7097879	3427890	14088715	2039971	8154647	38
23	5790441	5463764	7102254	3421728	14080035	2042036	8152963	37
24	5792812	5459669	7106631	3415566	14071363	2044103	8151278	36
25	5795183	5455577	7111010	3409406	14062699	2046171	8149593	35
26	5797553	5451488	7115391	3403248	14054040	2048240	8147907	34
27	5799923	5447401	7119773	3397090	14045389	2050311	8146220	33
28	5802292	5443317	7124157	3390934	14036746	2052383	8144532	32
29	5804661	5439235	7128543	3384779	14028110	2054456	8142844	31
30	5807030	5435156	7132931	3378626	14019481	2056530	8141155	30
31	5809398	5431079	7137321	3372473	14010859	2058606	8139465	29
32	5811766	5427005	7141713	3366422	14002244	2060683	8137775	28
33	5814133	5422933	7146106	3360172	13993636	2062761	8136084	27
34	5816499	5418864	7150501	3354024	13985035	2064840	8134393	26
35	5818865	5414797	7154898	3347877	13976441	2066920	8132701	25
36	5821230	5410733	7159297	3341731	13967853	2069002	8131008	24
37	5823595	5406671	7163698	3335586	13959272	2071085	8129314	23
38	5825959	5402612	7168100	3329443	13950698	2073169	8127620	22
39	5828323	5398555	7172504	3323300	13942131	2075255	8125925	21
40	5830687	5394591	7176910	3317159	13933571	2077342	8124229	20
41	5833050	5390449	7181318	3311019	13925017	2079430	8122532	19
42	5835412	5386400	7185728	3304880	13916470	2081520	8120835	18
43	5837774	5382353	7190140	3298742	13907930	2083611	8119137	17
44	5840136	5378308	7194554	3292605	13899397	2085703	8117439	16
45	5842497	5374266	7198970	3286470	13890872	2087796	8115740	15
46	5844858	5370226	7203387	3280335	13882354	2089891	8114040	14
47	5847218	5366189	7207806	3274202	13873843	2091987	8112339	13
48	5849578	5362154	7212227	3268070	13865339	2094084	8110638	12
49	5851937	5358122	7216650	3261939	13856842	2096183	8108936	11
50	5854295	5354093	7221075	3255810	13848352	2098283	8107234	10
51	5856653	5350067	7225502	3249683	13839869	2100384	8105531	9
52	5859010	5346043	7229931	3243557	13831392	2102486	8103827	8
53	5861367	5342021	7234362	3237431	13822922	2104590	8102122	7
54	5863724	5338002	7238794	3231307	13814459	2106695	8100417	6
55	5866080	5333985	7243228	3225184	13806002	2108801	8098711	5
56	5868436	5329970	7247664	3219061	13797552	2110909	8097004	4
57	5870791	5325958	7252102	3212940	13789109	2113018	8095296	3
58	5873145	5321948	7256541	3206820	13780673	2115128	8093588	2
59	5875499	5317940	7260982	3209700	13772243	2117240	8091879	1
60	5877852	5313935	7265424	3194582	13763820	2119353	8090170	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes.	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	5877852	5313935	7365424	3194582	13763820	2119353	8090170	60
1	5880205	5309932	7269869	3188465	13755403	2121467	8088460	59
2	5882558	5305932	7274316	3182350	13746993	2123582	8086749	58
3	5884910	5301935	7278765	3176236	13738590	2125699	8085038	57
4	5887262	5297940	7283216	3170123	13730194	2127817	8083325	56
5	5889613	5293947	7287669	3164011	13721805	2129936	8081613	55
6	5891964	5289957	7292124	3157900	13713422	2132057	8079899	54
7	5894314	5285969	7296581	3151790	13705046	2134179	8078185	53
8	5896664	5281984	7301040	3145682	13696677	2136302	8076470	52
9	5899013	5278001	7305501	3139575	13688315	2138426	8074754	51
10	5901361	5274020	7309963	3133468	13679959	2140552	8073038	50
11	5903709	5270042	7314427	3127363	13671610	2142679	8071321	49
12	5906056	5266066	7318893	3121259	13663268	2144807	8069603	48
13	5908403	5262092	7323361	3115155	13654932	2146937	8067885	47
14	5910750	5258121	7327831	3109053	13646602	2149068	8066166	46
15	5913096	5254152	7332303	3102952	13638279	2151200	8064446	45
16	5915442	5250186	7336777	3096853	13629963	2153333	8062726	44
17	5917787	5246222	7341253	3090754	13621653	2155468	8061005	43
18	5920132	5242261	7345731	3084657	13613350	2157604	8059283	42
19	5922476	5238302	7350210	3078561	13605054	2159741	8057561	41
20	5924820	5234346	7354691	3072466	13596764	2161880	8055838	40
21	5927163	5230392	7359174	3066372	13588481	2164020	8054114	39
22	5929505	5226441	7363659	3060280	13580204	2166161	8052389	38
23	5931847	5222492	7368146	4054188	13571934	2168304	8050664	37
24	5934189	5218545	7372635	3048097	13563670	2170448	8048938	36
25	5936530	5214601	7377126	3042008	13555413	2172593	8047212	35
26	5938871	5210659	7381619	3035919	13547162	2174740	8045485	34
27	5941211	5206720	7386114	3029832	13538918	2176888	8043757	33
28	5942551	5202783	7390611	3023749	13530680	2179037	8042028	32
29	5945890	5198848	7395110	3017660	13522449	2181188	8040299	31
30	5948228	5194916	7399610	3011576	13514224	2183340	8038569	30
31	5950566	5190986	7404112	3005493	13506006	2185493	8036838	29
32	5952904	5187059	7408616	2999412	13497794	2187647	8035107	28
33	5955241	5183134	7413122	2993331	13489589	2189803	8033375	27
34	5957578	5179211	7417630	2987251	13481390	2191960	8031642	26
35	5959914	5175291	7422140	2981173	13473197	2194118	8029909	25
36	5962250	5171373	7426652	2975095	13465011	2196278	8028175	24
37	5964585	5167457	7431167	2969018	13456832	2198439	8026440	23
38	5966919	5163544	7435684	2962943	13448659	2200601	8024705	22
39	5969253	5159633	7440203	2956868	13440492	2202765	8022969	21
40	5971586	5155724	7444724	2950794	13432331	2204930	8021232	20
41	5973919	5151818	7449246	2944722	13424177	2207096	8019494	19
42	5976251	5147914	7453770	2938650	13416029	2209264	8017756	18
43	5978583	5144012	7458296	2932579	13407888	2211433	8016017	17
44	5980915	5140113	7462824	2926510	13399753	2213603	8014278	16
45	5983246	5136216	7467354	2920442	13391624	2215774	8012538	15
46	5985577	5132322	7471886	2914375	13383502	2217947	8010797	14
47	5987907	5128430	7476420	2908309	13375386	2220121	8009056	13
48	5990237	5124540	7480956	2902244	13367276	2222296	8007314	12
49	5992566	5120653	7485494	2896180	13359172	2224473	8005571	11
50	5994894	5116768	7490033	2890117	13351075	2226651	8003828	10
51	5997222	5112886	7494574	2884056	13342984	2228830	8002084	9
52	5999549	5109006	7499117	2877995	13334899	2231011	8000339	8
53	6001876	5105128	7503663	2871935	13326821	2233193	7998593	7
54	6004202	5101253	7508211	2865877	13318749	2235376	7996847	6
55	6006528	5097380	7512761	2859819	13310683	2237561	7995100	5
56	6008853	5093509	7517313	2853762	13302624	2239747	7993352	4
57	6011178	5089641	7521867	2847706	13294571	2241935	7991604	3
58	60[illegible]502	5085775	7526423	2841651	13286524	2244124	7989855	2
59	6015826	5081911	7530981	2835597	13278483	2246314	7988105	1
60	6018150	5078050	7535541	2829544	13270448	2248506	7986355	0
								M.

M	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangente.	Differentiæ & Logarit Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	6018150	5078050	7535541	2829544	13270448	2248506	7986355	60
1	6020473	5074191	7540103	2823492	13262419	2250699	7984604	59
2	6022796	5070334	7544667	2817441	13254396	2252893	7982852	58
3	6025118	5066470	7549233	2811391	13246380	2255088	7981100	57
4	6027439	5062627	7553801	2805342	13238369	2257285	7979347	56
5	6029760	5058777	7558371	2799234	13230365	2259483	7977593	55
6	6032080	5054929	7562943	2793247	13222367	2261682	7975838	54
7	6034400	5051084	7567517	2787201	13214375	2263883	7974084	53
8	6036719	5047241	7572093	2781156	13206390	2266085	7972328	52
9	6039038	5043401	7576670	2775113	13198411	2268288	7970572	51
10	6041357	5039563	7581249	2769071	13190438	2270492	7968815	50
11	6043675	5035727	7585830	2763029	13182472	2272698	7967057	49
12	6045992	5031894	7590413	2756989	13174512	2274905	7965299	48
13	6048309	5028063	7594999	2750949	13166558	2277114	7963540	47
14	6050625	5024234	7599587	2744910	13158610	2279324	7961780	46
15	6052940	5020408	7604177	2738873	13150668	2281535	7960020	45
16	6055255	5016584	7608769	2732836	13142732	2283748	7958259	44
17	6057570	5012762	7613363	2726800	13134802	2285962	7956497	43
18	6059884	5008942	7617959	2720764	13126877	2288178	7954735	42
19	6062198	5005125	7622557	2714730	13118958	2290395	7952972	41
20	6064511	5001310	7627157	2708696	13111045	2292614	7951208	40
21	6066824	4997497	7631759	2702663	13103138	2294834	7949443	39
22	6069136	4993687	7636363	2696632	13095237	2297055	7947678	38
23	6071448	4989879	7640969	2690602	13087342	2299277	7945912	37
24	6073759	4986073	7645577	2684573	13079455	2301500	7944146	36
25	6076069	4982270	7650187	2678545	13071573	2303725	7942379	35
26	6078379	4978469	7654799	2672518	13063697	2305951	7940611	34
27	6080688	4974670	7659413	2666492	13055827	2308178	7938842	33
28	6082997	4970873	7664030	2660467	13047963	2310406	7937073	32
29	6085306	4967079	7668649	2654444	13040105	2312635	7935303	31
30	6087614	4963287	7673270	2648421	13032253	2314866	7933533	30
31	6089922	4959497	7677893	2642399	13024407	2317098	7931762	29
32	6092229	4955710	7682518	2636378	13016567	2319332	7929990	28
33	6094536	4951925	7687145	2630358	13008732	2321567	7928218	27
34	6096842	4948142	7691774	2624338	13000903	2323804	7926445	26
35	6099147	4944361	7696405	2618319	12993080	2326042	7924671	25
36	6101452	4940582	7701038	2612301	12985263	2328281	7922896	24
37	6103756	4936806	7705673	2606284	12977457	2330522	7921121	23
38	6106060	4933032	7710310	2600268	12969647	2372764	7919345	22
39	6108364	4929260	7714949	2594252	12961848	2335008	7917569	21
40	6110667	4925490	7719590	2588237	12954055	2337253	7915792	20
41	6112970	4921723	7724233	2582224	12946267	2339499	7914014	19
42	6115272	4917958	7728878	2576211	12938485	2341747	7912235	18
43	6117573	4914195	7733525	2570199	12930709	2343996	7910456	17
44	6119873	4910435	7738175	2564189	12922939	2346246	7908676	16
45	6122173	4906677	7742827	2558179	12915175	2348498	7906896	15
46	6124473	4902921	7747481	2552170	12907417	2350751	7905114	14
47	6126772	4899168	7752137	2546163	12899665	2353005	7903332	13
48	6129071	4895417	7756795	2540156	12891919	2355261	7901550	12
49	6131369	4891668	7761455	2534150	12884179	2357518	7899767	11
50	6133667	4887921	7766117	2528145	12876445	2359776	7897983	10
51	6135964	4884177	7770781	2522141	12868717	2362036	7896198	9
52	6138261	4880435	7775447	2516138	12860994	2364297	7894413	8
53	6140557	4876695	7780116	2510136	12853277	2366559	7892627	7
54	6142853	4872957	7784787	2504134	12845565	2368823	7897841	6
55	6145148	4869222	7789460	2498134	12837859	2371088	7889054	5
56	6147442	4865489	7794135	2492135	12830159	2373354	7887266	4
57	6149746	4861758	7798812	2486136	12822465	2375622	7885477	3
58	6152030	4858029	7803491	2480138	12814776	2377891	7883688	2
59	6154323	4854302	7808172	2474140	12807093	2380162	7881898	1
60	6156615	4850578	7812856	2468144	12799416	2382434	7880107	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes.	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	6156615	4850578	7812856	2468144	12799416	2382434	7880108	60
1	6158907	4846856	7817542	2462149	12791745	2384707	7878317	59
2	6161198	4843136	7822230	2456154	12784080	2386982	7876525	58
3	6163489	4839418	7826920	2450160	12776420	2389258	7874732	57
4	6165781	4835702	7831612	2444167	12768765	2391535	7872939	56
5	6168070	4831989	7836306	1438175	12761116	2393814	7871145	55
6	6170259	4828278	7841002	2432184	12753473	2396094	7869350	54
7	6172648	4824569	7845700	2426193	12745835	2398376	7867555	53
8	6174936	4820862	7850400	2420203	12738203	2400659	7865759	52
9	6177224	4817158	7855102	2414215	12730577	2402943	7863963	51
10	6179512	4813456	7859807	2408227	12722956	2405229	7862166	50
11	6181799	4809756	7864514	2402240	12715341	2407516	7860368	49
12	6184085	4806058	7869223	2396254	12707732	2409804	7858569	48
13	6186371	4802363	7873934	2390269	12700128	2412094	7856770	47
14	6188656	4798670	7878647	2384285	12692530	2414385	7854970	46
15	6190940	4794979	7883363	2378301	12684937	2416678	7853169	45
16	6193224	4791290	7888081	2372318	12677350	2418972	7851368	44
17	6195508	4787603	7892801	2366336	12669769	2421267	7849566	43
18	6197791	4783919	7897523	2360355	12662194	2423564	7847764	42
19	6200074	4780237	7902247	2354375	12654624	2425862	7845961	41
20	6202356	4776557	7906973	2348396	12647060	2428161	7844157	40
21	6204638	4772880	7911702	2342418	12639501	2430462	7842352	39
22	6206919	4769205	7916433	2336441	12631948	2432764	7840547	38
23	6209199	4765532	7921166	2330465	12624400	2435067	7838741	37
24	6211479	4761861	7925901	2324489	12616858	2437372	7836935	36
25	6213758	4758192	7930638	2318514	12609321	2439678	7835128	35
26	6216037	4754525	7935378	2312539	12601790	2441986	7833320	34
27	6218315	4750860	7940120	2306565	12594265	2444295	7831511	33
28	6220593	4747198	7944864	2300593	12586746	2446605	7829702	32
29	6222870	4743538	7949610	2294621	12579232	2448917	7827892	31
30	6225146	4739880	7954358	2288650	12571724	2451230	7826082	30
31	6227422	4736224	7959109	2282680	12564222	2453544	7824271	29
32	6229698	4732571	7963862	2276711	12556725	2455860	7822459	28
33	6231973	4728920	7968617	2270743	12549234	2458177	7820647	27
34	6234248	4725271	7973374	2264775	12541746	2460496	7818834	26
35	6236522	4721624	7978133	2258808	12534264	2462816	7817020	25
36	6238796	4717979	7982895	2252842	12526787	2465137	7815205	24
37	6241069	4714336	7987659	2246876	12519316	2467460	7813390	23
38	6343342	4710695	7992425	2240911	12511850	2466784	7811574	22
39	6245614	4707056	7997193	2234946	12504389	2472110	7809758	21
40	6247885	4703419	8001963	2228982	12496934	2474437	7807941	20
41	6250156	4699785	8006736	2223020	12489484	2476765	7806123	19
42	6252426	4696153	8011511	2217058	12482039	2479095	7804304	18
43	6254696	4692523	8016288	2211097	12474600	2481426	7802485	17
44	6256966	4688895	8021067	2205136	12467167	2484759	7800665	16
45	6259235	4685269	8025849	2199176	12459739	2486093	7798845	15
46	6261503	4681645	8030633	2193217	12452317	2488428	7797024	14
47	6263771	4678024	8035419	2187259	12444900	2490765	7795202	13
48	6266038	4674405	8040207	2181302	12437489	2493103	7793380	12
49	6268305	4670788	8044997	2175345	12430083	2495443	7791557	11
50	6270572	4667173	8049790	2169389	12422683	2497784	7789733	10
51	6272838	4663561	8054585	2163435	12415288	2500126	7787909	9
52	6275103	4659951	8059382	2157481	12407900	2502470	7786084	8
53	6277368	4656343	8064181	2151528	12400515	2504815	7784258	7
54	6279632	4652737	8068983	2145575	12393136	2507162	7782432	6
55	6281895	4649133	8073787	2139623	12385762	2509510	7780605	5
56	6284158	4645531	8078593	2133672	12378394	2511859	7778777	4
57	6286420	4641931	8083401	2127721	12371031	2514210	7776949	3
58	6288682	4638334	8088212	2121772	12363673	2516562	7775120	2
59	6290943	4634739	8093025	2115824	12356320	2518915	7773290	1
60	6293204	4631146	8097840	2109876	12348972	2521270	7771460	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes.	Differentia & Logarit. Tangent.	Tangentes.	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	6293204	4631146	8097840	2109876	12348972	2521270	7771460	60
1	6295464	4627555	8102658	3103929	12341630	2525626	7769629	59
2	6297724	4623966	8107478	2097982	12334293	2525984	7767797	58
3	6299983	4620379	8112300	2092036	12326961	2528345	7765965	57
4	6302242	4616794	8117124	2086091	12319635	2530703	7764132	56
5	6304501	4613211	8121951	2080146	12312314	2533065	7762299	55
6	6306759	4609630	8126780	2074202	12304998	2535428	7760465	54
7	6309016	4606052	8131611	2068259	12297687	2537793	7758630	53
8	6311273	4602476	8136444	2062317	12290381	2540159	7756794	52
9	6313529	4598902	8141280	2056376	12283081	2542526	7754958	51
10	6315784	4595330	8146118	2050435	12275786	2544895	7753121	50
11	6318039	4591760	8150958	2044495	12268496	2547265	7751283	49
12	6320293	4588292	8155801	2038555	12261212	2549637	7749445	48
13	6322547	4584627	8160646	2032617	12253933	2552010	7747606	47
14	6324800	4581064	8165493	2026679	12246659	2554385	7745766	46
15	6327053	4577503	8170343	2020742	12239390	2556761	7743926	45
16	6329305	4573944	8175195	2014806	12232126	2559138	7742085	44
17	6331557	4570387	8180049	2008870	12224867	2561517	7740244	43
18	6333808	4566832	8184905	2002935	12217613	2563897	7738402	42
19	6336059	4563279	8189764	1997000	12210364	2566279	7736559	41
20	6338310	4559728	8194625	1991066	12203121	2568662	7734716	40
21	6340560	4556179	8199488	1985133	12195883	2571046	7732872	39
22	6342809	4552632	8204354	1979200	12188650	2573432	7731028	38
23	6345058	4549088	8209222	1973269	12181422	2575819	7729183	37
24	6347305	4545546	8214092	1967338	12174199	2578208	7727337	36
25	6349553	4542006	8218965	1961408	12166981	2580598	7725490	35
26	6351800	4538468	8223840	1955478	12159768	2582990	7723642	34
27	6354046	4534932	8228717	1949549	12152561	2585383	7721794	33
28	6356292	4531398	8233597	1943621	12145359	2587777	7719945	32
29	6358537	4527866	8238479	1937693	12138162	2590173	7718096	31
30	6360782	4524336	8243363	1931766	12130970	2592570	7716246	30
31	6363026	4520808	8248250	1925839	12123783	2594969	7714395	29
32	6365270	4517282	8253139	1919913	12116601	2597369	7712544	28
33	6367513	4513758	8258031	1913988	12109424	2599770	7710692	27
34	6369756	4510236	8262925	1908063	12102252	2602173	7708839	26
35	6371999	4506717	8267821	1902140	12095085	2604577	7706986	25
36	6374241	4503200	8272720	1896217	12087923	2606983	7705132	24
37	6376482	4499685	8277621	1890295	12080766	2609390	7703277	23
38	6378722	4496172	8282524	1884373	12073614	2611799	7701422	22
39	6380962	4492661	8287429	1878452	12066467	2614209	7699566	21
40	6383201	4489152	8292337	1872531	12059325	2616621	7697710	20
41	6385440	4485645	8297247	1866611	12052188	2619034	7695853	19
42	6387678	4482140	8302160	1860692	12045056	2621448	7693995	18
43	6389916	4478637	8307075	1854773	12037929	2623864	7692137	17
44	6392153	4475136	8311992	1848855	12030809	2626281	7690278	16
45	6394390	4471637	8316912	1842937	12023690	2628700	7688418	15
46	6396626	4468140	8321834	1837020	12016578	2631120	7686558	14
47	6398862	4464646	8326759	1831105	12009472	2633541	7684697	13
48	6401097	4461154	8331686	1825190	12002370	2635964	7682835	12
49	6403332	4457664	8336615	1819276	11995274	2638388	7680973	11
50	6405566	4454176	8341547	1813363	11988183	2640813	7679110	10
51	6407799	4450690	8346481	1807450	11981097	2643240	7677246	9
52	6410032	4447206	8351418	1801537	11974015	2645669	7675382	8
53	6412264	4443724	8356357	1795625	11966938	2648099	7673517	7
54	6414496	4440244	8361298	1789714	11959866	2650530	7671652	6
55	6416728	4436766	8366242	1783803	11952799	2652963	7669786	5
56	6418959	4433290	8371188	1777893	11945737	2655397	7667919	4
57	6421189	4429816	8376136	1771983	11938680	2657835	7666051	3
58	6423419	4426344	8381087	1766074	11931628	2660270	7664183	2
59	6425648	4422875	8386040	1760166	11924580	2662709	7662314	1
60	6427876	4419408	8390996	1754259	11917537	2665149	7660445	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	6427876	4419408	8390996	1754259	11917537	2665149	7660445	60
1	6430104	4415943	8395954	1748353	11910499	2667590	7658575	59
2	6432331	4312480	8400915	1742447	11903466	2670033	7656704	58
3	6434558	4409019	8405878	1736542	11896438	2672477	7654833	57
4	6436785	4405560	8410844	1730637	11889417	2674923	7652961	56
5	6439011	4402103	8415812	1724733	11882397	2677370	7651088	55
6	6441236	4398648	8420782	1718829	11875383	2679819	7649215	54
7	6443461	4395195	8425754	1712926	11868374	2682269	7647341	53
8	6445685	4391743	8430729	1707022	11861370	2684721	7645466	52
9	6447909	4388293	8435706	1701119	11854371	2687174	7643591	51
10	6450132	4384845	8440686	1695216	11847377	2689629	7641715	50
11	6452355	4381399	8445668	1689314	11840388	2692085	7639838	49
12	6454577	4377955	8450653	1683412	11833404	2694543	7637960	48
13	6456799	4374514	8455640	1677512	11826424	2697002	7636082	47
14	6459020	4371075	8460630	1671613	11819449	2699462	7634204	46
15	6461240	4367638	8465622	1665714	11812479	2701924	7632325	45
16	6463460	4364203	8470617	1659816	11805514	2704387	7630445	44
17	6465679	4360770	8475614	1653918	11798553	2706852	7628564	43
18	6467898	4357339	8480614	1648021	11791597	2709318	7626683	42
19	6470116	4353910	8485617	1642124	11784646	2711786	7624802	41
20	6472333	4350483	8490622	1636228	11777700	2714255	7622920	40
21	6474550	4347058	8495629	1630332	11770758	2716726	7621037	39
22	6476766	4343635	8500639	1624437	11763821	2719198	7619153	38
23	6478982	4340214	8505651	1618542	11756889	2721672	7617269	37
24	6481198	4336795	8510666	1612648	11749962	2724147	7615384	36
25	6483413	4333378	8515683	1606755	11743039	2726623	7613498	35
26	6485628	4329963	8520703	1600862	11736121	2729101	7611612	34
27	6487842	4326550	8525725	1594970	11729208	2731580	7609725	33
28	6490055	4323993	8530750	1589078	11722300	2734061	7607837	32
29	6492268	4319730	8535777	1583187	11715396	2736543	7605949	31
30	6494480	4316323	8540806	1577296	11708497	2739027	7604060	30
31	6496692	4312919	8545838	1571407	11701602	2741512	7602170	29
32	6498903	4309517	8550872	1565518	11694712	2743999	7600280	28
33	6501114	4306116	8555909	1559629	11687827	2746487	7598389	27
34	6503324	4302717	8560949	1553740	11680947	2748977	7596498	26
35	6505533	4299320	8565991	1547852	11674071	2751468	7594606	25
36	6507742	4295925	8571036	1541964	11667200	2753961	7592713	24
37	6509950	4292532	8576083	1536077	11660334	2756455	7590819	23
38	6512158	4289141	8581133	1530191	11653472	2758950	7588925	22
39	6514365	4285752	8586185	1524305	11646615	2761447	7587031	21
40	6516572	4282365	8591239	1518420	11639763	2763945	7585136	20
41	6518778	4278980	8596296	1512535	11632915	2766445	7583240	19
42	6520984	4275597	8601355	1506651	11626072	2768946	7581343	18
43	6523189	4272226	8606417	1500767	11619234	2771449	7579446	17
44	6525394	4268837	8611482	1494884	11612401	2773953	7577548	16
45	6527598	4265460	8616549	1489001	11605572	2776459	7575650	15
46	6529801	4262085	8621619	1483119	11598748	2778966	7573751	14
47	6532004	4258712	8626692	1477237	11591928	2781475	7571851	13
48	6534206	4255341	8631767	1471356	11585112	2783985	7569951	12
49	6536408	4251972	8636845	1465476	11578301	2786496	7568050	11
50	6538609	4248605	8641926	1459596	11571494	2789009	7566148	10
51	6540809	4245240	8647009	1453717	11564691	2791523	7564246	9
52	6543009	4241877	8652095	1447838	11557893	2794039	7562343	8
53	6545208	4238516	8657183	1441960	11551100	2796556	7560439	7
54	6547407	4235157	8662273	1436082	11544312	2799075	7558535	6
55	6549606	4231800	8667366	1430205	11537529	2801595	7556630	5
56	6551804	4228445	8672461	1424328	11530751	2804117	7554724	4
57	6554001	4225092	8677559	1418451	11523977	2806641	7552818	3
58	6556198	4221741	8682659	1412575	11517208	2809166	7550911	2
59	6558394	4218392	8687762	1406699	11510444	2811693	7549004	1
60	6560590	4215044	8692867	1400823	11503684	2814221	7547096	0
								M

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	6560590	4215044	8692867	1400823	11503684	2814221	7547096	60
1	6562785	4211698	8697975	1394947	11496929	2816751	7545187	59
2	6564979	4208354	8703085	1389072	11490178	2819282	7543277	58
3	6567173	4205012	8708198	1383197	11483431	2821815	7541367	57
4	6569367	4201672	8713314	1377323	11476688	2824349	7539457	56
5	6571560	4198334	8718433	1371450	11469950	2826884	7537546	55
6	6573753	4194999	8723555	1365578	11463216	2829421	7535634	54
7	6575045	4191666	8728679	1359707	11456487	2831959	7533721	53
8	6578136	4188335	8733806	1353836	11449762	2834499	7531808	52
9	6580326	4185006	8738935	1347966	11443042	2837040	7529894	51
10	6582516	4181679	8744067	1342097	11436326	2839582	7527980	50
11	6584705	4178354	8749201	1336228	11429615	2842126	7526065	49
12	6586894	4175030	8754338	1330358	11422908	2844672	7524149	48
13	6589082	4171708	8759478	1324489	11416206	2847219	7522233	47
14	6591270	4168388	8764620	1318620	11409508	2849768	7520316	46
15	6593458	4165070	8769764	1312752	11402815	2852318	7518398	45
16	6595645	4161754	8774911	1306884	11396126	2854870	7516480	44
17	6597831	4158440	8780061	1301017	11389442	2857423	7514561	43
18	6600016	4155128	8785214	1295150	11382762	2859978	7512642	42
19	6602201	4151818	8790369	1289284	11376086	2862534	7510722	41
20	6604386	4148510	8795527	1283418	11369415	2865092	7508801	40
21	6606570	4145204	8800688	1277553	11362748	2867651	7506879	39
22	6608753	4141900	8805851	1271688	11356086	2870212	7504957	38
23	6610936	4138598	8811017	1265824	11349428	2872774	7503034	37
24	6613118	4135298	8816186	1259960	11342774	2875338	7501111	36
25	6615300	4132000	8821357	1254097	11336125	2877903	7499187	35
26	6617481	4128703	8826531	1248233	11329480	2880470	7497262	34
27	6619661	4125408	8831708	1242370	11322899	2883038	7495336	33
28	6621841	4122115	8836887	1236507	11316203	2885608	7493410	32
29	6624021	4118824	8842069	1230645	11309571	2888179	7491484	31
30	6626200	4115535	8847253	1224783	11302944	2890752	7489557	30
31	6628379	4112248	8852440	1218922	11296321	2892326	7487629	29
32	6630557	4108963	8857630	1213061	11289702	2895902	7485700	28
33	6632734	4105680	8862822	1207201	11283088	2898479	7483771	27
34	6634911	4102399	8868017	1201341	11276478	2901058	7481842	26
35	6637087	4099120	8873215	1195482	11269873	2903638	7479912	25
36	6639263	4095843	8878415	1189623	11263272	2906220	7477981	24
37	6641438	4092567	8883628	1183763	11256675	2908804	7476049	23
38	6643612	4089293	8888824	1177904	11250082	2911389	7474117	22
39	6645786	4086021	8894033	1172045	11243494	2913976	7472184	21
40	6647959	4082751	8899244	1166187	11236910	2916564	7470251	20
41	6650132	4079483	8904458	1160329	11230330	2919154	7468317	19
42	6652304	4076217	8909675	1154472	11223755	2921745	7466382	18
43	6654476	4072953	8914894	1148615	11217184	2924338	7464447	17
44	6656647	4069691	8920116	1142759	11210617	2926932	7462511	16
45	6658817	4066431	8925341	1136904	11204054	2929527	7460574	15
46	6660987	4063173	8930568	1131049	11197496	2932124	7458637	14
47	6663156	4059917	8935798	1125195	11190942	2934722	7456699	13
48	6665325	4056663	8941031	1119341	11184392	2937322	7454761	12
49	6667493	4053410	8946267	1113487	11177846	2939923	7452822	11
50	6669661	4050159	8951506	1107633	11171305	2942526	7450882	10
51	6671828	4046910	8956747	1101780	11164768	2945130	7448941	9
52	6673994	4043663	8961991	1095927	11158235	2947736	7447000	8
53	6676160	4040418	8967238	1090074	11151706	2950344	7445058	7
54	6678326	4037175	8972487	1084222	11145182	2952953	7443116	6
55	6680491	4033934	8977739	1078370	11138662	2955564	7441172	5
56	6682655	4030695	8982994	1072518	11132146	2958177	7439229	4
57	6684818	4027458	8988252	1066667	11125634	2960791	7437284	3
58	6686981	4024223	8993512	1060816	11119126	2963407	7435339	2
59	6689144	4020990	8998775	1054966	11112623	2966024	7433394	1
60	6691306	4517759	8004040	1049116	11106124	2968943	7431448	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentia & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	6691306	4017759	9004040	1049116	11106124	2968643	7431448	60
1	6693468	4014529	9009308	1043266	11099629	2971263	7429501	59
2	6695629	4011301	9014579	1037406	11093138	2973885	7427553	58
3	6697789	4008075	9019853	1031567	11086652	2976508	7425605	57
4	6699949	4004854	9025130	1025718	11080170	2979133	7423657	56
5	6702108	4001629	9030410	1019879	11073692	2981759	7421708	55
6	6704267	3998409	9035693	1014023	11067218	2984386	7419758	54
7	6706425	3995191	9040978	1008176	11060748	2987015	7417807	53
8	6708582	3991974	9046266	1002329	11054283	2989645	7415856	52
9	6710739	3988759	9051557	996482	11047822	2992277	7413905	51
10	6712895	3985540	9056850	990630	11041365	2994910	7411953	50
11	6715051	3982335	9062146	984790	11034912	2997545	7410000	49
12	6717206	2979120	9067445	978944	11028463	3000182	7408046	48
13	6739361	3975919	9072747	973099	11022018	3002820	7406092	47
14	6721515	3972714	9078052	967254	11015577	3005460	7404137	46
15	6723668	3969511	9083390	961409	11009140	3008102	7402181	45
16	6725821	3966310	9088670	955565	11002708	3010745	7400225	44
17	6727973	3963110	9093983	949720	10996280	3013390	7398268	43
18	6730125	3959912	9099299	943876	10989856	3016036	7396311	42
19	6732276	3956716	9104618	938032	10983436	3018684	7394353	41
20	6734427	3953522	9109940	932189	10977020	3021333	7392394	40
21	6736577	3950330	9115265	926346	10970608	3023984	7390435	39
22	6738726	3947140	9120593	920504	10964200	3026636	7388475	38
23	6740875	3943951	9125923	914661	10957796	3029290	7386515	37
24	6743024	3940764	9131256	908819	10951396	3031945	7384554	36
25	6745172	3937579	9136592	902977	10945000	3034602	7382592	35
26	6747319	3934396	9141930	897135	10938608	3037261	7380629	34
27	6749465	3931215	9147271	891294	10932221	3039921	7378666	33
28	6751611	3928030	9152615	885453	10925838	3042583	7376702	32
29	6753757	3924859	9157962	879613	10919459	3045246	7374738	31
30	6755902	3921684	9163312	873773	10913084	3047911	7372773	30
31	6758047	3918511	9168665	867934	10906713	3050577	7370807	29
32	9760191	3915339	9174021	822094	10900346	3053245	7368841	28
33	6762334	3912169	9179380	856255	10893983	3055914	7366874	27
34	6764477	3909001	9184741	850416	10887624	3058585	7364907	26
35	6766619	3905835	9190105	844577	10881269	3061258	7362939	25
36	6768760	3902671	9195472	838759	10874918	3063932	7360970	24
37	6770901	3899509	9200842	832901	10868571	3066608	7359001	23
38	6773041	3896348	9206215	827063	10862228	3069285	7357031	22
39	6775181	3893189	9211590	821225	10855889	3071964	7355061	21
40	6777320	3890032	9216968	815388	10849554	3074644	7353090	20
41	6779459	3886877	9222349	809551	10843222	3077326	7351118	19
42	6781597	3883723	9227733	803714	10836895	3080009	7349145	18
43	6783734	3880571	9233120	797877	10830572	3082694	7347173	17
44	6785871	3877421	9238510	792041	10824253	3085380	7345199	16
45	6788007	3874273	9243903	786205	10817938	3088068	7343225	15
46	6790143	3871127	9249299	780369	10811627	3090758	7341250	14
47	6792278	3867983	9254698	774534	10805320	3093449	7339274	13
48	6794413	3864841	9260100	768699	10799017	3096142	7337298	12
49	6796547	3861701	9265505	762865	10792718	3098836	7335322	11
50	6798681	3858563	9270913	757031	10786423	3101522	7333345	10
51	6800814	3855426	9276324	751197	10780132	3104229	7331367	9
52	6802946	3852291	9281738	745363	10773845	3106928	7329388	8
53	6805078	3849158	9287155	739529	10767562	3109629	7327409	7
54	6807209	3846027	9292574	733696	10761282	3112331	7325429	6
55	6809340	3842898	9297996	727863	10755006	3115035	7323449	5
56	6811470	3839770	9303421	712029	10748734	3117741	7321468	4
57	6813599	3836644	9308849	716196	10742466	3120448	7319486	3
58	6815728	3833520	9314280	710363	10736202	3123157	7317504	2
59	6817856	3830398	9319714	704530	10729942	3125868	7315521	1
60	6819984	3827278	9325151	698698	10723686	3128580	7313537	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes.	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes.	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	6819984	3827278	9325151	698698	10723686	3128580	7313537	60
1	6822111	3824160	9330591	692866	10717434	3131294	7311553	59
2	6824237	3821044	9336034	687035	10711186	3134009	7309568	58
3	6826363	3817929	934148[illegible]	681203	10704942	3136726	7307583	57
4	6828489	3814816	9346929	675372	10698702	3139444	7305597	56
5	6830614	3811705	9352381	669541	10692466	3142164	7303610	55
6	6832738	3808596	9357835	663711	10686233	3144885	7301623	54
7	6834861	3805488	9363292	657880	10680004	3147608	7299635	53
8	6836984	3802382	9368752	652050	10673779	3150332	7297647	52
9	6839107	3799278	9374215	646221	10667558	3153057	7295658	51
10	6841229	3796176	9379682	640392	10661341	3155784	7293668	50
11	6843350	3793075	9385152	634562	10655128	3158513	7291678	49
12	6845471	3789976	9390625	628732	10648919	3161244	7289687	48
13	6847591	3786879	9396101	622903	10642713	3163976	7287695	47
14	6849711	3783784	9401580	617074	10636511	3166710	7285703	46
15	6851830	3780691	9407062	611246	10630313	3169445	7283710	45
16	6853949	3777600	9412547	605418	10624119	3172182	7281716	44
17	6856067	3774510	9418034	599589	10617929	3174921	7279722	43
18	6858184	3771422	9423524	593760	10611742	3177662	7277728	42
19	6860301	3768336	9429017	587932	10605559	3180404	7275733	41
20	6862417	3765252	9434513	582104	10599380	3183148	7273737	40
21	6864533	3762170	9440012	576277	10593205	3185893	7271741	39
22	6866648	3709090	9445514	570450	10587034	3188640	7269744	38
23	6868762	3756011	9451019	564622	10580867	3191389	7267746	37
24	6870876	3752934	9456528	558795	10574703	3194139	7265748	36
25	6872989	3749859	9462040	552968	10568543	3196891	7263749	35
26	6875102	3746786	9467555	547142	10562387	3199644	7261749	34
27	6877214	3743714	9473073	541315	10556235	3202399	7259748	33
28	6879325	3740644	9478594	545489	10550087	3205155	7257747	32
29	6881436	3737576	9484118	529663	10543942	3207913	7255746	31
30	6883546	3734510	9489645	523838	10537801	3210672	7253744	30
31	6885656	3731446	9495175	518013	10531664	3213435	7251741	29
32	6887765	3728383	9500708	512187	10525531	3216196	7249737	28
33	6889874	3725322	9506244	506361	10519401	3218961	7247733	27
34	6891982	3722263	9511783	500536	10513275	3221727	7245739	26
35	6894089	3719206	9517325	494711	10507153	3224495	7243724	25
36	6896196	3716150	9522870	488886	10501034	3227264	7241718	24
37	6898302	3713096	9528419	483061	10494919	3230035	7239712	23
38	6900408	3710044	9533971	477236	10488808	3232808	7237704	22
39	6902513	3706994	9539526	471411	10482701	3235583	7235697	21
40	6904617	3703946	9545084	465587	10476597	3238359	7233689	20
41	6906721	3700899	9550645	459762	10470497	3241137	7231681	19
42	6908824	3697854	9556209	453938	10464401	3243916	7229672	18
43	6910927	3694811	9561776	448114	10458309	3246697	7227662	17
44	6913029	3691770	9567346	442291	10452220	3249479	7225651	16
45	6915131	3688730	9572919	436467	10446135	3252263	7223639	15
46	6917232	3685692	9578495	430644	10440054	3255048	7221627	14
47	6919332	3682656	9584074	424821	10433976	3257835	7219614	13
48	6921432	3679622	9589696	418999	10427902	3260623	7217601	12
49	6923531	3676590	9595241	413177	10421832	3263413	7215588	11
50	6925630	3673559	9600830	407355	10415765	3266204	7213574	10
51	6927728	3670530	9606422	401533	10409702	3268997	7211559	9
52	6929825	3667503	9612017	395711	10403643	3271792	7209543	8
53	6931922	3664478	9617615	389889	10397587	3274589	7207527	7
54	6934018	3661454	9623216	384067	10391535	3277387	7205511	6
55	6936114	3658432	9628820	378245	10385487	3280187	7203494	5
56	6938209	3655412	9634427	372423	10379443	3282989	7201476	4
57	6940303	3652394	9640037	366602	10373402	3285792	7199457	3
58	6942397	3649377	9645651	360780	10367365	3288597	7197438	2
59	6944491	3646362	9651268	354958	10361332	3291404	7195418	1
60	6946584	3643349	9656888	349136	10355302	3294213	7193398	0
								M.

M.	*Sinus.*	*Logarithmi Sinuum.*	*Tangentes*	*Differentiæ & Logarit. Tangent.*	*Tangentes*	*Logarithmi Sinuum.*	*Sinus*	
0	6946584	3643349	9656888	349136	10355302	3294213	7193398	60
1	6948676	3640338	9662511	343315	10349276	3297023	7191377	59
2	6950767	3637329	9668137	337494	10343253	3299835	7189355	58
3	6952858	3634321	9673766	331673	10337234	3302648	7187333	57
4	6954949	3631315	9679399	325852	10331219	3305463	7185310	56
5	6957039	3628311	9685034	320032	10325207	3308279	7183287	55
6	6959128	3625308	9690674	314211	10319199	3311097	7181263	54
7	6961216	2622307	9696315	308390	10313194	3313917	7179238	53
8	6963304	3619308	9701960	302570	10307193	3316738	7177213	52
9	6965392	3616311	9707609	296750	10301196	3319561	7175187	51
10	6967479	3613315	9713261	290930	10295202	3322385	7173161	50
11	6969565	3619321	9718916	285110	10289212	3325211	7171134	49
12	6971651	3607329	9724574	279290	10283225	3328039	7169106	48
13	6973736	3604338	9730235	273469	10277242	3330869	7167078	47
14	6975821	3601349	9735900	267649	10271262	3333700	7165049	46
15	6977905	3598362	9741568	261829	10265286	3336533	7163019	45
16	6979988	3595377	9747239	256009	10259314	3339368	7160989	44
17	6982071	3592394	9752913	250190	10253345	3342204	7158958	43
18	6984153	3589412	9758591	244370	10247380	3345042	7156927	42
19	6986235	3586432	9764272	238550	10241418	3347882	7154895	41
20	6988316	3583454	9769956	232731	10235460	3350723	7152863	40
21	6990396	3580478	9775643	236912	10229506	3353566	7150830	39
22	6992476	3577504	9781334	221093	10223555	3356411	7148796	38
23	6994555	3574531	9787028	215274	10217607	3359257	7146762	37
24	6996634	3571560	9792725	209455	10211663	3362105	7144127	36
25	6998712	3568590	9798425	203635	10205722	3364955	7142691	35
26	7000789	3565622	9804128	197616	10199785	3367806	7140655	34
27	7002866	3562656	9809835	191997	10193852	3370659	7138618	33
28	7004942	3559691	9815545	186178	10187922	3373513	7136581	32
29	7007018	3556728	9821257	180359	10181996	3376369	7134543	31
30	7009093	3553767	9826974	174541	10176073	3379226	7132504	30
31	7011167	3550808	9832694	168723	10170154	3382085	7130465	29
32	7013241	3547851	9838417	162905	10164239	3384946	7128425	28
33	7015314	3544895	9844143	157087	10158327	3387808	7126385	27
34	7017387	3541941	9849872	151269	10152418	3390672	7124344	26
35	7019459	3538989	9855605	145451	10146513	3393538	7122303	25
36	7021530	3536038	9861341	139633	10140611	3396406	7120261	24
37	7023601	3533089	9867080	133814	10134713	3399275	7118218	23
38	7025671	3530142	9872822	127996	10128818	3402146	7116175	22
39	7027741	3527197	9878568	122178	10122926	3405019	7114131	21
40	7029810	3524243	9884317	116359	10117038	3407894	7112086	20
41	7031879	3521311	9890069	110541	10111153	3410770	7110041	19
42	7033947	3518371	9895826	104723	10105272	3413648	7107995	18
43	7036014	3515432	9901585	98904	10099394	3415528	7105949	17
44	7038081	3512495	9907347	93886	10093520	3419409	7103402	16
45	7040147	3509560	9913113	87268	10087649	3422292	7101854	15
46	7042213	3506626	9918882	81450	10081782	3425176	7099806	14
47	7044278	3503694	9924654	75632	10075918	3428062	7097757	13
48	7046342	3500764	9930430	69824	10070058	3430940	7095708	12
49	7048406	3497835	9936209	64006	10064201	3433829	7093658	11
50	7050469	3494908	9941991	58178	10058347	3436730	7091607	10
51	7052532	3491983	9947777	52360	10052497	3439623	7089556	9
52	7054594	3489060	9953566	46543	10046651	3442517	7087504	8
53	7056655	3486139	9959359	40726	10040808	3445413	7085852	7
54	7058716	3483219	9965155	34908	10034968	3448311	7083399	6
55	7060776	3480301	9970954	29090	10029132	3451211	7081345	5
56	7062836	3477385	9976756	23273	10023299	3454112	7079291	4
57	7064895	3474470	9982562	17455	10017469	3457015	7077236	3
58	7066953	3471557	9988371	11637	10011643	3459920	7075181	2
59	7069011	3468645	9994184	5818	10005820	3462827	7073125	1
60	7071068	3465735	1000000	0	10000000	3465735	7071068	0
								M.

APPENDIX AD EVCLIDEM ADAVCTVM GVARINI GVARINII C. R. THEATINI.

Quoniam multa, quæ ad cubationẽ corporum faciunt, quæ à nemine tacta, & animaduersa sunt, mihi post impressionem libri occurerunt, quæ nedum erant vtilia, sed penè necessaria, & Stereometriæ practicæ deficiebant maximè concamerationum quadratarum cuiuscunque generis, volui ijs plurimis corporibus, quæ cubationi subiecti in nostro hoc opere, hæc omninò illis subnectere, vt iam nullum sit corpus sub aliqua certa superficie comprehensum quod corporum cuborum mensuris non sit subactum, & mathematica certitudine illius mensuræ pænitus non innotescant.

EXPENSIO I.

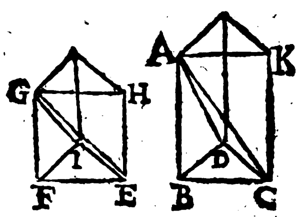
De quibusdam, quæ Libri tractatibus subnecti queunt.

Hæc, quæ passim libro poterant adiungi, hic colligimus; quia dicendis sunt necessaria; vnde tanquam quasdam notiones præuias premittimus.

THEOR I. PROPOS I.

Pyramides æquales bases habentes invicem referuntur, vt altitudines.

SIT, Pyramis CBDA, & Pyramis EIFG, quæ habeãt æquales bases CBD, & EIF, dico eas inuicem referri, vt altitudines. Probatur Prisma CBAKD est ad prisma EIFHG, vt altitudo CK ad altitudinem EH ex pr. 20. Trac. 24. Euc. Adauc. Ergo ex prop 18. Tr. 9. pr. 2. eiusdem etiam tertia pars primatis CKADB erit ad tertiam partem prismatis EHGIF. vt altitudo CK ad altitudinem EH; Sed pyramis CDBA, est tertia pars prismatis CKAD ex prop 22. eiusdem Trac. vt. pyramis GEIF est quoq; tertia pars prismatis FIEHG: Ergo erit pyramis CDAB ad pyramidem EIFG, vt altitudo CK ad altitudinem EH; *Hæc propos cum seq. 3. Tr. 24. interseri poterit.*



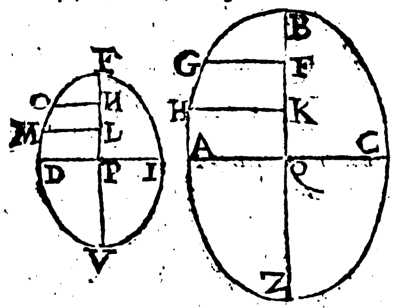
THEOR II. PROPOS. II

Omnes Ellipses duæ siuæ recta siue non; siue altera ipsarum, habebunt applicatas ad partes proportionales diametri vt alter diameter ad alteram diametrum.

Sint duæ Ellipses ABCZ & DEVI; sintque applicatæ ad partes proportionales diametri V g. tertias lineæ HK, & GF: sicut & in altera ML & ON: dico quod vt est DP ad AQ sic sit ML ad HK & ita ON ad GF. Probatur DP quadratum est ad ML quadratum; vt rectangulum ex PV, & PE ad rectangulum ex LE & LV ex prop. 6. Trac 23. Euc. adauc. in Ellipsibus at in circulis ob æqualitatem cum quadratis ex 35. r. 6. vt autem ex VP. & PE rectangulum ad rectangulum ex LE & LV sic rectangulum ex ZQ, & QO ad rectãgulum ex LK & KB ex effectione: siquidem diuisimus diametrum VE & LB in partes proportionales à quibus deduximus applicatas: vt autem ZQ & QB ad rectangulum ZK & KB, rectangulum; sic quadratum AQ ad quadratum HK vt pr. 6. Euc. adauc.

S Tr. 23.

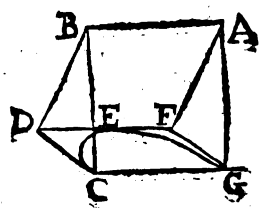
Tr. 23. ergo ex 16. l. 5. Trac. 9. p. 2. DP quadratum erit ad ML quadratum vt AQ quadratum ad HK quadratum: quare cum quadrata omnia sint figurę, similes erũt etiam latera DP ad ML, vt AQ ad Hk. Quamobrem permutãdo erit etiam DP ad AQ vt ML ad Hk: & idẽ argumentum valebit de alijs applicatis quadere vt est diameter ad diametrum ita erunt applicatę ad partes proportionales vnius diametri ad partes proportionales alterius quod & de circulo respectu, circuli ex prop. 44. Euc. adauc Tr. 10. & etiam respectu cuiuscumque ellipsis patet vt ex hac propos Hęc prop Tr. 23. inserẽda est.



THEOR III. PROPOS III.

Prisma est ad prismaticum conum ellipticum inscriptum, vt basis rectangulum ad basim ellipsim, si sint eiusdem altitudinis.

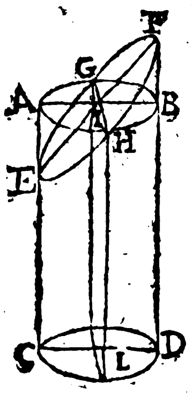
Sit prismaticus conus, de quo pr. 26 Tr. 34. nẽpe ABGEC. cui basis ellipsis GEC, & prisma ABGD; quæ sint eiusdem altitudinis CB dico ea se referri, vt bases, nimirum ABGEC prismaticum conum ellipticum esse ad prisma ABGD, vt ellipsis basis GEC ad rectangulum GD Pr. Nam conus prismaticus ABGEC ex propos. 26. Tr. 34. Euc. adauc est ad conum eiusdem basis, & altitudinis vt 3. ad 2. At prisma ABGD, est quoque ad pyramidem eiusdem basis, & altitudinis vt 3. ad 2. ex P. 2 Tr. 3. Quadere ita erit conus prismaticus ad conum vt prisma ad pyramidem si sint ambo eiusdem basis, & altitudinis. Vnde permutando ita erit conus prismaticus ad prisma; vt conus ad pyramidem: sed conus ellipticus ad pyramidem est vt ellipsis coni basis ad rectangulum basim pyramidis ex coroll. 3. pr. 27. eiusdẽ. Ergo etiam conus prismaticus erit ad prisma ex Tr. 9. p. 2. Prop 26. Euc adauc vt basis coni prismatici ellipsis ad basim Prismatis rectangulũ.



THEOR IV. PROPOS IV.

Cylindrus obliqua sectione sectus æquatur Cylindro eiusdem axis; cuius bases sint parallelæ.

Sit Cylindrus CEFD obliquè sectus plano EGFH, dico æquari Cylindro ABCD, eiusdem axis IL. parallelarum basium AGBH & CD.



Probatur Nam sunt duę vngulæ; æquales GAEH deficiens dimidio Cylindri scaleni CEHCL, vt aequet medietatem AIHGCL paralleli Cylindri ABCD, & GHFD abundans alteri LGDFH scaleni vt æquet paralleli Cylindri medietatẽ alteram. Demo itaque GFHB abũdantem vngulam, & residuũ fit medietas Cylindri parallelarum basium GBHD, & hanc addo parti deficienti eodem prorsus defectu GAEH, & æquabuntur altera medietas alteri medietati, fietq; Cylindrus parallelarum basium AGEHDC. Quod autem vngulæ prædictæ GAEH, & GFBH æquentur patet, quia EI & EF æquales sunt vt semiaxes, & sic semiaxes HI, & IB, anguli ad verticem I, æquales quoque. Quadere bases BF & EA triangulorum AEI, IBF erunt æquales ex 15. Euc. adauc. Idcirco; & vngulę superficies ambientes GFBH, & GAEH erunt aequales: siquidem quod ostenditur de altitudinibus basi parallelæ normalibus EA, BF potest ostendi de omnibus alijs; quæ parallelę illis, & æquidistantes ducantur; quare etiam trapezia ambientia erunt æqualia, si vngulis circũscribãtur nẽpe superficie prius obæqualem longitudinem laterum singulorum, & æqualem trapeziorum altitudinem ex pr. 12. Trac. 29. numero etiã ob æquales semicirculos GBH & GAH quibus æquales bases circumscribi nequeunt; nisi aequales numero. Aequales quoque erunt AGH & GBH semicirculi, seu semiellipses sicut etiam GFH & GEH ob æqualem altitudinem & 27. Trac. 30. & similes ob earum rectitudinem, & Prop 52. Trac 24. siquidem EI & AB ponuntur axes. Ergo vngulæ ipsæ solidæ GAEH & GFBH erunt æquales ex def. 3. Trac. 33.

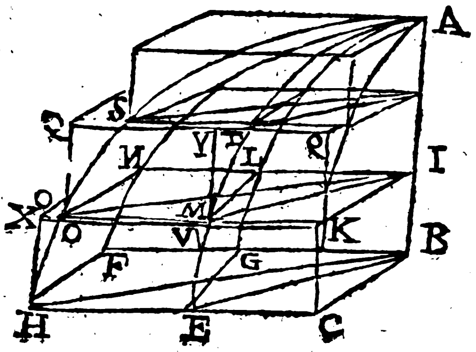
THEOR V. PROPOS V.

Si binæ quantitates corpore possint inscribi vel circumscribi corporibus datam proportionem habentibus, quæ quantitates ipsas minus superent omni data quantitate, erunt ipsæ quantitates circumscriptæ vel inscriptæ in eadem proportione, ac corpora.

Sit quantitas ABE, quæ sit primò circumscriptibilis corporibus BV, IY, &c. quę dicant eãdem rationem V. g quæ 2. ad 3. ad corpora BX; & IZ circumscribtibilia quantitati BHA, & hæc possint multiplicari, vsque quo minus à quantitatibus circũscriptibilibus differant omni assignabili quantitate. Dico esse quoque quantitatem BAE ad BHA quantitatem vt 2. ad 3.

Probatur si non est ABE ad BHA vt 2. ad 3. erit maior aut minor quam poscat ratio 2. ad 3. Sit primo minor. Aliqua igitur quantitas maior, quàm ABE erit ad BHA vt 2. ad 3. Sit itaq; maior ipsa quantitate ABE quantitas m. Circumscribanturque BV, IY & cæt nimirũ tot corpora, si ABH, vt BX, IZ ipsi BHA; donec minus differant à quantitate ABE, quã m, vt vult hypotesis, & ideo sint minora quam m quanm quantitas, vt pote minus differentia à quantitate minori simulque vt vult item Hypotesis sint ad inuicem vt 2. ad 3. Quoniam igitur corpora circumscribētia BV, YI &c. sunt minora, quàm m. erunt ad BHA circumscriptam quantitatem in minori proportione quam m ad eandem BHA sed m est ad BHA vt 2. ad 3. vt Eg decreuimus. Ergo corpora circumscribentia BV IY sunt in minori proportione ad BHA quàm m ad BHA sc. quam 2. ad 3. Sunt autem corpora circumscribentia

m



BV YI ad BX IZ ex hypotesi vt 2. ad 3. Ergo quātitas circūscribens BX YZ erit minor quā circumscripta BHA ex Pr. 10. Tr. 9. p. 2. Euc adauc; siquidem eadem quantitas circumscribens BV YI habet minorem proportionem ad BHA idest minus de ea continet quam ad BX YZ ad quam habet eandem quam 2. ad 3. & continet eam vt 2. continet 3. Hoc autem absurdum est; quia continens corpus cirumscribens est maius contento.

Quod si dicatur ABE esse in maiori proportione ad BHA quam 2. ad 3. Erit igitur e, contra BHA ad ABE in minori proportione quam 3. ad 2. vnde idem reddit argumentum.

Hoc autem idem argumentum etiam inscriptis facili negotio applicare poteris, si pro inscribentibus quantitatibus circumscribentes assumas.

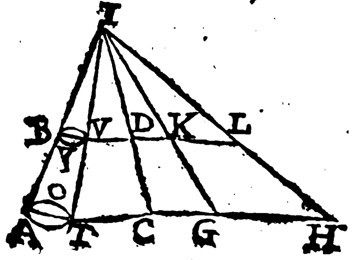
THEOR VI. PROPOS VI.

Trapezium, & superficies rectè coni paralleli secti æquantur si altitudo vtriusque sit æqualis, & ambitus supremus, & infimus conici frusti æquentur trapezij lateribus parallelis. Quod si bases non sint æquales, sed proportionales dicit trapezium ad superficiem coni eandem basium proportionem.

Sit frustū coni recti ATBV parallelis basibus AT, BV; & Trapezium CHDL, cuius altitudo CD eadē quæ superficiei frusti conici TV: parallelum vero latus CH æquetur peripheriæ ATO, & parallelum latus DL peripheriç BV; dico DH trapezium æquari AT BV superficiei frusti conici.

Probatur ex propos 24. Tr. 31. Euc adauc superficies ATOI coni æquatur sectori TIA cuius arcus subtendens AC æquetur peripheriæ ATO; sed sector TCI, & prop 4. Trac. 30. çquatur triangulo rectangulo CHI cuius latus CH æquetur arcui AC, & altitudo radio CI: Ergo CIH rectangulum æquatur superficiei coni ATI. Idem dicas de superficiebus coni BVI: sectoris BDI, & trianguli DLI. quod sint æquales. Aufer itaque æquales superficies coni BVI, & rectanguli DLI æquales inuicem ab æqualibus superficiebus coni ATI, & rectanguli CHI, & restabunt çquales ATOVB superficies frusti conici, & Trapezium CHBL.

Sed iam pone CG esse minorem seu maiorem peripheria ATO, sed tamen esse CG ad DK vt ATO peripheria ad BV peripheriā. Tūc dico esse Trapezium CG eiusdem altitudinis TV ad superficiem frusti conici ATOBV, vt & CG latus ad ATO peripheriam. Nā CGDK



trapezium est ad trapeziū CHDL vt CG ad CH bases vel DK ad CL ex Prop. 14. Tr. 39. Sed Trapezium CL æquatur superficiei conicæ AT BV, vt ostendi CH basis peripheriç ATO ex Thesi Ergo vt CG ad peripheriam. ATO sic CK Trapezium refertur ad frusti conicam superficiem AT OBV.

EXPENSIO II.

Exp. 2. Euc adauc, corpus 8. Tr. 24. quod non dum cubationi subactum est nempe Spheram quadriformem cubauimus quod quidem corpus in fornicibus omnibus in vsu est; protereaque eius mensuræ erant Sterometriç admodum necessariæ. Verum quia animaduerti fornices ne dum super basim quadratam, sed etiam rectangulam, & rhomboidalē vt elipticam, & ne dum circulum sed & ellipsim etiam obliquam aliquando consequi; nixus sum omnia; hęc corpora talibus basibus sita ellipsibusque efformata ad cubationem redigere: quæ libro subnecto vt pote summoperè vtilia.

THEOR I. PROPOS VII.

Semisphæra quadriformis vacuata parallelepipedo æquat semisphæram quadriformem cuius circulu sit ductus radio æquali altitudini parallelipipedi.

Sit Sphęra quadriformis LEABK, cui prębeat modulum circulus GMD, & sit vacuata parallelepipedo EAIF Dico solidum relictum AIBELP esse æquale semisphęrę quadriformi, cui prębeat modulum circulus, ductus radio IA, quæ est altitudo parallelepipedi.

Fiat circulus æqualis circulo GmD qui sit TSQ e, circulus, & MTP e radio IA ducatur accomodando duplam e T in circulo MTSQ & ex O interuallo OT ducendo circulum ducto vero per ambo centra circulorum radio NQ etiam NO sinus versus æquabitur sinui 7. D. vt coll ex Pr. 44. Tr. 10.

Probatur propositio, Corpus superficie TNO, & superficie TSQO contentum æquatur corpori à duobus quadrantibus contentū MOT, & TOP, quod est quarta pars semisphęrę quadriformis Probauimus enim singula quadrata ex MO singulis rectangulis ex NO, & OQ esse æqualia linearum æquidistantium MOP, & NOQ quibus si parallelepipeda æquealta super ædificata putentur inser ipta corpori superficie NOT, & OTSQ comprehenso, & corpori quadrantibus ex MOT, & OTP formato, ostendunt illa quoque corpora, quæ cõtinua inscriptione exhauriunt, esse æqualia inuicem, vt ipsa omnia parallelepipeda inscripta hinc inde eodẽ vtrolibet corpore æquantur. Sunt autem quadrata ex MO æqualia rectangulis ex MO, & OQ, ostensa, quia ex 35. Tr. 6. æquantur rectangulis vel quadratis TO, & O c, quibus, & æquãtur rectangula ex NO, & QO siue diametri siue ei linearum quarumcunque parallelarum. Itaque cum corpus hoc ex quadrante MOT, & corpus ex superficie NTO, & OT SQ æquealtæ, quadrantibus æquentur, verificabitur propositio; siquidem corpus hoc ex NTO, & OT SQ superficiebus, diametro NQ linea TS, & arcubus NT, SQ clausis, æquat quartam partem sphęrę quadriformis, cui demptum sit parallelepipedum altitudinis RS, & basis quadratæ ex IZ: Etenim eadem est superficies VZY, quæ NOT ob VZ ęquans kZ vel NO, & ZY altitudinem OT, & arcus ex V in Y idem qui NNT. Quoniam superficies externa sphæræ quadriformis est superficies Cylindrica, vt ostendi Prop. 49. Tr. 34. dum demonstraui esse superficiem vngulæ Cylindricæ, cui basis recta sit circulus G. m D: quare omnia plana parallela basi circulo circuli quoque erunt ipsi æquales: quare YZV plana superficies continebitur arcu VY æquali NT arcui, latere VZ æquali NO, & altitudine ZY æquante altitudinem OT ergo erit eadem ac NOT. Sic superficies ZYAC continebitur latere ZC æquali OQ & ZY æquante OT, & YA æquante S T ex Thesi, & arcu AC idem, qui SQ vnde æquabitur ipsi OTSQ: Ergo corpus contentum superficibus VYZ & ZYAC æqualibus, & similibus, cum sint rectangulæ, superficiebus NOT & TOSQ; & corpus ex MOT descriptũ supra æquabuntur. Hæc autem quadruplicata iuxta quatuor bases, quibus insistunt VZC & VPK &c. æquant sphæram quadriformem LEAB, vacuatam parallepipedo EAIP.

Vide figuram prop. sequentis.

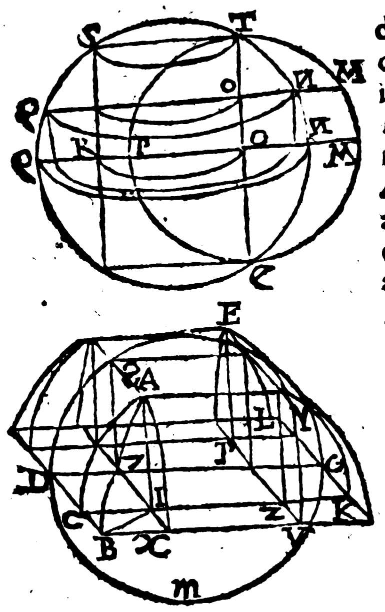
COROLL.

Hinc habes quatuor rectangula sub VZ & ZC nempe Telarium vt ita loquar vel duplex Gnomon LPIB esse æqualia toti quadrato ex MP Quia quadratum ex MP æquat quatuor quadrata ex MO radio, cui vnum ex ijs rectangulis Telarium LPIB componentibus est demonstratum æquale: quod est concludendum nedum de telario in basi, sed & de omnibus æquealtis, vt patet ex ostensione.

THEOR. II. PROPOS. VIII.

Semisphæra vacuata Cylindro æquatur semisphæræ, cui altitudo Cylindri præbeat radium.

Sit semisphęra NNTSQQ quæ sit excauata Cylindro OTSR Dico æquari semisphęræ MMTP cui radius sit altitudo RS.



Prob. Vt quadrata MP ad quadrata OR ita circulus ex MP ad circulum ex OR ex 40. tr. 10 Euc. ad aduoc. & vt quadratum OR ad quadratum NQ sic circulus OR ad circulum NQ & ideo *diuidendo*, quadratum OR erit ad Telarium NOQR ambiens, & residuum ex NQ ablato ipso quadrato OR quale est In altera figura LPIB vt OR circulus ad residuum annulum ex circulo NQ ablato OR circulo: ideoque ex æquo quadratum ex MP erit ad telarium NORQ residuum ex NQ quadrato, vt circulus MP ad annulum residuum ex circulo NQ Sed quadratum MP & telarium ex NORQ æquantur ex præc. coroll. Ergo etiam ex 12. tr. 9. par. 2. Euc. ad circulus MP & annulus residuus NORQ æquabuntur cum ergo omnes circuli in semisphęra MMTP inscripsibiles æquentur omnibus annulis planis in semisphęra Cylindro vacuata inscriptibilibus etiam Cylindri æquealti eleuati super circulos Cylindtis vacuis eleuatis super annulos in eandem altitudinem erunt æquales ex 23. trac. 34. Quamobrem ex propr. h. & pr. 14. trac. 33. Euc. adauc. semisphæra MTP æquabitur semisphæræ Cylindro vacuæ NNTORTQ.

COROLL.

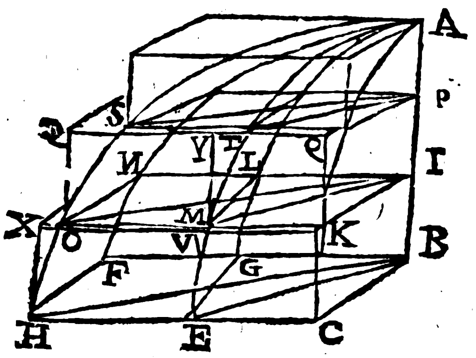
Non videtur Propos. 54. tr. 34. de meta euidens, dum per hoc, quòd quadrata sint similia: inde colligitur rectangula æqualia quadratis AQ & MN esse similia. Potest tamen meta alio modo quadrari. Nam corpus portio Cylindri, cuius altera basis VYZ sit portio circuli: longitudo verò in arcũ desinens portionis circuli, VYAB basis portio plana sit ZYVC æquat quartam partem semisphæræ quadriformis MMTQ Ablata itaque portione Cylindrij sub arcu VYZ & longitudine VX conteutum remanebit quarta pars semimetæ quæ erit XIADC. ex prop. 56. Tr. 34.

THE

THEOR. III. PROPOS. IX.

Sphera quadriformis quadrata vel spheroides quadriforme, se habet ad spheram, vel sphæroidem quadriformem oblonga basis eiusdem altitudinis, vt basis quadratum ad basim rectangulum.

SIT quarta pars hæmisferij sphæræ quadriformis vel sphæroidis A B C G E, dico eam esse ad quartam partem hæmi-sphæroidis oblongæ A B C F H, vt quadratum B E ad



rectangulum B H. Probatur, ductis enim plurimis planis parallelis basi vt I K N O & cæt. latera erunt parallela ex pr. 14. tr. 22. Euch. adauc. C H, K O, & Q V sic B C, I K, P Q. Ducta verò sectione diagonali B E M A, & A S Q H Beformabuntur sectiones B E, I M, P T & B H, I O & P S, triangulaque B C E, I K M, P Q T erunt æquiangula in sphæra quadriformi: Nam C, K, Q anguli omnes sunt recti, & P, I, B anguli acuti, sunt anguli inclinationis planorum sc. diagonalis plani B E A vel B A H ad planum basis A B C & ideo ex propos. 18. Trac. 22. Eucl. adauc. æquales. Ideo ex coroll. prop. 17. tr. 4. erunt triangula E B C & I K M & P Q T æquiangula, ideoque similia ex def. 1. tr. 10. & prop. 4. Idem dicendum est de triangulis B C H, I K O, P Q. S. ob eandem rationem: Quare ex propr. 4. tr. 10 C E erit ad C B vt K M ad K I & *permutando* C E ad k M, sic C B ad k I, sed vt C B ad k I: sic est C H ad k O; siquidem vt C B ad C H sic est k I ad K O & ideo permutatim quoq; Ergo C E ad k M, sic est ex 16. tr. 9. vt C H ad k O. Et eodem ritu argumentandi k M ad Q T sic k X ad k Z. Ideoque etiam ipsa triangula erunt proportionalia, nam habebunt latera circa æquales angulos proportionalia, ideoque triangulum B C E erit ad triangulum I K M vt triangulum C H B ad triangulum I K O ex propos. 6. trac. 10. Euc. adauc. & ideo eorum duplum quadratum B G C E erit ad quadratum I K L M, vt rectangulum B C H F ad rectangulum I K N O. Ideoque parallipipeda æquealta super has bases, eleuata per subduplã altitudinũ diuisionem multiplicata vsq; dum possint erit parallepipedum B E V ad I M Y parallelepidum: vt B H X parallelepipedum ad I O Z parallepipedum. Quapropter erit etiam quarta pars semisphæræ quadriformis quadratæ basis B C E G A ad quartam partem semisphæræ oblongæ basis quadriformis B C H F A: vt basis quadratum B E ad basim rectangulum B H ex prop. 4. huius. Ideo, & quadruplũ semisphæræ quadriformis ad quadruplum semisphæræ quadriformis oblongæ basis, vt quadruplum basis B E ad quadrupl
basis B H. & ideo etiam vt tota sphæra ad totam ex 8. tr. 9. p. 2.

COROLL. I.

HInc est quod sit etiam, vt C E linea ad C H lineam sic sphæra, quadriformis ad oblongam; quia sunt planæ bases eiusdem altitudinis, & ideo sunt vt bases lineæ ad inuicem, nempe C E ad C H. Vel etiam quælibet pars parallelis planis abscisa k M I M L v. g. ad A I k N O, vt basis I M ad basim I O id est vt K M ad K O lineas.

COROLL. II.

HInc est semivngulam Cylindricam rectanguli æquicruris A T M B C E esse ad semiungulam trianguli maioris cruris A S H B C, vt triangulum æquicruris B C E ad triangulum maioris alterius cruris B C H, quia sicut semiungulæ sunt medietates quartarum semisphæroidum, ita, & bases triangula prædicta sunt medietates rectangulorum.

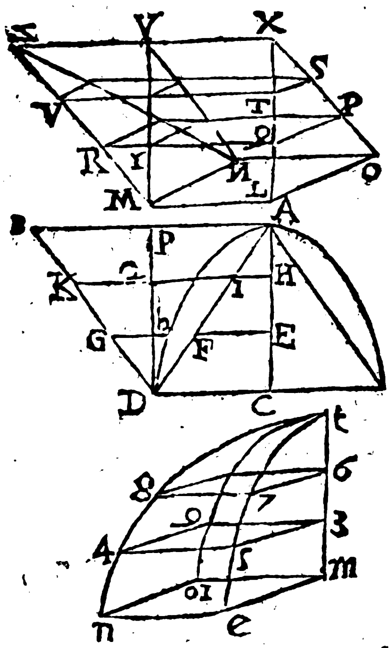
THEOR. IV. PROPOS. X.

Semispheroides quadriforme rectum æquat prisma, cuius altitudo sit semiaxis, & idem latus basis triangularis rectanguli semiaxis, cuius alterum latus sit alter semiaxis, simulque pyramidem, cuius basis eadem, altitudo verò eadem, quæ prismatis.

SIt hemisphæroidis m n t cuius efformatrix ellipsis sit C A D, quarta pars, & cuius altitudo C A vel D P diuidatur in quotcunque partes æquales 3 6, & per eas diuisiones agantur plana 3 9. 4. & 6 8. eruntque quadrata quorũ latera 3 9. 5 4. 7 8 æqualia singulis applicatis æqualis ellipsis in æqualibus partibus diametri sumptis E C & H C siquidem cum ellipses præsupponãtur eædem quæ C A D; quia est ellipsis efformatrix sphæroidis quadratę, etiam applicatæ iisdẽ partibus diametri erunt ęquales E b ipsi 3 5. vel & cęt quare quadratũ e n m æquabitur quadrato ex D C & 3 4: quadrato E b & cętera cæteris: in ellipsi autem ducatur A D ad vertices axium & A P dupla & parallela axi D C & D P parallela alteri axi C D, producanturque E F & H K. Sit deinde prisma O X L M altitudinem L M. habens axis C D, & triangulum basis O X L sit idem, ac C A D, nempe habeat latera O L, & L X axibus A C, & C D respectiuè æqualia, & angulus comprehensus rectus, vt est angulus C Sit etiam pyramis M Y Z N, cuius basis N M Y eadem, quę prismatis O X L: altitudo verò Y Z eadem, quę X Y nimirum X Z nempè duo axes C D sc. sit quantum est tota A B, quę est dupla axis C D ex Thesi. Ideoque A B ęquabitur duobus axibus, vt X Z; Si ergo ad easdẽ partes prisma-pyramidalis corporis lateris L X basis, nempè ad partes L Q & Q T æquantes C E, E H partes axis C A ducantur plana axi M A parallela, corpus prisma-pyramidale

 secan-

ſecantia, & in ellipſi rectæ parallelæ baſi C D ſc. E G & K H nimirum ab iiſdem partibus, quib⁹ primo ductæ sūt applicatę H 2 E b equātibus m, 3. & 36. altitudinis m t ſphęroidis quadriformis, parallelogramma ſacta in priſma-pyramidali corpore æquabuntur rectangulis ex lineis à diametri ellipſis partibus æqualibus, productis; nimirum P R rectangulo E F & E G & S V rectangulo I H & H K. Nā ducta D P iam omnes intercluſę inter L X & M Y parallelę erunt ęquales omnibus D P & A C interceptis, quia parallelæ omnes ſunt baſibus æqualibus C D & L M ſitæ: triangula verò rectangula D P B & M Y z æqualia. & ęquiangula ob æqualem angulum, & duo cru ra Y X ipſi P B & Y M ipſi D P æqualia. Ideo erit D b ad b G vt M r ad S r ſed M r & D b æquantur. Ergo etiam r R, b G ęquabuntur. Et ſic dicas de alijs, quæ ſingulæ ſingulis erunt ęquales; Eodem verò modo argumentaberis de lineis P Q & S T in triangulo Q L X, quę ſunt æquales lineis E F & H I in ęquali, & ęquiangulo triangulo A D C, Quaderè cum conſtent lateribus æqualibus æquabuntur rectangulū E G, E F rectangulo P R vel H I, H K rectangulo S V Sed illa E F & F G ęquantur quadrato 34. vel æquali b E. ſic H I, I K quadrato 68, vel æquali quadrato ellipſis D I A C ex applicata in H ex pr. 9. tr. 24. Euc. adauc. Ergo quadrata omnia ad eandēm eleuationem ducta ſc. 34. rectangulo P R & 68 rectangulo S V æquabuntur. Si verò ſuper has baſes æquealta parallelepipeda intelligātur constructa ad eandem eleuationem partium ęqualium inuicem m 3. & 3 6. 6 t atque partibus A Q, Q T, T X lateris priſma-pyramidalis corporis, erunt omnia ęqualia ex pr. 6. trac. 27. Euc. adauc. & ſi vſq; ad vltimā, quæ fieri poſſit multiplicationem, circumſcribantur ſub diuidendo in duo continuè latus m t & L X vt poſſe fieri oſtendi pr. 14. tr. 33. ſemper perſeuerabunt æqualia, & omni dabili, vel intelligibili quantitate minori exceſſu ipſa corpora, quę circumſcribunt excedent; Quare ipſis circumſcriptis corporibus æquabuntur, hęc quidem quæ quartam ſemiſphæroidis m t e n quadriformis ambiunt ipſi quartæ ſemiſphæroidis, illa, quæ corpus priſma- pyramidale cingunt ipſi corpori: Sed hæc ſolida parallelepipeda quartæ ſemiſphęroidis æquātur illis priſmatis pyramidiſque. Ergo etiam ipſa corpora inuicem æquabuntur ex 4. huius. Z, X M O, & t n m idest quarta ſphæroidis quadriformis, & corpus priſma-pyramidale deſcriptum. Quod autem dicitur de quarta debet intelligi de octuplici, nempe de toto ſpheroide, & de octuplo corpore deſcripto Z X M O.



COROLL. I.

Hinc verò fit, quod dicitur de toto elliptico ſphæroide, de partibus æquealtis, & planitiebus parallelis baſi abſciſis eſſe dicendū, nempe quod ęquentur corporis priſma pyramidalis fruſto æquealto Sic v.g. ſphęroidis fruſtum 3 5 4 t ęquabitur fruſto P Q R X Z corporis priſma-pyramidalis, quod patet eodem argumento. Nam parallelepipeda ęquealta circūſcribentia quodlibet fruſtum ſphęroidis 5 3 4 t æquantur priſmatibus æqualibus numero, & quantitate circumſcribentibus fruſtum corporis P Q R X Z, vt patet ex contextu propoſitionis, etiamſi multiplicentur, donec relinquant quantitatem qualibet aſſignabili minorem. Quare cum ſemper perſeuerent ęqualia, & iam non differant à corporibus, quę circumſcribunt quantitate, quę exiberi poſſit, non different ab illis ipſis ſphęroidis fruſto, & corporis priſma-pyramidalis vnde etiam ipſa fruſta ęquabuntur.

COROLL. II.

Cum ſemiſphęroidis quarta pars ſit dupla ſemivngulę Cylindricę pater vngulā Cylindricam ęquari dimidio corporis priſmapyramidalis. Quoniam ſemiſphęroidis quarta pars, & illud corpus oſtenſa ſunt æquari. Manifeſtum quoque eſt ſingulas partes ſemiungulæ ſingulis dimidijs partibus corporis priſma pyramidalis in eandem eleuationem ductis, & planis parallelis baſi abſciſis vtrinque ęquari.

COROLL. III.

Ellicitur, quod dicitur de ſphęroide quadriformi, etiam eſſe aſſerendum de ſphęra quadrata, quia ſi diametri ſint ęquales A C, & C D deſcribetur circulus; ſiquidem tunc ob parallelismum linearum in triangulo C A D erit A C ad C D vt E A & E F: ſed C D ponitur æqualis ipſi E A, & ideo erit F E ęqualis ipſi E A; Et quia ex effectione A B ęquabitur ipſi diametro, & ideo G E, & F E diametro quoque; ſiquidem A E ęquatur eadem ratione ipſi F E, & b G ipſi D b vel C E & b E reliquo radio D C. Ideo quadratum applicatę E b in circulo æquans rectangulum ex ſegmentis diametri in E ſecti, vt docet Pr. 34. tr. 6. Euc. adauc adæquabit quoque rectangulum æqualium illi laterum G E & F E. Si ergo A D C ponatur quadrans circuli efformans corpus m t n e ſtatuetur ſemiſphæræ quadriformis quarta pars, de qua idem oſtendetur.

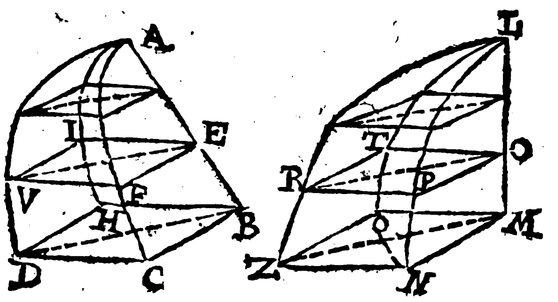
Et hinc ſcies cubare etiam ſingulas partes abſciſas planis baſi parallelis ſphęræ quadriformis eadem ratione, ac ſphęroidis quadriformis.

THEOR.

THEOR. III. PROPOS. VIII.

Omnis sphæra, seu sphæroides oblongum, seu quadratum obliquum æquatur recto æqualis altitudinis, quorum applicatæ ellipsium efformatricium singulæ singulis partibus æquealtis diametri sint æquales, & angulos faciant inuicem rectos.

SIT sphæra, seu sphæroides obliquum A B C D, nempe cuius axis B A obliquos angulos basi B C efficiat, sitque aliud rectum L M N Z Sitque applicata B C æqualis applicatæ M N, nec non E F & O P, & cæteræ cæteris applicatæ diametro B A; sic B H, & M Q in altera vtraque ellipsi E I & O T, & cæt. ad eandē



altitudinem, quæ est applicatarum diametro M L, sint verò vt constat esse posse ex pr. 72. tr. 24. hæc duo corpora ad eandem eleuationem euecta M L & ellipses ECA, BAH rectū angulum ad B A axem eundem faciant, qui faciunt ellipses efformatrices L M N, & M L Q alterius corporis. Dico hæc corpora inuicem æquari, etiam si alterum esset sphæra quadriformis, alterum sphęroides.

Probatur basis M Q Z equatur basi B D cōstat enim æqualibus lateribus B H ipsi M Q & B C ipsi M N, constatque æqualibus angulis apud B & M ob angulum rectum ellipsium efformatricium. Ergo erunt æquales. Quaderè etiam parallelepipeda æquealta, nempe altitudinis, quæ est M O euecta ab illis basibus, æquabūtur. Ita basis E V æquatur basi O R ob eandem rationem laterum æqualium E I ipsi O T, & E F. ipsi O P, & angulum F & O ęqualem nempe rectum, & ideo parallelepipeda eadem altitudine prędita, & super illas bases euecta erunt ęqualia, & sic de alijs quibuscunque, quæ per subduplam diuisionē altitudinum continuè corporibus sphęriquadratis, vel sphęroidibus quadratis siue oblōgis circumscriberentur: vt posse fieri ostendi pr. 14. tri 33. Cumque continua, & semper minorum altitudine parallepipedorum æqualium inuicem relinquant quantitatem omni, quæ dari, vel assignari possit minorem, sequitur vt parallepipeda circumscripta, & ita multiplicata non differant ab ipsis corporibus quātitate assignabili: ideoque ex 4, h. dicant eandem proportionem, ac ipsa corpora, quibus circumscripta intelliguntur: At probatum est parallepipeda circumscripta corpori B A C D obliquo esse æqualia parallelepipedis circumscriptis L M N Z corpori. Ergo etiam ipsa corpora, à quibus nulla assignabili quantitate differunt, erunt etiam ipsa inuicem æqualia.

COROLL. I.

QVod dicitur de totis, de singulis etiam æquæaltis partibus, quæ sint planis basi parallelis abscisæ militat V. g, quod pars L O R æquetur parti A E V. Ex contextu enim propos. constat omnia parallepipeda vtrique corpori circumscripta siue toti, siue eorum equealtæ parti esse inuicem æqualia. Vnde, & ipsa segmenta corporum L O R & A E V. æquabuntur, cum per cōtinuam circumscriptionem tandem ab ipsis non differant, vt dictum est supra.

COROLL. II.

HInc euincitur quoque, quod licet anguli ellipsium efformatricium B A H & B A C non sint recti, nec æquales angulis ellipsium efformatricium M Q L & M N L adhuc tamen si bases ipsæ sint ęqualis altitudinis ita quod talis sit altitudo basis M Z, qualis basis B D & ideo vt colligimus ex prop. 2. huius etiam, cæterarum: idem sequetur, quòd in propositione demonstractum est, nempe ipsum corpus obliquum B A C H D esse ęquale corpori recto M N L Z. Quia ex prop. 28. tr. 4. Euce adauc. bases quoque B D ipsi M Z, & E V ipsi O R erunt æquales quadere, & cæteræ. Vndè parallelepipeda in eis æquealta multiplicata quantùm queunt multiplicari ab ipsis corporibus; quæ circumscribunt, quantitate assignabili non different ex 14. tr. 33. & ideo. vt multitudines parallelepipedorum hinc indè æquantur sic, & ipsa D B A, Z L M æquabuntur.

COROLL. III.

IDem etiam sequitur, si bases alia ratione inueniantur æquales; nempe quia O T æqualis O P sit media proportionalis inter E F & E I & sic de cæteris: tunc enim si in vtroq; corpore efformatrices ellipses angulum rectū faciant, omnes bases corporis B A C D erunt rectangula æqualia quadratis basibus corporis L M N Z; Vnde eodem argumento adhibito ipsa corpora erunt æqualia.

COROLL. IIII.

HInc quoque est dimidium quartæ semisphæroidis, vel semisphæræ quadriformis, quæ est semiungula Cylindrica, vt dictū est etiam obliqua esse æquale rectæ vngulę; quia eadem ratio est de tota, & dimidijs eiusdem rei partibus ex prop. 18. tr. 9. p. 2. Eu. ad. Quare semiungula B A C D æquabitur semiūgulę L M N Z Vngula verò obliqua oritur à sectione Cylindri circularis, vel elliptici obliquè facta v. g. in Cylindro secto obliquè plano basim subtendente obliquam, & alio per axem huius basis trāseunte; & in aliquod

punctum

punctum superficiei curuæ Cylindricæ incidente.

COROLL. IV.

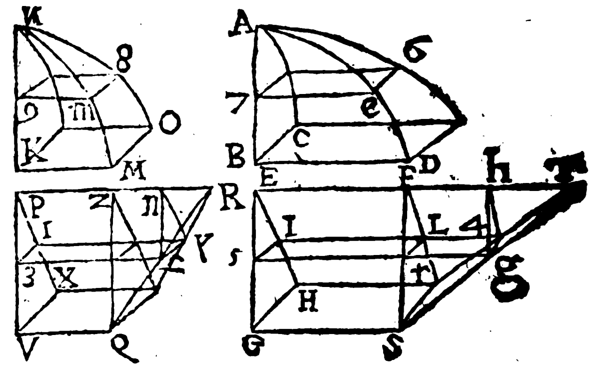
CVm ex pr. 2. huius S in ellipsibus efformatricibus corporum spheroidicorum sit diameter ad diametrum in certa proportione quod etiam cæterę omnes applicatæ ad alteram diametrum erunt in eadem proportione, v. g. Sit B H ad M Q vel æqualem sibi, quod presuponimus v. g. esse M N, vt M N ad C B, Ergo etiam erit I E, ad T O vt H B ad Q M. Sed ex eadem 2. huius Q M est ad M N, vt T O ad P O. Quare ex tr. 9. Euc. adauc. p. 2. pr. 12. hæ quoque T O & P O æquabuntur, vt equantur Q M & M N ex Thesi, Sed ex 2. huius P O est ad F E vt M N ad C B: Quare erit I E ad T O vt H B ad M Q idest M N ad C B ex Thesi sc. P O, vel T O equalis ad F E. Quare ex equò etiam I E erit ad T O, vt T O vel equalis P O ad F E. Sic de alijs. Vnde poteris certò scire alias omnes bases esse æquales, si vna sit & prima B H C D alteri M Q Z N siue ob æqualitatem laterum in basi B D, siue ob earū proportionem facientem, siue Rhonbū æquealtum, siue rectangulum constans ex extremis proportionalibus, & ideo æquale quadrato M Z, constante ex medijs proportionalibus.

THEOR VI. PROPOS XII.

Speroides quadriforme oblongum rectum æquatur corpori prismate, pyramideque conflato, quorum basis triangularis rectangulæ crura sint facta ex diametro, & altitudine vnius ellipsis, altitudo verò prismatis, & pyramidis sit diameter maior alterius ellipsis efformatricis, singulaque partes planis basi parallelis abscisa æquealtæ singulis partibus alterius æquealtis æquantur.

SIT sphæroides quadriforme oblongum. si e eius octaua pars, quod sufficit, A BCD. Sit verò prisma F G H E, cuius basis G E H rectangula ad G habeat latus G E æquale axi, & altitudini B A, alterū verò latus G H equetur lateri B C, altitudo verò G s equetur axi B D. At Pyramis FTS r cōstet eadē basi C G H quæ est F S r, & eadem altitudine T F Dico hoc corpus pyramide prismateque conflatum esse æquale spheroidi oblongæ quadrangulę B A C D. Fiat sphæroides, vel sphera quadriformis eiusdem altitudinis K M N O, cujus latus M O basis æquetur lateri B C ita, quod K O & CD bases sint æquealtę, ex pro. 10 h & æquale prisma, pyramisque P Q R, & tunc sic propos; probatur.

Sphæra quadriformis N K M O est ad sphęroidem oblongum B A C D vt K M latus ad latus basis B D ex coroll. prop 9. huius. Sed vt K M ad B D, sic est V Q ad G S cùm ex construc K M, & Q V & B D, G S sint equales, & ideo dupla P R ad duplum E T ex 18. pr. tr 9. p. 2. Eu. ad. vt autem P R ad E T. ita est corpus R P Q V ad corpus E T S H quod, sint super basim æqualem P X V & G E H; vt ostendetur, prisma P Q quidem ad prisma E S ex pror. 20. tr. 34. vt P Z ad E F: at pyramis Y Z R Q i ad FTS r vt Z R ad F T. Quare ex prop. 18. tr. 9. p. 2. vt sunt P Z & Q R simul in proportione ad E F & E T altitudines, sic prisma pyramisque P X Q R ad prisma pyramidemq; E H S T & ideo vt P Z ad F E idest K M ad B D ex 18. tr. 9. p. 2. Quaderè ex propos. 16. tr. eiusdem 9. Euc. ad 2. p. sphæra quadriformis N H O M erit ad sphæroidem quadriformem B A C D, vt P R X Q ad G E H T corpora



prismate pyramideque conflata. Quãobrem ex prop. 12. eiusdem cum iam ostentum sit pr. 10. spheram N H M O esse æqualem prismati pyramidique P Q X R, etiam B A D C equabitur prismati, pyramidique E G T H vt vult propos.

Remanet autem probandum basim P V X æquari basi G E H, sed id faciliter ostenditur: Nam cùm in sphæra quadriformi vel spheroide sit eadē altitudo K N, quę V P ex prop. 10. huius & V X rectangulè applicata apud V æquet M O & K N æquet B A scilicet G E ex construc. & M O equet B C scilicet G H item ex constructione; & G H rectangula sit ex construc, ipsi G E sequitur vt angulus apud G equetur angulo apud V at G E ipsi V P, linea verò G H ipsi V X. Quadere ex prop 22. Euc. ad tr. 4. equabuntur triangula V P X & G E H quod vltimò fuit probandum.

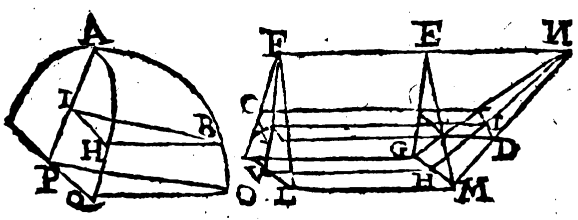
Probatur quoque de partibus, & agatur planum parallelum basibus per vnum quodcunque corpus ad eandem altitudinem V. g. ad dimidiam omnium altitudinem, quæ sint 98. & 76. in spheroidibus, at in prismatibus pyramidibusque 32 & 54. Tunc idem retexo argumentum ex prop 9: sphærę vel spheroidis quadriformis frustum N 98. ad sphæroidis quadriformis frustum A 76. refertur, vt basis 98. ad basim 76. scilicet ob eandem basium planarum altitudinem 9. m ad 7. e sed vt 9 m ad 7. e. Sic est K M ad B D ex prop. 9. h & ita æquales P Z ad E F & ideo eadem P Z cum eius dimidio z n. vel qualibet parte proportionali parti cruris V P. vt ostendam esse, ad E F cum qualibet parte similiter proportionali v. g. eius dimidio E H vt K M ad B D ex pr. 18. tr. 9. p. 2. Euc. adauc. vt autem P n ad E h, sic prisma 3. n. ad prisma g E ex pr; 20. tr. 34. Euc. adauc, cùm sint eædem bases P I 3. & 5 E I vt dicam infra, rursus vt P n ad E h, sic est eius tertia pars V. g. N R quod talem esse infra ostendam ad h T partem tertiam, vt autem n R ad h T sic est pyramis n R y z, ad pyramidem æqualis basis h 4. T g ex propos. 1. huius

huius: Ergo pyramis n R Y Z erit ad pyramidem h 4. g T, vt P n ad E h, scilicet vt prisma P 3. Y 2. ad prisma e L hg. Ideoq; ex 18. tr. 9. p. 2. prisma P Y. cum pyramide ipsi iuncta n Y 2 R erit ad prisma E g cum pyramide g h 4. T; vt P K ad E 1, scilicet ex 18 tr. 9. vt eadem P Z ad E F, nempe vt æquales K M ad B D scilicet ex 9. huius vt 9. m. ad 7 e: nimirum ex 1. tr. 10 Euc. ad. vt basis 98. ad basim 76. ob æquales altitudines m 8. & e 6. nempe ex 9. huius cor. vt frustum N 9. m. 8. ad frustum 7 A 6 e Ergo ex 16. L 5. prisma 3. n Y cum pyramide n Y 2. R erit ad prisma 1 E h g cum pyramide h 4 g T; vt frustum sphæroidis N 9 m 8. ad frustũ sphæroidis 7 A e 6: sed frustũ sphæroidis N 9. m 8 æquatur prismati pyramidique P R 3. Y ex pr. 9. huius ergo etiam frustum 7 A 6 e sphęroidis æquatur prismati pyramidiq; I E h 4 9. T quod vult propositio.

Restat probandum primo 3. P basis æquari basi 5 E; sed hoc clarum est: quia iam æqualia ostensa sunt triangula V P X & G E H. Ergo etiam triangula 3. P I & 5 I E: siquidem crus P 3 ex hypotesi æquatur cruri 5 E & P I cruri E I angulus verò apud P est idem ac apud E. vndè ex 22 tr. 4. Euc: ad. erit triangulum æquale 3 P I & 5 E I. Restat quoque ostendendum Z n esse dimidiũ P Z. Nã ducto plano Y n 2 parallelo basi V P X vbi secat planum 32. ita est N R ad Z R vt R 2 ad R Q sed R 2, ex præsupposito est dimidium R Q Ergo etiam R n. ipsius R Z erit dimidium idest triens totius P N quod autem dicitur de hac proportione dicendum de qualibet alia: ita enim semper erit Q R ad R 2. vt R Z ad R n. & ita dicas de h T quod sit dimidium T F idest triens ipsius E h.

COROLL.

QVod dictum est de sphęroide quadriformi oblongę basis dicendum est de vngula O A P Q, cuius altitudo O Q sit maior, ac longitudo diametri Q P; quia vngula Cylindrica est eiusdem sphæroidis octauæ partis dimidium. Vnde æquabitur dimidio corporis prismate, pyramideque constantis L F N G,

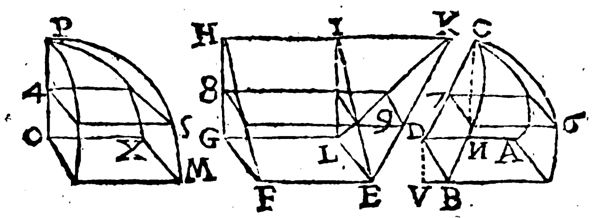


singulæ quoque partes parallelis planis basi abscisæ vt B A I H singulis dimidijs partibus æquealtis C F D N æquari prismatis, & pyramidis eodem modo detruncatis parallelo ducto D C plano H V in figur. quod dimidium obtineri poterit in prismate, vel pyramide tota, vel etiam eorum æquealtis partibus si transeat per lineam F N planum, quod diuidat bases C D vel L G bifariam, vt facilè quisque concipere potest ex fig. ipsa.

THEOR VII. PROPOS. XIII.

Sphæra vel sphæroides obliquum quadratæ, seu oblongæ basis rectangulæ est equale prismati pyramidiq; quorum basis triangularis rectangulæ latus æquetur altitudini ipsius sphæræ vel sphæroidis, & alterum latus alteri semiaxium, altitudo verò ipsorum æquetur semiaxi alteri.

SIt sphæra vel sphæroides obliquum quadratæ basis, vel obliquæ A D B C, Dico æquari prismati F G H I & pyramidi E L K I quorum basis triangularis rectangula F H G vel E I L æquetur latere quidem F G axi B D altero verò latere G H altitudini C N sed altitudo I H prismatis; nec non & K I pyramidis sit eadem ac alterum latus A D. Dico C D A B & H K G E corpora æquari. Vt prop. probetur sit sphęra vel sphæroides rectum M X O P cuius altitudo sit eadem, ac alterius obliquę sphæræ vel sphæroidis N C; basis verò M O æquetur basi A B. Certum est, quod ista sphæra, vel istud sphęroides M N O P æquatur sphæræ vel sphæroidi obliquo A C D B ex pr. 28: tr. 34 & ex 11 huius, & coroll. 4 sed idem M N O P ęquatur ex p. 12. h. prismati



pyramidique K E F G H, cùm F G latus æquetur axi D B, & ideo æquali axi N O, & G H altitudini N C & ideo altitudini P O, & altitudo I K vel I H Axi A D, & ideo æquali X O Quare etiã pyramis prismaque K E G H æquabitur sphærę, vel sphæroidi obliquæ A C D B.

COROLL. I.

SI verò sphæra, vel sphæroides obliquum sit basis non rectangulæ, tunc X M latus rectangulæ superficiei L E F G æquabitur altitudini basis V D, quod si æquetur axi, tunc superficies E L F G erit æquiangula basi A B.

COROLL. II.

CVm toties dixerimus dimidium quartæ partis semisphæræ, vel semisphæroidis quadriformis vngulam esse ex Pr. 49. trac. 34. sequitur, vt etiam dimidium prismatis, pyramidisque K H G E F æquetur A C D B obliquę sphęræ, vel sphæroidis quadriformis; seu oblongæ basis dimidio, nempe vngulę Cylindricæ,

COROLL. III.

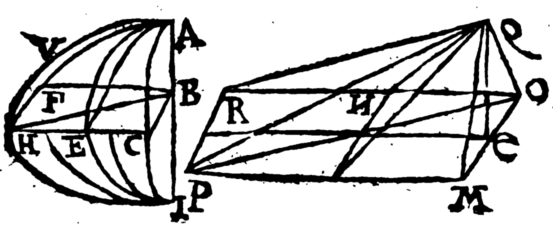
SEquitur quoque eodem argumento militante frustum sphærę vel sphæroidis prędictæ parallelis planis abscisæ basi ipsius, vt 6 C 7 æquari frusto æquealto prismatis pyramidisque 9 8 K H. Quoniam ostensum est prop. 11. h & coroll. 4 hæc duorum corporum frusta 6 C 7, & 9 8 K H æquari frusto 54. P rectæ sphęre, vel sphæroidis quadriformis oblongæ, vel quadratæ basis descriptæ.

THEOR. VIII. PROPOS. XIV.

Sphæra oblongæ basis, & rectangulæ æquat pyramidem; cuius basis sit quadruplo maior, in altitudinem normalis ipsius spæræ à basi in verticem deductam.

SIt sphęrę rectangulæ basis, & oblongæ quarta pars F A V H B C I. Dico ęquari pyramidi, quæ habeat basim quadruplam basis B C F H, & altitudinem B A.

Prob. Coroll. Prop. 48. tr. 24. ostensum est sphęram quadriformem I B A C E esse ęqualem pyramidi, cuius basis sit quadruplo maior propria basi, & altitudo eadem, quæ sphæræ quadriformis, vel quòd in idem reddit, cuius basis pyramidis sit dupli lateris basi ipsius sphærę. Ideoque quarta eius pars, quę sit pyramis N M Q erit æqualis quartæ parti ipsius sphæræ quadratæ, cuius basis M N sit quadrupla. ipsius basis sphęrę E B eleuata in altitudinem A B nimirùm altitudinis e Q. Cum ergo sit, vt basis ad basim, ita pyramis, ad



pyramidem eiusdem eleuationis ex prop. 24. tr. 34. Ideo pyramis M N Q quadruplę basis ipsi basi B E erit ad pyramidē O P Q quadruplę basis baseos B H, vt basis M N quadrupla basis B E ad basim O P quadruplam basis B H: Ideoque vt basis B E ad basim B H ex 18. tr. 9. p. 2. Sed vt basis B E ad B H basim, ita est sphæræ quadri formis quarta A E C B I super basim B E ad sphæræ quartam partem A V H C B I basis oblongę ex 9. huius. Ergo ex 16. tr. 9. p. 2. vt pyramis M N Q quadratæ basis M N quadruplę quadratę B E ad pyramidem Q P O oblongę basis O P quadruplæ basis B H, sic est sphæræ quadratę basis B E quarta pars A I B C E ad sphæræ oblongę basis B H quartam A H B C I; sed pyramis illa Q M N vt dixi super M N quadruplam B E ęquat quartam sphęræ quadriformis A E C B I. Ergo etiam hæc pyramis O P Q æquabit quartam partem sphæræ oblōgę I A B C H V, & ideo ipsæ sphærę æquabuntur quadruplo pyramidum ex 18. Tr. 9. p. 2.

COROLL. I.

QVæ verò dicuntur de sphęra intelligenda quoque sunt de sphæroide nimirum si A B C non sit quarta circuli, sed ellipsis, & cętera omnia sint posita vt priùs, quia in coroll prop. 40. tr. 24. idem dicitur de sphæroide quadriformi, quod de sphæra quadriformi.

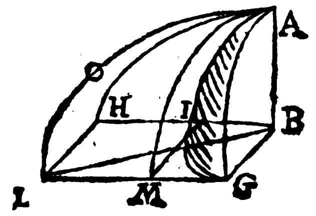
COROLL. II.

HInc est vngulam oblongam A B C H I quę æquet sua altitudine semidiametrum sitam super triangulum B C H æquari pyramidi in altitudinem B A, sed super triangulum sitæ quadruplo maiorem quàm B C H vt esset O M R P ex propositione 18. citata Euc. adauc. tr. 9. quia sicut pyramis triangularis basis est dimidium pyramidis quadrangulæ basis, sic vngulą est dimidiū quartæ partis quadriformis sphęræ.

THEOR IX. PROPOS. XV.

Sphæra quadriformis oblonga est ad sphæram circularem, vel sphærois quadriformis est ad sphæroidem circularem eiusdem altitudinis, vt basis rectangulum ad b sim circulum, vel vngula ad sphæram, vt semirectangulum ad circulum.

SIt semisphæræ vel semisphęroidis oblōgę basis quarta pars A H B G L, sphęrę quoq; circularis hæmisphærij quarta pars A I B G. Dico ita esse semisphæræ quarta, vel semisphæroidis oblongæ A H B . ad semisphære, vel sæmisphęroidis quartam circularem partē vt basis rectangulum H G ad basim quadrantem B I G; dummodo sit eadem altitudo B A Prob. Sit quadratæ semisphæræ vel semisphęroidis A I M B G quadratæ basis A I M G quarta Ostensum est prop. 9. Ita esse hāc A I M B G ad semisphęrę vel semisphæroidis



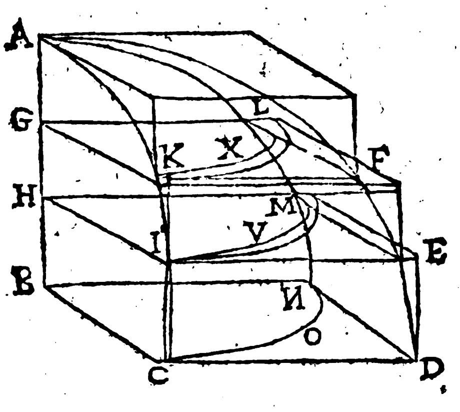
quartam A H B G, vt basis quadratum G ad basim rectangulum H G. Ideoque *conuertendo* semispheroidis, vel semisphęrę oblōgę quarta A H B G erit ad semisphæram, vel semisphæroidem quadratę basis A I B M G, vt basis rectangulum ad basis quadratum, sed ex prop. 38. Tr. 24 Euc. adr. ita est sphęra quadrata ad circularem, vt basis quadrata ad basim circularem, & ideo medietas ad medietatē, & quarta A I M B C dimidij quadratæ sphærę ad quartam A I B G circularis; vt quarta pars B I M G basis ad quadrantem circuli B I G. Quare ex æquo erit H B G semisphæræ, vel semisphęroidis oblongæ quarta pars ad semisphæræ circularis vel semisphæroidis quartam vt H B G rectangulum ad B I G quadrantem. quare & integra sphæra oblonga rectanguli ad integram circularem erit, vt rectangulum B H G ad quadrantem B I G ex 18. Tr. 9. pr. 2. vel vt basis quadrupla ad circulū, vel dimidiū huius quartæ partis hemisphærij oblongi scilicet vngula A O L B G ad integram sphæram ex eadem vt semirectangulum B L G ad circulum.

THEOR. X. PROPOS. XVI.

Sphæra quacunque quadriformis oblonga est ad sphæroidem basis ellipticæ, vt rectangulum basis ad ellipsim basim eiusdem, si fuerit eadem altitudo vtrique.

Sit quarta pars semisphęrę quadriformis A N D B C rectangulæ basis, & sit quarta pars semisphæroidis A N B C, cui basis quarta ellipsis B N O C. Dico quòd ita sit quarta semisphæræ basis rectangulæ ad quartam semisphæroidis basis ellipsis, vt ipsa basis rectangulum, ad ipsam basim ellipsim.

Probatur. Nam prop. 27. tr. 30, ita est B C D N rectangulum ad rectangulum H M E I vt ellipsis B N O C ad ellipsim H M V I, at vt rectangulum H M E I ad rectangulum G L F K, sic ellipsis H I V M ad ellipsim G K L X, & sic in infinitum, vt autem rectangula bases, sic parallelepipeda æquealta ex 7. p. 1. vel Cylindri ex 5. p. 2. tr. 34. super illas erecta. Ideoq; super B C N D parallelepipedum ad parallelepipedum super H M E I æquealtum, sic ęquè illis altus Cylindrus super quartam ellipsis B N O C ad Cylindrum æquealtum super ellipsis quartam H I V M, & vt parallelepipedum super H M E I ad parallelepipedum super G L F K sic Cylindrus æquealtus super quartam ellipsis K M V I ad Cylindrum æquealtū illis super basim G K X L. Ideoque, & coroll. 2.

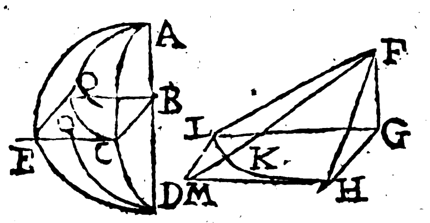


p. 19. tr. 9. p. 2. Erunt omnia parallelepipeda simul, quę sunt antecedentia proportionis cum consequentibus ad Cylindricos ellipticos antecedentia simul, & consequentia alterius proportionis vt vnum antecedens parallelepipedum super B N D C ad aliud antecedens Cylindrum super quartam ellipsis B N O C. Sed hæc sunt ex prop. 23. tr. 34. vt basis rectangulum B N C D ad quartam ellipsis B N O C. Ergo & omnia parallelepipeda erunt ad omnes Cylindros æquealtos, vt rectangulum B N D C ad quartam ellipsis B N O C. Si ergo multiplicentur quantùm multiplicari possunt parallelepipeda relinquent pro differentia a quadriformi sphæra oblonga quantitatem omni data minorem ex prop. 14. tr. 33. & ita si multiplicentur quartæ semisphęroidis ellipticę circumscripti Cylindri. Quare parallelepipeda æquabūnt quartam hemisphærij quadriformis oblongę, & Cylindri quartam semisphęroidis ellipticę: vnde erunt & ipsæ ex 4. huius circumscriptæ quantitates inuicem, vt multitudo parallelepipedorum ad multitudinem Cylindrorum nempe, vt basis B N D C vt ostendi ad basim quartam ellipsis B M O C. si ergo octoplicetur, sphæra quadriformis oblonga, & fiat integra erit ad sphæroidem integrum octuplo quarta parte hemisphærij maiorem, vt basis rectangulum ad basim quartam ellipsis ex 18. tr. 9. p. 2. Ideo, & ex eadem, vt basis integra sphæræ quadriformis oblongæ ad sphæroidem integrum basis ellipticæ.

THEOR XI. PROPOS. XVII.

Sphærois, cuius basis ellipsis æquat conum cuius basis sit quadrupla ipsius ellipsis, qua illi basim substernit, & altitudo eadem.

Sit quarta sphæroidis basis ellipticæ A Q O B C D, & fiat quarta coni F L K H G eiusdē quartæ altitudinis: ellipsisq: L H K G quadruplo maioris Dico quartam sphæræ oblongæ basis ellipticę esse æqualem quartæ coni F L K H G, Probatur ita est quarta sphęrois quadrangulæ basis A Q E B C D ad quartam conoidem ellipticæ basis A Q O C D, vt Q E C B rectangulum ad B Q O C ellipsis quartam ex propos. 16. h: sed vt Q E C B rectangulum ad Q O C B ellipsis quartam, sic est G H L M rectangulum quadruplo maius ipso B Q E C



rectāgulo ad quartā ellipsis L K H G quadruplo maioris quā quarta Q O B, & L M H G rectangulum est ad quartam L K H G ellipsis vt pyramis L M H G F ad quartam coni L K H G F. Ergo ex 16. tr. 9. p. 2. quarta sphæræ oblongæ, & quadrangulæ basis A Q E B C D erit ad sphæroidis quartam partem basis ellipticę, vt pyramis F L M G H super rectangulum ad quartam coni F L K H G. sed ostensum est suprà pr. 16. h. sphærę quartam rectangulę, basis oblongę ęquare pyramidem F L M G H quadruplò maiorem. Ergo ex 12. tr. 9. p. 2. etiam quarta sphæroidis A Q O C B D erit

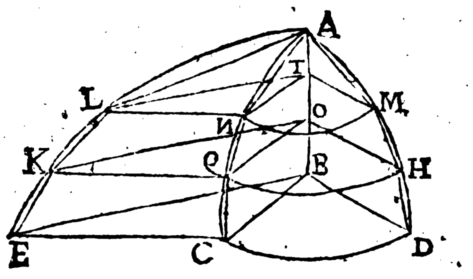
B D erit æqualis quartæ coni F L k G H. Ideoque ex 18. eiusdem tr. 9. p. 2. tota sphęrois basis ellipticæ ęquabit totum conum super ellipsim quadruplo maiorem.

Aduerte idem esse ostensum à me coroll. 3. Prop. 37. tr. 34. licet breuiùs quàm par sit, sed ad hoc vt efficax sit argumentum ad ostendēdū ellipses parallelas esse similes ellipsis planum secās ellipses parallelas, oportet præsupponere actum, vel agere per partes proportionales, sicut & pr. 11. tr. 25. v.g. in ea figura prop. illius G S. sit ad S. T. vt Z M ad M C.

THEOR. XII. PROPOS. XVIII.

Quæcunque quadratæ seu oblongæ semisphæræ, seu semisphæroidis etiam ellipticæ, Parabolicæ, Hyperbolicæ, superficies est ad supr ficiem globosam figuræ genitricis in gyrum actæ, vt altitudo ad periphæriam.

Sit figura genitrix quęcunque A B C, siue ea sit circulus, seu ellipsis; seu parabola, seu hyperbola, Sitque octaua pars semisphęræ, quadriformis, vel semisphęroidis cuicunque A B C E; superficieique A B C in orbem agatur, & generet corpus rotundum A B D C. Dico superficiei octauam partem A B C semisphærę, vel semisphæroidis quadrangulæ esse ad superficiem rotundam A D C, vt altitudo C E ad periphæriam D C. Subscribātur ęquealtę superficies conicæ corpori globoso, & rotundo D A B C, & trapezia parallelis basibus æquealtā superficiei octauæ partis C A E sphærę vel sphęroidis propositi. Supra enim ostendimus propos. 9. h. CE esse ad O K altitudines, vt B C ad Q O applicatæ, & QK ad NL vt O Q ad T N: quia *permutando* C E erat ad



C B, vt KQ ad QD: sed vt BC ad QO, sic DC periferia ad H Q periphæriam, Ergo ex pr. 16. Pr. par. 2. vt CE ad QO, altitudines sic DC ad Q H periphęrię, & sic de cæteris, & *permutando* vt C E ad D C, sic Qk ad Q H. Verùm vt CE ad D C, sic est ex pr. 6. huius traprezium Q E ad frusti conici superficiem H C, & vt Qk ad Q H. Sic est tra rezium Q L ad frustum superficiei conicę M Q, & sic de cæteris. Quare si per continuam inscriptionem putes illas superficies, corporis quidem globosi per continuam inscriptionem superficierum conicarum, & corporis quadrangulæ spheroidis per continuam inscriptionem trapeziorū imitari, erunt ex 5. huius in eadem proportione, & A CE superficies semisphærę erit ad A D C superficiem corporis globosi, vt C E ad D C. Quare quadrationi subigi poterunt superficies sphęræ, & sphęroidis quadriformis, quia sphæręex Archimede, & 48. p. tr. 31. & sphæroidis superficies ex mea 36. prop. tr. 31. noscuntur. Idem verò quod de toto asseritur militat de partibus vt facile ex propositione deduces.

EXPENSIO III.

De conoidibus parabolicis oblongæ basis.

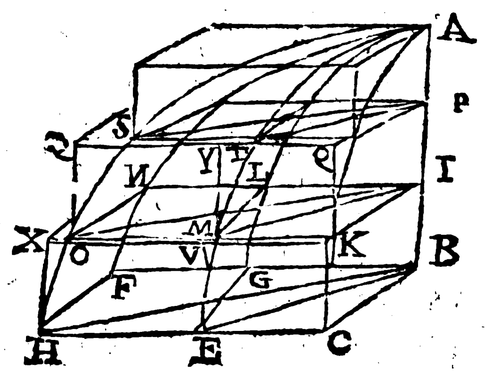
Licet Conoides parabolicūm oblongę basis minus veniat in vsum, quàm ellipticū ad integritatem tamen doctrinæ aliquid etiā de eius cubatione ostendere visum est, cum & aliquando opus exigere possit, vt eius mensura exoptetur.

THEOR I. PROPOS. XIX.

Conoides parabolicum quadratæ basis est ad conoidem parabolicum oblongæ basis, eiusdem altitudinis vt quadratūm basis ad rectangulum basim.

Sit quarta pars conoidis parabolici quadratę basis fig. pr. 9. h (quod sufficit) A B C G E. Dico eam esse ad quartam conoidis oblongæ A B C F H, vt quadratum B E ad rectangulum B H.

Probatur. Ducantur enim plurima plana parallela basi, vt L k M O, &c. Q T & cætera erunt parallela plano sc. C H, & K O & Q Y sic B C I K, & P Q Ducatur igitur planum diagonale A M E B, & A S H B, efformabunturque sectiones B E I, & M P I; & B H O I, & P S, triangulaque B C E; I K M, & PQ T erunt ęquiangula in sphæra quadriformi, siquidem anguli apud C, K, Q recti sunt, & apud B, I, P anguli acuti sunt anguli inclinationis planorum A E B diagonalis plani, & A C B basis. Quamobrem ex prop. 3. tr. 22. æquales ideo ex coroll. pr 17. tr. 10. erunt æquiangula, & propter hoc similia ex prop. 4. tr.



10. & def. 1. tr. eiusdem. Idem dicendum est de triangulis B C H, & I O k, & P Z Q ob eandem rationem. Quare ex pr. 4. tr. 10. C E erit ad C B vt K M ad K I, & *permutando* CE ad K M, vt C B ad k I, sed vt C B ad k I sic est C H ad K O,

ad KO, ergo ex 16. tr. 9. C E erit ad K M vt C H ad K O. Ideoque ipsa triangula erunt proportionalia; siquidem adipiscuntur latera circa equales angulos proportionalia. Ideoq; triangulum B C E erit ad triangulum I K M vt triangulum C H B ad triangulum *I K O*. & ideo eorũ duplũ quadrata BCGE erit ad BKL M vt rectangulum BCFH ad rectangulũ KINO, & ideo si parallelepipeda super has bases pueretur eleuata æquealta erit parallelepipedum BCG EV ad I M Y parallelepipedum ex 8. tr. 34. vt parallelepipedum B H X ad parallelepipedum I O Z. Quapropter erit etiam quarta pars conoidis parabolici quadriformis quadratæ basis ad quartam partem conoidis parabolici oblongæ basis quadriformis vt basis quadratum ad basim rectangulum ex prop. 4. huius cum multiplicata omni multiplicatione possibili minori quantitate omni quantitate dabili excedant ipsa rectangula circumscripta ipsos conoides parabolicos. Ideo, & quadruplũ conoidis quadratæ basis parabolici erit ad quadruplũ quartę partis conoidis parabolici oblongæ basis, vt basis B E quadratum ad basim B H rectangulum.

COROLL I.

Hinc est, quòd etiam sit conoides parabolicum quadratæ basis ad conoidem parabolicum oblongæ basis, vt linea C E ad C H lineam. Nam C E basis est ad C H basim lineę, vt basis CG superficies ad CF superficiẽ ex 1. tr. 10. vt autem C G ad C F, sic est parabolicum conoides quadratum ad conoidem oblongum. Ergo ex 16. tr. 10. vt C E linea ad C H lineam.

COROLL.

Hinc quoque euidens fit, singulas æquealtas portiones, vt A Q K I L M. Conoidis quadrati, ad singulas A Q K I N O æquealtas conoidis parabolici oblongæ rectangulęque basis esse, vt basis quadrata ipsorum planorum abscindentium I K M *L* ad plana rectãgula abscindentia I N O *K*; Et vngulæ quoque portionem AM*K*I ad vngulæ portionem A I K O esse, vt triangulum IkM ad triangulum Ik O.

DEFINITIO.

Cylindricus parabolicus est corpus duabus parabolis parallelis contentum, superficie curua illis rectangula, & iuxta ambitum parabolarum se curuante, & superficie plana per applicatas extremas parabolarum ducta.

Itaque Cylindrus parabolicus erit corpus a h b c g duabus parabolis a h b, & c I g cõtentum, circa quas rectangulè circumuertitur superficies h b c g, & quam terminat planum a b I g actum per applicatas parallelas a b, & g I parabolarum.

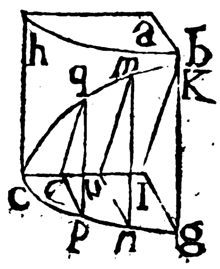
Sectio in ipso duplex fieri potest, vel per planum actum per axem I c vt in fig. propos. seq: & per latus b g, vt est planum K I c, vel per latus c h actum, & per applicatam g. I. Iam verò prop. 15. tr. 25. ostendimus, hanc sectionem esse parabolam. Siquidem omnes lineæ normales in superficie curua ad parabolam eg uũctæ sunt. Vnde valet eadem ostensio. Quare remanet hic solùm ostendendũ, quod sectio K *I* c exhibitæ figuræ parabola quoque sit.

THEOR. II. PROPOS. XIX.

Coni parabolici sectio per axem parabolæ basis, & cum ipsa angulum quemcunque faciens parabola est.

Sit parabola basis I c g, & per axem ipsius I c transeat planum secans Cylindrum parabolicum a h b c g, quod sit k c I. Dico hoc planum secando Cylindrum fieri parabolam.

Planum I c g semiparabola est; Ideoque ex 5. tr. 23. quadratum *I* g erit ad quadratum u n vt I c axis ad u c axem, vel portionem eius. Sed vt g. I quadratum ad n u quadratum, ita est, vt dicam, k I quadratum ad m u quadratum. Ergo ex 11. 15. k I quadratum est ad m u quadratum, vt I c ad u c. Quare ex 5. prop. tr. 23. pũcta *K*, & m sunt in parabola. Quod autem quadratum g I sit ad quadratum n u, vt quadratum k I ad m u quadratum probatur, quia triangula *K* I g, & m u n sunt ęquiangula; est enim angulus in ipsis g, & n rectus ex Thesi ob superficiem rectam c h b g at *I* & u æquales, quia sunt anguli inclinationis planorum ex 18. tr. 22. Quare ex prop. 17. l. 4. coroll. 2. erunt æquiangula. Quapropter ex prop. 4. tr. 10. latera erunt proportionalia. Ideo ex def. 1. tr. 10. in declaratione ipsius def. erunt quadrata similia: vnde erit quadratum, g I ad quadratum n u, vt *K I* quadratum ad m u quadratum: quod erat ostendendum.



THEOR. III. PROPOS. XX.

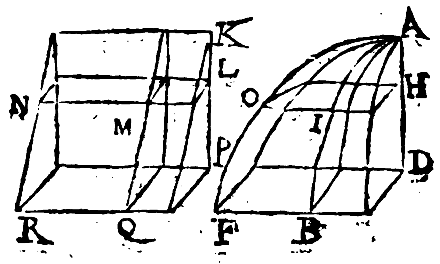
Dimidium quartæ partis conoidis parabolici quadriformis oblongæ, vel quadratæ basis est Cylindri parabolici frustum sectum per latus, & axem parabolæ substernentis basim.

Prob. Nam in fig. 18. propos. huius *BAC* sit parabola, basis A T *M* E B est planum secans per axem A B, & A T E Q C superficies globosa Cylindri rectangula parabolæ *ABC* basis, & idem dicas de dimidio quartæ partis hæmisphærij oblongi A O H B C.

THEOR. IV. PROPOS. XXI.

Conoides parabolicum oblongæ basis, & rectangulæ æquat prisma eiusdem altitudinis, & æqualis rectangulæ basis.

SIT prisma R K eiusdem basis quadrangulę R P, ac F D; & altitudinis P K eiusdem, ac D A conoidis quadriformis F A D rectangulæ basis, vel eius quartæ partis, quæ sufficit. Dico hoc prisma R K æquari ipsi conoidi parabolico F A D. Quod, vt ostendatur, sit Q P K prisma eiusdem altitudinis D A, & eiusdem basis B D, de quo constat trac. 34. prop. 55. Eucl adauc. ęquari quadriformi conoidi A D B. Quo posito, ita ostendo prop. A D B quadriforme conoides quadratę basis est ad A D F conoidem parabolicum oblongæ basis, vt basis quadratum D B ad basim rectangulum D F ex prop. 18. h. Sed vt quadratum D B ad D F rectangulum: sic est æqualis ipsi Q P basis prismatis Q K ad basim P R prismatis R K æqualem ipsi F D: vt autem Q P basis ad basim



P R: ita ex 15. tr. 34. est prisma, Q K ad prisma R K. Ergo ex 16. tr. 9. p. 2. conoides parabolicum B AD quadratæ basis est ad conoidem parabolicum FAD oblongæ basis, vt prisma Q K P ad prisma R K P; sed prisma Q K P ęquatur conoidi parabolico quadratæ basis A D B ex prop. 55. tr. 34. Euc. ad. Ergo ex prop. 12 tr. 9. Euc. adauc. etiam prisma R K P æquabitur conoidi parabolico rectangulę basis F D A. Licet autem F D A sit propriè quarta pars, intelligitur tamen de toto quadruplicando R K P.

COROLL. I.

HInc fit, idem dicẽdum esse de octaua parte conoidis quadriformis oblongæ basis, quod æquetur octauæ parti prismatis eiusdẽ basis, & altitudinis ex prop. 18. tract. 9. Eu. ad. & ideo cognoscetur cubatio quoque scindę Cylindri parabolici per axem, & latus secti, vt explicauimus prop. 19. h. Nam ex prop. 20 huius eadem sectio bifarians quartam conoidis quadriformis cuiuscunque, est etiam sectio Cylindri conoidalis per latus, & axem parabolę baseos.

COROLL. II.

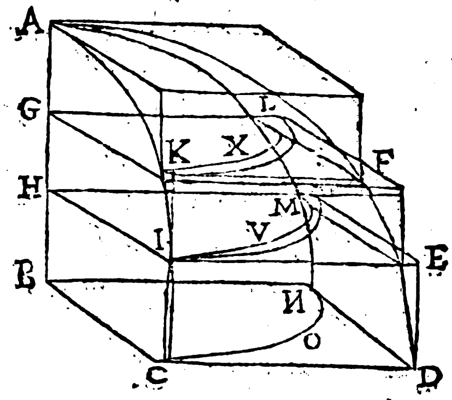
HInc quoque habetur cubatio portionum conoidis parabolici oblongæ rectangulęque basis abscisæ plano basi parallelo. Nam ex 18. huius coroll. portio solidi conoidis quadratę basis AHI, est ad partem solidam conoidis rectangulæ basis AHO, vt ipsa basis quadrata I H ad basim rectangulum HO. Conoidis autẽ quadratæ basis portio AH I eiusdem altitudinis æquatur prismati eiusdem altitudinis K M ex 55. tr. 34. Eucl. ad. & basis quadrata conoidis H I quadratæ basi rectangulæque L M portionis prismatis ex probatione eiusdem prop. Verum vt H I quadratũ ad H O rectangulum: ita est D B quadratum ad D F rectangulum ex 18. h. vt autem D B ad D F: sic est P Q ad Q R, cum bases æquales præsupponantur PQ ipsi D B, & P R ipsi DF, vt autẽ PQ ad PR sic est LM ad LN, quia sũt rectã gula eiusdem altitudinis: Vnde se referent vt bases, quæ sunt eedem in P Q & L M sicut eędem in R P. & L N. Ergo ex 16. tr. 9. Euc. ad. p. 2. basis H I. erit ad H O vt L M ad L N. Sed ex prop. 55. tr. 34. H I & L M æquantur: Ergo etiam H O, & L N. Cum itaque vt dicebam H I A solida portio conoidis quadratæ sit ad A O H portionem solidam conoidis oblongæ basis; vt H I quadratum basis ad H O rectangulum. Sit autem H I ad H O vt L M ad L N ob earum ostensam æqualitatem, & vt L M ad L N; sic sit prisma K M ad prisma K N. Erit ex 16. Eu. ad. tr. 9 conoidis parabolici portio A I ad portionem solidam A O, vt prisma K M ad prisma K N: Sed prisma K N, & conoidis parabolici quadrati portio A I H æquantur ex 55. tr. 34. Euc. ad. Ergo etiam portio conoidis parabolici rectangulę basis, & prisma K N æquabuntur ex 12. tr. 9. Euc. ad. p. 2. Licet autem figura exprimat quartam partem, idem dicendum de tota. Hinc nosces, & portionem vngulæ parabolicæ cubare. Nam, cum sit dimidium portionis AHO, quæ ęquatur prismati K L N. Si assumas dimidium prismatis K L N æquabitur ex 13. pr. tr. 9. Euc. ad. ipsi portioni Cylindricę vngulę.

THEOR. V. PROPOS. XXII.

Conoides Parabolicum quodcunque quadratæ basis est ad quodcunque conoidem parabolicum ellipticæ basis eiusdem altitudinis, vt basis rectangulum ad basim ellipsim.

SIt enim figura prop. 14. supponaturque A B C O N esse conoidem parabolicum ellipticæ basis, vel eius quartam partem, & A B C N D rectangulæ basis æquealtę: quarum axis, BA diuidatur in quot libuerit partes equales, & agantur parallela plana basi per singulas diuisiones: superque illa ædificentur parallelepipeda æquealta, vt sunt diametri B A partes interceptæ sicut, & circa conoidem parabolicum Cylindri elliptici equealtos. Quo posito, sic ostenditur propos. Ex prop. 27. tr. 30. ita refertur B C N D rectangulum ad rectangulum M E I H, vt ellipsis N O B C ad ellipsim M H V I; & H M E I rectangulum refertur ad rectangulum G L F K vt ellipsis H M V I ad ellipsim G L X K, & sic, si plurimæ aliæ bases adsint. Vt autem bases rectangula, vel ellipses ad inuicem; sic parallelepipeda equealta, vel æquealti Cylindri super illas bases erecta ex prop. 8. tr. 34 Euc adauc.

Id circò parallelepipedum super BCN D erit ad parallelepipedum super H AEI, vt Cylindrus super N O B C ad Cylindrum super M H IV ellipses; Et parallelepipedum super H M E I erit ad parallelepipedum super G L F K, vt



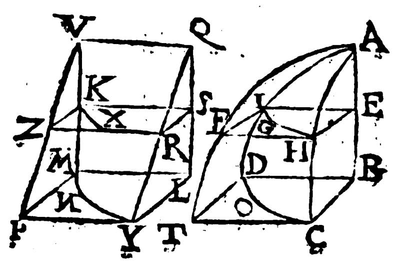
Cylindrus ellipticus equealtus super H M V I ad equealtum Cylindrũ super GLXK. Ideoq; ex coroll. 2. pr. 19. tr. 9. Euc. adauc. erunt omnia parallelepipeda simul; quę sunt antecedentia in proportione cum consequentibus ad omnes Cylindros antecedentia pariter & consequentia omnia simul, vt vnum antecedens parallelepipedum H D super rectangulum N D B C ad aliud antecedens HO. Cylindrum super ellipsim NOBC. Sed hæc ex propos. 23. tr. 34. sunt, vt rectangulum N D B C ad ellipsim NOBC. Ergo omnia parallelepipeda erunt ad omnes Cylindros ex 16. tr. 9. Euc. ad. vt basis rectangulum N D B C ad basim ellipsim N O B C. Si autem multiplicētur, quantum queunt multiplicari per subduplam diuisionem altitudinum, relinquent parallelepipeda à conoide quadriformi rectangulo, & Cylindri ab elliptico quantitatem omni data minorem ex prop. 14. tr. 33. Quare dabitur differentia inter ipsa circumscripta parallelepipeda, & conoidem quadriforme oblongum, & inter cylindros, & sphæroidē ellipticum omni conceptibili minor, & ideo nulla igitur æquabuntur infinite parallelepipedorum multitudini conoides parabolicum oblongum, & Cylindrorum conoides parabolicum ellipticæ basis, Ideoq; conoides parabolicum quadriforme oblongum erit ad conoidem parabolicum basis ellipticæ, vt rectangulum ad ellipsim basim. Licèt autem figura ostendat quartam partem, intellige tamen ex pr. 18. tr. 9. p. 2. de totis corporibus; quæ sunt quadruplo maiora, sicut bases eorũ sunt quadruplo maiores. Poterit etiam vltima conclusio deduci ex 4. huius: nimirum, quòd conoides quadrangulæ ad conoidem ellipticæ basis dicat ipsam proportionem, quam parallelepipeda ad Cylindros, nimirum quam BNDC ad B N O C. Eo, quòd circumscripta parallelepipeda ad Cylindros sint vt B N DC. ad B N O C, & possint circumscribi super omnem differentiam, quæ exiberi possit inter ipsa, & conoides.

THEOR. VI. PROPOS. XXIII.

Conois elliptica basis æquat conum prismaticum eiusdem ellipticæ basis, & eiusdem altitudinis.

Sit conois ellipticum A DO C B, nempe, cui basis ellipsis A D O C. itque, & eiusdem altitudinis, quam habet conois elliptică A D O CB, prismaticus conus Y M N V Q, cuius basis M N L Y eadem, ac B D O C. Dicoque conoidem elliptică A D O C B æquare conum prismaticum Y Q V M N L. Quod vt ostendatur conoidi elliptico circumscribatur quadriforme conoides A D T C B. & pariter cono prismatico circumscribatur prisma eiusdē basis M P Y L, cùm circa eandem basim circumscribantur, eruntque vtpote corpora circumscripta æqualis, & similis basis.

Pr. propos. A B DOC conoides ellipticum ex prop. 22. huius est ad conoidem quadriforme A D T C B, vt basis BDOC ellipsis ad



B D T C rectangulum, nimirùm, vt eadem M N L Y ellipsis ad eundem M Y P L rectangulum. Sed vt M N Y L ellipsis ad MYLP rectangulum, sic ex pr. 3. huius est ellipticus, & prismaticus conus PNYQL ad prisma MPYL V Q. Ergo vt conoides parabolicum ellipticū A B D O C ad conoidem parabolicum quadriforme A DTC B: sic est prismaticus conus V Q M N L Y ad prisma V Q M Y, Sed conoides quadriforme A B T C D æquat prisma ex ostensis propos. 20. huius. Ergo etiam ex 12. tr. 9. p. 1. Euc. adauc. conoides ellipticum A D O C B æquabit conum prismaticum ellipticum M N L Y V Q.

COROLL.

Hinc ne dum ipsum conoidē parabolicum ellipticæ basis: Sed singulæ eius portiones cubantur: tum quia ex 35. prop. tr. 34. Eu. ad. id probatur de conoide parabolico rotundo, & cono prismatico circularis basis. Quare id eodem argumento poterit dici de partibus conoidis parabolici, & coni prismatici ellipticarum basium. Tum quia idem valet argumentum iam factum de partibus quoq: trũcatis à planis basi parallelis, cum per istam abscisionem eiusdem generis corpora, & altitudinis, & basium æqualium Z.& FE remaneāt AI GHE, & V Q K X R . Vnde eodem modo argumentaberis. Quod autem bases remaneant æquales ZS, & F E, Prob. Quoniam BC quadratum est ad EH quadratum, vt B A ad

E A ex

EA ex 5. tr. 23. & sic quadratum D B ad quadratum I E. Quare latus C B ad H E, & B D ad I E dupplicatam habebunt proportionem B A ad E A. Ideoque, cum sit eiusdem dupplicata, erunt in eadem proportione C B ad H E, & D B ad I E. Ideoque *permutando* C B ad D B, vt H E ad I E. Eadere ex def. 1. tr. 10. erūt rectāgula T B & F E similia, & propter hoc erunt in dupplicata ratione laterum C B ad H E, vel D B ad I E ex pr. 21. tr. 10. scilicet vt C B quadratum ad H E quadratum ex eadem dupplicatam habentia rationem laterum C B ad H E. sc. ex 5. tr. 23: vt B A ad E A. Verùm vt B A ad E A lineæ sic est L Q ad Q S. ob earum æqualitatem, & vt L Q ad Q S, sic Y L ad R S ob parallelismum earum ex 2. tr. 10. Et ex 1. eiusdē vt Y L ad R S. Sic rectangulum M Y ad rectangulum Z S ob æqualem altitudinem. Quare ex 16. tr. 9. p. 2. T B rectangulum erit ad F E rectangulum, vt rectangulum M Y ad rectangulum Z S. Sed rectangulum M Y, & T B. Sunt æqualia ex Thesi. Ergo etiam rectangulum F E ex Z S.

EXPENSIO III.

De Conoidibus Hyperbolicis oblongæ, & quadrangulæ basis.

HOc corpus minùs vsibus humanis aptum est, minúsque cognitum, Vnde etiam breuiùs de ipso agemus.

THEOR. I. PROPOS. XXIV.

Conoides Hyperbolicum quadratæ basis est ad conoidem hyperbolicum oblongæ basis eiusdem altitudinis, vt basis quadrata ad basim oblongam rectangulam.

PRob. eodem modo ac prop. 9. h. solùm præsupponendo figuras A B Q C, B A L G, B A N F elipses esse ad eam propos. remittimus lectorem. Idem quoque infertur coroll.

Præcor lectorē vt pr. 46. tr. 34. linea 9. deleat *cui parellelepipedum*; & cet. & reponat *prismatisque*. Et coroll. intelligat quod inuolucrum sit æquale quatuor prismatibus, & quatuor pyramidibus, quarum altitudo sit differentia inter E R applicatam verticis, & E K: basis verò ipsorum triangulum E B.

DEFINITIO.

Cylindrus hyperbolicus est corpus duabus hyperbolis parallelis contentum, superficieque curua illis hyperbolis rectangula, & iuxta earum ambitum se curuante, & superficie plana per applicatas extremas hyperbolarum ducta.

ITaque Cylindrus hyperbolicus a b h c i g. vt figur. prop. 25. est corpus duabus hyperbolis a h b, & c i g contentum, superficieque curua h b c g, & plana b a i g acta per applicatas g i, & a b. & recta ad axes c i, a h.

DEFINITIO.

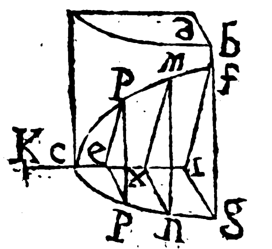
Sectio in hoc Cylindro duplex fieri potest, vel plano acto per axem i c, & latus b g, vt est c f l, vel plano acto per applicatam g i: Iam verò ostensum est hanc sectionem esse hyperbolā pr. 16. tr. 23. vt etiam diximus de parabola. Quare remanet ostendendum, quòd etiam c i sit hyperbola.

THEOR. II. PROPOS. XXV.

Coni parabolici sectio per axem hyperbolæ baseos, & cum ipsa angulum quemcunq: faciens, hyperbola est.

SIt hyperbola basis c g I Cylindri hyperbolici a b c i g. Et per axem ipsius i c ducatur planum c i f, quod secet latus g b. Dico c i g esse hyperbolam.

Probatur ex prop. 6. tr. 23. Euc. ad. Rectangulum ex X k, & X c est ad rectangulum ex e K & e c, vt quadratum X n ad quadratum p e; quadratum vero X n ad quadratum p e est, vt quadratum X m ad quadratum e Prob. similitudinem triangulorum parallelis contentorum lateribus, m x n, & e p P. Siquidem plana eorum præsupponuntur ducta parallela plano f i g. Quare etiam sectiones, quę sunt latera triangulorum, erunt parallela inuicem ex tr. 22. pr. 14. Quamobrem ex 16. tr. 9. p. 2. etiam quadratum X m erit ad quadratum P E, vt rectangulum ex X K, X c, ad rectangulum ex e K & e c. Hæc autem est essentialis proprietas hyperbolarum: quæ demonstrat puncta m & P esse in hyperbola, sicut, & de quibuslibet alijs idem ostendi potest. Ideoque cùm omnia puncta in linea f, m, P, c ostendantur esse in hyperbola, erit ipsa plana superficies hyperbola f m c i.

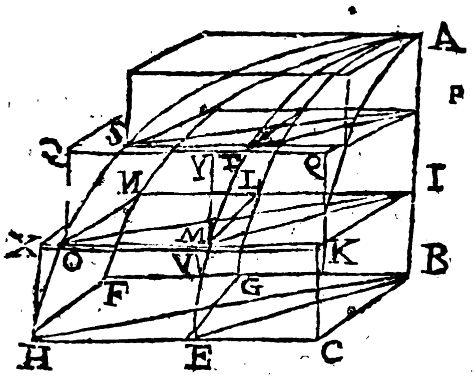


THEOR. II. PROPOS. XXVI.

Dimidium quartæ partis conoidis hyperbolici oblongæ, vel quadratæ, rectangulæque basis est Cylindri hyperbolici frustum sectum per latus Cylindri, & axem hyperbolæ.

PRob. ex fig. prop. 18. & 24. & 9. huius. Nam ex def. illa est sectio frusti Cylindri hyperbolici, quæ continetur superficie, plana triangulari I f g, qualis est B E, superficie f g m c plano hyperbolæ i c g, recta; & circa illam flexa, & talis est A T E C K Q normalis hyperbole A B C, & circa eam flexa, vel etiam superficies A O H C eiusdem rationis, & tan-

& tandem plano c g f i per axem ducto, & ad hyperbolam i c g inclinato, & tale planum est A T E B ductum per axem A B, & ad hy-

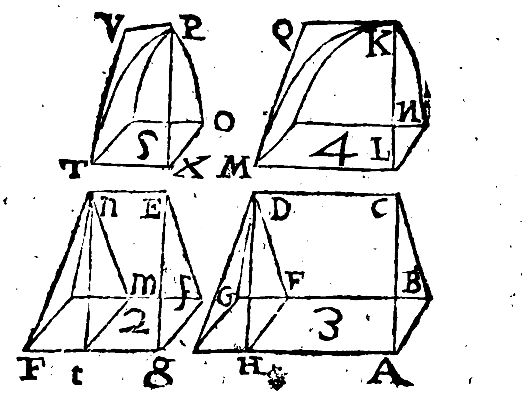


perbolam A BC inclinatum, vel etiam planum A O H B eiusdem qualitatis; Vndè A T E B C, vel A O H B C erit frustum Cylindri hyperbolici obliquè resecti.

THEOR. IV. PROPOS. XXVII.

Conoidis hyperbolici quarta pars oblongæ basis, rectangulæque æquat prisma, pyramidemque eiusdem altitudinis, cuius prismatis basis triangularis constet ex applicata breuiori, & infima minoris pro vno latere, & axe, & altitudine maioris hyperbolæ efformatricis pro alio. Altitudo verò eius sit tangentis maioris verticem. At basis pyramidis constet ex altitudine eadē, quæ hyperbolæ efformatricis, & basis habeat latus applicatam minorem, & alterum latus differentiam inter tangentem verticis longiorem, & applicatam longiorem.

SIt prisma C A F D, cuius altitudo A H sit eadem, ac applicatæ ad verticem K Q. Est enim applicata verticis, quia si prolungetur L K, vsque dum conueniat cum M Q erit L K prolungata axis tota transuersa hyperbolæ, vt debet supponi. Basis verò triangulum ACB constet ex AC altitudine eadem, ac L K, & A B æquet applicatā L N minoris Hyperbolæ L K N. Pyramis verò sit DFG altitudinis eiusdem AC vt L K, & basis eius sit dif-



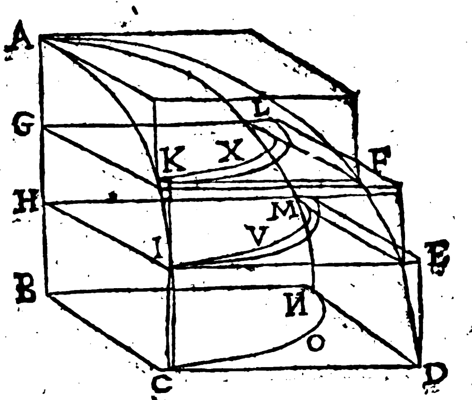
ferentia F G inter K Q tangentem, & L M applicatam maximam maioris Hyperbolæ: ita vt BG æquetur LM, & AB ipsi LN; & ideo basis A G æquatur basi N M. Dico hoc prisma, hancque pyramidem C D A F G æquari conoidi hyperbolico LNMQ oblongæ basis rectangulæ eiusdem altitudinis. Quod vt probetur sit prisma; & pyramis E n m F g eiusdem conditionis, & rationis, quam descripsimus prop. 56. tr. 34. Euc. ad. æquantia hyperbolicum quadriforme. Nempe latus trianguli basis prismaticæ gE sit eadem ac PX altitudo hyperbolæ, & f g æquet applicatam infimam O X, & maxima f m vel g t æquet tangentem verticem P V & F t differentiam inter X T, & P V, ita quod gF æquetur X T, & f g ipsi O X, & ideo F f quadratum OT quadrato æquetur: Quod corpus ex prismate pyramideque conflatum æquat hyperbolam quadriformem quadratæ basis vt ibi ostendimus.

Pr. Ita est ex 24 h. conoides hyperbolicum quadriforme 5 quadratæ basis, ad rectangulæ basis conoidem hyperbolicum 4. vt basis quadratum 5. ad basim rectangulum 4. Sed vt basis quadratum 5. ad basim rectangulum 4. ita est basis quadrata 2. ad basim rectangulam 3, cùm sint æquales bases ex constructione, nēpe 2, 5 & 4, 3. Sed vt basis 2 quadratum ad basim 3 rectangulum: sic est prisma, pyramisque elata super quadratum 2 ad prisma pyramidemque elata super rectangulum 3, ex 1 huius cùm sit eiusdem altitudinis. Ergo ex 10. tr. 9. p. 2. ita erit prisma pyramisque super quadratum 2. ad prisma pyramidemque super rectangulum 3 vt conoidis hyperbolici pars quarta super quadratum 5 ad conoidis hyperbolici quartam super rectangulum 4. Sed conoidis quarta 5. æquatur prismati pyramidique 2. ex pr. 56. tr. 24: Ergo etiam conoidis quarta pars 4. æquabitur prismati pyramidique 3 ex propos. 12. tr. 9. Euc. ad.

THEOR. V. PROPOS. XXVIII.

Conoides quodcunque hyperbolicum quadratæ basis ad quodcumque conoidem hyperbolicum ellipticæ basis est, vt basis quadratum ad basim ellipsim;

PRobatur vtendo fig. prop. 16. & supponatur BCON A esse conoidē hyperbolicum, vel eius quartam partem ellipticæ basis, quod melius deseruit, & idem supponatur de corpore A B C N D rectangulæ basis æquealtæ, quorum axis diuidatur in quas libuerit, partes æquales, & agantur parallela plana basi B D per singulas diuisiones, superque illa ædificentur parallelepipeda æqualta, vt sunt diametri hyperbolici partes interceptæ, sicut & circa conoidem hyperbolicum Cylindri elliptici æquealti. Quo posito sic ostenditur propositio. Ita refertur B C N D rectangulum ex prop. 27. tr. 30. ad rectangulum M F I H vt ellipsis N O B C ad ellipsim M H V I At M H V I rectangulum refertur ad rectangulum G L F k, vt ellipsis H M V I ad ellipsim G L X K, & sic si plurimæ aliæ bases adsint, ad inuicem referuntur, vt autem rectangula ad rectangula, & ellipses ad ellipses, sic parallelepipeda æquealta ex rectangulis ad inuicem, vt elliptici Cylindri æquealti illis ad inuicem ex prop. 8. par. 1. & p. 3. p. 2. tr. 34. Idcirco parallelepipedum ex N D B C consurgens erit ad parallelepipedum super H M E I, vt Cylindrus ellipticus eleuatus ex NOBC ad Cylindrum ex basi MHVI, & parallelepipedum super MHEI basi locatum erit ad parallelepipedum super GLFK, vt Cylindrus ellipticus æquealtus ex basi elatus MHVI, ad æquealtum Cylindrum super GLXK. Ideoque



ex coroll. 2. prop. 19. tr. 9. Euc. ad. erunt omnia parallelepipeda, quę sunt antecedentia proportionis simul cum consequentibus ad omnes Cylindros simul antecedentia item, & consequentia, vt vnum antecedens parallelepipedum super rectangulum N D B C ad aliud antecedens Cylindrum super ellipsim N O B C. Verum ista ex prop. 23. tr. 34. sunt, vt rectangulum N D B C ad ellipsim NOBC: Ergo omnia parallelepipeda erunt ad omnes Cylindros ex 16. tr. 9. Euc. ad, vt basis rectangulum NCBD ad basim ellipsim NOBD: Si autem hæc multiplicentur, quantum queunt multiplicari mediante subdupla diametri diuisione excedent parallelepipeda conoidem hyperbolicum rectangulæ basis, & Cylindri conoidem hyberbolicum ellipticæ basis quãtitate omni imaginabili minori; quæ possit exiberi ex prop. 14 tr. 33. Ideoque contemtibili, & pro differentia non adducenda. Quãobrem æquabitur infinita parallelepipedorũ multitudo, & conoides hyperbolicum basis oblongæ, sicut Cylindrorum infinita multitudo, ac conoides hyperbolicum ellipticæ basis. Quapropter conoides quadriforme hyperbolicum basis rectangulę erit ad conoidem hyperbolicum basis ellipticę vt rectangulum basis ad ellipsim basim. Licet autem fig. ostẽdat octauam partem, intellige tamen de totis corporibus ex pr. 18. tr. 9. p. 2. quæ sunt quadruplo maiora, sicut eorũ basis. Potest etiã trahi vltima cõsequentia ex prop. 4. huius: quia talia corpora circumscripta, nempe parallelepipeda atq; Cylindri sunt in eadẽ proportione quę est basium: ac ea, quę circumscribunt, nempe conois rectangulę ad conoidem ellipticæ basis.

EXPENSIO V.

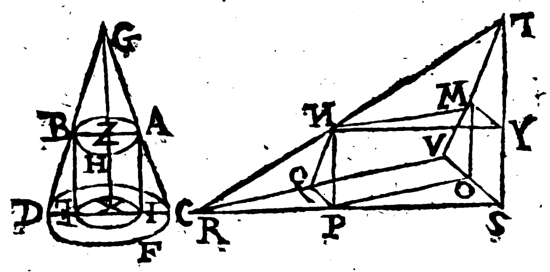
De Annulis.

PRopos. 19. & 20. tr. 34. Annulos cubauimus; sed breuiùs, & subobscurè. Vnde visum est nobis aliam eiusdem corporis cubationem tradere, & partium quoque ipsius, quod supra non pręstauimus.

THEOR. I. PROPOS. XXIX.

Frustum coni Cylindro æquealto, & basi superiori inixo æquat prisma; pyramidemque æquealta, prisma quidem super basim rectangulam ex differentia radiorum pro vno latere, & peripheria minori latere æquali pro alio, Pyramidem verò super basim, differentia radiorum, & peripheriarum comprehensam eleuentur.

HAnc propos. ostendimus pr. 29. tr. 24. sed subobscuriùs, quod tr. 13. eiusdem fundamentali diametrum pro radio aliquoties obrepserit. Vnde, cum hęc dicendis sternat basim dilucidiùs tradimus. Dicimus itaque AHBCFD frustum coni ablato A B H I E Cylindro ęquari prismati O M N P Q, quod habeat basim, cuius latus O V ęquetur segmento C I differentię inter radium X D, & Z B, & aliud latus V Q minori peripheriæ A H B Cylindri ęquetur. Sed non solum, verùm iunctum pyramidi N PQR, cuius latus PQ æquet O V seu C I eandem radiorum differentiam, & Q R sit æquale latus differentiæ peripheriarum A H B, & D F C quæ ambo sint æquealta ipsi frusto, sc. altitudinis. I A.



Quod, vt probetur, fiat rectangulum SVR, cuius latus S V æquetur radio C X; & V R peripheriæ maiori C F D, & super eam erigatur pyramis T R S V normali latere S T æquealto ac coni axis X G, agaturque ad eandem eleuationem X Z planum Y M N; demittaturque normale ad basim planum OMN P, & P N Q. Eritque formatum prisma O M V N P Q, & pyramis PNQR: de quibus ostendendũ est frustum coni Cylindro excauatũ CFDAHBA eis æquari.

Prob. Basis CFD circulus æquatur basi rectangulo SVR ob radium CX ęqualem lateri SV, & C F D peripheriam æqualem lateri V R ex prop. 3. tr. 30. Euc. ad.

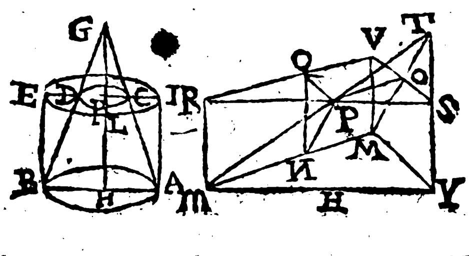
Vnde, & pyramis RSTV æquabitur cono DFCG ex coroll. 3. tr. 24. pr. 2. Modo, vt CFD peripheria ad AHB peripheriam ex 43. tr. 10. Eucl. ad. sic X C radius ad A Z radium sed vt XC radius ad AZ radium: Ita est XG altitudo ad Z G altitudinem; & ita æquales S T ad Y T. Sed vt S T ad Y T, ita SV ad YM & VR ad M N ob similitudinem triangulorũ ex 4. tr. 10. Quia, vt sunt parallela plana; sic sunt parallelę sectiones nempè ipsorum laterũ S V, & Y M, & V R, & M N ex 14. tr. 22.

Ergo

Ergo, vt XC ad A Z, sic S V ad Y M. Igitur ex 12. lib. 9. p. 2. cùm XC, & VS æquentur, etiā A Z, & M Y erunt æquales. Et pariter; ita erit peripheria C F D ad peripheriam A H B, vt V R ad M N. Sed cum sint C F D, & V R æquales ex Thesi, etiam ex 12. lib. 9. p. 2. AHB, & M N erunt equales. Cùm itaque M N latus, & A H B peripheria, sicut & Y M aliud latus, & A Z radius æquentur quoque, erunt ex prop. 3. tr. 30. basis A H B, & Y M N equales, & P S O æquabitur quoque ipsi A H B. Quamobrē ex coroll. prop. 3. tr. 24. equabitur pyramis Y T M N, & conus A H B G, vtpote æqualis basis, & æqualis altitudinis. Sicut etiam prisma SOPYMN, & Cylindrus I E A H B, Ablatis itaque istis æqualibus ab vtrisque prisma quidem SOPYMN, & pyramis Y M N T à pyramide maiori, & Cylindrus I E A H B, conusque AHBG à cono maiori C G D: restabunt prisma QVPOMN, & pyramis P Q N R, equalia corpori circumambienti C F D I E A H B. Iam vero patet, quod OV, seu æqualis PQ est differētia maioris radij SV vel C X ab Y M vel equali A Z. Sicut Q R est differentia peripheriarum V R, vel æqualis CFD peripheria ab V Q. M N æqualibus ipsi AHB peripheriæ.

COROLL. I.

EAdem propositio est de Cylindro vacuato frusto coni æquealto, & basi inferiori inixo, vt est CIA·DEB: æquatur enim prismati MOVPQN, cuius basis comprehendatur à recta æquante peripheriam minorem, & differentia radiorum eiusdem altitudinis MV & pyramidi PQR m N, cuius altitudo PQ æquet differentiam radiorum: basis verò quadrata sit NR altitudinis eiusdem N Q, vel M V, ac est A I, & differentia peripheriarum Q R. eadem verò est ostensio: Nam fiat rectangulum triangulum SVR æquale circulo AHB ex prop. 3. tr. 30. & super illud erigatur prisma eiusdem altitudinis, ac Cylindrus, & pyramis eiusdem altitudinis, Y T ac conus. Nam



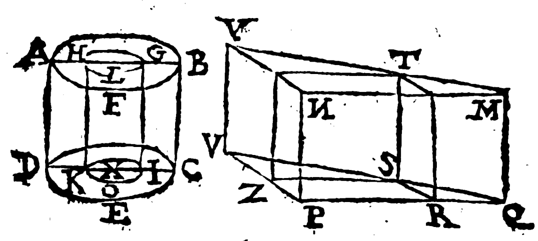
pyramis Y T M N eiusdem altitudinis HG æquabitur cono ABGH, & coroll. prop. 3. tr. 34. & pyramis STPO ostensa est in contextu huius propos. æqualis cono residuo C PDG, & ex prop. 31. tr. 30. prisma Y S V m R M equabitur Cylindro A I L H B. Quamobrem residuum corpus O V P Q M N R m æquabitur residuo C I A L D E B. Hoc autem corpus constat prismate O V M P Q N, & pyramide basis quadratæ P Q N m R.

THEOR. II. PROPOS. XXX.

Cylindrus cauus, vel annulus quadrangulus est æqualis parallelepipedo eiusdem altitudinis, cuius basis rectangulæ vno latere æquetur peripheriæ minori interni ambitus, & alio differentiæ radiorum, & prismati, cuius altitudo eadem, & basis vnum latus differentia eadem sit, aliud autem differentia peripheriarum.

SIt annulus, vel Cylindrus cauus BGLHA F C I O K DE, quem tamen appellabimus breuiùs CIHA. Dico quod hic æquatur parallelepipedo P T eiusdem altitudinis P N, ac C B, cuius basis rectangula R S P Z obtineat latus R P æquale interno circulo IOK, & aliud P Z equale differentiæ K D radij X D maioris à minori X K, & insuper æquari prismati Q M R S T eiusdem altitudinis, cuius basis Q R S consequatur latus idem R S æquale ipsi differentiæ K D, & aliud Q R æquetur differentiæ ambitus C E D ab ambitu minori I O K peripheriarum.

Quod, vt probetur, fiat prisma QPVY M N, cuius basis rectangula QVP obtineat latus Q P æquale peripheriæ CED, & latus PV æquale radio X D. Deinde detruncetur ZV æquale



radio X K minori, & per punctum Z agatur planum T Z parallelum basi MP, & altero SZ equari peripheriæ I O K.

Probatur autem. Quia peripheria C E D est ad peripheriam I O K, vt radius X D ad radium K X, sed vt X D ad X K, sic est P V ad Z V latera, & vt P V ad Z V latera: Sic Q P ad S Z latera. Ergo C E D peripheria ad I O K peripheriam, sic latus Q P ad S Z. Sed Q P æquatur ex Thesi peripheriæ C E D. Ergo S Z ex pr. 12. tr. 9. p. 2. peripheriæ I O K: Basis verò Q P V rectangula ex prop. 3, tr. 30. Euc. adauc. æquatur basi circulo C E D, eo quòd latus. P V æquetur radio, & Q P peripheriæ. Ergo etiam rectangula basis S Z V ex eadem prop. ob eadem rationem equabitur basi circulo I O K. Ex prop. verò 3, tr. 24. æquabuntur C A D B Cylindrus totus solidus consideratus, & prisma NMV; quòd sint Cylindrus, & prisma super equales bases CED circulum, & Q P V triangulum, ad eamdem altitudinē & æquabuntur quoque Cylindrus I O K G L H; & prisma Y Z V T ob eandem rationem altitudinis eiusdem C B, & æqualium basium IOK circuli, & trianguli R V Z: Aufer itaque æqualia ista duo, Cylindrus I O K G H, & prisma S Z T V, & restabunt C I H A annulus solidus quadrangulus, Cylindrusque cauus, & corpus Q P T Z æqualia: Age per T planū T R S parallelum plano N Z, & fiet parallelepipedum

pipedum T P, & prisma QT. Patet autem ex dictis F Z æquari differentiæ radiorum KD,& Q R peripheriarū differentiæ cū QP æquetur ex Thesi peripheriæ maiori; & Z S. ostensa sit æqualis peripheriæ minori.

THEOR. III. PROPOS. XXXI.

Cylindrus obliquus est inscriptibilis prismatibus, pyramidibus, & parallelepipedis in infinitum. Annulus quoque annulis quadriformibus, vel Cylindris coni segmento cauatis, vel segmentis conorum Cylindris vacuorum in infinitum.

DVas partes habet hæc propositio, quas singulas ostendemus, & primò de Cylindris. Cylindrus detur ABCD vt videre potes in fig. 1. prop. 22. sequenti cuius sectio obliqua AZB; At D A maxima linea perpendiculariū, BC minima. Secetur verò diameter in quaslibet partes, & per sectiones agantur plana sectioni ABCD per axem normalia, & parallela sectioni D A; nempe GH N, & L E F Z, & cæt. ducatur, deinde planum A H I D per sectiones DA, & HI parallelas ex effectione, & planum HG P rallelū plano IND per sectionem H G. Patet itaque MGH I ND esse prisma, quia est positum normaliter super basses triangulares, & parallelas N I D, & GHM. Patet quoque M G H A esse pyramidem, quia super basim triangularem MHG in A verticem desinit.

Ducatur postea planum Q HP I parallelum sectioni per axem C B A D, & L E F Z planum parallelum plano G H I N, vel rectangulum (quod reddit in idem) plano per axem A B D C. Basis autem O L Q X sit parallela plano F E N I. Itaque O L N P erit parallelepipedum, vtpore contentum superficiebus parallelis ex effectione super basim rectangulū PN vel O L. Quod si ducatur planum H Z F I per sectiones parallelas F Z, & HI erit corpus O Z I F P Q prisma, sicut H O Q L G X est prisma, quod insideant basibus triangularibus Z Q O; & L G X, sintque rectāgula eorum plana F O, & Z P, & Q I in vno, at H L, & X Q, & X H in alio. Quamobrem Z Q O H residua erit pyramis, cuius basis Z O Q vertex H. Tandem Q 4 7 Z 8 erit pyramis basis quadrangulæ; Si quidem parallelepipedum 6 9 8 4. E P 5 2: est minus ob sinum minorem 25, quam E F Quare relinquit planum P F 87 basis prismatis 8 4 5 7. & planum 8 7 Q Z quadrangulum basis pyramidis 8 Q Z 74. sicut relinquit prisma Q L 6 9 8 4. Itaque à medio centroq; L sursum pyramides, quæ comp ent prismata sunt triangulares, at à centro L deorsum sunt quadrāgulares quod obseruādū est ob ea, quæ postea dicemus. Patet vero, quòd in infinitum describi possint diuidendo A B in plures, vel plures partes subduplas in infinitum Existimamus autem notum absq: particulari demonstratione, partim ex dictis toto libro partim exanimi conceptu, quod quantò magis inscriptio multiplicatur eò minùs restet de Cylindro ablato corpore incripto, minorque inter vtrumque relinquatur differentia.

Iam ad edocendam secundam partem detur semiannulus, cuius sectio rotunda A T B, vt vides pr. sequentis fig. 2. cuius ambitus centrum sit V, & ducatur normalis ab ipso V K. Diuiso diametro L in quotlibuerit partes ducantur normales G H; & L T &c. per quas transeant superficies Cylindricæ H G N I & F T E I, & cet. Fer tur verò linea per A H vsq: ad normalem V K; & puncto K manente, ipsa feratur per R D circulum, & ex def. 1. tr. 24. describet conum & H I sectio in superficie annuli conique erit circulus ex def. 2. tr. 23. quod æquidistet basi A D. Quamobrē si auferatur Cylindrus GHIN, cuius basis circulus GRN, remanebit frustū coni GHADNI ablato Cylindro eiusdem altitudinis HGRIN Idem dices de cono Y H I, ablato Cylindro Q T P F. De cetero verò quę inscribentur erunt Cylindri è contra ablatis conis P 8 FT7 Q erit Cylindri I F T Q.

Sic corpus residuū ablato cono eiusdē basis F 4 I, EB 9781 erit residuū Cylindri 8279 ablato cono eiusdem basis 867. Patet autem quod QHLGIPNF insistens super basim annulum planum LGRSNE sit annulus quadrangulus; sicut, & Q 1 7 9 F 8 2 E ob sectiones quadrangulas Q1 GH, & 79 Q 1. Ex primo autem clarum, & euidens quod hæc inscriptio possit multiplicari in infinitum per subduplam diametri diuisionem sicut, & euidens per se esse sentio, quòd quantò magis hæc inscriptio multiplicatur tantò magis absumat de ipso annulo. Licet, & breuiter posset id probari intelligendo tum de annulo, tum de Cylindro in prima parte propos. inscripto. Nam quò minor est portio diametri, eò minor est chorda, quo vero hæc est minor, eo portio circuli, quam abscindit minor est, & quò hæc est minor eò Cylindraceum corpus super ipsam ad eādem elevationem erectum minus est, quare cū per continuam inscriptionem circuli baseos remaneat semper minus residuum, sic & de Cylindro, & de annulo, remanet semper minus residuum.

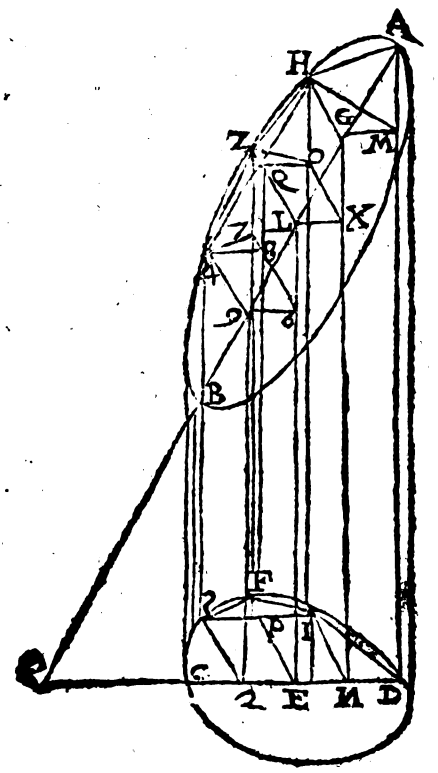
THEOR. IV. PROPOS. XXXII.

Si sit Cylindrus obliquus altera basi, cuius maxima normalium sit æqualis maximæ peripheriæ annuli, & minima minimæ: Basisque ipsa recta sectioni annuli per vmbelicum, seu totius annuli centrum transeunti, sit æqualis circulus, dico Cylindrum annulo esse æqualem:

SIt Cylindrus circularis A B C D, cuius basis obliqua A Z B, recta verò D F C, & hæc æquetur ATB circulo, sectionique annuli quę si continuetur per vmbelicum, & centrū V transeat. Maxima verò linea basi normalium D A. sit æqualis maximæ peripheriæ A R D annuli, & recta C B æquetur minimę peripherię B S C in annulo. Dico hunc Cylindrum annulo æquari. Licet autem medietas annuli in figura, vt vitetur confusio repræsentetur, intelligendum tamen est de toto & de totis peripherijs.

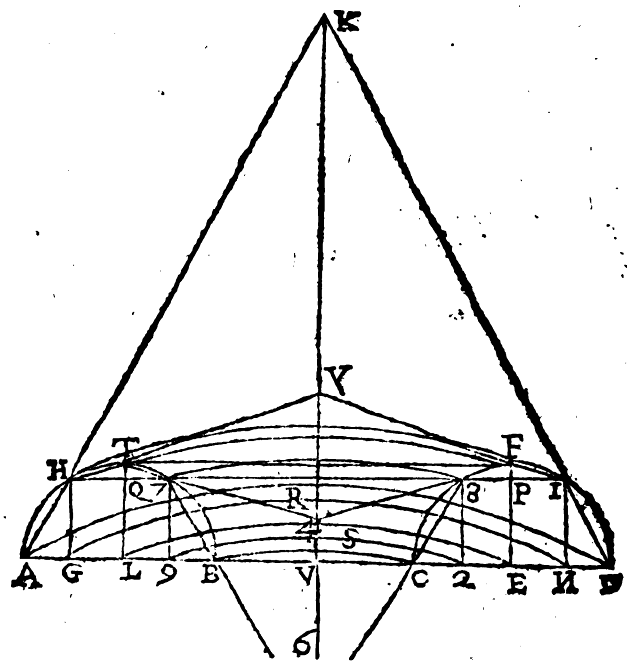
Pro-

Probatur. Inscribantur enim portiones conorum Cylindro vacuatorum, & conorum Cylindris, annulorumque quadrangulorũ, pro vt in precedenti docuimus in annulo. In Cylindro vero cuius altera basis obliqua ADCB



prismata, pyramides, & parallelepipeda æquealta faciendo, quòd partes diametri DC basis Cylindri æquentur partibus singulæ singulis diametri DC sectionis annuli.

Producta autem AB, & DB in Cylindro, donec conueniant in e, erunt æquales lineis annuli AV, & BV. Siquidem ita est AV ad BV radij ex 43. tr. 10. Eucl. adauc. vt ARD ad CSB peripheriæ annuli, vt autem ARD ad CSB peripheriæ eædem, sic AD ad CB rectas in Cylindro, quod ex Thesi sint peripherijs æquales: vt autem rectę eædem DA ad BC, sic De ad Ce ob parallelas DA, & CB ex 2 tr. 10. Quare ex 16. tr. 9. p. 2 AV erit ad BV in annulo, vt Ae ad Ce in Cylindro. Quare *dividendo* AB erit ad BV in annulo, vt DC ad Ce in Cylindro. Sed AB in annulo, & in Cylindro, CD sunt æquales, Ergo etiam BV, & Ce, & additis vtrinque æqualibus diametris erunt eD, & VA æquales. Sed etiam æquales sunt portiones diametrorum DN & GA ex effectione ergo *componendo* GV & Ne sunt æquales. Quare DN æquat differentiam GA radiorum GV, & AV. Eodem pacto ostendemus rectam MA æquare differentiam peripheriarum, eo quod NG ęquet peripheriam proximè minorem GRN. Quoniam ARD peripheria est ad GRN peripheriam; vt radius AV ad radium GV ex 43. tr. 10, & AV est ad GV in annulo vt De ad Ne rectę in Cylindro, & hæ vt recta DA ad NG in eodẽ. Ergo ex 16. 19. ARD erit ad GRN annuli peripheriæ, vt AD ad GN rectæ Cylindri: sed DRA peripheria: & DA recta sũt æquales ex Thesi. Ergo etiã peripheria GRN in annulo, & NG in Cylindro æquantur. Quare MA residuum æquatur differentiæ peripheriarum ipsarum. Quare cum prisma DNIMGH pro vno latere DN differentiam semidiametrorũ, & pro alio obtineat GN ęqualem peripherię minori: & altitudo sit eadem NI, tum in annulo, tum in Cylindro. Pyramis quoque MAGH habeat basim ex MA differentia peripheriarum, & MG differentia radiorum, & GH



altitudo eadem, æquabuntur pyramis, & prisma portioni coni AHGDNI vacuatæ Cylindro NIGH ex prop. 29. huius. Siquidem habent eandem altitudinem, quia HG normalis, & semichorda in Cylindro æquatur normali semichordæ GH annuli, quod subtendant circulorum æqualium ex Thesi. DFC, & AHB eundem arcum AH ob sinum versũ AG æqualem sinui verso DN, vt potest constare ex 44. tr. 10 Eucl. adauc.

Ita probabitur de prismate, pyramideque HZOQIPF. quod æquetur Cylindri segmento coni vacuo HIQFI eadem prorsus ratione. Nã vt HR ad RQ radij; sic ex 33. tr. 10. peripheria HI ad peripheriam QP vt autem HR ad RQ sic Ne ad Ee; vt autem Ne ad Ee, sic recta NG vel sibi æqualis IH in Cylindro ad LF. vel sibi ęqualem FZ rectas. Quapropter æquabitur recta FZ, & peripheria QP, sicut ostensum est æquari NG rectę GRN vel HI peripherię. Ideoque HQ recta Cylindri erit æqualis differentię peripheriarum HI, vel æqualis GRN, a PQ vel æquali sibi L4. E. At OQ vel XL differentiæ radiorum LG, vel HQ. Altitudo verò TQ vtrobique æqualis, ablatis ęqualibus EP ab ęqualibus semichordis EF. Ergo ex pr. 29. huius prisma OQPFI; & pyramis OQZH æquabuntur portioni coni vacuatę Cylindro QTHFPI.

Hinc constat quoque parallelepipedum XOLQNIPE, primaque QLXOGH in Cylindro æquari annulo quadrangulo HQGLIPEN annuli ex 30. huius cum OH æquetur differentię peripheriarum, at LE minori peripherię, & OQ differentię radiorum & eadem sit altitudo LQ vtrobique.

Verùm cùm transacta medietate inscriptio annuli incipiat mutare naturam, & 7QTPF8 non sit frustum coni ablato Cylindro; sed è contra portio Cylindri ablato frusto coni eiusdem basis, siquidem iam incipit inuerti conus F 4 T, & Cylindrus F 8 P Q T 7 est maior ipso, & id quod inscriptum annulo est ipsius, extra conum F 4. T remanet. Ideoque æquabitur portio inscripta Cylindri 7 Q F F P 8 ablato frusto coni eiusdem basis equealto prismati, cuius basis contineatur differentia radiorum, & latere æquali peripherię minori & pyramidi basis quadratæ, cuius altitudo sit differentia radiorum, basis verò contineatur sub eadem altitudine portionis Cylindri Q T & differentia peripheriarum. Talia verò sunt duo corpora in Cylindro, prisma nempe 8 4 7 F S P, & pyramis 8. 7 4 Q Z. Siquidem recta F Z æquatur peripheriæ maiori Q P. 5 4 æquatur peripherię minori 7 8 recta 7 Z differentiæ peripheriarum æquatur, recta Q Z vel 8 7 altitudini Q T portionis prædictæ in annulo, & 8 4 altitudo pyramidis differentiæ radiorum Q 7 quæ singula apertè colliguntur ex dictis.

Si ergo inscribas in annulo tot portiones annulorum triangularium, nempe conorum Cylindris vacuatorum, vel è contra, nec non & annulos quadrangulos: Sicut etiam Cylindro corpora prismate, pyramideque constantia, & parallelepipeda omnia eiusdem altitudinis, & numeri, quæ nempe subtendant æqualium radiorum æquales differentias, vt A G, & G L in Cylindro; A G, & G L in annulo per subduplam diametrorum æqualium diuisionem, habebimus inscriptionem continuã æqualium vtrobique corporum numero; & quantitate. Quapropter, si multiplicẽtur vsq; dum relinquant quantitatem omni data minorem, dicent eandem proportionem, quam ipsa corpora, quibus inscribuntur ex prop. 5. huius. Vnde etiam ipsa corpora inuicem æquabuntur, nimirum Cylindrus; & annulus prædictus.

COROLL. I.

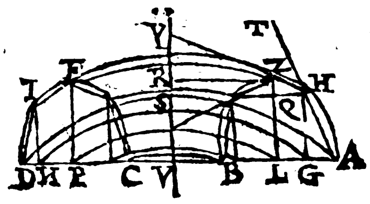
Hinc constat annulum solidum æquari Cylindro parallelarum basium; cuius axis sit L E æqualis peripheriæ medię L E in annulo. Quia, & huic ipsi æquatur Cylindrus obliquè sectus equans annulum C F D A H B ex pr. 4. huius siquidem etiam Cylindrus obliquè sectus habet axem L E æqualem mediæ peripheriæ L E in annulo, vt diximus in præcedenti.

COOLL. II.

Hinc etiam est, quòd ne dum annulus figuræ circularis, sed cuiuslibet multilateræ figuræ, scilicet cuius sectio per centrum, seu vmbelicum producta transiens sit multi laterum quodcunque, æquari Cylindraceo obliquè secto, cuius basim rectam alteram idem multilaterum sternat, & altitudo maxima circulo maximo minima minimo annuli sit æqualis, vel Cylindraceo parallelarum basiũ cuius axis ęquetur mediæ peripheriæ, vt ex pręced. coroll. deducitur.

COROLL. III.

Elicitur quoque, quòd etiam si sectio non sit circulus. Sed ellipsis, vel parabola, vel hyperbola, nempe quod annulus sit figuræ ellipticæ, vel semiannulus sit figurę parabolicæ hyperbolicæ, idem securturum, vtpote conspicere, si pro circulo facias parabolam A Z



B in annulo A Z B C F D, & iisdem caracteribus exornes constituasque semicylindrum eiusdem basis A Z B. Nam idem prorsus sequetur, si illi applices demonstrationem iisdẽ verbis. Immò si sectio A Z B sit quecunque figura flexis constans. Sed habens axem, nimirum, quę per medium in partes similes, & æquales diuidi possit, & ex ea in gyrum ducta formetur annulus, idem quoque sequetur.

COROLL. IV.

Sequitur quoque æquales annulos esse; qui habent circulis medijs L E sectiones per centrum A T B reciprocè proportionales: ita quòd sit peripheria L E ad peripheriam alterius, vt huius alterius basis seu sectio ad basim sectionemque A T B.

Sequitur etiam eos, qui habent æquales sectiones per centrum, seu vmbilicum esse ad inuicem, vt circuli medij. Sicut, & qui habent ęquales circulos medios esse ad inuicem, vt sectiones per centrum.

Sequitur insuper annulos inuicem esse in triplicata ratione diametri, vel peripheriæ medię, si sint similes. Ratio vnica est, quia Cylindri, qui habent annulorum sectioni per vmbelicum bases æquales, & similes, & mediæ peripheriæ ęquales altitudines, ipsis soliditate æquales, tales proprietates obtinent ex prop. 5, 9, 11 & 12. tr. 34, Euc. adãu. æqualium verò ad æquales eadem proportio est.

COROLL. V.

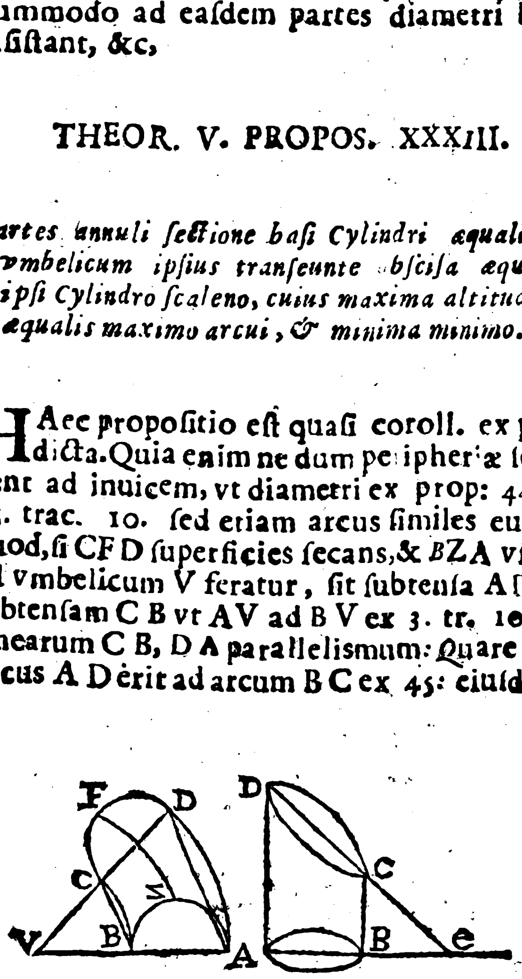
Elicitur quoque quamlibet partem annuli superficiebus Cylindricis abscisam, vt est A H G D I N superficie Cylindrica G H R N I abscisa esse æqualem cuilibet parti Cylindri superficie ad axem parallela, vt in D A B C Cylindro ipsius portio G H N I A D, quæ superficie plana G H N I ad easdem partes D N diametri

diametri basis DFC à centro vmbelicoque V æquidistantes abscinditur, ita vt altitudines GH in vtraque æquentur, & longitudo NG æquetur toti peripheriæ GRN. Ratio eadē quæ est propositionis, quia in ea parte Cylindri parallelepipeda pyramides, & prismata inscribi possunt æqualia frustris conorū Cylindris vacuatorum, vel è contra, & annulis quadrangulis, pro vt exigit capacitas soliditatis, vsq: ad inanitionem vtriusque. Quare eodem argumento, sicut æquatur totum, sic partes æquabuntur. In propositione enim ostendimus quæcunque prædicta corpora Cylindro inscripta quibuscunque corporibus prædictis annulo inscriptis respectiuè æquari dummodo ad easdem partes diametri basis insistant, &c.

THEOR. V. PROPOS. XXXIII.

Partes annuli sectione basi Cylindri æquali per vmbelicum ipsius transeunte abscisa æquatur ipsi Cylindro scaleno, cuius maxima altitudo sit æqualis maximo arcui, & minima minimo.

HAec propositio est quasi coroll. ex prædicta. Quia enim ne dum peripheriæ se habent ad inuicem, vt diametri ex prop: 44. & 45. trac. 10. sed etiam arcus similes euenit quod, si CFD superficies secans, & BZA vsque ad vmbelicum V feratur, fit subtensa AD ad subtensam CB vt AV ad BV ex 3. tr. 10. ob linearum CB, DA parallelismum: Quare etiā arcus AD erit ad arcum BC ex 45: eiusdem,

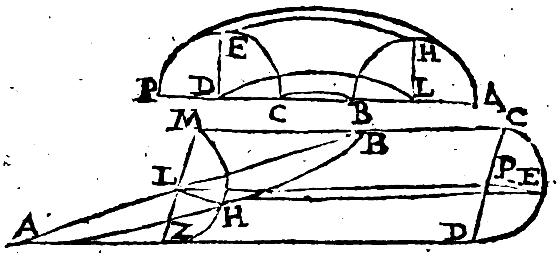


vt chorda subtensa AD ad chordam subtensā CB, & ideo, vt AV ad BV, & hinc intexes idem argumentum vtendo vice peripheriæ maximę arcum maximum ęquantem maximā eleuationem AD Cylindri æqualis ADCB minimum arcum BC in annulo ęquantem minimam altitudinem BC in Cylindro. Nam posito, quòd sit in vtroque eadem basis; & sectio CFD seu circulus, seu multilaterum simile, & æquale, idem argumentum per omnia militabit, quod adhibuimus propos. 22. antecedenti.

THEOR. VI. PROPOS. XXXIV.

Pars externa annuli superficie Cylindrica diuisa quæ transeat per peripheriam mediam ipsius annuli differt ab interna duplici vngula solida, quarum basis sit circulus sectionis, & altitudo differentia extimæ peripheriæ, vel intimæ à media.

PRobatur. Nam coroll. 1. prop. 22. obseruatum est annulum solidum æquari Cylindro parallelarum basium, cuius altitudo æquetur medię peripheriæ, & coroll. 5. singulas partes Cylindricis superficiebus ad easdem partes diametri sectionis ab vmbelico prodeuntis abscissas esse æquales quibuslibet partibus in Cylindro à superficiebus axi parallelis per easdem partes diametri baseos trāseuntibus. Quamobrem externa pars annuli



PDELHA æquabitur parti AHLEDP parti altiori Cylindri, & DEBHL interna pars annuli à superficie DELH Cylindrica diuisa ęquabitur parti depressiori LHBPEC Cylindri à superficie LHPE abscisa.

Hæc vero vt prop. 4. huius deficit à dimidio Cylindro parallelarum basium MZHCED vngula LHMB, illa superat idem dimidium vngula æquali ALH, hic autem Cylindrus parallelarum basium MZHCED æquat annulum PECBHA. Cum ergo Cylindri BCDA scaleni pars maior ALHPED extimam annuli portionem LHAPD ęquans hac vngula LAZ, superet medietatem LHZPED Cylindri paralleli toti annulo æqualis: pars verò LHBPEC eiusdem scaleni Cylindri intimam annuli portionem æquans minor sit eadem æquali vngula LMHB medietate LMHPEC eiusdem paralleli Cylindri. Ergo etiam talis erit pars extima annuli; & superabit Cylindri paralleli sibi æqualis medietatem vngula eadem AZLH. Sicut, & intima minor erit medietate eadem paralleli Cylindri eadem vngula vel æquali LMHB. Quamobrem pars annuli extima superabit intimam, duplici vngula; & illa LAHZ quā pars externa superat semiCylindrum, & hac MBLH, qua interna deficit à semicylindro, & sic duabus vngulis maior erit.

Patet autem ex dic. prop. 22. huius quòd hę vngulæ obtineant pro basi semicirculum LMH æqualem semicirculo PEC per vmbelicum, & altitudo MB sit differentia inter BC, & LE, scilicet inter peripheriam minorem CB in annulo, & peripheriam mediam DL, cui lineæ illę in Cylindro ęquantur.

COROLL.

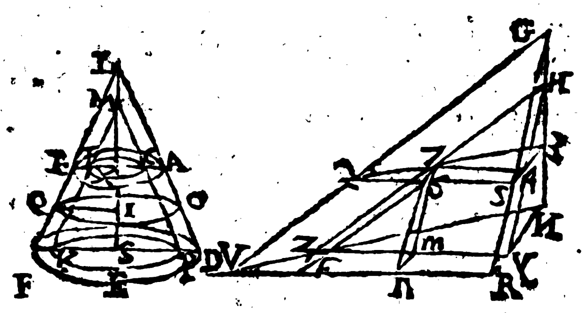
COROLL.

Hinc est, quòd cùm cognoscamus cubationem vngularum ex pr. 44. tr. 34. sciemus quoque quantitatem, qua pars exterior annuli superat interiorem.

THEOR. VI. PROPOS. XXXV.

Annulus quadrangulus obliquus æquatur parallelepipedo eiusdem altitudinis cuius basis sub differentia radiorum, & peripheria media contineatur.

Sit ABCT DEF annulus quadrangulus, sed obliquus. Dico quod æquabitur parallelepipedo, quod sit altitudinis SX, cuius basis sub OQ periferia media; & PD differentia radiorum contineatur. Prolungentur duæ superficies interna, & externa huius annuli, & conuenient, cum sint obliquæ in M, & L, eruntque duo coni paralleli DLF, & PKM; quibus fiant duæ pyramides æquales, vt docui prop. 29. h. NHYZ, & GNRV, eruntq; latera parallela YH, GR, & HZ, GV. Quia enim latus NR ex constitutione pyramidis æqualis, æquatur radio SF, & NY radio Sk, sicut latus NV peripheriæ exteriori DEF & NZ interiori PK, Estque ex prop. 43. tr. 10. SK radius ad SF radium, vt peripheria PK interna ad peripheriam PEF externā Quare etiam respectiuè æquales ita erunt NY ad NR, vt NZ ad NV, & sic altitudinibus conorum æquales altitudines pyramidum NH, ad NG, eo quod se referat MS. ad LS, vt SK ad SF ob parallelismum linearum Mk, & LF. Quamobrem ex 2. tr. 10. erunt Hy, GR parallelę, & etiam HZ, GV, & YZ, RV Quare & plana per illas acta erunt parallela ex prop. 13. tr. 22. Acto vero plano 352. per N3 altitudinem annuli quadranguli parallelo basi NRV efformabitur frustum 352. NRV. quod erit æquale frusto coni ABFD: Siquidem Pyramis RNGV ęquatur ex effectione cono DLF, & ideo pyramis 3G52. eo modo



quo ostendimus in contextu propos. 19. huius erit æqualis residuo cono ALB. Quapropter ablatis æqualibus G352 pyramide, & LAB cono restabunt frusta 352 NRV; pyramidum & ADBFE conorum equalia; Eadem ratione NYZH æquatur ex effectis cono PMk, & ideo pyramis H347 ex contextu prop. 19. huius est ęqualis cono CMT. Quadere ablatis æqualibus 347 H pyramide, & CMT cono, restat frustum pyramidis N347YZ æquale frusto coni CTPK. Quapropter, si rursùs hæc frusta nempe N347ZY pyramidis à frusto 352 NRV, & frustum coni CTPK à frusto coni maiori ABFB, annulus quadrangulus ABEFC K, & corpus 45 YRZV 2 restabunt ęqualia. Ducatur planum 76mn parallelum plano 45 YR, & fiet parallelepipedum 74nR. Deinde per lineam 76 planum 76 Zf parallelum lateri GV; & erunt duo prismata 76mnfZ, & 76ZfzV, quorum bases triangula 6nf, & ZfV. Hæc autem æquabuntur parallelepipedis super ęqualem basim, & ad eandem altitudinem cuectis ex prop. 17. tr. 35. Basis autem æqualis obtinetur ex pr. 1. tr. 29. Si fiat rectangulum ex dimidio latere nf ad altitudinem n6 pro prismate 7nf, & ex dimidio fV in altitudinem fZ pro prismate. 72Zf: Quamobrem, si hæc parallelepipeda prismatibus ęqualia addantur priori parallelepipedo 46Yn, fiet parallelepipedum totum super Rn, & dimidiam nf & dimidiam fv, scilicet super dimidiam nv. Hæc autem æquat peripheriam OQ. Nam; & ipsa ęquat totam peripheriam superiorem AB, & dimidiam differentiam inter AB peripheriam superiorem, & DF inferiorem. Quoniam ex effectione LO ęquat LA & AO dimidiam AD, quæ est differentia inter LA & LD, sed vt LD ad LO, sic est SD ad IO radij, & vt SD ad IO radij, sic DEF peripheria ad OQ peripheriam. Quare ex 12. tr. 9. p. 2. LD erit ad LO, vt peripheria DEF ad peripheriam OQ, & ita probabis quoque quòd LO sit ad LA, vt peripheria QO ad peripheriam BXA. Sed iā vt dixi LO est medium Arithmeticum inter LA, & LD, & tantùm superat AL quantùm deficit ab LD. Ergo talis quoque erit peripheria QO, & tantùm excedet BXA quantùm minus est peripheria DEF. Quadere annulus quadrangulus ABDFCK æquat parallelepipedum super basim ex OQ peripheria, & AC differentia radiorum ad eandem eleuationem euecta.

COROLL.

Hinc est, quod si superficies ABFD concipiatur tanquam solida, & eiusdem altitudinis AC, sit ad hoc parallelepipedum æquans annulum quadrangulum, vt diameter ad peripheriam. Vnde si prop. 38. tr. 30. & 2. tr. 35. intelligatur non de superficiebus mathematicis. Sed aliqua soliditate pollentibus, & veluti crustis corporum euidens etiam euadit ex hac propos. & maximè, si intelligatur de conis scalenis. Licet Methafisicè intellecta videatur aliis quibusdam, & precipuè sequenti contradicere.

FINIS.

INDEX

Propositionum totius Operis.

Annulus.

Apotome.

Applicata spatia.

Applicatę lineę quadratrici.

Sectionum Conicarum Applicatę.

Area.

Arcus.

Maior

Com-

Trian-

Quæ-

Nor-

Quin-

Puncta.

Pyramis.

Q

Quadratrix.

Quadratus numerus.

Reciprocæ figuræ.

Rectangulum.

Rectangulum triangulum sphęricum.

Rectangulum planum.

Reflexio.

Regulare corpus.

Regula aurea.

Reliquæ.

Replicatio.

Residuatio.

Residuum.

Rhombus.

S

Terminus.

INDEX TRIGONOMETRICVS

Triangula plana rectangula.

Triangula plana obliquangula.

Triangula sphærica rectangula.

Latera

Data.	*Quæsita.*
Latera duo, quæ sint quadrante minora ex pr.24.pag.367.	Angulus oppositus, cuiuis laterum ex prop. 24. vel 25. pag. 478. & 10. Coroll. 474. vel logarithmicè pr. 47. casu 3. pag. 484 Basis ex pr.32.& 33.pag.480 & pr.6. pag.473. & logarithmicè prop.47. casu 4. pag. 484.
Anguli duo acuti, vt crura sint minora quadrante ex propos.28.pag.370.	Latus oppositum alteri eorum ex pr.34. & 35. pag. 480. & Coroll. pr.5. pag. 473. & logarithmicè inuertendo casum 2. pr.45. pag.483. Basis ex pr 22. pag. 477. & logarithmicè pr. 46. casu 3. pag. 484.

Cognoscitur verò basis quadrante minor ex pr. 28. & Coroll. pag.370.

Triangula sphærica obliquangula.

Data.	*Quæsita.*
Duo crura, & Angulus oppositus vni quadrante minora, si anguli reliqui sint specie cogniti, ex prop. 24.pag. 367.	Angulus oppositus alteri pr. 54. pag 487.& 65. pag.490 Basis pr.56.pag.488.& pr.73. pag. 492. Angulus verticalis p.58.pag. 488.& pr.76. pag.493.
Duo crura Angulus verticalis [illegible] si quadrante, singula crura sint minora, [illegible] pr.22.pag.367.	Alteruter angulorum ad basim pr.60. pag.489. & pr. 75. pag.492. [illegible] pag.489. & pr. 72. pag. 492.

Data.	*Quæsita.*
Duo Anguli acuti, vel vnus saltem, & Basis minor quadrante.	Angulus verticalis prop. 79. pag.493. & 61. pag.489. Alterutrum crurum pr. 79. pag.493. & 61. pag.489.
Duo Anguli. Crus alteri eorũ oppositũ si reliqua crura nota sint specie ex pr. 22.pag.366.nẽpe aut maiora, aut minora quadrante.	Crus alterum oppositum pr. 55. pag.480. & prop.66. pag.490. Angulus verticalis pr. 70. pag.491. & pr.59.pag.488 Basis, si alterum crus sit specie notum pr.57.pag.488. & pr.7[illegible]. pag.493
Crura tria.	Anguli omnes, tamquam si essent verticales prop.82. pag.494.
Tres Anguli.	Crura, tamquam si essent bases pr.69. pag.491.

Reducere obliquangulum ad duo rectangula. datis tribus lateribus obliquanguli sphæric pr.81.pag.494. & pr.54.pag.484.

Commutare angulos in latera, & latera in angul pr.49.pag.486. & pr.50. ibidem.

Dato triangulo obtuso substituere acutum triangulum pr.48. pag.486.

Vice sinus primo loco ponere Radium prop.51. pag.487.

Vice secantis primo loco ponere Radium prop. pag. eadem.

Vice tangentis ponere primo loco Radium pr. pag. eadem.