EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

10º e 11º ano de escolaridade

(Dec.-Lei nº 74/2004 de 26 de Março)

PROVA PRÁTICA DE GEOMETRIA DESCRITIVA A

PROVA 708/2ª FASE

2010

Questão 1

Determine os traços do plano **π** que contém o ponto **P** e é paralelo ao plano **α**.

Dados

- o plano **α** é definido pelas rectas **a** e **b**;
- a recta **a** contém o ponto **S(3; 5; 3)**;
- as projecções, horizontal e frontal, da recta **a** fazem, com o eixo **x**, ângulos de 45°, de abertura para a direita, e de 30°, de abertura para a esquerda, respectivamente;
- a recta **b** pertence ao plano bissector do diedros ímpares, **β13**, e a sua projecção frontal faz, com o eixo **x**, um ângulo de 30° de abertura para a direita;
- o plano **π** contém o ponto **P(-6; 3; -4)**.

Dois planos são paralelos se duas rectas concorrentes de um deles forem paralelas a duas rectas concorrentes do outro. Esse par de rectas concorrentes de cada plano pode ser o par de traços de cada plano. E foi isso que se fez na resolução que se apresenta: determinaram-se os traços frontal e horizontal do plano **α** e, depois, os traços do plano **π**, paralelos aos traços homónimos de **α**.

1. Colocação dos dados.

- Marcam-se as projecções do ponto **S** e as projecções da recta **a** que contém este ponto.
- Marcam-se as projecções do ponto **P**.

2. Processo de resolução.

2.1. Determinam-se as projecções do ponto **Q**, o traço da recta **a** no plano bissector do diedros ímpares, **β13**. Este é o ponto de concorrência entre as recta **a** e **b**.

2.2. Desenham-se, a passar no ponto **Q**, as projecções da recta **b**, simétricas em relação ao eixo **x** porque **b** pertence ao **β13**.

2.3. Determinam-se as projecções dos pontos **Fa** e **Ha**, respectivamente os traços frontal e horizontal da recta **a**.

2.4. Determinam-se as projecções dos traços frontal e horizontal da recta **b**. Como **b** é passante, os seus traços coincidem e situam-se no eixo **x**. para simplificar as notações designou-se esse ponto por **B**.

2.5. Determinam-se os traços frontal e horizontal do plano **α**: **hα** resulta da união de **B1** com **Ha1** e **fα** encontra-se unindo **B2** com **Fa2**.

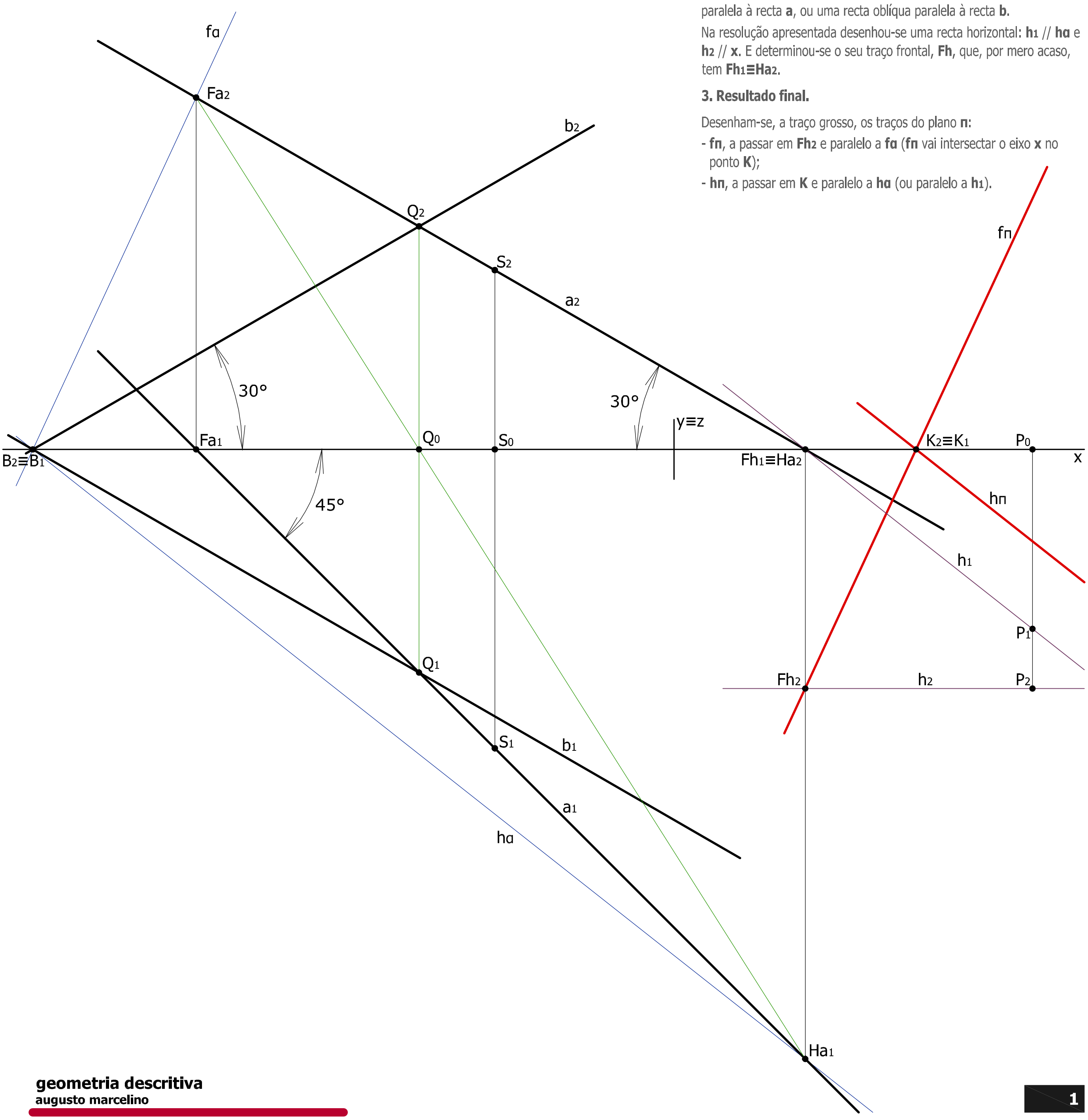
2.6. Desenha-se, a passar no ponto **P**, uma recta paralela a uma recta qualquer do plano **α**, e determinam-se os seus traços nos planos de projecção. Podemos escolher, portanto, ou uma recta horizontal paralela ao traço **hα**, ou uma recta frontal paralela a **fα**, ou uma recta oblíqua paralela à recta **a**, ou uma recta oblíqua paralela à recta **b**.

Na resolução apresentada desenhou-se uma recta horizontal: **h1** // **hα** e **h2** // **x**. E determinou-se o seu traço frontal, **Fh**, que, por mero acaso, tem **Fh1≡Ha2**.

3. Resultado final.

Desenham-se, a traço grosso, os traços do plano **π**:

- **fπ**, a passar em **Fh2** e paralelo a **fα** (**fπ** vai intersectar o eixo **x** no ponto **K**);
- **hπ**, a passar em **K** e paralelo a **hα** (ou paralelo a **h1**).



EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

10º e 11º ano de escolaridade
(Dec.-Lei nº 74/2004 de 26 de Março)

PROVA PRÁTICA DE GEOMETRIA DESCRITIVA A

PROVA 708/2ª FASE
2010

Questão 1

Determine os traços do plano **π** que contém o ponto **P** e é paralelo ao plano **α**.

Dados

- o plano **α** é definido pelas rectas **a** e **b**;
- a recta **a** contém o ponto **S(3; 5; 3)**;
- as projecções, horizontal e frontal, da recta **a** fazem, com o eixo **x**, ângulos de 45°, de abertura para a direita, e de 30°, de abertura para a esquerda, respectivamente;
- a recta **b** pertence ao plano bissector do diedros ímpares, $\boldsymbol{\beta_{13}}$, e a sua projecção frontal faz, com o eixo **x**, um ângulo de 30° de abertura para a direita;
- o plano **π** contém o ponto **P(-6; 3; -4)**.

Quando duas rectas concorrentes de um plano **α** forem paralelas a duas rectas concorrentes de um plano **π**, então os planos **α** e **π** são paralelos entre si.

Foi este conhecimento que se utilizou na resolução que se apresenta: para desenhar o plano **π** paralelo ao plano **α** desenharam-se as rectas **a** e **b** do plano **α** e, depois, paralelas a estas, as rectas **a'** e **b'**, do plano **π**; por fim determinaram-se os traços deste plano **π** a partir dos traços das rectas **a'** e **b'**.

1. Colocação dos dados.

- Marcam-se as projecções do ponto **S** e as projecções da recta **a** que contém este ponto.
- Marcam-se as projecções do ponto **P**.

2. Processo de resolução.

2.1. Determinam-se as projecções do ponto **Q**, o traço da recta **a** no plano bissector do diedros ímpares, β_{13}. Este é o ponto de concorrência entre as recta **a** e **b**.

2.2. Desenham-se, a passar no ponto **Q**, as projecções da recta **b**, simétricas em relação ao eixo **x** porque **b** pertence ao β_{13}.

2.3. Desenham-se, a passar no ponto **P**, as projecções das rectas **a'** e **b'** paralelas às rectas **a** e **b**, respectivamente.

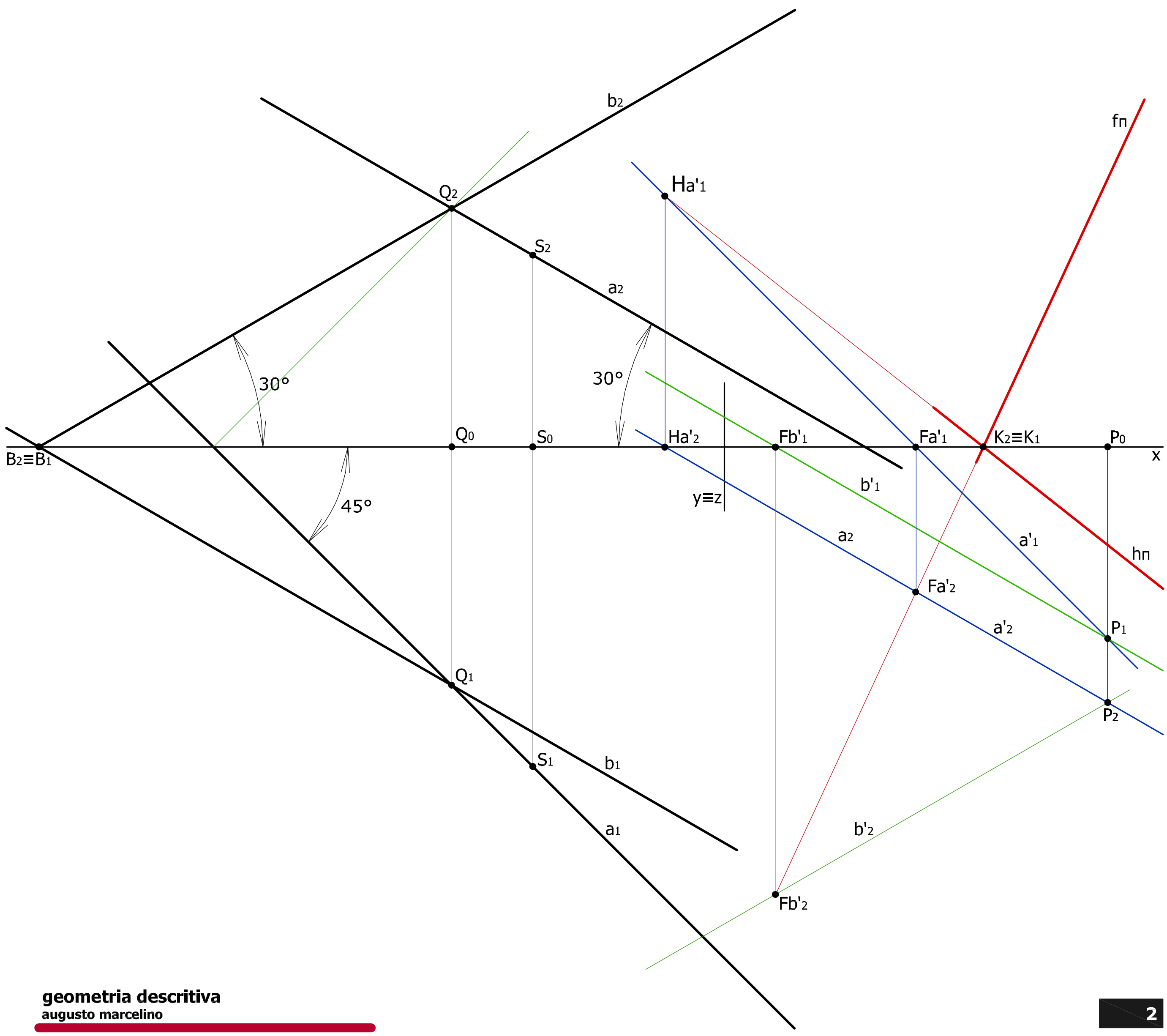
2.4. Determinam-se as projecções dos pontos **Fa'** e **Ha'**, os traços frontal e horizontal da recta **a'**.

2.5. Determinam-se um dos traços frontal e horizontal da recta **b** ou, apenas, um deles. Na resolução apresentada determinou-se, apenas, **Fb'**, o traço frontal da recta **b'**.

3. Resultado final.

Desenham-se, a traço grosso, os traços do plano **π**:

- **fπ**, a passar em Fa'_2 e Fb'_2, que vai intersectar o eixo **x** no ponto **K**;
- **hπ**, a passar em **K** e Ha'_1.



EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

10º e 11º ano de escolaridade

(Dec.-Lei nº 74/2004 de 26 de Março)

PROVA PRÁTICA DE GEOMETRIA DESCRITIVA A

PROVA 708/2ª FASE
2010

Questão 2

Determine, graficamente, a amplitude do ângulo formado pelos planos **δ** e **θ**.

Dados

- o plano **δ** é oblíquo e os seus traços, nos planos de projecção, são coincidentes;
- o traço horizontal do plano **δ** cruza o eixo **x** num ponto com **6** de abcissa e faz um ângulo de 60°, de abertura para a esquerda, com esse mesmo eixo;
- o plano de topo **θ** é de topo, contém o ponto **R(-5; 6; 5)** e faz um diedro de 50°, de abertura para a esquerda, com o plano horizontal de projecção.

Um dos processos para determinar o valor da amplitude do diedro entre dois plano consiste em determinar a verdadeira grandeza do **ângulo entre duas rectas concorrentes, sendo uma das rectas perpendicular a um dos planos e a outra recta perpendicular ao outro plano**. Foi esse o processo utilizado nesta resolução.

1. Colocação dos dados.

- Marcam-se as projecções do ponto de abcissa **6**, a que chamámos **K**, e desenha-se o traço horizontal e o traço frontal do plano **δ**.
- Desenham-se as projecções do ponto **R**, depois o traço frontal do plano **θ**, **fθ**, com o ângulo indicado e, por fim, a passar em R_2, o traço horizontal de **θ**, **hθ**, perpendicular ao eixo **x** e a cruzá-lo no ponto a que chamámos **N**.

2. Processo de resolução.

2.1. Desenham-se as projecções de um ponto **P**, qualquer.

2.2. Desenham-se, a passar no ponto **P**, as projecções de uma recta, **a**, que seja perpendicular ao plano **δ**: a_2 perpendicular a **fδ** e a_1 perpendicular a **hδ**.

2.3. Procede-se de modo semelhante para o traçado da recta **b**, perpendicular ao plano **θ**: b_2 perpendicular a **fθ** e b_1 perpendicular a **hθ**.

2.4. Determinam-se os traços horizontais das rectas **a** e **b**, respectivamente **Ha** e **Hb**.

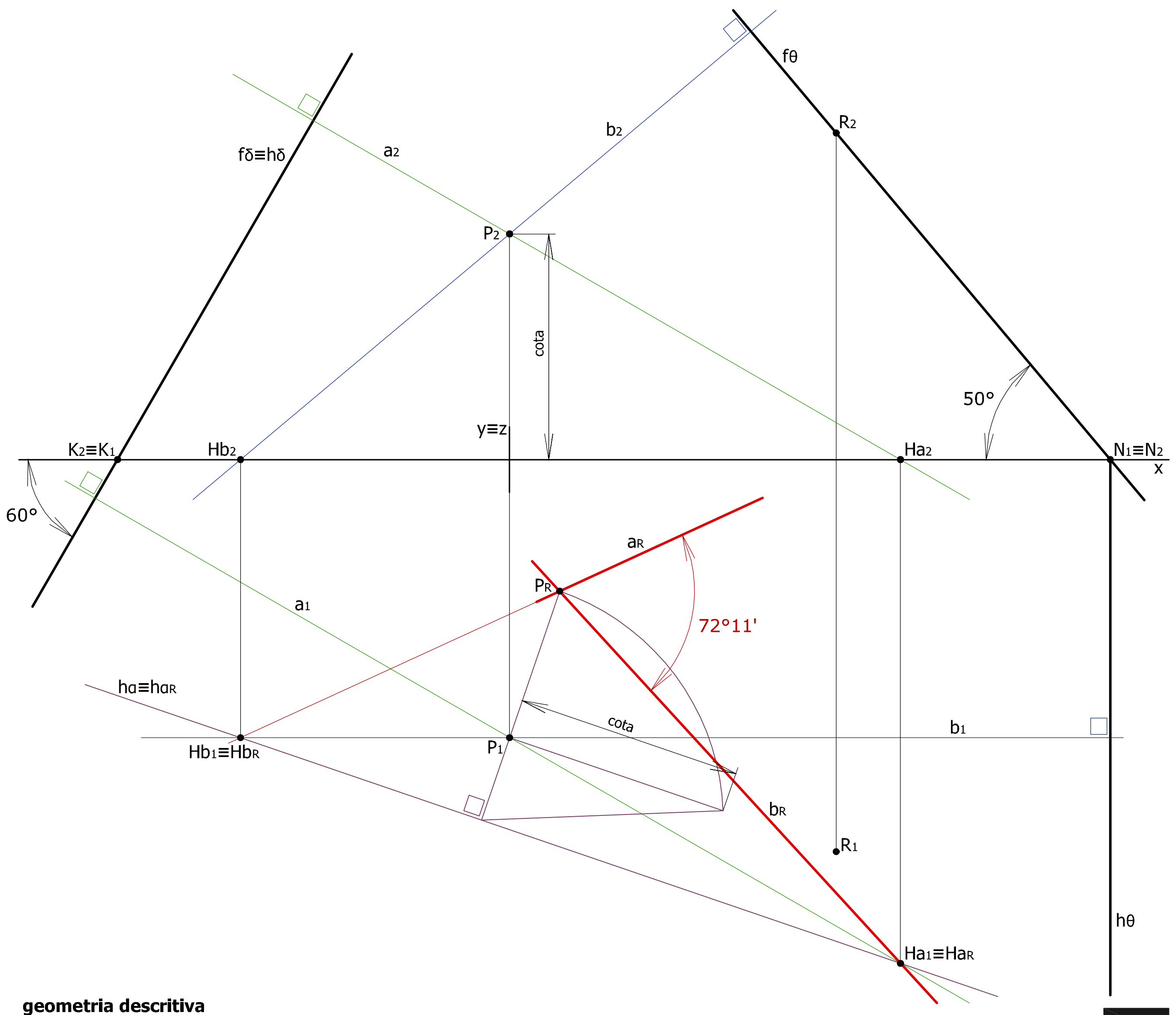
2.5. Determina-se **hα**, o traço horizontal do plano definido pelas rectas **a** e **b**, unindo Ha_1 e Hb_1.

2.6. Rebate-se o plano **α** e, por consequência, as rectas **a** e **b**, sobre o plano horizontal de projecção. Após este rebatimento as rectas e o ângulo que elas formam ficam, como pretendemos, na sua dimensão real.

A charneira do rebatimento é **hα** e, por isso, teremos imediatamente, $h\alpha \equiv h\alpha_R$, $Ha_1 \equiv Ha_R$ e $Hb_1 \equiv Hb_R$. Para encontrar P_R usou-se o processo do triângulo de rebatimento. Desenham-se, depois, a_R e b_R, as posições rebatidas das rectas **a** e **b**.

3. Resultado final.

Assinala-se, a traço grosso, um dos menores ângulos formados por a_R e b_R: é essa a amplitude do diedro formado pelos planos **δ** e **θ**.



EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

10º e 11º ano de escolaridade
(Dec.-Lei nº 74/2004 de 26 de Março)

PROVA PRÁTICA DE GEOMETRIA DESCRITIVA A

PROVA 708/2ª FASE
2010

Questão 2

Determine, graficamente, a amplitude do ângulo formado pelos planos **δ** e **θ**.

Dados

- o plano **δ** é oblíquo e os seus traços, nos planos de projecção, são coincidentes;
- o traço horizontal do plano **δ** cruza o eixo **x** num ponto com **6** de abcissa e faz um ângulo de 60°, de abertura para a esquerda, com esse mesmo eixo;
- o plano de topo **θ** é de topo, contém o ponto **R(-5; 6; 5)** e faz um diedro de 50°, de abertura para a esquerda, com o plano horizontal de projecção.

Um dos processos para determinar o valor da amplitude do diedro entre dois plano consiste em **determinar o ângulo entre duas rectas concorrentes, sendo cada uma delas perpendicular a um dos planos.** Foi esse o processo utilizado nesta resolução.

1. Colocação dos dados.

- Marcam-se as projecções do ponto de abcissa **6**, a que chamámos **K**, e desenha-se o traço horizontal e o traço frontal do plano **δ**.
- Desenham-se as projecções do ponto **R**, depois o traço frontal do plano **θ**, **fθ**, com o ângulo indicado e, por fim, a passar em **R_2**, o traço horizontal de **θ**, **hθ**, perpendicular ao eixo **x** e a cruzá-lo no ponto a que chamámos **N**.

2. Processo de resolução.

2.1. Desenham-se as projecções de um ponto **P**, qualquer.

2.2. Desenham-se, a passar no ponto **P**, as projecções de uma recta, **a**, que seja perpendicular ao plano **δ**: **a_2** perpendicular a **fδ** e **a_1** perpendicular a **hδ**.

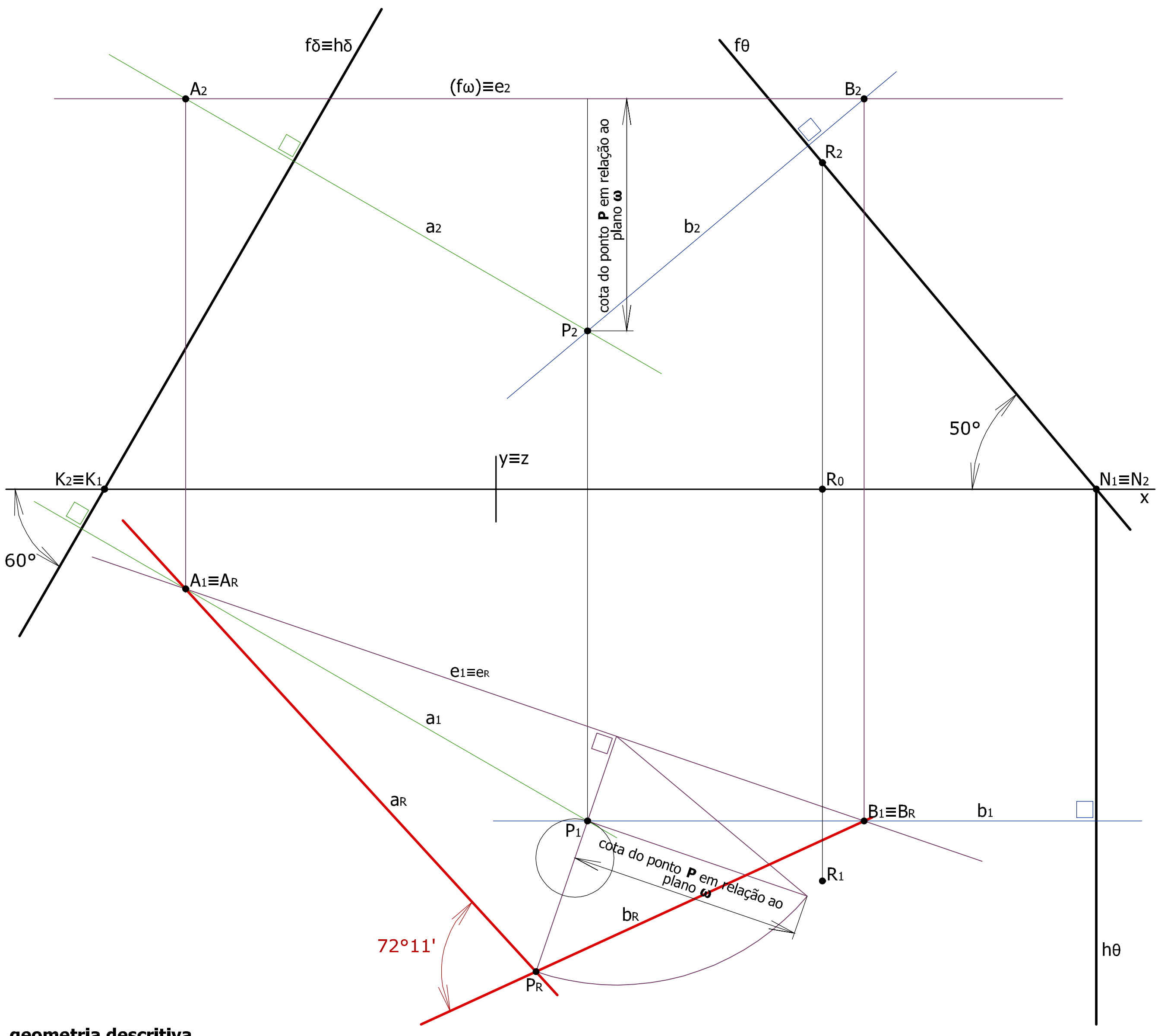
2.3. Procede-se de modo semelhante para o traçado de outra recta, **b**, mas esta perpendicular ao plano **θ**: **b_2** perpendicular a **fθ** e **b_1** perpendicular a **hθ**.

2.4. Colocam-se as rectas **a** e **b** paralelas a um dos planos de projecção. Na resolução apresentada colocaram-se as rectas paralelas ao plano horizontal de projecção fazendo o rebatimento das rectas sobre um plano horizontal, **ω**, e determinando:

- a recta **e**, charneira do rebatimento, definida pelos pontos **A** e **B**;
- **A_R**, **B_R** e **P_R**, as posições rebatidas dos pontos **A**, **B** e **P**, tendo-se usado o triângulo de rebatimento para este último ponto;
- **a_R** e **b_R**, as posições rebatidas das rectas **a** e **b**.

3. Resultado final.

Assinala-se, a traço grosso, um dos menores ângulos formados por **a_R** e **b_R**: é essa a amplitude do diedro formado pelos planos **δ** e **θ**.



EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

10º e 11º ano de escolaridade

(Dec.-Lei nº 74/2004 de 26 de Março)

PROVA PRÁTICA DE GEOMETRIA DESCRITIVA A

PROVA 708/2ª FASE

2010

Questão 2

Determine, graficamente, a amplitude do ângulo formado pelos planos **δ** e **θ**.

Dados

- o plano **δ** é oblíquo e os seus traços, nos planos de projecção, são coincidentes;
- o traço horizontal do plano **δ** cruza o eixo **x** num ponto com **6** de abcissa e faz um ângulo de 60°, de abertura para a esquerda, com esse mesmo eixo;
- o plano de topo **θ** é de topo, contém o ponto **R(-5; 6; 5)** e faz um diedro de 50°, de abertura para a esquerda, com o plano horizontal de projecção.

A amplitude do diedro de dois plano tem o mesmo valor numérico que o ângulo entre duas rectas, concorrentes, em que cada uma delas é perpendicular a um dos planos. Por isso, um dos processos para determinar a amplitude do ângulo pedido consiste em desenhar, passando num ponto qualquer, duas rectas, uma perpendicular a um dos planos e a outra perpendicular ao outro e, depois, determinar o ângulo entre essas duas rectas.

1. Colocação dos dados.

- Marcam-se, com abcissa **6**, as projecções do ponto a que chamámos **K**.
- Desenha-se, a passar em **K** e com o ângulo dado, **hδ**, o traço horizontal do plano **δ** e, coincidente, **fδ**, o traço frontal do mesmo plano.
- Desenham-se as projecções do ponto **R**, o traço frontal do plano **θ**, **fθ**, com o ângulo indicado e, a passar em **R_2**, o traço horizontal de **θ**, **hθ**, perpendicular ao eixo **x** e a cruzá-lo no ponto a que chamámos **N**.

2. Processo de resolução.

2.1. Desenham-se, em qualquer posição, as projecções de um ponto **P**.

2.2. Desenham-se, a passar no ponto **P**, as projecções de uma recta, **a**, que seja perpendicular ao plano **δ**: **a_2** perpendicular a **fδ** e **a_1** perpendicular a **hδ**.

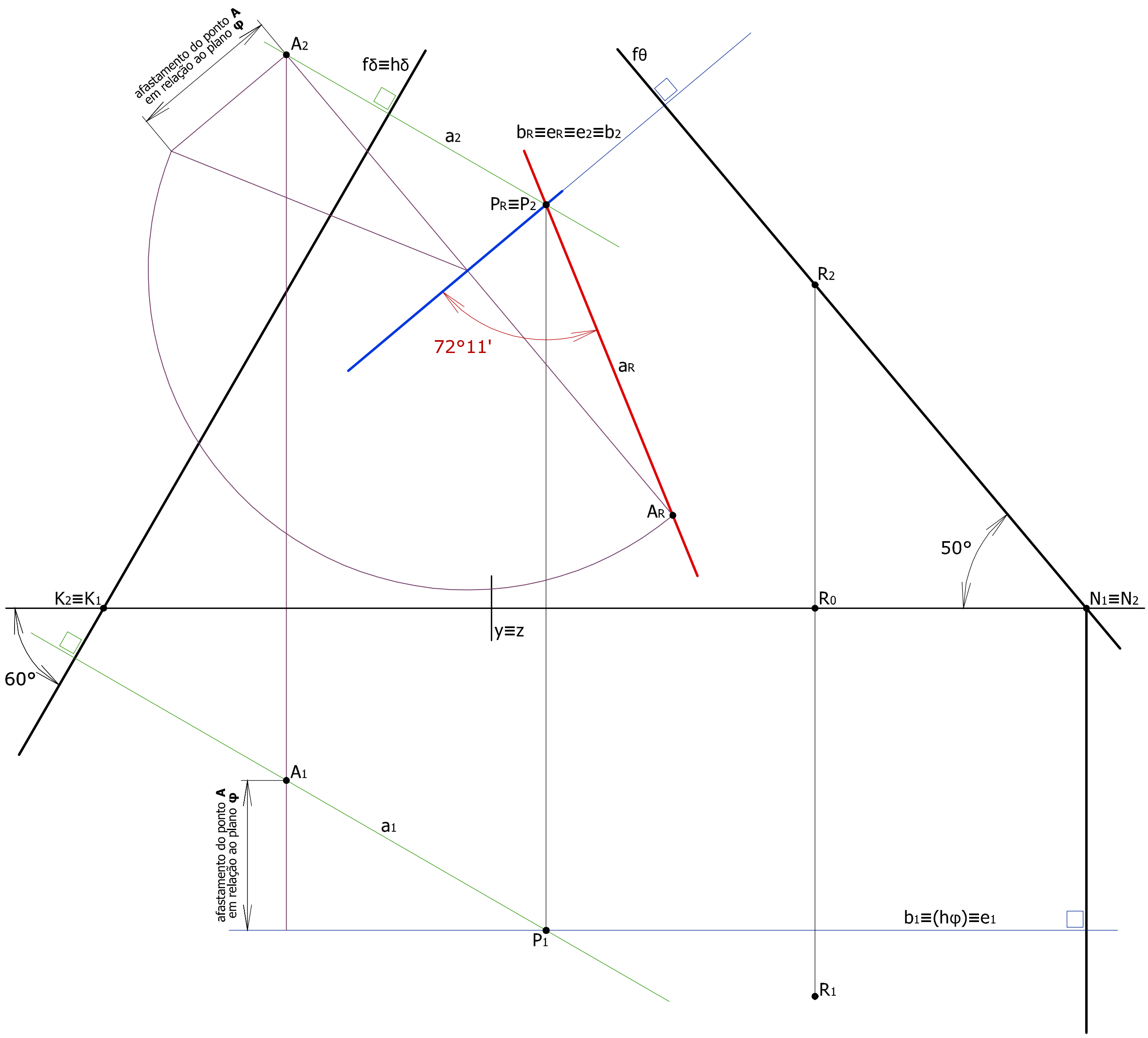
2.3. Desenham-se, a passar também no ponto **P**, as projecções de outra recta, **b**, agora perpendicular ao plano **θ**: **b_2** perpendicular a **fθ** e **b_1** perpendicular a **hθ**.

2.4. Colocam-se as rectas **a** e **b** paralelas a um dos planos de projecção: na resolução apresentada colocaram-se as rectas paralelas ao plano frontal de projecção fazendo o rebatimento das rectas sobre o plano frontal, **φ**, que contém a recta **b**. A charneira do rebatimento é, assim, essa recta **b** e, por isso, **b_R≡b_2**.

2.5. Rebate-se a recta **a** rebatendo dois dos seus pontos: o ponto **P** que, por pertencer à charneira tem **P_R≡P_2**, e um outro qualquer ponto que se marque na recta, o ponto **A** nesta resolução, que se rebate usando o triângulo de rebatimento. Unindo **P_R** com **A_R** temos **a_R**.

3. Resultado final.

Marca-se, a traço grosso, um dos menores ângulos formados por **a_R** e **b_R**: é essa a amplitude do diedro formado pelos planos **δ** e **θ**.



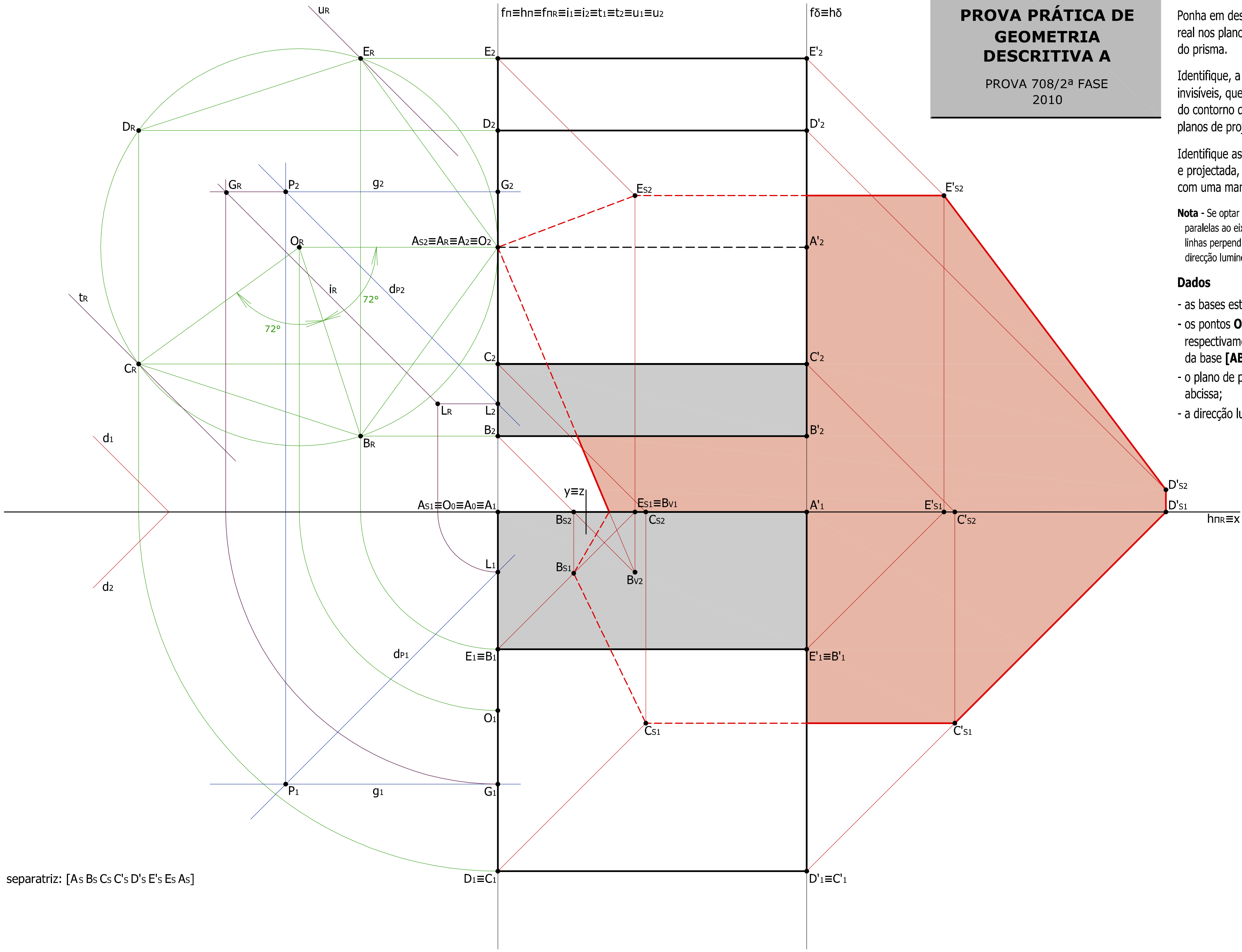
EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

10º e 11º ano de escolaridade

(Dec.-Lei nº 74/2004 de 26 de Março)

PROVA PRÁTICA DE GEOMETRIA DESCRITIVA A

PROVA 708/2ª FASE
2010



separatriz: [A_S B_S C_S C'_S D'_S E'_S E_S A_S]

Questão 3

Determine a sombra própria e a sombra real de um prisma pentagonal regular, nos planos de projecção, de acordo com os dados abaixo apresentados.

Ponha em destaque quer o contorno da sombra real nos planos de projecção, quer as projecções do prisma.

Identifique, a traço interrompido, as linhas invisíveis, quer no sólido, quer na parte oculta do contorno da sua sombra projectada nos planos de projecção.

Identifique as áreas visíveis das sombras própria e projectada, preenchendo-as a tracejado ou com uma mancha de grafite clara e uniforme.

Nota - Se optar pelo tracejado, deverá fazê-lo com linhas paralelas ao eixo **x**, nas áreas de sombra própria, e com linhas perpendiculares às respectivas projecções da direcção luminosa, nas áreas de sombra projectada.

Dados

- as bases estão contidas em planos de perfil;
- os pontos **O(2; 4,5; 6)** e **A(2; 0; 6)** são, respectivamente, o centro e um dos vértices da base **[ABCDE]**;
- o plano de perfil da outra base tem **-5** de abcissa;
- a direcção luminosa é a convencional.

1. Colocação dos dados.

- Marcam-se as projecções dos pontos **O** e **A** e o traços do plano de perfil, **π**, que os contém.
- Marcam-se, com abcissa **-5**, os traços do plano de perfil da outra base.
- Indica-se a direcção luminosa convencional.

2. Processo de resolução.

2.1. Projecções do prisma.

- Rebate-se o plano **π** e os pontos **A** e **O**. Usou-se, como charneira, **f_π**.
- Constrói-se, rebatido, o pentágono **[ABCDE]**.
- Determinam-se, por contra-rebatimento, as projecções frontais e as projecções horizontais dos vértices do pentágono **[ABCDE]**.
- Desenham-se as arestas laterais do prisma que são segmentos de recta fronto-horizontais porque o prisma é recto.
- Indicam-se os vértices da outra base do prisma, **[A'B'C'D'E']**.
- Desenham-se as projecções do prisma com o traçado convencional: com traço contínuo grosso as aresta visíveis e com traço interrompido a aresta **[$A_2A'_2$]**, a única das invisíveis que não está oculta por arestas visíveis.

2.2. Determinação da linha separatriz.

- Marca-se um ponto **P**, qualquer, e desenham-se duas rectas a passar nesse ponto: uma, **d_P**, paralela à direcção luminosa, e outra, **g**, paralela às arestas laterais do prisma.
- Determinam-se os pontos **L** e **G** onde as rectas **d_P** e **g** intersectam o plano **π** da base **[ABCDE]**. Os pontos **L** e **G** definem a recta **i**.

  Note-se que a recta **i** é a recta de intersecção entre o plano de perfil **π** e o plano definido pelas rectas **d_P** e **g**.
- Rebatem-se os pontos **L** e **G** e a recta **i**, para o mesmo plano para onde se rebateu a base **[ABCDE]**.
- Desenham-se **t_R** e **u_R**, o rebatimento das rectas **t** e **u**. Estas rectas são paralelas à recta **i** e devem passar em dois vértices da base **[ABCDE]** de modo a que **não intersectem essa base**. Por isso, as rectas **t_R** e **u_R** vão passar em **C_R** e **E_R**. (Como se trata de um prisma recto e a direcção luminosa é a convencional poderíamos desenhar, directamente, **t_R** e **u_R** que têm, nestas codições, uma direcção paralela ao **β_{13}**).
- As aresta laterais **[CC']** e **[EE']** pertencem à separatriz.
- A recta **t** e a aresta lateral **[CC']** definem um plano; a recta **u** e a aresta lateral **[EE']** definem outro plano. Ester dois planos vão definir um corredor de luz/sombra que permite definir as faces do prisma que estão iluminadas ou em sombra e permitem indicar a linha separatriz. Sabendo, também, que a base **[ABCDE]**, situada do lado de onde incide a luz, está iluminada, e a face **[A'B'C'D'E']**, no lado oposto, está em sombra, a **linha separatriz** é **[A_S B_S C_S C'_S D'_S E'_S E_S A_S].**

2.3. Sombra da linha separatriz.

Determinam-se as sombras de todos os pontos da separatriz e as sombras dos segmentos de recta definidos por cada par de pontos em sequência. Apenas o segmento de recta **[AB]** exige a sombra virtual de um dos extremos, o que se fez determinando a sombra virtual **B_V** do ponto **B** (poderia ter-se feito a do ponto **A**). Alguns pedaços da separatriz estão tapados com o sólido e, por isso, essas partes são desenhadas em traço interrompido.

3. Resultado final.

3.1. Sombra própria.

Em sombra estão as faces **[AA´B´B]**, **[BB'C'C]**, **[AA'E'E]** e a base **[A'B'C'D'E']**. Destas só são visíveis **[BB'C'C]** em projecção frontal e **[AA'E'E]** em projecção horizontal, que se identificaram com uma mancha.

3.2. Sombra projectada (sombra real nos planos de projecção).

Identifica-se a sombra real preenchendo-se a área limitada pela separatiz e que não é ocultada pelo prisma.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

10º e 11º ano de escolaridade

(Dec.-Lei nº 74/2004 de 26 de Março)

PROVA PRÁTICA DE GEOMETRIA DESCRITIVA A

PROVA 708/2ª FASE

2010

Questão 4

Construa uma representação axonométrica ortogonal de uma forma tridimensional composta por um prisma quadrangular regular e por uma pirâmide triangular oblíqua de base regular, de acordo com os dados abaixo apresentados.

Ponha em destaque, no desenho final, apenas o traçado das arestas visíveis do sólido resultante.

Dados

Sistema axonométrico

- trimetria: a projecção axonométrica do eixo **y** faz ângulos de 130° e de 120° com as projecções dos eixos **x** e **z**, respectivamente.

Nota - Considere os eixos orientados em sentido directo: o eixo **z**, vertical, orientado positivamente, de baixo para cima, e o eixo **x**, orientado positivamente da direita para a esquerda.

Sólidos:

- os pontor **R(5; 5; 11)** e **S(0; 5; 11)** definem uma aresta comum.

Prisma quadrangular regular:

- uma base está situada no plano coordenado horizontal **xy**;
- os pontos **R** e **S** definem a aresta de maior afastamento da outra base.

Pirâmide triangular oblíqua de base regular:

- a base **[RST]** é paralela ao plano coordenado horizontal **xy**, sendo **T** o ponto de maior afastamento;
- o vértice da pirâmide coincide com o centro da face de maior afastamento do prisma.

1. Colocação dos dados.

Marcam-se os eixos coordenados com os ângulos apresentados. Os outros dado são colocado com o desenvolvimento da resolução.

2. Processo de resolução.

2.1. Rebate-se o plano coordenado **xy** e faz-se a sua translação, ao longo do eixo **z**, para a posição $x_{R'}\,y_{R'}$.

2.2. Marcam-se, no referencial $x_{R'}\,y_{R'}$, as coordenadas, sem cota, dos pontos **R** e **S**, correspondentes a $R_{1R'}$ e $S_{1R'}$. Desenha-se, também, o triângulo equilátero $[R_{1R'}S_{1R'}T_{1R'}]$.

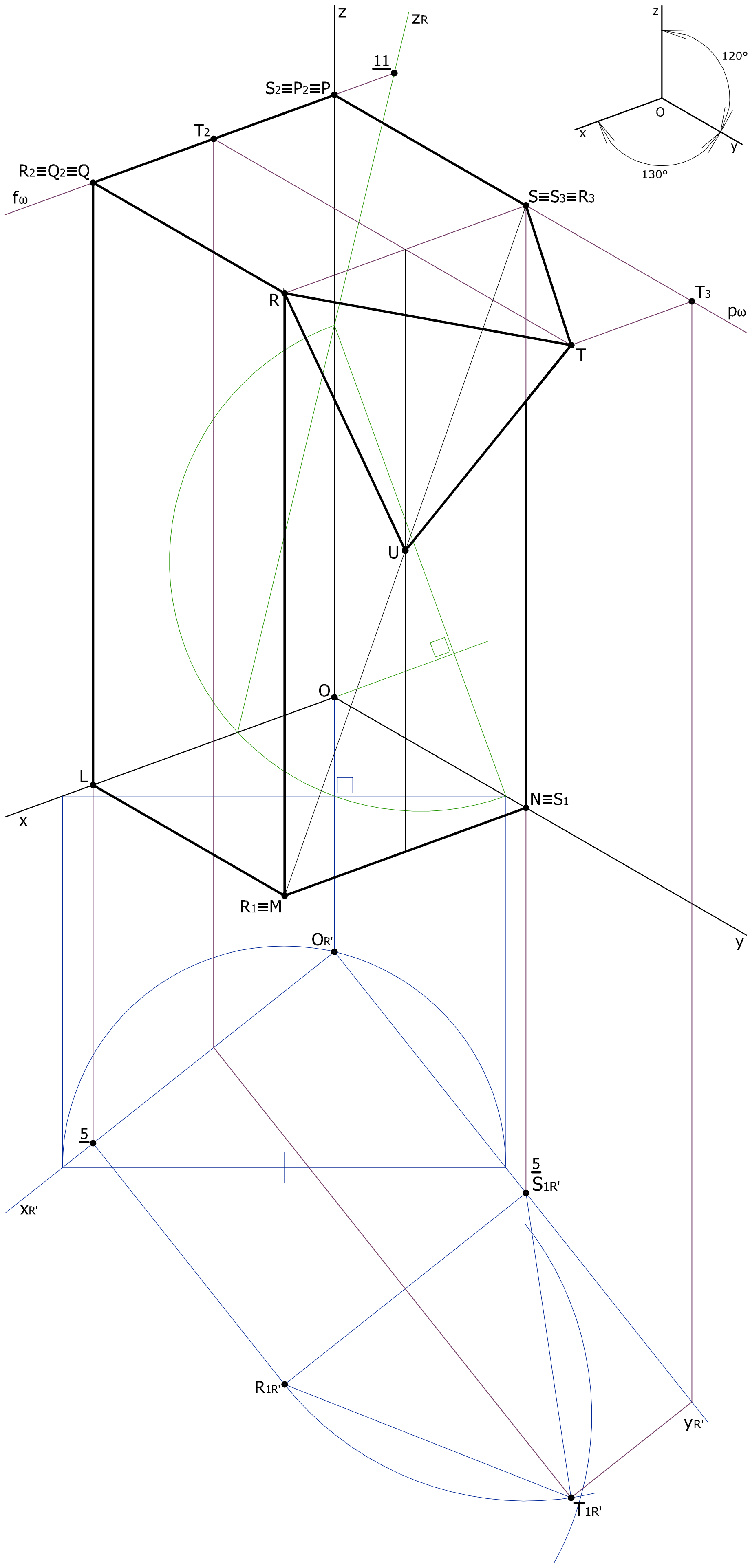
2.3. Rebate-se o eixo **z** e marca-se, em z_R, a cota **11** do plano **ω** que contém a base superior do prisma e a base da pirâmide. Traçam-se, depois, **fω** e **pω**.

2.4. Desenha-se **[PQRS]**, a base superior do prisma, **[RST]**, a base da pirâmide e, com cota nula, **[OLMN]**, a base inferior do prisma.

2.6. Determina-se **U**, o ponto médio da face **[RSNM]** do prisma.

3. Resultado final.

Desenha-se, a traço grosso, as arestas visíveis do sólido final resultante da fusão do prisma e da pirâmide.



Utilizou-se, nesta resolução, o **método dos cortes**.

Dos pontos apresentados na resolução só **R**, **S** e **T** têm que manter esta designação porque assim são chamados nos dados; todos os outros podem tomar nomes diferentes dos que a solução indica ou podem, mesmo, não ser identificados com qualquer letra.