Questão 1

Determine as projecções da recta de intersecção, **i**, do plano oblíquo **π** com o plano passante **θ**.

Dados:

- o plano **π** intersecta o eixo **x** no ponto com **5** de abcissa;
- os traços horizontal e frontal do plano **π** fazem, respectivamente, ângulos de 50° e 30°, ambos de abertura para a direita, com o eixo **x**;
- o plano **θ** é definido pelo eixo **x** e pelo **P(0; 3; 6)**.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

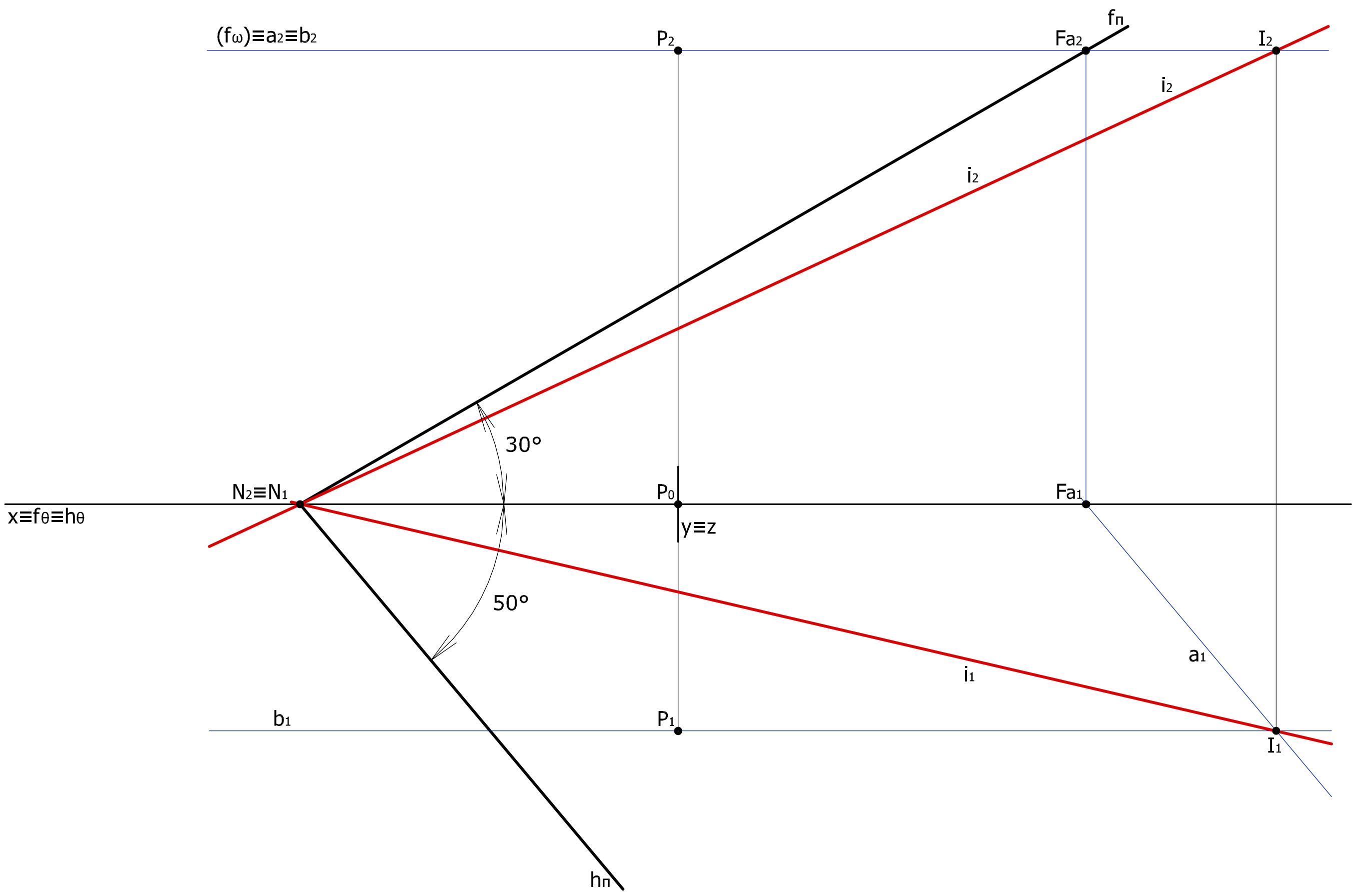
11º/12º ano de escolaridade

(Dec.-Lei nº 74/2004 de 26 de Março)

PROVA PRÁTICA DE GEOMETRIA DESCRITIVA A

PROVA 708

2ª FASE - 2009



Os planos estão, ambos, definidos pelos seus traços nos planos de projecção tendo o plano **θ**, passante, os traços coincidentes como eixo **x**. Por isso um dos pontos da recta de intersecção entre os planos **π** e **θ** será o ponto de cruzamento dos traços do plano **π** com o eixo **x**.

Com os dados indicados não é possível determinar, directamente, qualquer outro ponto da recta de intersecção pedida. Teremos, portanto, que usar o processo geral da determinação da recta de intersecção entre planos. E como só precisamos encontrar outro ponto da recta de intersecção entre os planos, só é necessário utilizar um plano auxiliar.

Desenvolvimento da resolução

1. Colocação dos dados.

1.1. Marca-se o ponto **P** e, em **x**, o ponto de abcissa **5**, a que se chamou **N**.

1.2. Desenham-se, a passar em **N** e com as direcções indicadas, os traços do plano **π**.

1.3. Indicam-se, coincidentes com **x**, os traços do plano **θ**.

2. Processo de resolução.

2.1. Desenha-se, a passar em **P**, o plano auxiliar que irá intersectar cada um dos planos dados. Escolheu-se um plano horizontal, **ω**.

2.2. Determinam-se as projecções da recta **a**, a recta de intersecção entre os planos **ω** e **π**. A recta **a** tem o traço frontal em **Fa** e, por ser horizontal, tem a projecção horizontal, **a_1**, paralela ao traço horizontal do plano **π**.

2.3. Determinam-se as projecções da recta **b**, a recta de intersecção entre **ω** e **θ**. Sendo esta recta a intersecção entre um plano horizontal, **ω**, e um plano passante, **θ**, é uma recta fronto-horizontal. E contém o ponto **P** porque **P** pertence a **ω** e **θ**.

2.4. Determinam-se as projecções do ponto **I**, o ponto comum às rectas **a** e **b**.

3. Resultado final

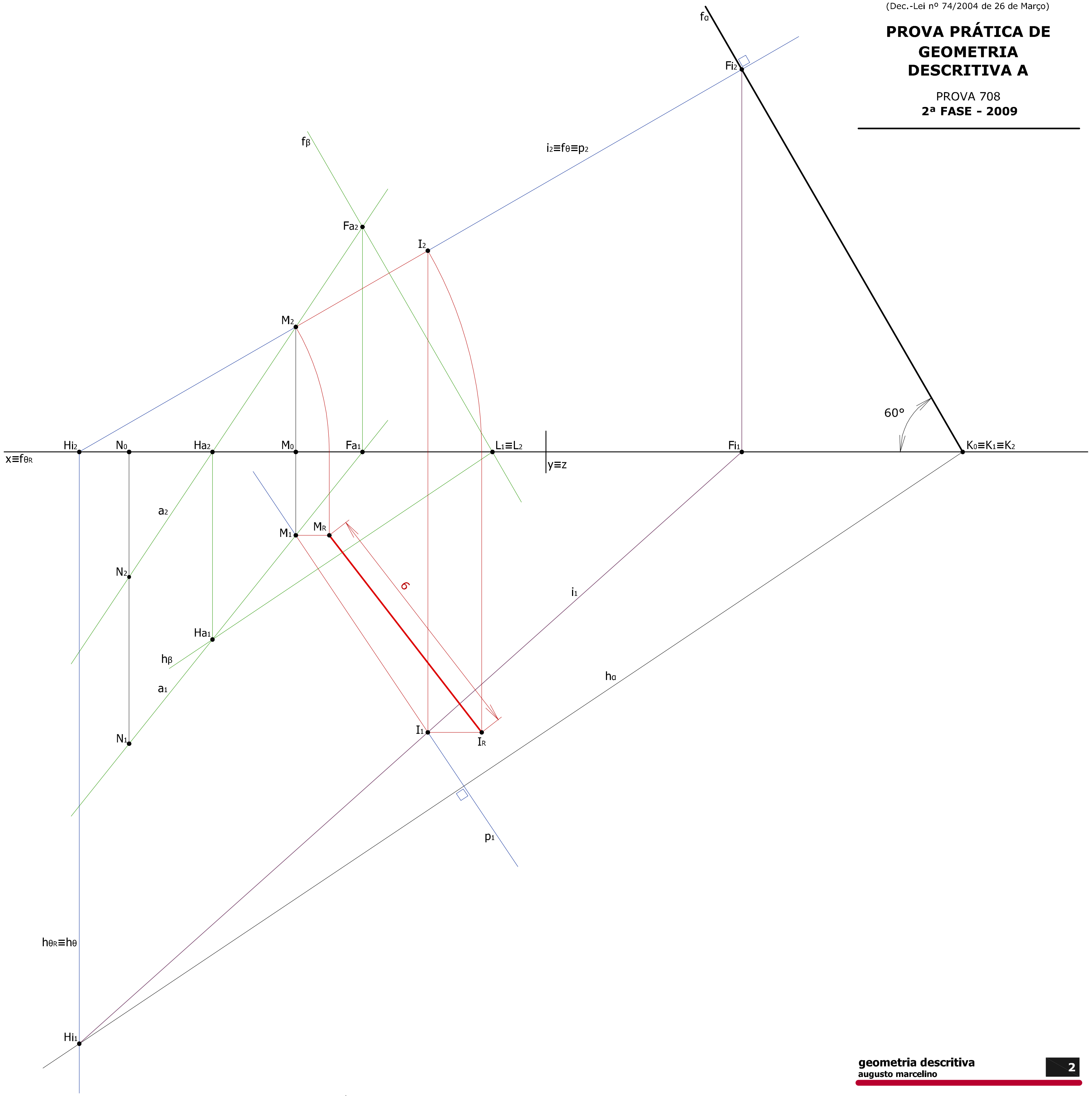
Desenham-se as projecções frontal e horizontal da recta **i** que está definida pelos ponto **N** e **I**.

Questão 2

Determine, graficamente, a verdadeira grandeza da distância entre dois planos paralelos, **α** e **β**.

Dados:

- o traço frontal do plano **α** intersecta o eixo **x** no ponto com **-10** de abcissa e faz um ângulo de 60º, de abertura para a esquerda, com esse mesmo eixo;
- o plano **β** contém os ponto **M(6; 2; 3)** e **N(10; 7; -3)**.



A distância entre dois planos paralelos é o comprimento do segmento de recta compreendido entre os dois planos, segmento esse que tem como recta de suporte uma qualquer recta perpendicular aos dois planos**.**

Assim, a resolução do problema envolve:

- o traçado de uma recta perpendicular aos planos;
- a determinação dos pontos de intersecção entre essa perpendicular e cada um dos planos;
- a determinação da verdedeira grandeza desse segmento de recta.

Desenvolvimento da resolução

1. Colocação dos dados.

1.1. Marcam-se as projecções do ponto do eixo **x**, com **-10** de abcissa, onde o plano **α** intersecta este eixo. Chamou-se **K** a esse ponto.

1.2. Desenha-se **fα**, o traço frontal do plano **α**, com um ângulo, em relação a **x**, de 60º de abertura para a esquerda.

1.3. Marcam-se as projecções dos pontos **M** e **N** com as coordenadas indicadas.

2. Processo de resolução.

2.1. Determinam-se os traços do plano **β**. Para isso:

- desenham-se as projecções da recta definida pelos pontos **M** e **N**, recta a que se chamou **a;**
- determinam-se as projecções dos traços frontal e horizontal da recta **a**, **Fa** e **Ha** respectivamente;
- em **Fa₂** desenha-se **fβ** paralelo a **fα** porque, sendo os planos **α** e **β** paralelos, então os traços homónimos destes planos também o são;
- desenha-se **hβ** a passar em **Ha₁** e em **L₁**, o ponto onde **fβ** intersecta **x**.

2.2. Desenha-se, a passar em **K**, **hα** paralelo a **hβ**.

2.3. Desenham-se as projecções da recta **p** perpendicular aos planos: **p₂** perpendicular a **fα** e **fβ** e **p₁** perpendicular a **hα** e **hβ**. Como, depois, temos que determinar os pontos de intersecção de **p** com os planos **α** e **β**, escolheu-se passar **p** no ponto **M** que pertence ao plano **β**. Assim já só temos que determinar o ponto de intersecção de **p** com **α**.

2.4. Determinam-se as projecções do ponto **I** de intersecção entre a recta **p** e o plano **α**. Para tal usa-se o precesso geral da determinação do ponto de intersecção entre uma recta e um plano:

- desenha-se o plano auxiliar **θ**, de topo, a conter a recta **p**;
- determinam-se as projecções da recta **i** de intersecção entre os planos **α** e **θ**, recta esta que fica definida pelos seus traços **Fi** e **Hi**;
- determinam-se as projecções do ponto **I** que se situam na intersecção entre as projecções das rectas **p** e **i**.

2.5. O segmento que representa a distância entre os dois planos é **[MI]**. Teremos, agora, que determinar a verdadeira grandeza do comprimento deste segmento de recta. Para isso fez-se o rebatimento, sobre o plano horizontal de projecção, do plano de topo **θ** que o contém.

3. Resultado final

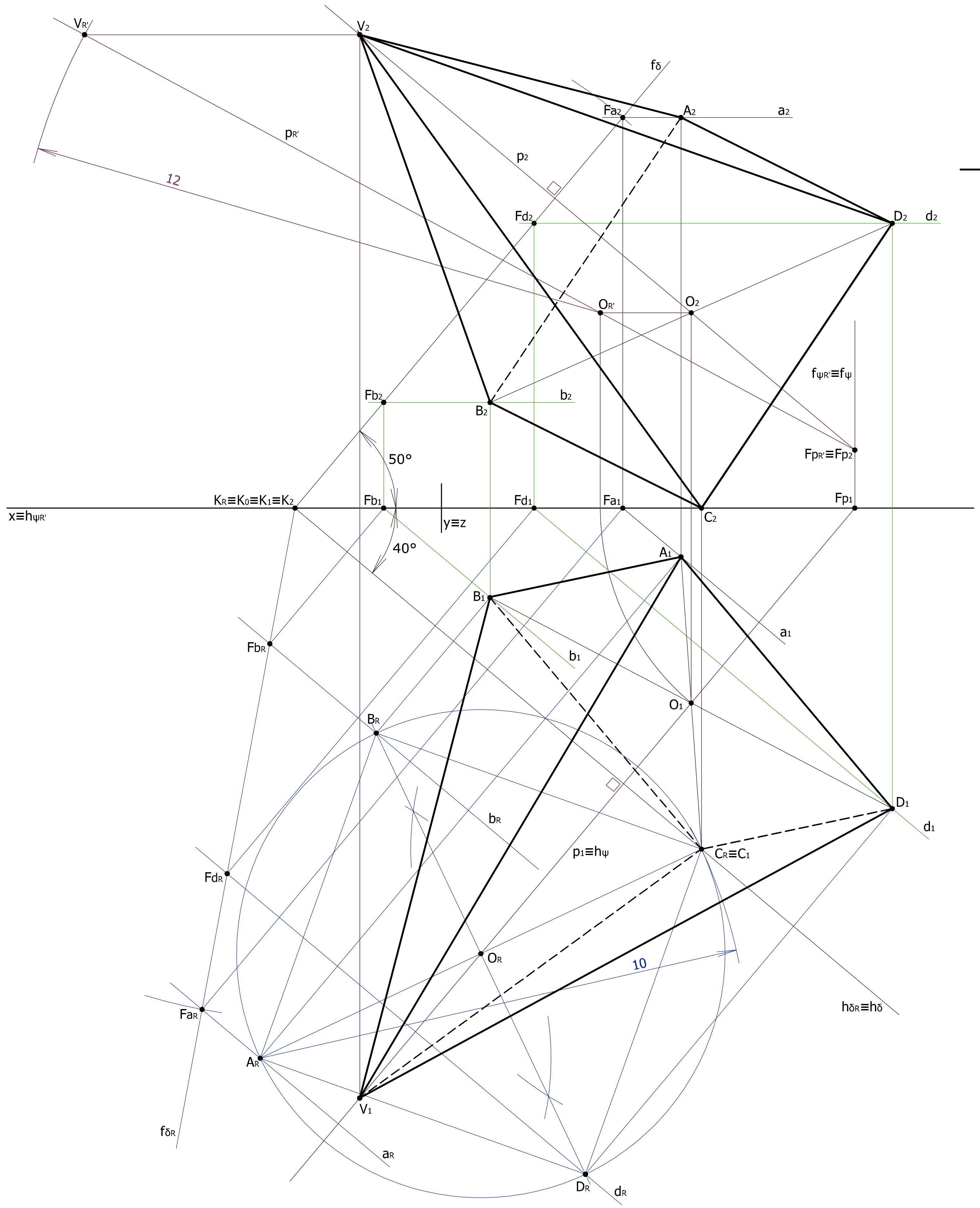
O resultado final compreende a indicação dos pontos **M_R** e **I_R** , o dar expressão gráfica a este segmento de recta **[M_RI_R]** carregando-o e, finalmente, assinalar o seu comprimento ou indicar, de outro modo igualmente legível, que é aquela a verdadeira grandeza pedida.

Questão 3

Represente, pelas suas projecções, uma **pirâmide quadrangular regular** , situada no 1º diedro, de acordo com os dados abaixo apresentados.

Dados:

- a base **[ABCD]** está contida no plano oblíquo **δ**, que cruza o eixo **x** no ponto com **3** de abcissa;
- os traços, horizontal e frontal, do plano **δ** fazem, respectivamente, ângulos de 40º e 50º, ambos de abertura para a direita, com o eixo **x**;
- as diagonais da base medem **10 cm**;
- o ponto **A(1; 8)** e o ponto **C**, que pertence ao traço horizontal do plano **δ**, definem a diagonal **[AC]**;
- a pirâmide tem **12 cm** de altura.



A resolução do problema exije:

- o traçado da base da pirâmide;
- a determinação das projecções do vértice;
- o traçado das arestas laterais;
- a indicação das arestas invisíveis do sólido.

Desenvolvimento da resolução

1. Colocação dos dados.

1.1. Marcam-se as projecções do ponto do eixo **x**, com **3** de abcissa, onde o plano **δ** intersecta este eixo. Chamou-se **K** a esse ponto.

1.2. Desenham-se **f_{δ}** e **h_{δ}**, os traços frontal e horizontal do plano **δ**, a fazerem com **x**, como se indica nos dados, os ângulos de 40° e 50°, ambos de abertura para a direita.

1.3. Marcam-se as projecções do ponto **A** do plano **δ**. Para isso usou-se uma recta horizontal, **a**, com a cota do ponto.

1.4. Todos os outros dados que são indicados no enunciado do problema só podem ser marcados e usados enquanto se desenvolver o processo de resolução.

2. Processo de resolução.

2.1. Determinam-se as projecções da base da pirâmide. Para isso temos que colocar o quadrado **[ABCD]** da base em verdadeira grandeza e só depois se podem desenhar as suas projecções.

Para colocar o quadrado em verdadeira grandeza tem que se usar um processo geométrico auxiliar: ou mudança de planos, ou rotações ou rebatimentos. Usou-se, porque é bastante mais fácil e prático e tem uma maior economia de meios gráficos, o processo do rebatimento do plano **δ** sobre o plano horizonal de projecção, utilizando rectas horizontais como auxiliares nesse rebatimento. Em pormenor temos:

- Indica-se a charneira do rebatimento: **$h_{\delta} \equiv h_{\delta R}$**.
- Rebate-se o ponto **K**: **$K_R \equiv K_1 \equiv K_2$**.
- Determina-se **Fa_R** rebatendo o ponto **Fa**, o traço frontal de recta horizontal **a** que se usou para marcar as projecções do ponto **A**. Para isso desenha-se uma perpendicular à chaneira a partir de **Fa_1** e marca-se, nessa perpendicular, o ponto **Fa_R** de modo a que os segmentos de recta **[$K_R Fa_R$]** e **[$K_2 Fa_2$]** tenham o mesmo comprimento. O modo prático desenhar estes dois segmentos de recta com o mesmo comprimento consiste em fazer centro **K_2** e desenhar um arco de ciircunferência de raio **[$K_2 Fa_2$]** que vá cortar a perpendicular à charneira que passa em **Fa_1**; a intersecção entre o arco de circunferência e essa perpendicular à charneira é o ponto **Fa_R**. Note-se que, tal como se fez na proposta de resolução apresentada, não é necessário desenhar todo o arco de circunferência.
- Desenha-se **$f_{\delta R}$** unindo **K_R** com **Fa_R**.
- Desenha-se a recta **a_R**, paralela à charneira, e marca-se a posição do ponto **A_R** desenhando uma perpendicular à charneira, a partir de **A_1**, até cortar **a_R**.
- Como as diagonais do quadrado da base medem **10 cm** e os pontos **A** e **C** definem uma dessas diagonais e **C** vai situar-se sobre o traço horizontal do plano **δ**, então marca-se sobre **$h_{\delta R}$** o ponto **C_R** a **10 cm** de **A_R**. Das duas posições possíveis escolheu-se a que se apresenta na resolução proposta porque é aquela que permite desenhar a base da pirâmide situada no 1º diedro.
- Determina-se **O_R**, o ponto médio de **[$A_R C_R$]**.
- Desenha- se, com centro em **O_R** e passando em **A_R** e **C_R**, a circunferência circunscrita ao quadrado da base da pirâmide.
- Marcam-se **[$B_R D_R$]** perpendicular a **[$A_R C_R$]** em **O_R** e desenha-se o quadrado **[$A_R B_R C_R D_R$]** em verdadeira grandeza.
- Inverte-se o rebatimento para **B_R**, **C_R** e **D_R**, os restantes vértice da base:
  - como **C_R** se situa sobre a charneira, então **$C_R \equiv C_1$**;
  - para os outros dois vértices, **B** e **D**, usaram-se rectas horizontais rebatidas, respectivamente **b_R** e **d_R**, das quais se determinam **Fb_R** e **Fd_R**, **Fb_1** e **Fb_2**, **Fd_1** e **Fd_2**, e, depois, as projecções **b_1** e **b_2**, **d_1** e **d_2** e, finalmente, marcam-se as projecções desses pontos **B** e **D** sobre as projecções das rectas **b** e **d**, respectivamente.
- Desenham-se as projecções **[$A_1 B_1 C_1 D_1$]** e **[$A_2 B_2 C_2 D_2$]**do quadrado **[ABCD]**.

2.2. Como a pirâmide é recta, o vértice **V** situa-se sobre a recta **p** que passa em **O** e é perpendicular ao plano da base.

Desenham-se, então, as projecções **p_1** e **p_2** da recta **p**, perpendiculares aos traços homónimos do plano **δ.**

2.2. Para marcar **V** a **12 cm** de **O** temos que colocar a recta **p** em verdadeira grandeza. Nesta proposta de resolução optou-se por inserir **p** num plano vertical **ψ** e rebater o conjunto sobre o plano frontal de projecção, sendo a recta **p** definida pelos pontos **O** e **Fp**: a charneira deste rebatimento é **f_{ψ}** e, por isso, **$f_{\psi} \equiv f_{\psi R}$**.

2.3. Depois de se marcar, sobre **p_R**, **V_R** a **12 cm** de **O_R**, inverte-se o rebatimento do plano **ψ** e obtém-se **V_2** e **V_1**.

3. Resultado final

Com todos os vértices da pirâmide definidos, desenham-se as aresta laterais da pirâmide e analisam-se as posições dos vértices e das arestas para definir aquelas que se apresentam invisíveis em alguma das projecções:

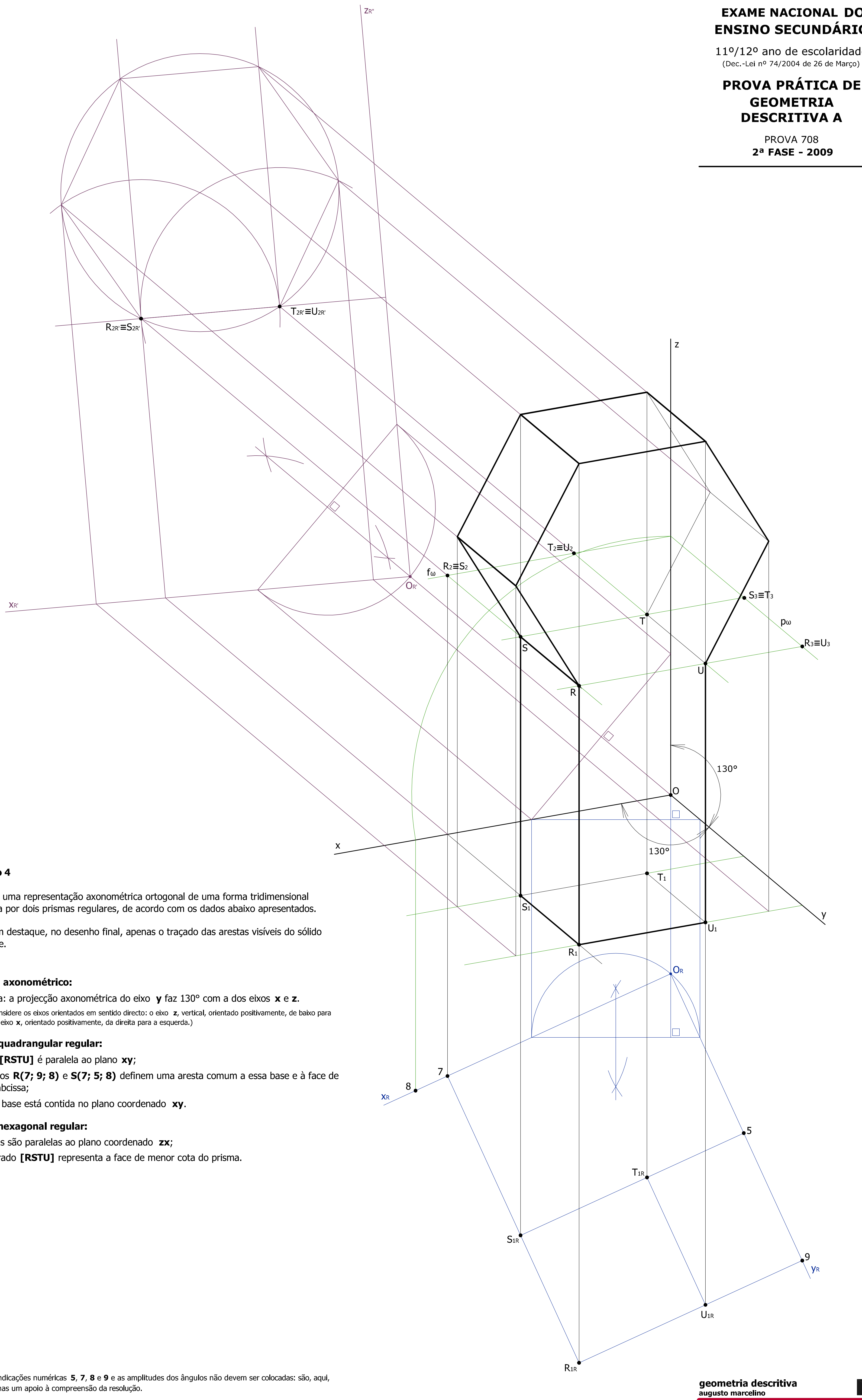
- o vértice **V** é visível em ambas a projecções porque é o ponto da pirâmide com maior cota - daí ser visível na projecção horizontal - e maior afatamento - é visível, por isso, na projecção frontal;
- na projecção frontal da pirâmide apenas a aresta **[AB]** da base é invisível, porque resulta da união dos dois pontos de menor afastamento do sólido;
- na projecção horizontal todas as arestas que saem do vértice **C** são invisíveis porque este é o vértice de menor cota da pirâmide.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

11º/12º ano de escolaridade
(Dec.-Lei nº 74/2004 de 26 de Março)

PROVA PRÁTICA DE GEOMETRIA DESCRITIVA A

PROVA 708
2ª FASE - 2009



Questão 4

Construa uma representação axonométrica ortogonal de uma forma tridimensional composta por dois prismas regulares, de acordo com os dados abaixo apresentados.

Ponha em destaque, no desenho final, apenas o traçado das arestas visíveis do sólido resultante.

Dados:

Sistema axonométrico:

- dimetria: a projecção axonométrica do eixo **y** faz 130° com a dos eixos **x** e **z**.

  Nota: considere os eixos orientados em sentido directo: o eixo **z**, vertical, orientado positivamente, de baixo para cima, e o eixo **x**, orientado positivamente, da direita para a esquerda.)

Prisma quadrangular regular:

- a base **[RSTU]** é paralela ao plano **xy**;
- os pontos **R(7; 9; 8)** e **S(7; 5; 8)** definem uma aresta comum a essa base e à face de maior abcissa;
- a outra base está contida no plano coordenado **xy**.

Prisma hexagonal regular:

- as bases são paralelas ao plano coordenado **zx**;
- o quadrado **[RSTU]** representa a face de menor cota do prisma.

Nota: As indicações numéricas **5**, **7**, **8** e **9** e as amplitudes dos ângulos não devem ser colocadas: são, aqui, apenas um apoio à compreensão da resolução.