

OS PROBLEMAS GRÁFICOS BÁSICOS DA GEOMETRIA DESCRITIVA (A PROPÓSITO DOS NOVOS PROGRAMAS)

NUNO CALADO MATEUS

Ao assumir como objectivo, para além da simples representação descritiva de figuras tridimensionais, o estudo dos métodos gráficos que permitem resolver problemas relacionados com a posição relativa, as intersecções e as medidas das figuras tridimensionais, a Geometria Descritiva, por tradição, faz seus os problemas fundamentais da geometria do espaço, cuja resolução constitui a chave da generalidade dos problemas de geometria prática, e que são os seguintes:

- 1º – Dados três pontos não colineares, fazer passar por estes um plano;
- 2º – Encontrar o ponto de intersecção de uma recta com um plano;
- 3º – Encontrar a recta de intersecção de dois planos.

Estes três problemas de geometria do espaço, apenas resolúveis, na prática, sob forma de traçados, através da sua transformação projectiva e descritiva, que os reduz a problemas de geometria plana, recebem, no contexto da Geometria Descritiva, a designação de *problemas gráficos básicos*. Como se processa a sua resolução?

Antes de mais, depende da possibilidade de resolução gráfica prévia ao nível do plano, e que é imediata, de três outros problemas elementares fundamentais, que são os seguintes:

- 1º – Dados dois pontos, fazer passar por estes uma recta;
- 2º – Dados, uma recta e um ponto exterior, fazer passar pelo ponto uma recta paralela à primeira;
- 3º – Dadas duas rectas, encontrar o seu ponto de intersecção.¹

Por outro lado, depende da própria natureza e das propriedades do tipo de transformação projectiva que os reconduz ao nível do plano e, em primeiro lugar, da identificação gráfica das correspondentes imagens projecionais da recta e do ponto. Em segundo lugar, da possibilidade de verificação, em projecção, das relações de pertença ou de inclusão entre os diferentes elementos representados. De facto, quer, ao nível do plano, o problema do traçado de uma recta passando por dois pontos ou o problema da identificação do ponto de concorrência de duas rectas, quer, no espaço, todos os problemas de determinação de intersecções, pressupõem a possibilidade prévia de identificação das condições em que um ponto pertence a uma recta, das

¹ A estes seis problemas elementares de geometria plana e do espaço acrescentam-se normalmente os dois seguintes:

Descrever uma circunferência da qual se conheça o plano, o centro e o raio;
Descrever uma superfície esférica da qual se conheça o centro e o raio.

condições em que duas rectas são coplanares e das condições em que um ponto ou uma recta estão contidos num plano. Na verdade, a relação de intersecção consiste numa simples extensão da relação de pertença: A intersecção de duas figuras não é senão o lugar geométrico dos pontos comuns às duas figuras, isto é, que verificam a condição de inclusão simultânea numa e na outra.

Ora, sabe-se, das propriedades da transformação projectiva, que a relação de inclusão é uma *invariante*, a *única* invariante, aliás, que se verifica em qualquer tipo de transformação projectiva². Deste modo, sempre que da projecção de uma figura geométrica-objecto, numa superfície, resulte uma imagem projecional *determinada*, essa imagem deverá necessariamente conter as imagens projectionais de todas e quaisquer figuras geométricas que pertençam, no espaço, à figura-objecto. *É no reconhecimento desta propriedade que se fundamenta afinal a regra mais imediata de relacionamento gráfico entre as representações projectionais dos elementos geométricos e que reside, subsequentemente, a chave da solução dos problemas elementares de geometria do espaço acima enunciados*, o que nos permite concluir que, em rigor, no contexto da Geometria Descritiva, a resolução dos problemas gráficos básicos se processa em dois diferentes níveis. O primeiro, relacionado com a verificação das relações de inclusão e de intersecção *entre figuras expressamente representadas por imagens projectionais* (o plano projectante, a recta e o ponto), *em que esta relação se encontra à partida graficamente determinada*, e o segundo, relacionado com a determinação das relações de inclusão e de intersecção entre pontos, rectas e planos em posições quaisquer, *não representáveis por imagens projectionais*.

Estes dois níveis de problemas apresentam diferentes graus de complexidade e encontram-se numa relação óbvia de dependência: A resolução dos problemas do segundo nível depende sempre da possibilidade de resolução prévia dos problemas do primeiro.

Especificando, encontramos a seguinte sequência de problemas gráficos básicos, cada um relacionável com uma determinada proposição projectiva ou descritiva que estabelece a regra para a sua resolução:

1^o – Representar uma recta (ou um ponto) de um plano projectante;

(Sempre que uma projecção de uma recta (ou de um ponto) coincida com uma (ou esteja contida numa) representação projecional expressa de um plano projectante, a recta (ou o ponto) pertence ao plano, uma vez que todas as figuras contidas no plano se projectam sobre a sua imagem. Esta relação fica inequivocamente determinada numa única projecção, uma vez que qualquer imagem projecional de um plano projectante é suficiente para o definir no espaço a três dimensões).

.....
(Continua)

² Existem outras invariantes, como por exemplo as das tangentes às cónicas, mas que não dizem exclusivamente respeito aos elementos geométricos, ponto, recta e plano.