LA THEORIE ET LA PRATIQUE DE LA COUPE DES PIERRES ET DES BOIS,

POUR LA CONSTRUCTION DES VOUTES

Et autres Parties des Bâtimens Civils & Militaires,

OU

TRAITÉ DE STEREOTOMIE A L'USAGE DE L'ARCHITECTURE,

Par M. FREZIER, Chevalier de l'Ordre Militaire de Saint Louis, Ingenieur ordinaire du Roy en Chef à Landau.

TOME PREMIER.

A STRASBOURG,

Chez JEAN DANIEL DOULSSEKER le Fils, Marchand Libraire à l'entrée de la Ruë dite Flader-Gaſs,

A PARIS,

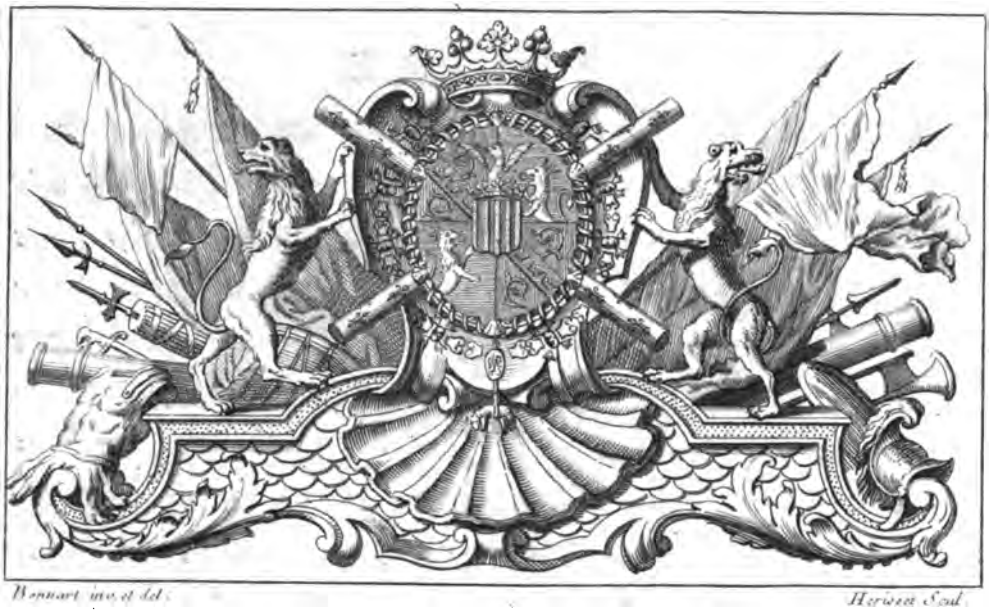
Chez L. H. GUERIN l'aîné, Ruë St. Jacques, vis-à-vis St. Yves.

M DCC XXXVII.

Digitized by Google

Digitized by Google

Hist of Sci
Firet
12-6-39
39808
3 vols



Bonnart inv. et del. Herisset Scul.

A MONSEIGNEUR
LE MARQUIS D'ASFELD,
MARECHAL DE FRANCE,

CHEVALIER DE L'ORDRE DE LA TOISON D'OR, Commandeur de l'Ordre de Saint Louis, Gouverneur des Ville & Citadelle de Strasbourg, Directeur General des Fortifications de France, General des Armées du Roy.

MONSEIGNEUR,

J'ai l'honneur de VOUS préſenter le Fruit du loiſir que m'ont laiſſé les Saiſons, qui interrompent les Tra-

1-13-40 HCM

Digitized by Google

vaux des Fortifications. Occupé pendant les Etés à exécuter Vos ordres pour augmenter les Forces d'une Place des plus conſiderables de la Frontiere, j'ai paſſé quelques parties des Hyvers, depuis mon ſecond retour de l'Amerique, à mediter ſur les moyens de faire avec juſteſſe, ſolidité & propreté toutes ſortes de Voûtes, de quelque figure qu'on les puiſſe propoſer, ayant reconnu par ma propre experience, que cette partie de l'Architecture, qui eſt ſans contredit la plus difficile, étoit ſouvent neceſſaire à un Ingenieur. Et comme les Auteurs qui ont traité de cette matiere, ſe ſont bornez à dreſſer des Ouvriers dans une routine quelquefois peu exacte, je me ſuis propoſé d'inſtruire ceux qui les conduiſent, des raiſons Geometriques des Traits *qu'on y met en œuvre, perſuadé qu'il convient à un Officier d'avoir autant de ſuperiorité de Science, que d'autorité ſur les Artiſans qu'il employe dans les Travaux du Roy. La Theorie eſt l'ame des Arts auſſi-bien que des Sciences; Le Grand Prince qui Vous a prépoſé aux Fortifications du Royaume, a fait voir qu'Il étoit convaincu de cette verité, lorſqu'il vous a choiſi préferablement aux Officiers du Corps des Ingenieurs pour les diriger. Il ſçavoit qu'une profonde intelligence dans l'Art de la Guerre étoit la premiere Theorie des Fortifications; ſur ce principe, Il a jugé que perſonne ne pouvoit mieux que Vous décider de*

Digitized by Google

leur convenance, & de leur poſition ſuivant la ſituation des Lieux, & que les Ingenieurs ne devoient agir qu'en conſequence de cette premiere détermination.

Il avoit connu par Lui-même en Eſpagne votre Capacité dans l'Art d'attaquer les Places fortes, par les Sieges que Vous y avez faits ſous ſes yeux, & que vous avez heureuſement conduit à une prompte fin, comme à Caſtel-David & à Portalegre, que vous avez emporté l'Epée à la main; à Xativa & à Denia, que vous avez emporté d'Aſſaut, malgré la réſiſtance la plus opiniâtre qu'on ait fait depuis pluſieurs ſiecles; de même qu'à Alcira, & aux Ville & Château d'Alicante, ſans compter le Siege de Barcelone, où Vous avez eu beaucoup de part. Dans toutes ces occaſions ce Prince avoit reconnu le fruit des Leçons des grands Maîtres, que Vous aviez pris dans les Sieges, où vous avez ſervi avec diſtinction dès votre Jeuneſſe, comme à Luxembourg, à Mons, à Namur, à Traerbach, à Briſack, aux deux Sieges de Landau & à Fribourg. Il n'étoit pas moins ſûr de votre capacité dans l'Art de deffendre; informé que dans la vigoureuſe réſiſtance que fit Monſieur votre Frere à Bonn, dans laquelle il a glorieuſement terminé ſa vie, vous ne repouſſâtes pas ſeulement les Ennemis à l'attaque du chemin couvert, mais vous les chaſſâtes d'une Demie-Lune dont ils s'étoient emparez. Il ſçavoit

Digitized by Google

encore combien Vous vous étiez distingué à la Deffense de Namur dans plusieurs Actions qui avoient roulé sur Vous, & particulierement aux deux assauts du Château, où vous repoussâtes les Ennemis qui y étoient entrez & s'étoient emparez d'un Corps de Cazernes.

Enfin, après avoir acquis par une brillante experience la connoissance de l'usage des Fortifications, Vous avez laissé à l'Espagne un precieux Monument de votre Science dans l'Art de fortifier, par les beaux Ouvrages que vous avez fait faire à Tortose, qui ont rendu cette Place, de l'aveu même de Sa Majesté Catholique, une des plus fortes de son Royaume; c'est ainsi qu'il s'en est expliqué dans l'énumeration des Services importans que vous lui avez rendus.

Ce seroit icy le lieu de parler de la Conquête du Royaume de Mayorque, que Vous lui avez soumis en un mois de tems, & d'entrer dans le détail des Actions Héroïques qui vous ont merité les marques de sa reconnoissance, par les honneurs de la Toison d'Or, & d'autres Dignités Militaires en France; mais arrêté par votre ordre qui m'impose silence, & par la brieveté d'une Epitre, je me vois forcé avec douleur d'abandonner cette ample & belle matiere aux Historiens de la vie de Philippe Quint & de Louis XIV, qui profiteront de ce qui auroit pû rendre

Digitized by Google

la lecture de cette Epitre intereſſante à toute ſorte de Lecteurs.

Les curieux du Blazon y auroient trouvé pourquoi on voit les Armes du Royaume de Valence au milieu de votre Ecuſſon. Les Gens d'une vertu épurée y auroient vû avec plaiſir des Traits d'une Grandeur d'ame à l'épreuve de tout interrêt, même du plus legitime. Les Politiques y auroient vû l'art de ramener les Rebelles à l'obéïſſance de leur Souverain, & de concilier dans le Gouvernement la crainte & l'affection des Sujets par une exacte obſervance de la Juſtice & des Loix, qui peuvent contribuer à la tranquillité publique, en menageant le Sang des Peuples, & en préferant les voyes de la Clémence à la gloire des Actions d'éclat. Les Grands Capitaines y auroient vû des moyens ingenieux de prévenir une Déroute. Les Generaux y auroient remarqué ceux de faire ſubſiſter les Armées, & de trouver dans des Païs peu abondans les Munitions & les Proviſions des Sieges, ſans leſquelles les Entrepriſes les mieux concertées ſont ſujettes à échoüer. En effet après que l'Armée Navale des Ennemis eut enlevé notre Convoy, ſi M. le Duc d'Orleans n'avoit pas trouvé les reſſources de Vivres & de Munitions de Guerre, que Vous aviez raſſemblé ſans ordre par un excès de prévoyance, & la nombreuſe Artillerie que vous aviez fait fondre de votre

Digitized by Google

propre mouvement, auroit-il pû faire le Siege de Tortoſe, & fermer aux Ennemis, par la priſe de cette Place, l'entrée des Royaumes de Valence & de Murcie, qui leur étoit ouverte par la perte de la Bataille de Zaragoça? Enfin les bons Critiques de l'Hiſtoire s'y ſeroient confirmez dans la juſte défiance où l'on doit être ſur ce qu'avancent de certains Ecrivains, qui hazardent ſur de frivoles récits des Faits, dont la fauſſeté décrédite l'Hiſtoire; telle eſt dans la Préface d'un Commentaire celui de la Bataille d'Almanza. Sans citer ici les Témoins oculaires, qui ſont en auſſi grand nombre que les hommes, qui ont eu part à cette action, j'aurois pû produire un témoignage, qui vaut ſeul tous ceux qu'on peut raſſembler de l'une & de l'autre Armée; c'eſt celui du Roy d'Eſpagne, qui bien informé de la part que Vous avez au gain de cette Bataille, s'explique en ces termes ſur la maniere dont vous y avez contribué, dans les Lettres-Patentes, dont Sa Majeſté Vous a gratifié le 30. *Avril* 1715. *datées de* Buen-Retiro. „ *L'Armée des Ennemis* (c'eſt S. M. C. qui „ parle) *ayant attaqué celle des deux Couronnes à Al-* „ *manza le* 25. *Avril* 1707. *& fait plier la droite* „ *de notre premiere Ligne par le grand feu de leur Infan-* „ *terie ſoutenu de leur Cavalerie, Vous, qui comman-* „ *diez la droite de la ſeconde Ligne, les chargeâtes avec* „ *tant de valeur que vous mîtes leur gauche en déroute,*

Digitized by Google

„ *d'où vous-marchâtes contre leur droite, & malgré* „ *la bonne contenance avec laquelle elle ſe retiroit, vous* „ *les chargeâtes ſi à propos que vous l'obligeâtes de pren-* „ *dre la fuite,* ce qui acheva le gain de la Bataille. „ *Le jour ſuivant vous leur fites priſonniers de Guerre cinq Bataillons Anglois, cinq Hollandois & trois Portugais, &c. Si l'on compare ce récit d'un Roy à celui d'un Particulier, qui a écrit ſur de mauvais Mémoires, on verra combien on doit être en garde contre les ſurpriſes dans l'étude de l'Hiſtoire. Je ſuis charmé,* MONSEIGNEUR, *d'avoir trouvé l'occaſion de mettre en évidence la vérité de ce Fait; mais je le ſerois beaucoup plus ſi Vous me permettiez de donner place ici à un grand nombre d'autres de pareille nature, qui ont été juſtement récompenſez de la plus haute Dignité de l'Etat Militaire; ajoûtons enfin qu'ils ont été glorieuſement terminez par la priſe de Philisbourg, que vous avez acquis à la France, malgré les obſtacles de la Nature & de l'Art, en préſence des Forces de l'Empire, raſſemblées ſous la conduite d'un des plus Grands Généraux de notre ſiecle, Vous ouvrant une route au travers du Feu & des Eaux d'un Fleuve débordé. J'eſpere,* MONSEIGNEUR, *que Vous me pardonnerez d'avoir paſſé les bornes étroites que vous aviez préſcrites à cette Epitre, quand vous ferez attention que ce ſeroit trop mortifier l'amour propre d'un Subalterne,*

Digitized by Google

que de l'empêcher de publier la Gloire de ſon Commandant; il ſemble qu'il en réjaillit un peu ſur lui, & qu'il eſt honnorable d'être ſous les Ordres d'un General qui commande par de bons Titres; il m'en reſte encore aſſez à dire pour me croire en droit de me plaindre d'être obligé de paſſer ſous ſilence des Actions dignes de l'Ancienne Vertu Romaine; ce n'eſt pas ſans peine que je ſacrifie le plaiſir de les raconter au devoir de l'obéïſſance. Je Vous prie du moins, MONSEIGNEUR, de m'en tenir compte, comme d'une marque de ma parfaite ſoumiſſion à vos Ordres, & du profond reſpect avec lequel je ſuis,

MONSEIGNEUR,

Votre très-humble & très-obéïſſant Serviteur
FREZIER.

Digitized by Google

AVERTISSEMENT.

Avant que de commencer à lire, il faut corriger à la marge, avec la plume ou du crayon, les fautes marquées ci-après dans l'*Errata*; parce que les unes rendent le discours inintelligible, & les autres le raisonnement faux; il en est de même des additions à faire pour remplacer les omissions.

Il est des fautes qu'on n'y a pas compris, parce que le Lecteur peut les corriger de soi-même, comme sont celles de la suite des chiffres, des cottes des Problêmes, Chapitres, &c. aux pages 151, 156, 159, 174, 191, 194, 196, 319, 323.

Je prie le Lecteur de supléer à celles qui auront pû m'échaper, tant dans l'impression que dans la gravure des Planches, en consideration de ce que l'impression a été faite loin de moi, & que les occupations de mon état, qui sont continuelles pendant l'Eté, m'ont empêché de revoir avec attention l'Imprimé tel qu'il est.

Digitized by Google

ERRATA.

Pages.	*Lignes.*	*Fautes.*	*Corrections.*
IX	32	autres	Auteurs
3	37	paſſent	poſent
7	18	Stereometrie	Stereotomie
20	34	le diametre	le demi diametre
24	1	un axe	un angle
31	*en marge*	PLANCHE 2	PLANCHE 1
39	34	Ellipſe	Egliſe
42	30	celles	elles
49	32	Ellipſe	Ellipſimbre
53	25	d'Ellipſe	d'Egliſe
60	8	comme	par exemple
89	21	QUELQUE	QUELLE que
90	19	quelques	quels que
212	11	leſquels	ſur leſquels
ibid.	27	*a* B	*a* P
223	8	obligantes	obligeantes
228	20	*eſt connuë*, ajoutez	*étant donnez*,
272	4	deſſein	diſcours
282	8	coin	coins
296	35	égale	égal
390	20	d'arc	d'arcs
393	1 & 2	d'allignement	d'alignement
394	25	*cherche*	CERCHE
400	31	arc	axe
401	22	*levigare*	*levigare*

OMISSIONS.

Page 21 en marge vis-à-vis la ligne 6. ajoutez, *Voyez le Problême à la page* 223

Page 213 ligne 3. après X x (*ajoutez*) au point G, qui repréſente le centre de la Sphère, duquel & avec le même rayon on décrira des arcs, qui couperont la ligne X x.

TRANSPOSITION.

La Page 377 devoit commencer par la Démonſtration qui a été miſe à la page 286, ligne 31.

DISCOURS

Digitized by Google

DISCOURS PRELIMINAIRES,

PREMIEREMENT,

SUR L'UTILITÉ DE LA THEORIE Dans les Arts relatifs à l'Architecture.

JE me propoſe dans cet Ouvrage de donner la Theorie des Sections des Corps, autant qu'elle eſt neceſſaire à la démonſtration de l'uſage qu'on en peut faire en Architecture pour la conſtruction des Voutes, & la *COUPE DES PIERRES ET DES BOIS*, ce que perſonne n'avoit encore fait ; & parce que je prends une route differente de ceux qui ont traité de cette Matiere, qui ſe ſont tellement bornez à la Pratique, qu'ils ſemblent mépriſer la Theorie, ou l'ignorer : je vais tâcher d'en établir l'utilité.

VITRUVE, qu'on peut citer pour un bon Connoiſſeur dans les Arts, parce qu'il eſt reconnu pour un fameux Architecte, & qu'il étoit de plus Ingenieur d'Auguſte, y diſtinguoit deux choſes, (*) ſçavoir, *l'Ouvrage* &

(*) *Ex duabus rebus ſingulàs Artes eſſe compoſitas, ex opere & ejus* RATIOCINATIONE: *ex his autem unum proprium eſſe eorum, qui ſingulis rebus ſunt exercitati id eſt operis effectus ; alterum commune cum omnibus Doctis*, id eſt *RATIOCINATIO.*

le *Raiſonnement* ; l'une, dit-il, eſt l'affaire des Gens qui en ont fait apprentiſſage ; l'autre eſt du reſſort des Sçavans. Tout le monde ne penſe pas auſſi juſte que lui ; une grande partie des hommes connoiſſent ſi peu la nature des Arts, qu'ils croyent que l'on ne peut s'y rendre habile que par l'experience ; ils regardent la Theorie comme une occupation vaine, qui n'a pour objet que des chimeres, dont les Arts ne retirent aucun avantage. (*) On a vû, diſent-ils, de Grands Hommes dans l'Architecture Civile, & même dans la Militaire, qui ſe ſont diſtinguez par leurs Ouvrages ſans être Geometres ni Algebriſtes, donc on peut ſe paſſer de ces Sciences pour devenir habile dans les Arts.

Galli ſuper Umbilicum erant nudi. Tite-Live l. 22. c. 46.

Pour répondre à ce faux raiſonnement, que bien des gens tâchent de faire valoir par l'intérêt qu'ils ont de l'établir, je dirai qu'abſolument parlant, à la réſerve de la nourriture, les hommes peuvent ſe paſſer de tout, même d'habits dans les Païs froids, témoins les anciens Gaulois nos Ancêtres, & pluſieurs Nations de Sauvages ; mais puiſque la Nature nous a deſtinez au travail, & que moyennant un peu d'application elle nous donne l'induſtrie d'ajouter une infinité d'agrémens & de commoditez aux Ouvrages de ceux qui nous ont précedé, & de concilier la beauté & la ſolidité des Edifices, qui nous garantiſſent des injures de l'air & des inſultes de nos ennemis, il ſemble que ce n'eſt pas agir en hommes raiſonnables, que d'attendre que l'experience nous faſſe ſentir nos beſoins ; mais que nous devons réflechir aux moyens de pourvoir à ceux, qui peuvent nous arriver dans l'exécution de nos deſſeins, & de combiner ces moyens de tant de manieres differentes, que nous choiſiſſions toujours les plus ſûrs, les plus courts & les plus faciles, ce qui eſt réſervé à la ſeule Theorie.

Qu'on me permette ici une comparaiſon pour rendre cette verité plus ſenſible ; avant qu'on eût formé les Grands Chemins par des Chauſſées droites, ſolides, & de largeur commode, on communiquoit comme aujourd'hui d'une Ville à une autre, mais on demeuroit bien plus long-tems en chemin, on éprouvoit une plus longue fatigue, on étoit ſujet à demeurer embourbé, & ſouvent à s'égarer.

Avant qu'on eût conſulté la Geometrie & la Mechanique en Architecture, on faiſoit des Voutes des mêmes Materiaux qu'aujourd'hui ; mais on ne pouvoit s'aſſûrer de l'équilibre de l'effort de leur *Pouſſée*, & de la réſiſtance des *Piédroits* qu'il tend à renverſer ; de ſorte que ne ſçachant garder un milieu convenable entre le trop & le trop peu de leur épaiſ-

(*) Voyez les *Penſées critiques ſur les Mathematiques* par Cartaud, qui oſe avancer que les Mathematiques ont peu contribué à la perfection des beaux Arts. *A Paris 1734.*

Digitized by Google

feur, on étoit ſujet à y conſommer une dépenſe ſuperflue en materiaux, ou à les voir s'écrouler par trop de foibleſſe : l'experience nous en fournit encore aſſez ſouvent des exemples, à la honte de ceux qui ſe mêlent de conſtruction ſans connoiſſance de Geometrie ni de Mechanique, & au grand dommage de celui qui fait bâtir. On faiſoit auſſi des Ceintres de differentes eſpeces, Circulaires, Surbaiſſez, Surhauſſez & Rampans; mais on ignoroit quelle étoit la Courbe, qui leur convenoit le mieux dans les circonſtances des Termes donnez. On rencontroit dans l'exécution des difficultez qu'on n'avoit pas prévû, & qu'on ne ſçavoit réſoudre que comme le nœud Gordien, en démoliſſant & recoupant pluſieurs fois les parties de Voutes qui ne quadroient pas, juſqu'à ce que l'œil fût moins offenſé de leur difformité, d'où il réſultoit beaucoup de perte de tems & de Materiaux; & parce que le tâtonnement n'a de ſuccès que par hazard, de tels ouvrages duroient peu, coûtoient beaucoup de façon, & ſatisfaiſoient rarement la vûë & l'eſprit des Connoiſſeurs.

D'ou vient donc que les Praticiens mépriſent la Theorie, & la comptent pour rien au prix de l'experience qu'ils ne ceſſent de vanter ? j'en trouve deux raiſons : la premiere, c'eſt pour détourner la honte qu'ils ont de ne pouvoir rendre d'autre raiſon de leurs Ouvrages, que celle de l'imitation de ceux qui paſſent pour bons, & de la convenance qu'ils ont remarqué dans la pratique, ſentant bien qu'ils ne ſont pas aſſez éclairez pour remonter à la cauſe. Cette raiſon eſt tirée de la vanité du cœur humain; l'homme pour s'élever ſur ſes égaux affecte de mépriſer les choſes qui lui manquent, & cherche à faire parade du peu qu'il poſſede; de-là vient, qu'on ſe mépriſe réciproquement dans le monde, & que la ſcience, dont la beauté & l'utilité ſont peu connuës de la multitude, n'eſt pas élevée au rang qu'elle doit tenir audeſſus de la ſeule pratique; l'inattention & ſouvent le défaut de lumiere des gens en place favoriſent les faux jugemens que l'on porte ſur le mérite de la routine; puiſqu'on voit, que la peine de travailler à acquerir des connoiſſances utiles aux beſoins de la vie, ou à l'ornement de l'eſprit, eſt ordinairement très-inutile pour la fortune; c'en ſeroit aſſez pour énerver toute émulation, arrêter les progrès des Arts, & rappeller la barbarie des Siecles d'ignorance, ſi la Nature n'avoit pourvû à l'aveugle injuſtice des hommes. Elle a attaché à cette peine la récompenſe d'une ſatisfaction intérieure, (*) qui eſt ſeule capable de la ſoutenir contre les dédains d'une ſtupide indifference, ou d'une préſomptueuſe ignorance. En effet ſans les attraits des Sciences, & un certain amour de la Vertu, qu'eſt-ce qui pourroit engager un homme ſenſé à conſacrer ſes veilles ſans intérêt, au ſeul bien du Public, qui fourmille de gens plus diſpoſez à la critique qu'à la reconnoiſſance, à

(*) *Virtutum præmium in ipſis eſt, & rectè factis merces eſt facisſe.*

Digitized by Google

relever les moindres fautes, qu'à leur faire grace en faveur de ce qui doit plus mériter leur attention & leur applaudiſſement ?

La ſeconde raiſon de ceux qui préferent la ſeule Pratique à la Theorie, peut être ſincerement déduite du fond de leur ignorance, parce qu'ils lui attribuent les effets de la Theorie qui leur eſt inconnuë. Daviler, fameux Auteur en Architecture, nous en fournit une preuve, & un exemple comique à la page 237. *La ſeverité des Régles de Geometrie*, dit-il, *eſt inferieure à la Pratique, comme LA METHODE DES CHERCHES RALONGE'ES VAUT MIEUX QUE LES FIGURES GEOMETRIQUES, d'autant qu'en cet Art la Pratique eſt préferable à la Theorie* : On ne peut s'empêcher de rire d'une pareille déciſion, qui montre évidemment que le Juge n'entend pas l'état de la queſtion, & qu'il veut fronder ce qu'il ne connoît pas ; en effet, s'il avoit ſçû que la *Cherche ralongée* tirée du plein ceintre, du ſurhauſſé ou du ſurbaiſſé, étoit une Ellipſe très Geometrique, il n'auroit pas tenu ce langage ridicule. La plûpart des gens ſans Theorie parlent & penſent comme lui; parce que faute de principes ils n'arrivent qu'avec de grands efforts & une longue ſuite de pratique à quelques foibles connoiſſances des choſes, qui ſont les plus aiſées à ceux qui ont de la Theorie ; de-là vient qu'ils font grand cas des moindres, & ſe croyent de grands hommes pour s'être frayé quelques routes un peu aiſées dans la Pratique, quoique ces prétendus Inventeurs ne puiſſent s'aſſûrer de la juſteſſe ni de la réüſſite de leurs operations tâtonnées, dont il ne voyent ni la difference des cas, ni la preuve ; de ſorte qu'ils croyent ſouvent avoir bien réüſſi, lors même qu'ils n'ont fait qu'approcher de la verité, & qu'ils n'ont pas pris la voye la plus ſûre & la plus courte ; cependant parce qu'ils ne connoiſſent pas d'autre moyen pour y parvenir que l'experience, ils ne penſent pas qu'il y ait de meilleur maître, appuyez ſur le proverbe qu'ils citent à tout propos, *Experientia rerum magiſtra.*

Je ne prétends pas ici diminuer le mérite de l'experience, j'en connois la neceſſité en pluſieurs choſes ; par exemple, en Phyſique elle fait appercevoir des objets & des effets ſur leſquels on n'étoit pas prévenu par le raiſonnement ; perſonne ne doute qu'elle ne ſoit indiſpenſablement neceſſaire dans les Arts qui dépendent de l'habitude, & dans ceux qui ſont Problématiques, comme la Guerre ; mais elle l'eſt beaucoup moins dans ceux qui émanent des Sciences, c'eſt un guide équivoque, comme le bâton d'un aveugle, qui ne lui ſert à ſe conduire que très-imparfaitement, en ce qu'il ne lui indique pas ſi bien les objets qu'il ne puiſſe prendre l'un pour l'autre, & ſe précipiter ſi le cas y arrive.

Cette diſtinction indique ce que l'on doit penſer ſur la Science

Digitized by Google

& l'Experience neceſſaire à un Ingenieur; puiſque ſon Etat tient à la Guerre & aux Arts dépendans des Mathematiques; ce ſeroit mal décider contre la Theorie, que de citer des Gens élevez aux dignitez par les Actions militaires, quoique bornez à une ſimple routine de conſtruction; les récompenſes dûës à la Valeur n'annoncent qu'une partie du mérite d'un Homme de guerre, laquelle ne ſuffit pas pour un Ingenieur. Ceux de l'Antiquité étoient ſçavans; leurs merveilleuſes inventions dans les Sieges nous le prouvent aſſez; & quoique depuis la décadence des Romains les Sciences ayent en quelque façon fait divorce avec la Guerre (car il n'eſt plus de ces hommes propres à être ſur le Trône de la Juſtice, & à la Tête des Armées) cette ſéparation n'aura jamais lieu à l'égard des Ingenieurs; c'eſt chez eux que doit ſubſiſter cet ancien accord de la Science & de la Guerre; s'ils ont beſoin de la bravoure, du bon ſens & de l'experience d'un Guerrier, ils ont encore beſoin de la ſcience d'un Mathematicien. Sans la Geometrie, la Mechanique & l'Hidraulique de quoi ſont-ils capables dans la conſtruction des Fortereſſes & Places de guerre, que d'imiter ce qu'ils ont vû, & copier ſouvent des fautes? les traces de l'aveugle experience ne ſont pas rares, il n'y a gueres de Ville où l'on n'en reconnoiſſe quelques-unes.

Neque enim Ingenium ſine Diſciplina, aut Diſciplina ſine Ingenio perfectum artificium poteſt efficere. Vitr.

J'AVANCERAI de plus, que les Sciences neceſſaires à la Conſtruction ne ſont pas inutiles à la Guerre; elles ouvrent l'eſprit, fourniſſent des moyens induſtrieux pour les manœuvres & les ouvrages neceſſaires à l'Attaque & à la Deffenſe des Places, que la ſeule valeur ne ſçauroit exécuter ſans ce ſecours. ARCHIMEDE étoit un Mathematicien de pure ſpéculation, qui n'auroit pas daigné deſcendre à la Pratique, s'il n'avoit été engagé par les ſollicitations du Roy HIERON ſon Parent, de faire uſage de ſes connoiſſances pour l'invention des Machines de guerre; cependant ſes coups d'eſſai furent ſi bien des coups de maître, qu'au Siege de Syracuſe il dérouta, par la force de la Theorie, toute l'experience de ces Ingenieurs Romains, qui avoient fait valoir avec de grands ſuccès leur habilité dans la conquête des Places les plus fortes; ſes nouvelles Machines eurent tant d'effet, qu'il intimida & rebuta l'Armée de Marcellus, au point, que ce General renonça aux Approches & aux Aſſauts, forcé de ſe réduire à chercher par la longueur du Siege, ce qu'il ne pouvoit obtenir par la force contre l'ingenieuſe réſiſtance que lui faiſoit Archimede. On peut lui en attribuer tout l'honneur, car Plutarque dit, qu'il étoit l'unique Auteur de la deffenſe, que les Syracuſains n'étoient que comme le corps & les membres, dont lui ſeul étoit l'ame, qui mettoit tout en mouvement, ſans qu'on fit uſage d'autres Armes que des ſiennes; cependant ce grand homme, ajoute-t'il, ne ſe

Digitized by Google

glorifioit point de ces heureuſes nouveautez, il ne les regardoit que comme des *Jeux de la Geometrie*, qu'il eſtimoit ſi peu en comparaiſon de la Theorie, qu'il crut ſe faire plus d'honneur d'en laiſſer des Ecrits, que la deſcription de ces merveilleuſes Machines, dont l'invention & l'uſage lui avoit acquis tant de gloire & un ſi grand Nom, qu'il paſſoit pour un homme *doüé non de Science humaine, mais de Sageſſe toute Divine.* Diſons-le ſans déguiſer, la ſeule experience ne fait que de ſerviles imitateurs, qui étant embaraſſez dans les moindres choſes, & n'ayant de reſſource que dans le recüeil de leur Porte-feüilles, donnent comme des aveugles dans le faux pour les projets, l'exécution & le toiſé.

Plutarque *in vita Marcelli.*

Satis abundè is videtur fecisse, qui ex singulis Doctrinæ Partes & RATIONES earum mediocriter habet notas, easq. quæ necessariæ sunt ad Architecturam, ut si quid de his rebus & Artib. judicare & probare opus fuerit, ne destituatur vel deficiat. Vitr. l. 1. c. 1.

Je dirai cependant ſans vouloir favoriſer l'ignorance, qu'un Ingenieur doit ſe borner à l'étude de ce qui peut être utile à la Pratique, ſans ſe livrer à de vaines curioſitez, de peur qu'entraîné par l'amorce du plaiſir des Découvertes, plus capables de flatter ſa vanité que de le conduire à une plus grande perfection des Arts, il ne ſoit ſouvent diſtrait & tenté de negliger ſon devoir; il doit ſes premiers ſoins à la ſolidité & à la propreté des Ouvrages dont il eſt chargé, & éviter l'écüeil du mépris, que les hautes Sciences inſpirent, pour des occupations, qui ſont à la portée des eſprits les plus bornez; il lui ſuffit d'être en état d'entendre & de mettre à profit les ouvrages des Sçavans & des Academies des Sciences, qui ont quelque rapport aux Arts neceſſaires à la conſtruction des Places, remettant les études aux hyvers & autres tems de loiſir que nous laiſſe le Service du Roy.

Parmi les connoiſſances qui nous ſont neceſſaires, celle de la Coupe des Pierres, quoiqu'une des plus negligées, n'eſt pas une des moins importantes. J'ai reconnu par ma propre expérience qu'elle étoit auſſi indiſpenſablement neceſſaire à un Ingenieur qu'à un Architecte; parce qu'il peut être envoyé comme moi dans des Colonies éloignées, & même dans des Provinces où l'on manque d'Ouvriers capables d'exécuter certaines parties de Fortifications, où il faut de l'intelligence dans *l'Appareil.* L'épreuve que je venois d'en faire à mon ſecond retour de l'Amerique me fit naître l'idée d'en compoſer un Traité; invité à cette entrepriſe, premierement par l'extréme rareté des Livres ſur cette matiere, ſecondement par la maniere imparfaite dont elle a été traitée juſqu'à préſent. J'en dreſſois le projet, lorſque j'appris qu'un Architecte en alloit publier un, en effet, quelques mois après, celui de M. de La Rue parut; mais comme il n'eſt fait, de même que celui du P. Deran (qui étoit pour ainſi dire le ſeul) que pour conduire la main ſans éclairer l'eſprit, je reconnus qu'il n'étoit pas aſſez Méthodique pour remplir l'attente du public, qui ſouhaitoit depuis long-tems un Ouvrage plus Geometrique; j'en fus convaincu lorſque les perſon-

Digitized by Google

nes à qui j'avois communiqué mon Plan, m'engagerent à y travailler & à le ſuivre ; parce que la difference en eſt ſi grande, qu'on peut dire, que ce n'eſt pas multiplier les mêmes eſpeces de Livres. Ceux que je viens de citer ſont faits pour les Ouvriers, & celui-ci pour les gens qui les doivent conduire, comme les Ingenieurs & les Architectes, que l'on doit ſuppoſer initiez dans la Geometrie.

Je ſçai que la routine & une certaine Geometrie naturelle tiennent lieu de ſcience aux Appareilleurs dans les cas ordinaires ; mais j'ai éprouvé qu'elle leur devenoit inutile dans ceux qui ne ſont pas énoncez dans les Livres, comme je le ferai remarquer lorſqu'il en ſera queſtion, & qu'ils ſeroient arrêtez tout court, ſi l'Ingenieur n'étoit en état d'y ſuppléer. Il doit donc prévenir la honteuſe neceſſité de ſe livrer à l'ignorance des plus experimentez, qui n'en viennent à bout qu'à force de tâtonner & démolir pluſieurs fois, finiſſant enfin par quelque difformité ou défaut de ſolidité. Ces cas ne ſont pas ſi rares qu'on ſe l'imagine, puiſqu'ils me ſont arrivez ; il n'eſt pas non plus extraordinaire d'en trouver des veſtiges, non ſeulement dans les racordemens des vieux ouvrages avec des nouveaux, mais encore dans ceux qui ſont faits de ſuite.

Je ſuppoſerai ſi l'on veut, que les Entrepreneurs fourniſſent de bons Apparreilleurs ; ne convient-il pas à la dignité d'Ingenieur d'être en état de connoître & d'examiner ce qu'ils font, pour ordonner & décider de la meilleure conſtruction, & ne pas ſouffrir des fautes qu'ils peuvent faire malicieuſement, ou pour faire ſervir des pierres de rebut, ou pour s'épargner un peu plus de ſoin ? D'ailleurs cette matiere eſt aſſez intéreſſante pour mériter l'attention d'une juſte curioſité ; on en pourra juger par ce qui ſuit.

SECOND DISCOURS.

Expoſition & Diviſion du Sujet dont il s'agit.

L'IDE'E que l'on a attaché au Nom de la *Coupe des Pierres*, n'eſt pas ce qui ſe préſente d'abord à l'eſprit ; ce mot ne ſignifie pas préciſément l'ouvrage de l'Artiſan qui taille la Pierre, mais la Science du Mathematicien, qui le conduit dans le deſſein qu'il a de former une Voute, ou un Corps d'une certaine figure par l'aſſemblage de pluſieurs petites parties ; il faut en effet plus d'induſtrie qu'on ne penſe pour qu'elles ſoient faites de façon, que, quoique d'inégales

Digitized by Google

figures & grandeurs, elles concourrent chacune en particulier à former exactement une ſurface Réguliere ou régulierement Irréguliere, & qu'elles ſoient diſpoſées de maniere qu'elles ſe ſoutiennent en l'air, en s'appuyant réciproquement les unes ſur les autres, ſans autre liaiſon que celle de leur propre péſanteur; car les liaiſons de mortier ou de ciment doivent toujours être comptées pour rien. Par où l'on voit que cette Science tient ſes principes, premierement de la Geometrie, pour la connoiſſance des Lignes & Surfaces courbes & droites, & les Corps ſolides, qui doivent être diviſez.

Secondement de la Mechanique & de la Statique, pour mettre l'équilibre entre les portions des Solides, qui compoſent les Voutes, enſorte qu'ils ſe ſoutiennent mutuellement ſur les appuis qu'on leur fixe.

Notre deſſein n'eſt pas ici de conſiderer les Voutes comme un amas de corps péſans, qui ſont differens efforts les uns ſur les autres, cette Theorie quoique très-curieuſe & très-utile, peut être réduite pour la Pratique au petit nombre de propoſitions démontrées par Mrs. de la Hire, Parent, Couplet & Belidor, touchant la pouſſée des Voutes, à quoi l'on peut ajouter quelques obſervations ſur les Edifices qui ſubſiſtent depuis long-tems, quoiqu'un peu hors des régles du calcul, ſoit par la bonne qualité des Materiaux qui ſont corps, lorſqu'on leur donne le tems de ſe lier, ſoit par la differente péſanteur de ceux des Voutes & de leur Piédroits, à quoi il faut avoir égard dans les calculs; car ſi l'un eſt d'une pierre légere & l'autre plus péſante, la Pouſſée augmente ou diminuë à l'égard des Piédroits.

Nous ne conſiderons donc ici la Coupe des Pierres, que comme rélative à la Geometrie, ſuppoſant ſeulement qu'un Corps Cônique, Piramidal, ou fait en Coin, ne peut ſe faire un paſſage au-travers d'un trou, qui n'eſt pas ſi grand à ſon petit orifice que la baſe du corps qu'on y introduit. Cela ſuppoſé cette ſcience ſe réduira:

1.° A connoître les Lignes courbes formées par la diviſion des Solides, Concaves & Convexes coupez par des Surfaces planes, ou par des Surfaces courbes; c'eſt ce que l'on pourroit appeller d'un ſeul mot d'origine Grecque la *Tomomorphie*, ou *Figure des Sections*, s'il étoit permis de Forger des mots nouveaux pour éviter les Periphraſes.

2.° A décrire ces Lignes courbes ſur des Surfaces planes, lorſqu'il eſt poſſible & neceſſaire, ou ſur des Surfaces courbes, lorſqu'elles ne peuvent s'adapter ſur un Plan dans toute leur étenduë, ce que l'on pourroit appeller la *Tomographie*, ou *Deſcription des Sections*.

3.° A

Digitized by Google

3.° A trouver des moyens faciles pour repréſenter les Solides & leurs diviſions ſur des Surfaces planes autant qu'il eſt poſſible de le faire; or comme ils ne peuvent y être exprimez que très-imparfaitement, ces moyens ſe réduiſent, 1.° à la projection faite ſur un Plan par des lignes abaiſſées parallelement entr'elles, & perpendiculairement au Plan de la Deſcription, ce qu'on appelle ſur un plan horiſontal *Ichnographie*, & ſur un plan vertical *Ortographie*. 2.° A la deſcription des ſurfaces rangées ſéparément, & dans toute leur étenduë ſur un plan, ce qu'on appelle *Développement*, & qu'on pourroit appeller *Epipedographie*. 3.° A la deſcription des Angles des plans ou ſurfaces quelconques des Solides entr'elles, ce qu'on pourroit appeller la *Goniographie*, *Deſcription des Angles*.

4.° A faire uſage de toutes ces ſortes de repréſentations, pour parvenir à une ſection des corps convenable à la conſtruction des Voutes, en appliquant les modeles des Angles & des Surfaces ſur des Solides, le plus ſouvent faits en Parallelepipedes, pour les tailler & les réduire aux figures requiſes, en abattant les parties excédentes, ce qui eſt proprement l'Art de la *Coupe des Pierres ou des Bois*, c'eſt-à-dire, celui de faire des ſections, qu'on pourroit appeller la *Tomotechnie*.

Ainsi en réſumant ces mots imaginez pour donner une idée nette & ſimple du ſujet dont il s'agit, nous traitons dans la premiere partie de cet Ouvrage de la *Science*, & dans la ſeconde de *l'Art* de la Stereotomie, c'eſt-à-dire, des ſections des Solides.

Nous diviſons la premiere partie en deux Livres, l'un de la *Tomomorphie*, ou figures des Sections, l'autre de la *Tomographie*, ou deſcription des Sections.

La ſeconde auſſi en deux Livres, dont l'un eſt la *Stereographie*, ou deſcription des Solides, & l'autre de la *Tomotechnie*, ou l'Art de faire des Sections.

Tels ſont les Sujets des quatre Livres de cet Ouvrage, ſuivant l'ordre qui nous a paru le plus ſimple & le plus naturel; ce que nous tâcherons d'expliquer & de prouver par des démonſtrations, qui ne ſuppoſent d'autre connoiſſance des parties des Mathematiques, que celle de la Geometrie Elementaire telle qu'elle eſt dans Euclide, & les autres auteurs qui l'ont ſuivi.

Je ſçai qu'aujourd'hui la Geometrie Lineaire n'eſt plus gueres à la mode, & que pour ſe donner un air de Science, il faut faire parade de l'Analyſe; cependant „ l'ancienne Geometrie (dit un Sçavant) „ (*) quoique moins ſublime, moins piquante, même moins agréable,

(*) Fontenelle, Eloge d'Ozanam, *Mém. de l'Acad.*

» *eſt plus indiſpenſablement neceſſaire, & plus ſenſiblement utile* ; c'eſt elle » ſeule qui fournit à la nouvelle des fondemens ſolides, particulierement dans la matiere dont il s'agit, où le calcul Algebrique ne pourroit être utile qu'entre les mains de ceux qui y ſont plus avancez, que ne le ſont ordinairement la plûpart des gens qui ſe mêlent d'Architecture, pour qui nous avons entrepris cet Ouvrage. D'ailleurs elle conduit plus naturellement à la pratique des *Traits* de la Coupe des Solides, & fait ſelon moi plus d'impreſſion dans la mémoire, où les Surfaces & les Lignes ſe gravent plus profondément que les préceptes des formules Algebriques. Les Sçavans n'ont pas beſoin d'un petit Ouvrage, qui ne ſeroit qu'un jeu pour eux; animez par l'ambition de la gloire des découvertes, ils ne s'occupent que des choſes difficiles, ſans s'embarraſſer de leur utilité dans les Arts; ſur quoi M. de FONTENELLE fait cette judicieuſe remarque, que la Geometrie eſt aſſez étenduë, mais qu'elle n'eſt pas aſſez appliquée aux uſages; or puiſqu'ils n'ont pas traité notre matiere, j'ai cru rendre ſervice à ceux qui en ſont curieux, de leur en donner les principes dans un recüeil, compris dans le premier Tome, qui eſt ſuffiſant pour leur épargner la longue, ennuïeuſe & peu inſtructive lecture des grands Volumes in-folio, où elle eſt plus embroüillée par le détail de la Pratique que par le fond de la difficulté; ils en pourront tirer d'eux-mêmes la ſolution des Problêmes, qu'on appelle *les Traits* de la Coupe des Pierres; cependant en faveur de ceux qui aiment les Ouvrages faits, nous y avons ajouté leur conſtruction dans la quatriéme partie, qui contiendra beaucoup plus de matiere en moins de Volume que les Livres du P. DERAN & de M. de la RUE; j'eſpere auſſi que la lecture en ſera plus agréable, parce qu'on y trouvera les Démonſtrations, qui ne ſeront qu'une application des Theorêmes & des Problêmes contenus dans les trois premiers Livres. Au reſte je n'ai recherché d'autre agrément dans la diction que celui du raiſonnement. Dans ce genre d'écrire on doit être plus occupé des choſes que des mots; un Lecteur raiſonnable n'exige que de la netteté, & une diction intelligible; c'eſt à quoi je me ſuis le plus attaché; peut-être n'aurai-je pas toujours réüſſi, dans un long Ouvrage il ſe gliſſe toujours quelque faute; je le prie auſſi de pardonner celles de l'Impreſſion, qui n'a pas été faite ſous mes yeux.

Hiſt. de l'Acad.

Il me reſte à donner quelque choſe à la curioſité que l'on peut avoir touchant l'origine de la Coupe des Pierres, ſur laquelle je vais expoſer mes conjectures pour conclure ce Diſcours Préliminaire.

(o)

Digitized by Google

TROISIEME DISCOURS.

De l'Origine de la Coupe des Pierres, & de l'Uſage qu'on en doit faire.

LE Bois eſt la matiere la plus naturelle & la plus commode pour la conſtruction des Bâtimens neceſſaires à l'habitation des Hommes; mais le déſir commun à tous ceux qui font des Edifices conſiderables, d'en établir la durée pour un long-tems, l'idée que les ouvrages de bois ſont ſujets à tomber en caducité par la pourriture, & la crainte qu'ils ne ſoient ravagez par les incendies, ont fait préferer les Pierres au Bois, où on a pû les lui ſubſtituer. Dans cette vûë on n'a ménagé ni la peine ni les grandes dépenſes pour les arracher des entrailles de la terre, les tranſporter & les tailler.

LA neceſſité a auſſi forcé les hommes dans pluſieurs Contrées d'employer des Pierres au lieu de Bois; parce que la nature leur a fourni plus de Carrieres que de Forêts. Cependant la maniere de bâtir avec des arbres a parû ſi naturelle, qu'on a regardé comme une beauté l'imitation de cette ſtructure. C'eſt de-là que nous eſt venu l'uſage des Colomnes dans l'Architecture antique, & celui des Pilliers ronds & des *Perches* dans la Gotique.

POUR rendre cette imitation plus parfaite, les Anciens faiſoient leurs Colomnes, autant qu'ils pouvoient, d'une ſeule piece, comme ſont les troncs des arbres; ils en uſoient de même pour leurs Architraves, qu'ils ſubſtituoient aux principales poutres que les colomnes devoient porter. Il reſte des veſtiges des Edifices des Egyptiens, des Grecs & des Romains, qui font voir qu'ils y employoient des Pierres d'une grandeur énorme.

DANS les derniers Siecles on a abandonné ces manieres de bâtir trop difficiles par l'immenſité des poids qu'il falloit tranſporter, & par la dépenſe des ſommes extraordinaires qu'ils conſommoient; on leur a préferé l'aſſemblage de pluſieurs Pierres d'une groſſeur plus maniable, & ſans s'écarter du goût des Anciens, on a continué d'imiter les troncs d'arbres par des colomnes; mais on les a fait de *Tambours*, c'eſt-à-dire,

Digitized by Google

de tranches de Cylindre ; on a de même imité les poutres par des Architraves ; mais on les a fait de *Clavaux*, qui ſe ſoutiennent en l'air, comme ſi le tout n'étoit que d'une Piece continuë ; cependant comme cette ſituation eſt trop forcée, & que la pouſſée en eſt grande, les Architectes les ont appuyées par des Arcades, qui leur ont parû plus ſolides, & quoique par cette conſtruction les Colomnes & les Architraves deviennent inutiles, ils les employent toujours pour ornement ; ce goût eſt aujourd'hui le goût dominant dans l'Europe, imité de quelques Monumens de l'Antiquité Romaine, que l'on a repris pour modele après un long intervale d'un goût d'Architecture toute differente.

Les proportions des Colomnes Antiques avoient parû dans les Gaules & d'autres endroits de l'Europe trop maſſives & trop courtes, on leur ſubſtituoit des Groupes de Perches extrémement longues & menuës, & la difficulté d'imiter avec des Pierres la ſituation horiſontale des Poutres avoit fait rejetter les Architraves, à la place deſquelles on faiſoit paſſer d'une Perche à ſon oppoſée, des Arcs de Pierre ſaillans ſous les voutes, qui ſe croiſoient & ſe raſſembloient de differentes façons, imitant en cela les Tonnelles en Berceau, que l'on fait de branches d'arbres pliées en rond d'un côté à l'autre.

Le contour même des Berceaux cylindriques leur ayant parû auſſi trop peſant, c'eſt-à-dire, faiſant trop d'effort pour écarter les murs, les Architectes de ces tems faiſoient leurs Ceintres par deux arcs de cercles égaux, mais de differens centres, dans le deſſein d'en tenir les pentes plus rapides, & par ce moyen diminuer cet effort en les rendant auſſi plus minces & plus légeres : ils les traverſoient encore par d'autres parties de voutes, qui formoient quantité d'angles ſaillans dont les arêtes étoient cachées & fortifiées par des *Nervures d'Ogives*, des *Arcs doubleaux*, des *Tiercerons*, & des *Formerets*, dont ils formoient une infinité de compartimens, aboutiſſans ſouvent à des culs de lampes ſuſpendus en l'air. Toutes ces naiſſances entrelaſſées, & les interſections des Moulures demandoient une grande intelligence dans l'Art de la Coupe des Pierres ; d'où je conjecture, que c'eſt à l'Architecture *Gotique* que nous devons rapporter l'Origine, ou du moins l'Adoleſcence de cet Art Ma raiſon eſt, qu'outre qu'il ne nous reſte pas de Monumens antiques où il ait été mis en uſage, que pour des traits aſſez ſimples, c'eſt que dans l'énumeration que Vitruve fait des connoiſſances neceſſaires à un Architecte, il ne parle point de celle de *la Coupe des Pierres* ; en effet la noble ſimplicité de l'Architecture des Anciens n'exerçoit pas beaucoup le ſçavoir-faire des Appareilleurs, qui n'avoient preſque que des Voutes Cylindriques ou Spheriques à conduire. La forma-

Digitized by Google

tion au contraire d'un grand nombre de figures biſarres & difficiles, qui ſe préſentoient à tous momens dans l'Architecture Gotique, leur a donné lieu d'en imaginer d'autres, pour tirer party de l'irregularité des emplacemens des Bâtimens, ou ſuppléer au deffaut de place. Les Angles, par exemple, qui ne paroiſſent pas des lieux propres à y pratiquer des Portes, n'ont pas empêché qu'on n'y aît vouté des paſſages, ſans les émouſſer, ce qui paroît du premier abord contraire à la ſolidité; on a fait porter en l'air des Cabinets ſur des *Trompes* pour laiſſer une place libre audeſſous; on a ſoutenu des Eſcaliers d'une infinité de façons, & l'on a imaginé tant de choſes inconnuës aux Anciens, qu'on a trouvé aſſez de matiere pour en compoſer des Livres.

Philibert de Lorme, Aumônier d'Henri II, eſt, dit-on, le premier qui en aît écrit, non pas exprès, mais par occaſion dans ſon Traité d'Architecture, qu'il publia en 1567. on voit que cette date n'eſt pas fort ancienne; Maturin Jousse produiſit quelques Traits dans ſon Livre intitulé *Secrets d'Architecture*, imprimé à la Flèche en 1642. le P. Deran, l'année ſuivante mit cet Art dans toute ſon étenduë pour les Ouvriers; Bosse, (la même année) donna un ſiſtême tout different, qu'il tenoit de Desargues, lequel, par ſon obſcurité & la nouveauté de ſon langage, ne fut pas goûté. Enfin M. de la Rue en 1728. a redonné une partie des Traits du P. Deran, avec quelques autres nouveaux. Tous ces Auteurs n'ont produit qu'une ſimple pratique dénuée de toutes preuves. Le P. Dechalles en 1672 fut le premier, & a été le ſeul juſqu'à préſent, qui y ait ajouté des Démonſtrations; mais ſon Traité *de Lapidum Sectione*, inſeré dans ſon grand cours de Mathematiques en Latin, n'eſt preſque qu'un extrait du P. Deran, dont il a quelquefois copié juſqu'aux fautes, comme nous le ferons voir dans ſon lieu.

Apres avoir vû tous ces differens Ouvrages, il m'a paru qu'il reſtoit encore quelque choſe de mieux à faire.

Premierement, qu'il étoit à propos de donner une connoiſſance exacte de la nature des Lignes Courbes, qui ſe forment aux arêtes des voutes, tant à leurs Faces qu'à l'interſection des Doëles, de celles qui ſont compoſées de pluſieurs parties qui ſe croiſent, pour ſçavoir les tracer ſur des plans, lorſqu'il eſt poſſible, ou ſur des ſurfaces courbes, lorſque ces lignes ſont à double Courbure, en quoi conſiſte la *premiere nouveauté* de ce Traité.

La ſeconde ſera la Correction des erreurs de pluſieurs des anciens Traits.

Digitized by Google

La troiſiéme celle de la Conſtruction de pluſieurs Traits changez, & de quelques-uns qui n'ont pas encore paru.

Je puis compter pour quatriéme nouveauté les démonſtrations des Traits, parce que le P. Dechalles ne m'a précedé qu'en Latin, mais non pas en François, de ſorte que pour me ſervir de l'expreſſion de Jousse, les *Secrets d'Architecture* y ſont tout-à-fait dévoilez.

La nouveauté de cet Art & les difficultez qu'il contient engageoient les Architectes des deux derniers ſiecles à chercher des occaſions de faire parade de leur Science, perſuadez que rien ne pouvoit mieux les rendre recommandables, que ces Ouvrages hardis, où l'on ne pouvoit s'empêcher d'admirer la Coupe des Pierres; de ſorte qu'ils affectoient d'en faire même ſans neceſſité. J'ai vû le tiers d'une Tour quarrée, qu'on pouvoit faire porter de fond, ſoutenuë par la ſeule coupe d'une Platebande Rampante, qui en élevoit un Angle en l'air, & beaucoup de ſemblables témeritez.

Les Architectes de notre tems ne trouvant plus tant de raiſon de ſe faire admirer par une Science devenuë plus commune, ou peut-être devenus plus ſages, ont banni toutes ces hardieſſes biſarres, qui n'ont d'autre beauté, que celle de leur exécution, & qui non ſeulement ne contribuent en rien à la décoration des Edifices, mais leur ſont encore préjudiciables, en ce qu'elles en augmentent les efforts & la charge; en effet il ne convient de mettre en œuvre les Traits de Porte-à-faux comme les Trompes, que lorſqu'on y eſt abſolument contraint, ou pour quelque Degagement, ou pour éviter la dépenſe & l'incommodité de prendre la place dès les fondemens.

J'ajouterai encore, qu'il faut plûtôt conſulter le bon goût que d'affecter de la rareté, & de la difficulté dans les Ouvrages, à quoi ſemblent pencher nos Architectes modernes, qui courrent à la nouveauté : La rencontre & l'interſection de differentes voutes n'eſt pas toujours d'un bon effet. Un Arc de cloitre, par exemple, de ceintre circulaire peu concave, traverſé de lunettes, & ſurmonté d'un cû-de four, tel qu'on en voit à une Chapelle de l'Egliſe de St. Sulpice, ne fait pas ſi bien qu'une voute moins compoſée. Des Lunettes Cylindriques, qui traverſent une portion de Voute Spheroïde, ou Voute de Four ſurbaiſſée, ne ſe préſente pas bien de près; parce que les arêtes d'Enfourchement paroiſſent *Déverſées*, c'eſt-à-dire, penchées à droite & à gauche, comme on peut le remarquer à la même Egliſe de St. Sulpice; cette difformité diminuë, lorſque la Lunette eſt vûë de bas en

Digitized by Google

haut, & de plus loin, comme à St. Roch; mais elle n'eſt pas ôtée totalement, & on ne le peut par la nature de la Courbe, qui n'eſt pas dans un plan, comme on le verra dans le cours du premier Livre.

Enfin on peut encore remarquer, que les Voutes Spheriques, traverſées par deux berceaux, qui ſe croiſent, ont un air Nud & imparfait, ſi elles ne ſont diviſées par une Corniche Horiſontale, qui retranche le Segment de Sphere, & le mette, pour ainſi dire, à part des Panaches; on en apperçoit le beſoin au Noviciat des Jeſuites à Paris. Il ſeroit trop long de rechercher de ſemblables concours de voutes, qui ne ſatisfont pas le coup d'œil ſans le ſecours de quelque correctif, quoique faites ſolidement & dans les régles de la bonne Conſtruction.

Ces remarques ſont plus utiles à l'Architecture Civile qu'à la Militaire, où l'on ſemble negliger la beauté pour la ſolidité; il ne ſeroit pas cependant mauvais que les Ingenieurs fiſſent une étude de l'Architecture Civile; elle leur eſt neceſſaire à la conſtruction des Bâtimens Militaires, dont ils ſont chargez dans les Villes de Guerre, comme Caſernes, Magaſins, Hôpitaux, Logemens de l'Etat-Major, & même quelquefois des Egliſes des Forts & Citadelles, qui ſont de même eſpece que les Bâtimens Civils, dont ils ne different que de nom, ils peuvent même lorſque la Cour le juge à propos, prendre la conduite des Bâtimens Civils publics; mais ils ne doivent jamais ſe mêler de ceux des Particuliers, de quelque Qualité qu'ils puiſſent être; premierement parce qu'étant Officiers du Roy, à ſa ſolde dans le repos comme dans le travail, (*) il eſt de l'équité qu'ils diſpoſent du loiſir qu'ils peuvent avoir à s'inſtruire au Cabinet des Sciences qui leur ſont neceſſaires, & des faits Hiſtoriques des Sieges, qui peuvent leur fournir des idées propres à les mettre en état de ſervir utilement à differentes deſtinations. En ſecond lieu, parce que rien n'avillit tant les Ingenieurs, que ces ſortes d'occupations qui les font ſoupçonner de vûës d'intérêt, & les compromettent avec des Ouvriers ou Gens à gages, qui rejettent ſur l'Ingenieur les fautes émanées de leur ignorance, ou du caprice du Proprietaire; les exemples fréquens qu'on en voit devroient corriger les gens trop officieux. Enfin parce qu'en ſe mêlant d'Architecture Civile, ils ſemblent ſortir de l'Etat Militaire & nourrir le dédain, que les Gens d'épée ont pour ceux qui ſe mêlent des Arts Mechaniques; ce n'eſt pas qu'il n'y ait dans le Service des occupations peu nobles, l'Officier d'Infanterie doit deſcendre aux petits ſoins de la propreté des Soldats & des Caſernes, celui de Cavalerie à celle des Ecuries & des Chevaux, celui de Marine au Radoub & à la conſtruction des Vaiſſeaux,

(*) *Annua æra habet, annuam operam edet; an in æquum cenſet, militia ſemeſtri ſolidum ſtipendium accipere?* Tite-Live, l. 5. n. 6.

Digitized by Google

celui d'Artillerie aux Charronages & aux Forges, & l'Ingenieur à tous les Arts qui ont du rapport à celui de bâtir; ces fonctions auroient par elles-mêmes quelque choſe de vile ſuivant le préjugé du monde, ſi l'on n'étoit convenu dans les régles de l'honneur, qu'il n'y a rien d'abject de tout ce qui concerne le Service du Roy dans l'Etat Militaire; les Ingenieurs doivent ſe renfermer dans ces bornes, & laiſſer l'Architecture Civile à ceux qui en font profeſſion.

TRAITÉ

Digitized by Google

TRAITÉ DE STEREOTOMIE A L'USAGE DE L'ARCHITECTURE.

LIVRE PREMIER.

DE LA FIGURE DES SECTIONS DES CORPS, Coupez par des Plans, ou Pénetrez par des Solides.

POURQUOI la Connoiſſance en eſt neceſſaire dans l'Architecture.

DANS les Arts qui dépendent des Sciences, ſi l'on ne fait préceder de bons Principes, comme autant de Lumieres qui éclairent l'eſprit, on fait rarement du progrès, parce qu'on n'y avance qu'à tâtons; & de même que l'ennui qui accompagne les ténebres, augmente la fatigue d'une route qu'on parcourt dans l'obſcurité, une Etude ſans Principes devient pénible & capable de rebuter, lorſque la neceſſité de s'inſtruire ne fournit pas de la perſéverance.

Digitized by Google

C'est pour cette raiſon (ſi je ne me trompe) que les Livres que nous avons ſur la Coupe des Pierres, n'ont rendu cette matiere ni facile ni agréable aux Lecteurs, & que bien des Gens qui ont voulu en tâter, s'en ſont rebutez : En effet, il n'eſt pas étonnant qu'une lecture ſoit laſſante & preſqu'inſupportable, où l'on ne trouve qu'un tiſſu de pratiques ſeches, ſurchargées d'operations, dont on ne voit ni la fin ni la raiſon, ſi l'on n'eſt déja en état de la pénetrer : ajoutez à cela la complication d'une infinité de lignes ſurchargées de chiffres, pour les indiquer, & de meſures qu'il faut porter ici & là, ſans ſçavoir à quel propos ; enfin où il n'y a aucune verité à connoître par les inſtructions de l'Auteur, qu'il faut croire ſur ſa bonne foy, ne donnant d'autre preuve de la juſteſſe de ſon operation, que le témoignage de la gravure des Planches de ſon Livre ; il n'eſt pas étonnant, dis-je, qu'une telle conduite ne méne qu'au dégoût, & que cet Art acceſſible aux moindres Ecoliers de Geometrie, paroiſſe hériſſé d'épines qui en deffendent les approches.

Pour lever ces difficultez nous avons cru qu'il falloit donner une notion claire de la figure des Voutes, & des parties qui les compoſent, en les comparant à celle des corps Ronds, qui ſont connus de tout le monde, la Sphère, le Cône & le Cylindre, l'Anneau & l'Hélice coupez & diviſez par des Plans, ou par d'autres corps qui peuvent les pénetrer. Et lorſque la figure des voutes eſt irréguliere, nous avons tâché de la déſigner par une generation ſi expreſſive, qu'on peut la concevoir facilement. Ainſi l'on a déja pour point de vûë la figure qu'on ſe propoſe de faire, telle qu'elle doit être lorſque la voute eſt achevée, ce qu'il falloit en quelque façon deviner dans le Livre du P. Deran, à quoi M. de La Rue, qui a ſenti ce défaut a tâché de remedier par quelques deſſeins en Perſpective, qui aident beaucoup l'imagination ; mais parce qu'on ne peut exprimer qu'à pluſieurs repriſes toutes les faces d'un Solide ſur un Plan, il reſte encore beaucoup à ſuppléer à ces ſortes de repréſentations.

La figure des voutes étant bien conçûë, il n'eſt point de meilleur moyen de faire connoître celle des parties, dont elles doivent être compoſées, pour ſubſiſter & former un Tout uniforme & ſolide, que d'en venir à l'examen des Sections formées par la diviſion des Corps, faite de maniere qu'ils n'en ſoient pas détruits ni défigurez. Une comparaiſon familiere expliquera nettement ce diſcours.

Je me repréſente, par exemple, un Melon, qui eſt ordinairement une moitié de Sphéroïde, je la coupe par tranches ſuivant la longueur de ſes côtes ſur une table, où cette moitié eſt poſée à plat, & je vois

Digitized by Google

que pourvû que j'empêche les deux premieres tranches de gliſſer, la moitié du Melon ſubſiſtera en ſon entier, quoique coupée en pluſieurs tranches à fond. Non content de l'avoir coupé en long, je la recoupe en travers, & je vois, que ſi j'empêche encore les premiers morceaux de gliſſer ſur la table, cette moitié de Sphéroïde ne ſe défigure point, & ſubſiſte encore dans ſa rondeur, ſans tomber en pieces; d'où je conclus, que ſi je fais de ſemblables morceaux avec de la Pierre ou du bois, & que je les raſſemble dans le même ordre, je pourrai former cette figure de Melon, que les Geometres appellent une Sphéroïde. Mais pour former ces parties, il faut que j'aïe recours à une ſcience qui m'apprenne quelle ſera la figure que le paſſage de mon couteau formera dans le Melon, à chaque diviſion que j'en ferai, & comme il n'importe que je me ſerve d'un couteau ou d'une feüille de Fer-blanc, ou d'un autre corps mince de figure plane, je puis appeller cette coupure *la Section d'un Plan*, ou faite par un plan; j'examine enſuite quelle ſera cette Section en tournant differemment la feüille de Fer-blanc, qui me ſert de couteau; je vois par la ſeule Geometrie naturelle, que ſi je coupe le Melon en travers, la Section ſera un demi-cercle, & un cercle entier, ſi le Melon étoit entier; je connois donc dès ce moment, que toutes les tranches en travers contiennent une portion de cercle plus ou moins grande, ſuivant que les tranches en longueur ſont plus ou moins épaiſſes; je vois auſſi que ma coupure en long fait un ovale, & je conclus que chacune des tranches dans ce ſens eſt une portion d'ovale plus ou moins grande, ſuivant l'épaiſſeur des coupures en travers, & plus ou moins courbe à meſure qu'elle s'approche des bouts du melon ou du milieu, étant évident qu'elle ſe creuſe vers les bouts, & s'applatit vers le milieu. Je pouſſe ma curioſité plus loin; ſi au lieu de la trace plane de mon couteau je l'enfonce de biais, & le fais tourner ſur la pointe immobile au fond, pendant que je le tourne en rond du côté du manche, comme pour faire un trou en pain de ſucre renverſé, je vois que je puis ôter & remettre cette piece & ſes ſemblables; ſi j'en veux faire de concentriques à celle-ci, qui s'emboiteront comme des Cornets les unes dans les autres ſans que le Melon ſoit défiguré, quand même je les couperois encore en travers & en long, en paſſant toujours par le même point du milieu avec la feüille de Fer-blanc, pourvû que j'empêche les premiers morceaux, qui ~~paſſent~~ *puſſent* ſur la Table, de gliſſer.

Je connois donc que je puis diviſer ce Melon en portions Côniques, s'il eſt bien rond, ou en Côniques un peu alongées comme des cornets applatis, s'il eſt oblong; & cependant faire enſorte que le tout ſubſiſte dans ſa forme, ce qui me conduit à l'examen de la difference de ces Cônes, & de la Section qu'ils peuvent faire par leur pénetra-

Digitized by Google

tion dans le Sphéroïde, ſur quoi je commence à m'appercevoir qu'une telle Section n'a plus la ſimplicité de celle de la Sphère, ou du Sphéroïde coupé par des plans, & que j'ai beſoin du ſecours de la Geometrie pour la connoître.

De ce petit exemple de comparaiſon des Corps coupez par differentes Sections, il ſuit naturellement qu'on doit en diſtinguer de deux ſortes.

Les unes faites par des Plans qui peuvent couper les Solides ſuivant differentes inclinaiſons à leurs axes & à leurs côtez, & produire differentes figures.

Les autres par des Corps qui pénetrent d'autres Corps ſemblables ou differens; comme dans cet exemple le Cône pénetre le Sphéroïde. Les Courbes qui ſont formées par ces Sections ſont l'objet principal de notre Ouvrage; parce qu'elles ſe forment effectivement dans les Ceintres des Voutes ſur leurs Faces, ou dans les rencontres de celles qui ſe croiſent; car chacune de celles qu'on mêt en uſage dans l'Architecture eſt comparable à quelque corps régulier, comme nous l'allons expliquer.

De la Figure des Voutes en General, rapportée à celle des Corps Réguliers.

LES Voutes peuvent être conſiderées comme des Solides *ſimples*, qui ont une principale ſurface, d'où elles tirent leur dénomination.

Ou comme *compoſées* de differentes ſurfaces, qui ſe croiſent, ou qui ſe rencontrent.

La ſurface qui donne le nom aux Voutes eſt celle qui doit être vûë par-deſſous, qu'il a plû aux Architectes d'appeller *Doële*, par Analogie aux doëles des tonneaux, auſquels la plûpart ont quelque rapport; ce n'eſt pas que les voutes ſoient neceſſairement courbes, car il y en a de planes; mais celles-ci ont toujours ſi peu d'étenduë, qu'elles ſemblent n'être pas aſſez conſiderables pour entrer en compte dans l'énumeration des differentes eſpeces de Voutes.

Parmi les Voutes ſimples il y en a de *Régulieres* Circulaires, dont

Digitized by Google

les unes ſont, 1.° des moitiez de Cylindres, 2.° des moitiez de Cônes, 3.° d'autres enfin des Hemiſphères ou portions de Sphères.

La ſeconde eſpece des Voutes ſimples eſt de celles qui ſont *régulierement Irrégulieres*, dont les unes imitent le Cylindre, les autres la Sphère, les autres le Cône, telles ſont celles dont le Ceintre n'eſt ni circulaire ni Elliptique, mais de quelqu'autre Courbe Geometrique ou Mechanique, comme pourroit être la *Chaînette* ou la Parabole, qui lui reſſemble fort, & qui eſt la plus convenable pour mettre en équilibre des vouſſoirs égaux. Telles ſont encore les voutes *Annulaires*, qu'on appelle *ſur le noyau*, leſquelles ſont des Cylindres courbez ſur leur axe, ou les mêmes tournez en *Hélice*, c'eſt-à-dire, en *Vis*, qui s'élevent audeſſus du Plan ſur lequel elles poſent; telles ſont auſſi les Voutes Sphériques ſurhauſſées, ou ſurbaiſſées, ou ſur un plan Elliptique, qui ſont des *Sphéroïdes*, & d'autres qui peuvent être des Cônoïdes.

La troiſiéme eſpece des Voutes ſimples eſt celle des *Irrégulieres*, qui participent plus ou moins de chacune de ces figures, de maniere qu'elles peuvent toujours être comparées en quelques choſes aux Cônes, aux Sphères ou aux Cylindres, & tenir en même tems des unes & des autres, telles ſont la plûpart des *arrieres Vouſſures*.

Les Voutes *Compoſées* ne ſont qu'un aſſemblage de ces ſortes de figures ſituées differemment les unes à l'égard des autres, & contiguës par des jonctions angulaires, qu'il a plû aux Architectes d'appeller *Enfourchemens*; parce que les Pierres qui ſervent aux jonctions ont deux branches, comme une fourche.

En un mot nous ne concevons aucune figure de Voute, qu'on ne puiſſe rapporter à la Sphère, au Cône & au Cylindre, & c'eſt dans ce rapport que nous faiſons conſiſter leur *difference eſſentielle*.

Quant aux differences accidentelles elles ſeront toujours produites par la differente poſition de leurs faces, comme celles des Sections des corps par la differente poſition des plans coupans, & celles de leurs arêtes d'Enfourchemens, comme celles des Courbes formées à la ſurface des corps qui ſe pénetrent, en quoi conſiſte la principale difficulté de l'Architecture des Voutes.

Digitized by Google

Des Variations accidentelles aux Voutes, comparées à celles des Sections des Corps.

S'IL ne s'agiſſoit dans la Coupe des Pierres que de former des Corps réguliers, il ne ſeroit pas fort neceſſaire de s'embarraſſer de la figure des ſections des Corps, un très-petit nombre ſuffiroit; mais parce que la principale difficulté vient des irrégularitez de leurs Angles Rectilignes, Curvilignes, & Mixtes, à la jonction des Surfaces Planes ou Courbes, qui les croiſent ou qui les terminent, on peut dire, que la Theorie des Sections eſt la baſe de cet Art.

Pour rendre ce diſcours ſenſible nous pouvons donner pour exemple les variations qui arrivent à une Voute en Berceau circulaire, laquelle eſt une moitié de Cylindre, par la ſeule poſition du mur, qui le termine par un bout, où ſe forme ſon Ceintre de face. Suppoſant ce mur à Plomb & perpendiculaire à la direction du Berceau, ſi on vient à le démolir pour le refaire en *Talud*, il arrivera deux changemens, l'un à la Courbure du Ceintre de face, qui ne ſera plus Circulaire, mais Elliptique, l'autre aux angles des pierres, qui compoſent cet arc, leſquels ne ſeront plus droits verticalement, mais changeront continuellement à chaque lit, devenant toujours plus aigus depuis l'impoſte juſqu'à la clef, où ils ſeront égaux à l'inclinaiſon du mur à l'horiſon, c'eſt-à-dire, au Talud. Si au lieu de refaire ce mur en Talud on le tourne de *Biais*, c'eſt-à-dire, obliquement à la direction du Berceau, il arrivera de même deux changemens, l'un à l'Arc de Face, qui de Circulaire deviendra Elliptique, d'une Ellipſe plus ou moins alongée, ſuivant l'obliquité du mur; l'autre aux lits des pierres, dont les angles, au lieu d'être droits horiſontalement, comme auparavant, deviendront aigus d'un côté, & obtus de l'autre, augmentant continuellement d'un côté à l'autre à chaque lit de Vouſſoir. Si on faiſoit le mur *Biais & en Talud*, il ſe feroit encore un autre changement dans le ceintre & dans les angles des pierres angulaires, qu'on appelle Ecoiçons. Par où l'on voit, que ſans toucher à la Voute, la courbe du ceintre & les angles des lits des vouſſoirs peuvent changer de trois manieres par le ſeul changement de poſition du mur, qui eſt une ſurface plane; telle eſt parfaitement la ſection d'un Cylindre par un plan, ſans en faire l'application au Berceau.

Il eſt aiſé de concevoir, que ſi au lieu d'un mur de face droit on en faiſoit un courbe, comme une portion de Tour creuſe, ou convexe,

Digitized by Google

ou ſi l'on y faiſoit aboutir une autre voute; les courbes de leur jonction ou enfourchemens pourroient infiniment varier auſſi bien que les angles des ſurfaces coupées par pluſieurs lits de vouſſoirs, qui pourroient être Rectilignes, Mixtes ou Curvilignes, d'une infinité d'ouvertures, & de Courbures differentes.

Pour nous énoncer en termes convenables à la Theorie, nous conſiderons le mur comme une ſurface plane, que nous appellons un *Plan*, & la voute comme un Cylindre, Cône ou Sphère, ſelon qu'il convient à la figure, & au lieu de dire une face Biaiſe en Talud ou à Plomb, nous dirons qu'un Cylindre eſt coupé par un plan perpendiculairement ou obliquement, ce changement d'expreſſion ſignifie toujours la même choſe. Cela ſuppoſé.

Pour traiter cette matiere par des principes, il faudroit commencer par les élemens des Sections Cóniques; mais parce que ce prélude nous meneroit trop loin, & que les Livres qui en traitent ſont très-communs, nous avons cru pouvoir nous diſpenſer d'une rigoureuſe methode, en nous contentant de l'énoncé des propoſitions, qui ſont neceſſaires à l'intelligence de notre Doctrine de Stereotomie, ſuppoſant le Lecteur inſtruit des Elemens de Geometrie, & capable d'entendre les Démonſtrations fondées ſur les propoſitions, que l'on y trouve ordinairement, ſoit dans ceux d'Euclide, ou dans les autres Auteurs que nous n'avons pas cité. Nous avons cependant tâché de donner une introduction aux Sections Cóniques, ſuffiſante au ſujet dont il s'agit; afin qu'on ne ſoit pas obligé d'avoir recours à d'autres Livres.

Digitized by Google

PREMIERE PARTIE.

Des Sections des Corps coupez par des Plans.

CHAPITRE I.

Des Sections de la Sphère.

DE quelque maniere qu'on puiſſe couper une Sphère par un Plan, la Section ſera toujours un Cercle. La ſeule Geometrie naturelle, & l'uniformité de la Sphère, nous font ſentir cette verité; il ſuffit ſeulement de remarquer que lorſqu'elle eſt coupée par le centre, la ſection eſt la plus grande qu'on y puiſſe faire, d'où vient qu'on l'appelle *un grand Cercle*, ou, ſelon quelques-uns, *un cercle Majeur*, pour éviter l'équivoque du mot de *grand*, qui peut s'appliquer à une petite ſection comparée à une plus petite.

LES autres ſections ſeront toutes plus petites que celle qui paſſe par le centre, mais inégalement, ſelon qu'elles s'approcheront ou s'éloigneront du centre de la Sphère; enſorte qu'elles peuvent tellement diminuer, qu'elles ſe réduiſent à rien au point où le plan, au lieu de couper, ne fait plus que toucher la Sphère; & cette diminution ſe fait dans le rapport des Sinus des Arcs. Tous ces cercles inégaux ſont compris ſous le nom de *Petits Cercles* ou *Cercles Mineurs*.

DEFINITION.

1. LE point qui eſt à la ſurface de la Sphère, également éloigné de tous ceux de la circonference d'un cercle, s'appelle *le Pole* de ce cercle, qui n'eſt pas le même que le point de ſon centre; parce qu'il n'eſt pas dans le même plan que la circonference, mais hors de ce plan dans la ſurface de la Sphère.

ET

Digitized by Google

Et parce qu'on peut trouver deux points diamétralement oppoſez, qui ayent la même proprieté à l'égard du même cercle, il ſuit que chaque cercle a deux Poles. La ligne droite qui paſſe par ces deux Poles, & par conſéquent par le centre du cercle, s'appelle *l'Axe* de la ſphère.

Corollaire I.

2. D'ou il ſuit, que les cercles, qui ne ſont pas paralleles, n'ont pas les mêmes Poles, & qu'on peut conſiderer ſur une ſphère autant de Poles qu'il y a de ſections inclinées entr'elles, & par conſéquent autant d'Axes; ainſi ſur la ſphère Armillaire, qui repréſente la Terre ou le Ciel, les Poles du Monde ne ſont pas les mêmes que ceux de l'Ecliptique; parce que les Poles du Monde ſont ceux de l'Equateur, auquel l'Ecliptique eſt inclinée de $23\frac{1}{2}$ degrez.

La ſection A*f*B*g*, qui eſt repréſentée ici en perſpective, eſt un *Cercle majeur*; parce qu'elle paſſe par le centre C de la ſphère. *Fig.* I.

La ſection D*c*E F eſt un *Cercle mineur*; parce que ſon centre *c* eſt éloigné du centre C de la ſphère. Les Poles de la ſection AB ſont les points P & *p*, éloignez de A & de B, comme de *f* & de *g*; parce qu'ils ſont par-tout éloignez d'un quart de cercle de la circonference du cercle majeur.

Il n'en eſt pas de même des points O & *o*, qui ſont les Poles du Cercle Mineur DE; chacun d'eux eſt bien également éloigné des points de la circonference, mais ces éloignemens ne ſont pas égaux entr'eux, puiſque les arcs OD ou OE ſont plus petits que les arcs *o*D & *o*E, par la ſuppoſition, que DE ne paſſe pas par le centre C de la ſphère.

Corollaire II.

3. D'ou il ſuit que ſi un Cercle Majeur paſſe par le Pole d'un autre Cercle Majeur, ſon Pole ſera auſſi réciproquement à la circonference de celui-ci; ainſi les points A & B ſeroient les Poles du cercle, qui paſſeroit par les points P *p* perpendiculairement au plan du cercle P A *p* B, tels ſont, par exemple, l'Equateur & le Meridien, ou l'Horiſon & un des Cercles Verticaux. On peut voir là-deſſus les Sphériques de Theodoſe.

La partie de Sphère *h l* K *i* s'appelle un *Segment*. La partie S *u* V *t*,

qui eſt une portion de ſphère coupée par deux plans paralleles entr'eux, s'appelle un *Segment tronqué*, & ſa Surface une *Zone*, ou *Couronne de Sphère.*

Si une Sphère eſt coupée par trois ou pluſieurs plans inclinez entr'eux, qui paſſent par le centre C, il ſe fait une Pyramide Triangulaire, ou de pluſieurs côtez, dont le contour de la baſe eſt un triangle Sphérique, ou qui peut être diviſé en Triangles Sphériques, compoſez d'Arcs de Cercles Majeurs, comme on pourra le remarquer dans les voutes ſphériques fermées en Polygone, tel eſt le ſecteur *q m n p*.

CHAPITRE II.

Des Sections des Cônes coupez par des Plans.

4. ON diſtingue de deux ſortes de Cônes, l'une de ceux qu'on appelle *Droits*; parce que leur axe eſt droit, c'eſt-à-dire, perpendiculaire ſur leur Baſe, comme SC ſur BgA. *Fig.* 2.

L'AUTRE de ceux qu'on appelle *Scalenes*, comme le cône *b s a*, dont l'axe S *c* eſt oblique au plan du cercle *b d a e*, qui eſt ſa baſe. *Fig.* 3.

DE quelque eſpece que ſoit un cône, Droit ou Scalene, les ſections formées par des plans, qui les coupent, ſont toujours de même nature, excepté certains cas dont nous parlerons ci-après.

5. UNE ſurface plane peut couper un cône de cinq manieres differentes, qui produiſent autant d'eſpeces de figures.

6. *Premierement.* Si un cône eſt coupé par un plan, qui paſſe par ſon ſommet, la figure de la ſection eſt toujours un *Triangle* Rectiligne, ſoit que le plan paſſe par l'Axe SC ou qu'il n'y paſſe pas. Dans le premier cas la ſection s'appelle le *Triangle par l'Axe*, comme B S A; dans le ſecond cas on l'appelle ſimplement *Section Triangulaire*, comme *s d e*. On ne peut faire dans le cône d'autre ſection rectiligne. *Fig.* 2. *Fig.* 3.

7. *Secondement.* Si l'on coupe un cône par un plan DF parallele à ſa Baſe BA, la Section ſera un cercle; parce que la Baſe BgA eſt toujours ſuppoſée Circulaire. Or il eſt aiſé de voir qu'une telle ſection fait des figures ſemblables, depuis le ſommet du cône juſqu'à ſa baſe.

8. *Troiſiémement.* Si l'on coupe un Cône Droit par un plan incliné à ſon Axe CS, comme DE ou D *e*, ou un Cône Scalene par un plan *Fig.* 2.

Digitized by Google

incliné au plan de la Baſe, enſorte qu'il rencontre les deux côtez SB, SA, la ſection eſt appellée une *Ellipſe*, telle eſt DRE*r* (*Fig.* 6.) où l'on voit la partie inferieure du Cône, & ſa partie ſuperieure (*Fig.* 7.) retranchée par cette ſection, l'une & l'autre repréſentée en perſpective pour aider à l'imagination, & ſuppléer à ce qu'on n'a pû exprimer à la Fig. 2. qui ſert pour toutes les ſections. *Fig.* 6. *Fig.* 7.

9. Quoique cette propoſition ſoit géneralement vraie, elle ſouffre une exception dans les Cônes ſcalenes; car ſi le plan coupant le Cône obliquement à ſon Axe, & perpendiculairement au Triangle par l'Axe, fait avec les côtez, des angles égaux à ceux qu'ils ſont avec la baſe; mais en ſens contraire, la ſection ne ſera plus une Ellipſe, mais un Cercle; telle eſt la ſection *gf* dans le Cône ſcalene S*ba*, ſuppoſé que l'angle S*gf* ſoit égal à l'angle S*ba*, ce que l'on appelle *Section ſouſcontraire*. *Fig.* 3.

10. *Quatriémement.* Si un cône eſt coupé par un plan DP ou *dp*, parallelement à un des côtez SA, & que le triangle par l'axe coupe l'ordonnée Q*q* perpendiculairement, (*Fig.* 8.) la ſection ſera une *Parabole*, & telle qu'elle paroit en perſpective Fig. 8. en QD*q* ſur le cône, ou en QS*q*, (*Fig.* 9.) hors du cône. *Fig.* 2. & 8. *Fig.* 9.

11. *Cinquiémement*, ſi un Cône eſt coupé par un plan parallele à l'Axe SC, ou incliné à cet Axe, de maniere qu'il coupe encore l'autre, ſuppoſé qu'on le prolonge audelà du ſommet S, comme ID, qui rencontre AS prolongé en ∞, ou, ce qui eſt la même choſe, ſi le plan qui coupe un cône, coupe auſſi ſon égal & oppoſé au ſommet, comme le plan paſſant par M*m* (*Fig.* 4.) coupe les cônes oppoſez ESF, GSI, la ſection s'appelle une *Hyperbole*, telle eſt la courbe *bd*A & *b*DH ſur le Cône, ou (*Fig.* 5.) B*da* ou L*b*D*n* hors du Cône. *Fig.* 2. *Fig.* 4. *Fig.* 5.

Corollaire I.

12. D'ou il ſuit, 1.° que le changement d'obliquité des plans, dont les ſections forment les Ellipſes & les Hyperboles, change auſſi la figure de ces ſections ſans changer leur nature, en les alongeant plus ou moins, comme on peut le voir par les inégalitez des lignes DE & D*e*, qui ſont les grands axes, c'eſt-à-dire, les longueurs differentes de deux Ellipſes, de même que les lignes DK, DH & DI ſont ceux des Hyperboles differemment ouvertes. *Fig.* 2.

Corollaire II.

13. 2.° Que les Ellipſes peuvent être alongées infiniment depuis la poſition du plan, coupant le cône perpendiculairement à un côté,

Digitized by Google

juſqu'à ce qu'elle devienne parallele à ce même côté, comme en DP ; alors la ſection change de nature & devient une *Parabole*, ce qui fait dire à quelques Mathematiciens, que la Parabole eſt une Ellipſe alongée à l'infini.

2.° Que les Ellipſes peuvent être infiniment reſſerrées & rétreſſies juſqu'à ce qu'elles deviennent ſans largeur, c'eſt-à-dire, que le petit axe ſoit réduit à zéro, comme il eſt viſible par les changemens de poſition, qui peuvent ſe faire, depuis la perpendiculaire à un côté tiré du point D, en remontant vers le ſommet S, comme en D*e*, juſqu'à ce que le plan ne coupe plus le cône, mais qu'il le touche ſeulement ſuivant la ligne BS.

3.° En continuant auſſi à changer la poſition du plan coupant, depuis la ligne DP, juſqu'à ce qu'il tombe ſur DB, on reſſerre de plus en plus l'hyperbole, & au contraire, depuis la poſition où il touche DB juſqu'à DP, elle s'ouvre de plus en plus, juſqu'à ce qu'elle ſe confonde avec la Parabole ; ainſi la Parabole eſt comme le paſſage de l'Ellipſe à l'Hyperbole ; de ſorte qu'on peut la conſiderer comme une Ellipſe dont le grand axe eſt infini, ou comme une Hyperbole dont le diametre tranſverſe eſt infini.

Corollaire. III.

14. 3.° Que les Ellipſes & les hyperboles ſemblables ſont faites par des ſections de plan paralleles entr'eux, comme D*e*, *d*L pour les Ellipſes, & D*i*, *d*H pour les hyperboles, ou par des plans, dont les poſitions à l'égard de l'axe & de la baſe ſont ſemblables ; parce que les figures ſemblables ſont celles dont les côtez, les axes & les ordonnées ſont proportionels, ou décrits ſur un même plan & ſur un même axe.

Corollaire.

15. Que toutes les paraboles étant faites par des plans paralleles à un côté, elles ne ſont pas variables, mais toutes ſemblables entr'elles, de ſorte qu'elles ne peuvent changer que de grandeur ; car *dp* & DP étant paralleles à SA, *dp* ſera parallele à DP, axe de la Parabole ; & quoique l'un ſoit plus long que l'autre dans le Cône terminé par la Baſe AB, il faut les conſiderer comme pouvant être prolongez auſſi bien que le cône.

Quoique nous établiſſions ici comme des définitions des ſections côniques, les differentes manieres dont on peut couper le cône pour

Digitized by Google

qu'il en réſulte des Cercles, Ellipſes, Paraboles & Hyperboles, on peut en démontrer la verité en faiſant voir que les courbes, auſquelles on a donné ces noms, étant conſiderées hors du cône, ſont les mêmes dans le cône; mais comme il ne nous convient pas d'entrer dans une matiere qui nous meneroit trop loin, & qui a été traitée par un grand nombre d'Auteurs, il nous ſuffit d'avancer ces veritez comme des Axiomes, ſur leſquels nous devons fonder nos raiſonnemens : Ceux qui voudront s'en inſtruire plus particulierement peuvent conſulter les Traitez des ſections cóniques; il nous paroît ſeulement à propos, en faveur de ceux qui n'ont étudié que les Elemens ordinaires de la Geometrie, où il n'eſt pas parlé d'autre courbe que du cercle, d'expliquer quelques termes, & d'expoſer quelques proprietez des autres ſections cóniques.

Définitions des Points & des Lignes remarquables dans les Sections Cóniques.

16. DANS trois des ſections cóniques on conſidere un point qu'on appelle *Centre*, ſçavoir dans le cercle, dans l'Ellipſe, & dans l'Hyperbole; mais il n'y en a point dans la Parabole.

17. TOUT le monde ſçait, que le centre du cercle eſt également éloigné de tous les points de la circonference; il n'en n'eſt pas de même dans l'Ellipſe, il n'eſt équidiſtant de la circonference qu'à l'égard de quatre points oppoſez, mais il eſt au milieu de tous les diametres; ainſi le centre C (*Fig.* 7.) diviſe en deux également les *Diametres* inégaux *e d*, *m* T, *i t*. *Fig.* 7.

LE plus grand de tous les diametres s'appelle *le Grand Axe*; le plus petit, *le Petit Axe*; ces deux ſont perpendiculaires entr'eux, mais non pas les autres, comme nous le dirons ci-après.

18. DANS l'hyperbole le point appellé *Centre* n'eſt pas au dedans de la Courbe, mais au dehors, entre les deux ſections des cônes égaux oppoſez au ſommet, comme en C (*Fig.* 4.) & en *c* (*Fig.* 5.) où eſt le milieu de la plus courte ligne D *d*, qu'on puiſſe mener d'une ſection à l'autre, qu'on appelle *l'Axe Tranſverſe*, ou *l'Axe Déterminé*, ou *le premier Axe*, & la ligne qui lui eſt perpendiculaire S*s*, & double de la diſtance du milieu C, au ſommet S, eſt appellé le *ſecond Axe*, le premier s'appelle quelquefois *grand Axe*, & le ſecond *petit*; mais cette dénomination eſt impropre, parce que le ſecond axe peut devenir plus *Fig.* 4

Digitized by Google

grand que le premier dans tous les cas où l'angle DS*d* eſt aigu; les autres lignes menées d'une hyperbole à l'autre par le centre C, comme PR, (*Fig.* 5.) ſont appellées *Diametres.*

19. QUANT à la Parabole il n'y a point de centre; parce qu'il n'y a aucune diviſion égale à faire dans aucun Diametre, ni dedans ni dehors de la ſection; au dedans, parce qu'étant ouverte & ſes Diamemetres étant infinis, en ce qu'ils ne coupent la courbe que par une de leurs extremitez où eſt leur *Origine*, ils ne peuvent être coupez en deux également; ni au dehors, parce qu'il ne peut y avoir deux termes, puiſque le plan coupant le cône étant prolongé, ne peut couper l'oppoſé au ſommet, à cauſe qu'il eſt parallele à ſon côté.

20. ON appelle *Diametre* toute ligne droite qui en coupe également deux autres paralleles entr'elles, terminées de deux côtez à une circonference; & *Axe*, le diametre qui les coupe perpendiculairement, & paſſe par le ſommet principal de la ſection; ainſi, par exemple, dans la parabole (*Fig.* 9.) la ligne T*u* eſt un Diametre; parce qu'elle coupe en deux également en *o* les deux paralleles *rs*, *q*R, & SP eſt un axe, parce qu'il paſſe par le ſommet principal S de la courbe, & coupe la ligne Z*q*, en deux également, & particulierement en P, de même que D*d* dans l'hyperbole, (*Fig.* 5.) & DE dans l'Ellipſe, *Fig* 6.

Apol. l. 2. *p.* 28.

21. LES lignes perpendiculaires aux Axes ſont appellées *Ordonnées*, comme P*q*, *p*Q (*Fig.* 9.) *o r* OR (*Fig.* 5.) pour l'Hyperbole, & CR *o r* (*Fig.* 6.) pour l'Ellipſe. On appelle du même nom les lignes obliques aux autres Diametres, qui ſont coupées en deux également, comme (*Fig.* 9.) ZR, *r s* paralleles entr'elles dont nous venons de parler, ne faiſant attention qu'à leur moitié ZO, *r o.*

Fig. 9. *Fig.* 5.

22. LA principale marque des ordonnées eſt celle d'être *paralleles à la Tangeante*, qui paſſe par l'extremité du Diametre, auquel elles ſont ordonnées; ainſi (*Fig.* 9.) ſi T*n* eſt une Tangeante au point T, extremité du Diametre T*u*, & qu'on lui mene une parallele *o r* ou OZ, ces deux lignes *or* & OZ ſont des ordonnées au diametre T*u*; il en ſera de même dans l'Ellipſe & dans l'Hyperbole; on les appelle auſſi *Appliquées*, en Latin *Ordinatim applicatæ.*

LES parties des Axes ou des autres Diametres, qui ſont compriſes entre l'extremité T, (*Fig.* 9.) & les points *o* & O, où ils ſont coupez par les ordonnées, s'appellent *Abſciſes*, du Latin *abſcindere*; ainſi T*o* & TO ſont des Abſciſes du Diametre T*u* & S*p*, SP celles de l'Axe.

Fig. 9.

23. LES Abſciſes & les Appliquées, conſiderées les unes à l'égard des autres, s'appellent *Co-ordonnées.*

Digitized by Google

Les diametres T*m*, *ti* (*Fig.* 7.) qui se croisent, de maniere qu'ils sont paralleles aux Tangeantes T L, *tl*, qui passe par les extremitez T & *t* sont appellez *Conjuguez*. La même chose doit s'entendre pour les Hyperboles. *Fig.* 7. *Apol. l.* 2. *p.* 20.

24. La partie d'un Axe prolongé hors de la section, comme D Y (*Fig.* 6.) comprise entre l'ordonnée *to* à cet axe, menée du point d'attouchement *t* d'une tangeante *t* Y, & le point de rencontre Y de l'axe & de la tangeante s'appelle *Soustangeante*. *Fig.* 6.

25. La troisiéme proportionelle à deux Diametres conjuguez est appellée *Parametre*, de celui qui est le premier terme dans l'Ellipse & dans l'Hyperbole; & pour la parabole c'est la troisiéme proportionelle à l'Abscise & à l'Ordonnée, ou à la Soustangeante & à la Tangeante.

26. La ligne droite qui est la rencontre du plan de la base du cône, prolongée s'il le faut, & d'un autre plan passant par le sommet parallelement à une section cônique, est appellée *Directrice*; telles sont les lignes *e* I pour l'Ellipse, (*Fig.* 6.) K L pour l'Hyperbole, (*Fig.* 4.) & Ag pour la Parabole, (*Fig.* 8.) La premiere de ces lignes est toute hors du cône, la seconde toute au dedans, & la troisiéme est Tangeante à la Base du cône. *Fig.* 6. 4. 8.

On appelle aussi *Directrice* une ligne qui est dans le même plan qu'une section, & perpendiculaire à un axe, à certaine distance de son sommet, comme D *i* est la Directrice de la Parabole QS*q*, (*Fig.* 9.) si elle est éloignée du sommet S au dehors, autant que le Foyer F est au dedans; plus loin de l'Ellipse, & plus près pour l'Hyperbole.

27. Outre ces lignes communes à toutes les sections cônicues, il y en a encore de particulieres à l'Hyperbole, qu'on appelle *Asymptotes*, ce sont des lignes droites AY *ay*, (*Fig.* 5.) qui passent par le centre C des sections oppoſées, & qui en approchent continuellement sans jamais les rencontrer, proprieté merveilleuse, & difficile à concevoir, quoique la verité en soit démontrée. Ces lignes sont les intersections de deux plans, qui touchent la base du cône aux extremitez L & K de la directrice, & passent par le sommet S du cône. *Fig.* 5. *Fig.* 4.

28. Les points qu'on appelle *Foyers* méritent encore d'être considerez, à cause de leurs grandes proprietez, pour la description des sections côniques; leur situation est sur un premier axe, à quelque distance de son extremité.

29. Dans l'Ellipse il y en a deux sur le grand axe, desquels si l'on

Digitized by Google

tire des lignes droites, qui se joignent à un point quelconque de la circonference, leur somme est toujours égale à la longueur de ce grand
Fig. 7. Axe; si les points F & *f* (*Fig. 7.*) sont les Foyers de l'Ellipse, A *s* T *i* la somme des lignes *fg* & F*g* est égale à l'Axe A *a*.

30. DANS les Hyperboles opposées il y en a aussi deux F & *f* sur
Fig. 5. le principal axe prolongé *d*D, (*Fig. 5.*) desquels si l'on mene deux lignes FP*f*P au même point P de la courbe, pris où l'on voudra, la difference P *q* de ces deux lignes est égale au principal Axe. *Voyez les Traitez des Sections Côniques de* M. de L'HOPITAL, *Article* 73.

Fig. 9.

31. DANS la parabole il n'y en a qu'un en F sur l'axe SP (*Fig. 9.*) duquel si on mene une ligne F*b* à un point quelconque de la parabole QS*q*, cette ligne sera égale à la ligne *bi*, menée du même point à la directrice D*i*, parallelement à l'axe DP.

Exposition de quelques proprietez des Lignes menées au-dedans & dehors des Sections Côniques, dont la connoissance fournit differens moyens de les décrire, dans certaines circonstances de Lignes & de Points donnez.

32. SI l'on tire deux lignes paralleles au dedans d'une section Cônique terminées à sa circonference de part & d'autre, & qu'on les divise en deux également, la ligne qui passe par leur milieu, & qui se termine à sa section est un *Diametre*, cette proprieté est une suite de la définition que nous avons donné des lignes appellées Diametres.

Des Abscises & des Ordonnées des Sections Côniques.

NOus avons dit que le triangle étoit la premiere section du cône; mais comme elle est rectiligne il n'en est pas question ici, où nous ne parlons que des courbes. Cependant nous remarquerons en passant, qu'elle a ses abscises & ses ordonnées, qui ont un certain rapport. Si l'on fait *y* F parallele à CA, (*Fig. 2.*) S *y* sera une abscise, &
Fig. 2. *y* F une ordonnée à l'axe SC du triangle BSA, on trouvera donc que

LE Rectangle fait de son abscise S *y*, par la moitié de sa base CA, est

égal

égal au Rectangle fait de son Ordonnée yF par son Axe; car à cause des paralleles $Sy : yF :: SC : CA$; donc $Sy \times CA = yF \times SC$. Fig. 10.

33. Dans le cercle le Rectangle fait des Abscises, l'une par l'autre, est égal au quarré de l'ordonnée $AO \times OB$ (*Fig.* 10.) $= \overline{OR}^2$, cela est démontré dans les élemens de la Geometrie d'Eucl. l. 3. pr. 35.

34. Dans l'Ellipse les *Quarrez des ordonnées sont entr'eux, comme les Rectangles des Abscises*, si ADB est une demie Ellipse $\overline{ot}^2 : \overline{CD}^2$ ou $\overline{or}^2 : CE \times CB$ dans la demie Ellipse $AFB :: AO \times OB : AC \times CB$: cette proprieté est démontrée dans tous les traitez des sections cõniques.

35. Dans la Parabole *les Quarrez des Ordonnées* or, OR (*Fig.* 8.) *sont entr'eux comme les abscises* Do, DO, ainsi $\overline{OR}^2 : \overline{or}^2 :: DO : Do$. Fig. 8.

36. Dans l'Hyperbole le rapport des Quarrez des Ordonnées entr'eux, & aux Rectangles des Abscises est le même que dans l'Ellipse, en ajoutant aux abscises le Diametre qui est au dehors de l'Hyperbole entre les sections oppoſées; ainsi $\overline{or}^2 : \overline{Ft}^2 :: Do \times od : DF \times Fd$. Fig. 5.

Corollaire I.

37. D'ou il suit que les ordonnées également éloignées du centre d'une section qui en a un, sont égales entr'elles, puisqu'elles ont un même rapport à des rectangles égaux $\overline{eo}^2$ (*Fig.* 7.). $mO \times OT :: \overline{no}^2 : mo \times oT$; mais à cause de $OC = oC$ par la supposition $mO \times OT = mo \times oT$, donc $eO = no$. Fig. 7.

38. Dans la parabole la proposition doit s'appliquer aux Ordonnées équidistantes d'un Diametre, comme si $or = oS$, on aura $rx = Sy$, (*Fig.* 9.) ce qui est clair, parce que la figure $rxyS$ est un Parallelograme. Fig. 9.

Corollaire II.

39. Dans toutes les sections cõniques les lignes paralleles à un Diametre TO, équidistantes du point d'attouchement T d'une Tangeante AD (*Fig.* 11.) compriſes entre la tangeante & la courbe, comme Br, Cv, AR, DG sont égales entr'elles; car si par les points r & R on mène des paralleles à la tangeante AD, ces lignes seront des Ordonnées au diametre TO, qui les coupe en deux également au point O & o; donc le parallelograme $To\,rB = To\,VC$, & le parallelograme $TORA = TOGD$; donc $Vr = CB$, & $AR = DG$. Fig. 11.

Digitized by Google

COROLLAIRE III.

40. Si deux ou pluſieurs lignes paralleles eb, ti terminées à la circonference d'une Ellipſe, ou d'une autre ſection cônique, ſont coupées par une troiſiéme HK, les rectangles faits des parties des paralleles, comparez à ceux des parties de celle qui les coupe, ſont entr'eux en même raiſon $tq \times qi : Hq \times qK :: ep \times ph : bp \times pK$; parce que chacun de ces rectangles a même raiſon au quarré de la Tangeante, qui eſt parallele aux lignes dont il eſt formé, ce qui eſt démontré dans les traitez des ſections cóniques.

Fig. 7.

Proprietez particulieres à l'Ellipſe.

LE grand uſage que nous avons à faire de l'Ellipſe m'engage d'ajouter ici quelques proprietez qui lui ſont particulieres, & qui ſervent à la décrire dans certaines circonſtances.

Fig. 10. 41. Si le Diametre AB d'un cercle ou demi cercle AEB, eſt commun à une Ellipſe ou demie Ellipſe, décrite ſur le diametre au dedans ou au dehors du demi cercle, comme ADB ou AFB, & qu'on lui mène *Fig. 10.* les ordonnées or CF, *les ordonnées au Cercle ſeront entr'elles comme celles de l'Ellipſe*, OR : CF : : Ot : CD, & OR : Or :: CE : CF; parce que l'Ellipſe n'eſt qu'un cercle alongé ou rétreſſi, & que les quarrez des Ordonnées auront toujours le même rapport entr'eux que celui des mêmes rectangles AOB, ACB.

42. Cette proprieté eſt encore vraïe, quand même les ordonnées * *Fig. 12.* ne ſeroient pas perpendiculaires à l'axe AB, comme ſont or & CD;* car ſi par leurs extremitez r & D on même des parelleles au Diametre AB, qui couperont les ordonnées au cercle CE, & oR en F & g, il ſe fera deux triangles ſemblables CPFD & agr, qui feront voir que les ordonnées de l'Ellipſe ſont en même raiſon que celles du cercle, puiſque ſi l'on fait CF : CE :: og : oR, les points F & g ſeront à la circonference d'une Ellipſe; mais CD : CF :: or : og; donc CD : CE :: or : oR. C. q. f. d.

43. La ſomme des deux Axes eſt plus petite que celle de deux diametres conjuguez quelconques, & leur difference eſt plus grande que celle de ces diametres.

44. Cependant la ſomme des quarrez de deux diametres conju-

Digitized by Google

guez mT, ti eſt égale à celle des quarrez des deux axes Aa, Bb; cela eſt démontré dans tous les traitez des ſections côniques. Fig. 7.

Des Tangeantes des Sections Côniques.

45. SI par un point t on mêne une tangeante tY, qui rencontre un axe ou diametre quelconque, prolongé en Y, & une ordonnée to à ce diametre, la partie YD de la ſouſtangeante Yo ſera égale à l'abſciſe Do dans la parabole; elle ſera plus grande dans l'Ellipſe, & plus petite dans l'hyperbole; ainſi l'arc de la ſection qui paſſera entre D & Y, ſi D étoit le milieu de OY, ſera une hyperbole, & celui qui paſſera entre D & O, dans la même ſuppoſition, ſera une Ellipſe. Cela eſt démontré dans les traitez des ſections côniques. Fig. 6. 8. 5. Fig. 8.

46. Dans la même Fig. 6. ſi une tangeante tY rencontre l'axe ED prolongé, ou un autre diametre, & que du point d'attouchement t on lui mêne une ordonnée to, les lignes Co, CD, CY ſeront continuellement proportionelles, non ſeulement dans l'Ellipſe, mais auſſi dans l'hyperbole, on aura Co: CD :: CD: CY. Fig. 6. Fig. 5.

47. Si deux lignes aT, at qui concourrent en a, touchent une ſection cônique quelconque aux points T & t; la ligne menée du point a par le milieu m de la ligne Tt, qui joint les points d'attouchement, eſt un diametre, & par l'inverſe, ſi elle eſt un diametre, elle paſſera par m. Fig. 13. *Apollonius l. 2. p. 19. & 20.*

48. Si une ſection cônique eſt touchée par deux lignes at, aT [*Fig.* 13] la ligne Tt, qui paſſe par les deux points d'attouchement, étant prolongée vers b, ſi de ce point pris à volonté, l'on tire deux autres tangeantes bN, bE, elles couperont les deux précedentes en F & D, je dis que la ligne Fa ſera diviſée *harmoniquement*, c'eſt-à-dire, que les trois lignes aF, at & aD ſont harmoniquement proportionelles; la premiere ſera à la troiſiéme; comme la difference de la premiere & de la ſeconde eſt à la difference de la ſeconde & de la troiſiéme Fa: aD :: Ft: tD. Cette proprieté nous ſervira à trouver les points d'attouchement dont nous aurons beſoin au deuxiéme Livre, par une méthode très-facile.

On ne s'arrête pas ici à démontrer toutes ces véritez, qui en ſuppoſent d'autres, auſquelles il faudroit remonter; il ſuffit qu'elles le ſoient dans les Livres connus, comme ſont les ſections côniques d'Apollonius, de M. de la Hire & du Marquis de l'Hopital, pour

Digitized by Google

nous ſervir à raiſonner conſéquemment dans les uſages que nous devons en faire.

De quelques differences de Poſition des Sections Côniques dans les Cônes Scalenes.

QUOIQUE les Cônes Scalenes ne ſoient pas d'une nature differente de celle des cônes droits, l'obliquité de leur axe ſur le plan de la baſe occaſionne quelque difference dans les ſections, à ne conſiderer que leur poſition reſpective.

49. PREMIEREMENT. Nous avons fait voir que la ſection d'un plan, oblique à l'axe du cône ſcalene, dont il coupe les deux côtez, pouvoit être un cercle, quoique naturellement cette ſection ſoit une Ellipſe.

50. SECONDEMENT. Les ſections faites par des plans paralleles à la baſe, qui ſont des cercles dans les cônes droits, peuvent être des Ellipſes dans les cônes ſcalenes, s'ils ſont conſiderez comme des cônes droits ſur une baſe Elliptique; car ſi l'on ſuppoſe que la baſe *b e a d* [*Fig.* 3.] eſt une Ellipſe, & qu'une ligne *s a* immobile ſur ſon point *s*, parcourt vers ſon autre extremité *a* le contour de cette Ellipſe, la figure qui en réſultera ſera un cône ſcalene de baſe Elliptique; on peut imaginer la même generation pour un cône droit, comme ſi la baſe B *g* A [*Fig.* 2.] étoit une Ellipſe.

Fig. 3.

Fig. 2.

IL ſeroit toujours évident que toutes les ſections faites par des plans paralleles à ces baſes ſeroient des Ellipſes ſemblables à celles de la baſe; car tous les diametres poſſibles DF, BA d'une ſection par l'axe B S A, ou K I, *b a* [*Fig.* 3.] ſeroient proportionels à ceux d'une autre ſection par l'axe du même cône.

MAIS toutes les ſections obliques dans ce cône ne ſeroient pas des Ellipſes, car ſans s'arrêter à la ſection ſouſcontraire, qui n'a pas lieu dans ce cas; puiſque la baſe n'eſt pas circulaire, on pourra toujours démontrer que de tels cônes peuvent être coupez par un plan incliné à l'axe, & qui ne ſera pas avec les côtez des angles égaux à ceux de la baſe, c'eſt-à-dire, des côtez du triangle par l'axe avec la baſe, dont la ſection ſera un cercle, ainſi que la ſouſcontraire; car ſi l'on tire la droite *s x* ſur la ſurface du cône, & *n c* dans la baſe au centre C, & *o m* parallele à *n c*; puiſque *o m* : *n c* :: S *m* : S *c* le diametre *om* ſera plus petit que *n c* dans le rapport de K *m* a *b c*. Si, par exemple, *b c* ; *c u* :: le grand axe eſt au petit, le même rapport ſera entre K *m*

Digitized by Google

& mo, donc Km ſera plus grand que mo; or il eſt clair qu'en changeant l'inclinaiſon du plan de la ſection, par exemple, en r, on peut racourcir ce demi axe Km juſqu'à ce qu'il devienne égal à mo, comme ſi du point m pour centre & pour rayon mo on coupoit le côté bS en r, ce qui eſt poſſible à l'égard de pluſieurs côtez diametralement oppoſez, puiſque mK eſt plus grand que mo, alors les points r & o ſeront également éloignez du centre m, par conſéquent les axes étant égaux entr'eux la ſection ſera un cercle. S'il s'agiſſoit au contraire d'alonger le petit axe, il eſt viſible qu'il n'y auroit qu'à incliner le plan de la ſection du côté de ce petit axe.

prob. 225.

THEOREME I.

La ſection plane Elliptique faite dans l'intervale de deux Cônes Concentriques & ſemblables, comme entre les ſurfaces concaves & convexes d'un cône creux d'égale épaiſſeur, *eſt une couronne compriſe par deux circonferences d'Ellipſes, qui ne ſont pas équidiſtantes, & qui ne peuvvent être concentriques que dans les cônes ſcalenes, lorſque la ſection eſt perpendiculaire à l'axe.*

Soit [*Fig. 6.*] un cône FsG concentrique & ſemblable au cône BSA, dans lequel on le ſuppoſe, il eſt évident par la ſuppoſition, que leurs côtez BS, Fs; AS, Gs ſeront non ſeulement paralleles, mais équidiſtans dans la ſection du triangle par l'axe BSA. *Fig. 6.*

Il eſt encore clair que le plan de la ſection oblique DE, que nous ſuppoſons perpendiculaire au triangle par l'axe, étant également incliné à l'axe commun SX, de l'un & de l'autre cône, il ſera des Ellipſes ſemblables DRE dans le grand, & dbe dans le petit.

Il faut préſentement faire voir que quoique les deux ſurfaces des cônes ſoient équidiſtantes, & leurs baſes, concentriques, les ſections Elliptiques ne le ſont pas; des points D & e ſoient tirées les perpendiculaires Dx, eK, qui ſeront égales par la ſuppoſition.

Puisque l'angle Dds exterieur au triangle dse eſt plus grand que l'interieur oppoſé des, ou ſon égal DES, la ligne Dd, compriſe entre les deux paralleles SB, sF ſera plus courte que la ligne eE compriſe entre les paralleles équidiſtantes de ces premieres; car puiſque Dx = eK, faiſant Ky = dx, le côté ey ſera = Dd; or puiſque l'angle eEK eſt plus petit que eyK, c'eſt-à-dire, la ligne eE plus oblique ſur

Digitized by Google

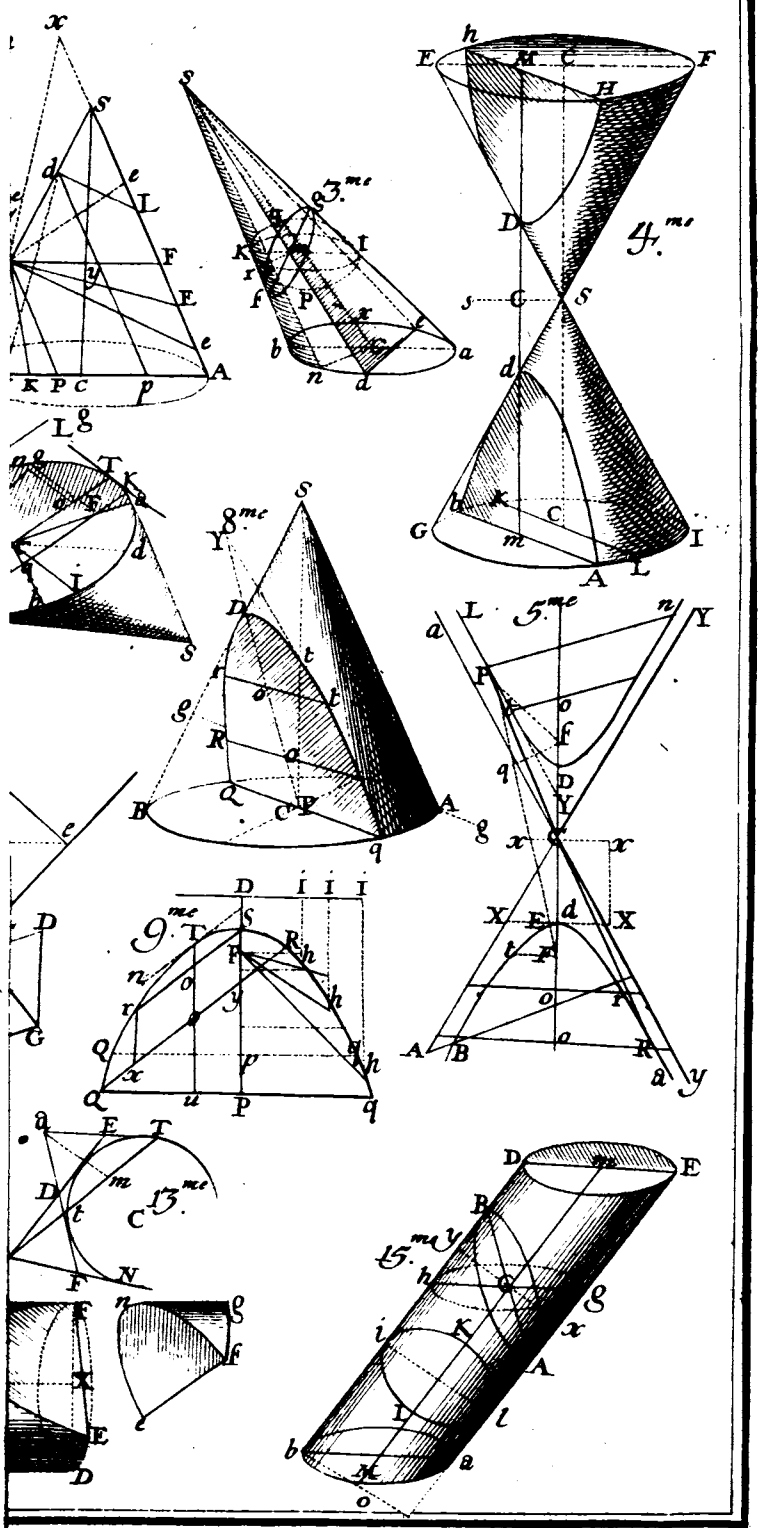
EK, elle ſera plus grande que *ey*, *ce qu'il falloit démontrer*; donc les Ellipſes DRE & *dbe* s'approcheront plus vers D que vers E ſur l'axe DE; par conſéquent elles ne ſeront ni équidiſtantes, ni concentriques, *ce qu'il falloit* premierement *démontrer.*

SECONDEMENT. Si le cône au lieu d'être droit étoit ſcalene, il eſt clair que l'axe étant oblique à ſa baſe circulaire ſera perpendiculaire à quelques ſections Elliptiques; dans ce cas nous pouvons conſiderer la figure 6. differemment du cas précedent, en ſuppoſant la baſe BA Elliptique, & la ſection oblique DE circulaire [ſi l'on veut] ou Elliptique.

IL eſt clair que les diſtances des Ellipſes de la baſe AB dans la ſection du triangle par l'axe BSA ſont égales en BF & AG; parce que le diametre commun BA eſt également incliné aux côtez des cônes intérieur & extérieur; mais entre ces deux extremitez on ne peut trouver aucune partie des deux circonferences des Ellipſes, qui ne ſoient plus ou moins éloignées. Pour le démontrer, ſoit un plan SNX perpendiculaire au triangle par l'axe BSA, qui coupera les Ellipſes ou les cercles DRE & *dbe* ſuivant une ligne *on*, qui ſera perpendiculaire à ce triangle, de même que XN; par conſéquent ces deux lignes *on*, XN ſeront paralleles entr'elles, donc leurs parties *ln*, LN compriſes auſſi entre deux paralleles SN & *s*L ſeront égales entr'elles; mais l'intervale *ln* des circonferences de la ſection oblique n'eſt pas égal aux intervales D*d*, & E*e*; puiſqu'il eſt plus long que l'un & plus petit que l'autre; donc l'intervale LN des deux Ellipſes de la baſe ne ſera pas égal aux diſtances BF, AG; en effet la ſection *ba* par la perpendiculaire *on* parallelement à la baſe BA ſera des Ellipſes ſemblables dans l'un & l'autre cône, auſquelles l'axe *on* eſt commun avec une ordonnée de la ſection oblique; or les diſtances des deux cônes en D*d* & *bf* ſont entr'elles comme DO à *b*O; ainſi le rapport de D*d* à *bf* augmente depuis le triangle par l'axe juſqu'à la ſection perpendiculaire au plan en Q*n*, & au contraire elle diminuë depuis le point *n* juſqu'en E; donc la diſtance LN ſera moyenne entre celle des extremitez BF & AG. Elle ſera plus petite ſi DE ou BA eſt un grand axe, ou plus grande ſi BA eſt un petit axe.

DE cette inégalité de diſtances des Ellipſes concentriques à leur axe, s'enſuit néceſſairement celle de tous les points d'une extremité d'un diametre à l'autre; puiſqu'elles ſe rapprochent & s'éloignent d'une diſtance proportionelle à celle des axes; donc les Ellipſes de la baſe, quoique concentriques, ne ſont pas équidiſtantes, *ce qu'il falloit démontrer.*

Digitized by Google



UNIV. OF MICH.
Digitized by Google

Digitized by Google

Scolie.

Il faut cependant remarquer, que, quoique les Ellipſes concentriques ſemblables ne ſoient pas équidiſtantes, meſurées ſur differens axes & diametres, elles le ſont cependant ſur les mêmes axes & ſur les mêmes diametres; & même non ſeulement ſur toutes les lignes droites qui traverſent ces deux circonferences, mais encore ſur celles qui ne ſont que toucher l'intérieure ſans la couper, ce qui fournit une maniere aiſée de faire une Ellipſe *Aſymptotique* à une autre donnée; il ſuffit d'en avoir un ſeul point, comme nous le dirons au ſecond Livre. Je me ſers de ce terme, parce que cette proprieté qui eſt ſemblable à celle de l'hyperbole à l'égard des aſymptotes, a donné occaſion à M. de la Hire * d'appeller les ſections côniques, concentriques, & ſemblables *Aſymptotiques*.

* *Sect. con. l. 6. p. 128.*

Corollaire I.

On peut étendre cette propoſition aux autres ſections qu'aux Ellipſes, ſi l'on veut conſiderer avec les Mathematiciens la parabole, comme une Ellipſe dont l'axe eſt infiniment long, & l'hyperbole comme une Ellipſe renverſée, qui a ſes Foyers en dehors; en effet ſi l'on coupe un cône creux d'égale épaiſſeur, de maniere que le plan coupant faſſe une de ces deux ſections, on remarquera viſiblement, que la courbe de la ſurface intérieure n'eſt pas parallele à celle de l'extérieure.

Application à l'Uſage.

Cette propoſition fait voir que les arcs des arêtes de Doële & d'Extrados des faces des voutes côniques, qui ſont obliques à la direction de l'axe, comme aux Trompes biaiſes & ſurbaiſſées à leur face, ne doivent pas être paralleles entr'eux, comme les font quelques Auteurs de la Coupe des pierres; car ſi l'arc de doële n'eſt pas plus près de l'extrados à une Impoſte, qu'à l'autre du côté de l'angle le moins aigu, la voute deviendra moins épaiſſe du côté oppoſé qui eſt le plus long, de ſorte que le côté & le piédroit le plus long & le plus chargé deviendroit le plus foible, ce qui eſt évidemment contre la bonne conſtruction.

Il ne faut pas dire que cette difference eſt ſi peu conſiderable, qu'on lui peut préferer la ſimetrie extérieure de la face; car ſans faire de ſuppoſition de cas extraordinaire, l'axe ED peut fort bien être perpendiculaire au côté SB, ſi l'angle S étoit plus ouvert, par exem-

Digitized by Google

ple, de 60. degrez, alors le même axe feroit en E un axe de 30. degrez avec le côté SA, or dans cette ſuppoſition il eſt clair que la voute ſeroit moitié moins épaiſſe à l'impoſte SE qu'à l'impoſte SD; car les diſtances des paralleles SB, ſF, SA, ſG ſont en raiſon des ſinus des angles, que la ligne ED fait avec les côtez; mais le ſinus total eſt double de celui de 30. degrez, donc la diſtance ek, c'eſt-à-dire l'épaiſſeur de la voute vers E i ne ſera que la moitié de D x, qui eſt celle du côté SD. Il n'eſt pas néceſſaire de démontrer ce rapport qu'on apperçoit d'un coup d'œil par celui des triangles ſemblables EKe, & ESD, ſi l'angle D eſt ſuppoſé droit, & l'angle S de 60. degrez, ce qui n'eſt pas de même dans la figure 6; or eK eſt égal à la diſtance des paralleles vers D & eE, celle des mêmes ou de leurs égales priſe obliquement ſur la ligne ED; donc, &c.

En ſecond lieu, ce problême fait voir, que lorſqu'un ceintre eſt Elliptique on ne peut lui faire un ceintre parallele qui ſoit auſſi Elliptique, de ſorte que s'il s'agit, par exemple, d'un Bandeau ou d'une Archivolte, & que l'on faſſe les deux arêtes de doële & d'intrados Elliptiques, il ſera inégalement large, & s'il eſt par-tout également large les deux arêtes ne ſeront pas exactement Elliptiques, ce qui eſt ſurprenant & incroyable aux Ouvriers, & aux gens qui n'ont point de Theorie.

THEOREME II.

Pl. 2. *Une Section Cônique donnée peut être celle d'une infinité de Cônes differens.*

Fig. 16. 17. & 18. Soit [Fig. 16. 17. & 18.] une ſection cônique DAC, dont AB eſt un diametre, auquel la ligne CD eſt une ordonnée, diviſée en deux également en M, on lui menera par ce point une perpendiculaire F E, de longueur priſe à volonté ſur un plan incliné à celui de la ſection cônique donnée, d'une telle inclinaiſon que l'on voudra (ce qu'on ne peut repréſenter dans ces figures qu'en perſpective) ſur cette ligne F E comme diametre, on décrira un cercle FDEC, dont la ligne DE ſera une corde commune à l'ordonnée de la ſection cônique: ſi par les points EABD on tire les lignes ES, FS, qui ſe rencontreront en S, je dis que le ſommet S ſera celui d'un cône, qui aura pour baſe, ou ce qui eſt la même choſe, pour ſection parallele à la baſe, le cercle FDEC, & pour autre ſection la ſection donnée DAC, ce qui eſt clair par la conſtruction & par la generation du cône, ſuppoſant qu'une ligne SB, immobile ſur ſon point S, parcourt la circonference du cercle DFCE; puiſque par la même conſtruction cette ligne paſſera par les deux points communs DE, & par les extremités des diametres AB, EF des deux ſections le cercle & l'Ellipſe; or puiſque le diametre du

tre du cercle FE peut être varié de longueur, & que l'on peut même changer la position de son centre en l'approchant ou l'éloignant du point M, il est visible que le point S changera aussi de position, puisqu'elle dépend de celle des extremitez de ce diametre, par exemple, si au lieu du terme E on en prenoit un autre plus en dehors en K ou en L, le point S tomberoit en *x* ou en *y*, & de même si l'on rapprochoit ou éloignoit l'autre terme F, le point S tomberoit plus haut ou plus bas; donc on peut faire passer une infinité de surface de cônes differens par la circonference de la section cônique donnée, *ce qu'il falloit démontrer.* Fig. 17.

Corollaire.

De-la il suit que si une ligne AS, immobile sur le point S, pris à volonté, se meut au tour d'une section cônique ouverte, comme la parabole ou l'hyperbole, il se formera une pyramide mixte, qui sera toujours une portion de cône, & par conséquent dont les sections qui ne seront pas paralleles à la base ouverte donnée, pourront être connuës en cherchant la base du cône, dont cette pyramide mixte est une partie, de la maniere que nous venons de le dire. Fig. 19.

Ou bien sans achever le cône, ni connoître le cercle de la base, on peut les connoître par la comparaison des parties des soustangeantes, qui sont au dessus & au dehors du cône [par l'article 45.]

Soit, par exemple, la base donnée ARP une parabole, si l'on suppose la pyramide ARPS coupée par un autre plan incliné à cette base, dont l'interfection soit AP, & qui coupe le côté SR en H, on menera pas un point quelconque de la base, comme T, une tangente TN, qui rencontrera l'axe MR de la base prolongé en N, & ayant tiré NS, on imaginera un plan TNS, qui touchera la pyramide suivant la ligne TS menée du point d'attouchement de la base au sommet S, laquelle coupera la courbe AHP en *u*, par où on menera dans le plan incliné une ligne *ux* parallele à AP, & un autre *uy* tangeante à la même courbe, qui rencontrera en *y* l'axe M*y*, qui est dans le même plan que MN; si la longueur H*y* est plus petite que H*x*, c'est une marque que la section qu'on veut connoître est une hyperbole; si au contraire elle étoit plus grande, comme LE à l'égard de E*d*, ce seroit une Ellipse, & si elle étoit égale, comme on suppose *m*R & RN, qui ne le sont cependant pas dans la figure, par exemple, *d*I & I*n*, ce seroit une parabole, ce qu'il est plus facile d'appercevoir en examinant, si les plans *nd* & NM sont paralleles entr'eux.

Digitized by Google

Application à l'uſage.

CETTE propoſition fait voir que l'on peut appliquer à toute ſorte de voutes côniques tel ceintre de face qu'on jugera à propos ; avec telle poſition ou inclinaiſon de l'axe qu'on jugera convenable à la voute qu'on ſe propoſe de faire, par exemple, qu'on peut faire une Trompe de niveau ou rampante, dont le ceintre de face ſoit ſurhauſſé ou ſurbaiſſé de telle meſure qu'on voudra, & connoître dans quelle ſituation ſa doële ſera circulaire.

SECONDEMENT, elle fait connoître les changemens qui arriveroient, ſi le ceintre de face étoit d'une ſection ouverte, par exemple, parabolique, comme il l'eſt en effet dans les *Trompes ſur le coin* à plomb, dont l'axe eſt de niveau ; ainſi ſuppoſant que le mur ſoit en talud, la courbe ſe changera en hyperbole, & s'il étoit en ſurplomb elle deviendroit une Ellipſe ; cependant l'Architecte eſt le maître de choiſir pour ceintre de face la courbe qu'il voudra.

DE même ſi le ceintre de face d'une Trompe cônique à pans à plomb, qui eſt ordinairement une hyperbole, lorſque l'axe eſt de niveau, eſt changé par un talud, il ne changera pas de genre de courbe, mais il deviendra ſeulement une hyperbole differente de celle qui étoit le ceintre à plomb.

EN un mot ce Theoréme fait connoître la nature de tous les changemens que peuvent cauſer les differens contours des ceintres de face des Trompes, & ceux de leurs *Trompillons*, qui peuvent ne leur être pas paralleles, & tous ceux qui proviennent des inclinaiſons à l'horiſon, & déclinaiſon de la perpendiculaire ſur la face, ce qui comprend toutes les trompes biaiſes & rampantes, aſcendentes ou deſcendentes, & les joints de Tête ; de ſorte qu'on peut dire que ce Theoréme eſt le fondement de toutes les voutes côniques. Paſſons aux cylindriques.

CHAPITRE III.

Des Sections des Cylindres coupez par des Plans.

55. ON diviſe les cylindres comme les cônes, en *Droits* & *Scalenes.*

ILS ſont appellez *Droits*, lorſque leur axe eſt droit, c'eſt-à-dire,

Digitized by Google

perpendiculaire à leur baſe, comme le cylindre BDF *a* eſt droit ſur la ponctuée B*a* [*Fig.* 14.] parce que ſon axe XC eſt perpendiculaire ſur B *a*. *Fig.* 14.

56. Ils ſont appellez *Scalenes*, lorſque leur axe *m*M [*Fig.* 15.] eſt oblique ſur la baſe *ba* ou DE du cylindre *b*D E *a*. *Fig.* 15.

Cette difference de poſition d'axe à l'égard de la baſe, en peut faire dans la poſition des ſections du cylindre, comme elle en fait dans celles du cône.

57. La ſection d'un cylindre coupé par une ſurface plane ne peut varier que de trois manieres.

I.° Lorsque le plan coupant paſſe au long de l'axe ou parallelement à l'axe, la ſection eſt un *Parallelograme* rectangle, ſi le cylindre eſt droit, & obliquangle, s'il eſt ſcalene, ou il peut auſſi être rectangle, ſi la ſection eſt perpendiculaire au plan paſſant par D *a*.

58. 2.° Lorsque le plan coupant eſt parallele à la baſe B *a* comme *a b*, la ſection eſt un *Cercle*; parce qu'on ſuppoſe toujours un cylindre de baſe circulaire, & que la ſection parallele lui doit être ſemblable & égale, à cauſe que tous les côtez du cylindre étant paralleles à l'axe, les diametres ſeront tous égaux. *Fig.* 14.

59. 3.° Lorsque la ſection eſt oblique, comme B A, elle eſt toujours une Ellipſe dans le cylindre droit, quelle que puiſſe être l'obliquité du plan coupant à l'égard de l'axe; mais dans le cylindre ſcalene, la ſection, quoiqu'oblique, peut être un cercle, lorſque le plan coupant [*Fig.* 15.] étant perpendiculaire au parallelograme, par l'axe *b*DE*a*, fait avec les côtez des angles égaux à ceux de la baſe, mais en ſens *contraire*, c'eſt-à-dire, que l'angle DBA ſoit égal à l'angle *b a* E, ou (ce qui eſt la même choſe) B A E égal *a* D *b a*; car ſi par le point C, milieu de B A, on mêne *h g* parallele à *b a*, & que par le même point on tire *yx* perpendiculaire aux côtez *b* D, *a*E, on aura deux triangles égaux C*x*A & C*x g*; parce qu'ils ſont rectangles en *x*, & qu'ils ont les angles en A & *g* égaux (*par la ſuppoſition*) & le côté C*x* commun; donc les côtez CA, C*g* ſeront égaux entr'eux, de même que leurs oppoſez au ſommet *h*C & CB, donc les diametres *h g* & BA ſont égaux au diametre *b a* de la baſe circulaire, & les plans qui paſſent par ces lignes étant perpendiculaires à celui du parallelograme par l'axe, les ſections ſeront égales; par conſéquent celle par B A ſera un cercle, & tout au contraire *y x* perpendiculaire aux côtez ſera une Ellipſe, dont *y x* ſera le petit axe, de même que toute autre ſection oblique, qui ne ſera ni parallele à la baſe, ni *ſous-contraire* comme BA. *Fig.* 15.

COROLLAIRE.

D'ou il ſuit que [de même que dans le cône] les ſections Elliptiques peuvent varier infiniment, ſelon l'angle plus ou moins aigu, ou obtus, que le plan coupant fait avec l'axe du cylindre, enſorte qu'elles s'alongent ou ſe racourciſſent, depuis la poſition perpendiculaire à l'axe, juſqu'à ce qu'il lui devienne parallele.

61. Ou il faut remarquer, qu'il n'y a aucune difference de ces Ellipſes à celles du cône, ce qui ſurprend ceux qui n'ont pas fait une étude de cette matiere; il leur ſemble que l'Ellipſe cylindrique eſt uniforme à ſes deux extremitez, mais que la partie de celle du cône, qui eſt plus près du ſommet, doit être plus aiguë que celle qui eſt vers la baſe; on voit cette erreur exécutée dans une pratique des *Inſtitutions Geometriques d'Albert Duret*, où la courbe fait un jaret à chaque extremité de ſon axe; nous en montrerons la fauſſeté lorſque nous ferons voir, que la même Ellipſe peut être une ſection commune au cône & au cylindre. On en ſentira facilement la verité dès à préſent, ſi on ſe rappelle ce que nous avons dit [*Art.* 37.] que les ordonnées à un axe, qui ſont également éloignées du centre de l'Ellipſe, ſont toujours égales entr'elles, non ſeulement dans le cône, mais encore dans le cylindre; puiſque leurs quarrez ſont entr'eux en raiſon des rectangles des abſciſes, qu'on ſuppoſe égales, proprieté eſſentielle à l'Ellipſe.

Inſtitutionum Geometricar. l. 4. fol. 1. Arnhemiæ 1606.

Art. 37.

62. La ſeule difference qu'il y a dans ces ſections c'eſt, que l'axe du cylindre paſſe par le centre de l'Ellipſe cylindrique, & que l'axe du cône droit ne paſſe pas par celle de la cônique, mais plus ou moins près, ſuivant qu'elle eſt plus ou moins oblique, comme on le voit à la Fig. 6. où l'axe du cône coupe celui de l'Ellipſe en *o*, la raiſon en eſt bien ſenſible dans le cône droit, où l'axe du cône XS diviſe l'angle du ſommet BSA en deux également, il ne peut diviſer de même une ligne terminée à ſes côtez, qui ne lui eſt pas perpendiculaire, comme DE, dans le triangle par l'axe; puiſque n'étant pas parallele à BA, ſes parties D*o* & *o*E, ne ſont pas proportionelles à BX & XA; mais cette difference ne fait rien à la figure de l'Ellipſe. Toutes les ſections que l'on peut faire dans le cylindre reviennent aux trois dont nous avons parlé, quoiqu'elles ne ſoient pas entieres; car la ſection NFE, qui ne coupe le cylindre [*Fig.* 14.] qu'en partie, eſt une portion d'Ellipſe, qui ſeroit entiere, ſi le cylindre avoit été coupé entierement, comme il le ſeroit étant prolongé.

Fig. 14.

63. Cette ſection incomplete retranche un ſolide en *fg*, qu'on

Digitized by Google

appelle un *Onglet*, à cauſe de ſa reſſemblance avec l'ongle d'un doigt.

Application à l'uſage.

La connoiſſance des ſections du cylindre eſt la baſe de celles des differences des ceintres des faces de berceaux, & des courbes de leurs joints de tête; je ne parle point de ceux de lit, qui ſont des ſections preſque toujours rectilignes.

Les Berceaux, dont les *Arcs-droits* ſont circulaires, ſont de vraïes portions de *Cylindres Droits*, & ceux qui ſont ſurmontez ou ſurbaiſſez ſont des portions de cylindres ſcalenes, ce que l'on peut démontrer de la même maniere que nous avons fait pour les cônes de baſe Elliptique; car ſi le petit axe de l'Ellipſe, faite par la ſection perpendiculaire au parallelograme par l'axe du cylindre, ne peut atteindre à la circonference d'un cercle, qui aura pour diametre la perpendiculaire *i l*, ſur les côtés *b* B, *a*E, il eſt viſible qu'en inclinant ce plan vers L ou K, le diametre LK peut être alongé, au point qu'il devienne égal à *i l*, ainſi quoique la baſe *b a*, oblique à l'axe M *m*, ou *b o* perpendiculaire à cet axe, ſoit ſuppoſé Elliptique, ſi étroite que l'on voudra, la ſection *i* L *l* K pourra être un cercle, & le cylindre ſera ſcalene dans un ſens different de ce qu'il eſt ici. *Fig.* 15.

Il peut arriver, & il arrive en effet, comme nous le dirons au Livre 4. par quelque raiſon de conſtruction, qu'un Architecte juge à propos de faire le ceintre de l'arc droit d'un berceau en Courbe hyperbolique ou parabolique, alors il ne s'agit plus de conſiderer la voute comme une portion de cylindre proprement dit, mais d'un Cylindroïde, dont nous allons examiner les ſections.

THEOREME III.

La Section plane des Eſpeces de Cylindres, qui ont pour Baſe une Parabole ou une Hyperbole, eſt une Section Cônique de même eſpece. PLANC. 2.

Si l'on ſuppoſe qu'une ligne A *a* (*Fig.* 20.) ſe meut parallelement à elle-même autour d'une ſection cônique ouverte, elle formera par ce mouvement une eſpece de cylindre, que nous appellerons un *Cylindroïde*; parce qu'il reſſemble au cylindre ordinaire, qui a pour baſe un arc de cercle ou d'Ellipſe. *Fig.* 20.

Soit le cylindre A*ad* D*Bb*, qui a pour baſe une courbe ADB,

Digitized by Google

que je ſuppoſe ici une parabole, je dis que s'il eſt coupé par un plan parallele ou oblique à ſa baſe ADB, la ſection ſera encore une parabole.

Si le plan coupant eſt parallele à la baſe, la propoſition eſt évidente.

S'il ne l'eſt pas, ſuppoſons qu'il ſoit incliné comme en L*d*, & qu'il coupe celui de la baſe prolongée ſuivant la ligne MK, à laquelle ſoient menez deux plans paralleles A*b*, F*e*, qui coupent les précedens en ABHI & FE, *fe* perpendiculairement à celui de la baſe MO, & parallelement à MK.

A cauſe des paralleles SC, *d*D, perpendiculaires au plan de la baſe, on aura les triangles ſemblables LC*c*, LG*g*, LD*d* dans le plan de l'axe CD de la parabole, & C*s* du cylindre, & à cauſe que MK (par la conſtruction) eſt parallele à AB & FE, elle le ſera auſſi à HI & *fe*; donc HI eſt parallele à AB, & *fe* à FE, & AI & F*e* ſont des parallelogrames; puiſque A*a*, B*b*, F*f*, E*e*, qui ſont les côtez du cylindre, ſont paralleles entr'elles; donc AH = BI, & F*f* = E*e* de même que HI = AB, & FE = *fe*; par conſéquent LD : L*d* :: LG : L*g* :: LC : L*c*, & en diviſant CD : *cd* :: GD : *gd*; mais par la ſuppoſition que la baſe ADB ſoit une parabole, on aura $\overline{CB}^2 : \overline{GE}^2$ :: CD : GD :: *cd* : *gd*, & puiſque CB = *c*I ou AB = HI, & FE = *fe* & ou ſa moitié GE = *ge*, on aura $\overline{c\mathrm{I}}^2 : \overline{ge}^2$ :: *cd* : *gd*, c'eſt-à-dire, les quarrez des ordonnées en même raiſon que les abſciſes; donc H*d*I eſt une parabole, ſi ADB en eſt une, *ce qu'il falloit démontrer.*

On peut démontrer la même choſe de l'hyperbole, ſi la baſe ADB eſt hyperbolique, ou de l'Ellipſe, ſi elle étoit portion d'une Ellipſe, avec cette difference, que dans cette derniere la ſection pourroit devenir un cercle, comme nous l'avons dit des cylindres ſcalenes; car faiſant abſtraction de ce cas, les ordonnées correſpondantes CB, *c*I ſeront toujours égales entr'elles, de même que GE, *ge*, & les abſciſes DC, *dc*, DG, *dg* auront toujours le même rapport dans la baſe & dans la ſection oblique, ce qui eſt clair en les conſiderant comme des parties des côtez du triangle L*d*D, coupé par des paralleles *c*C, *g*G, *d*D; par conſéquent les abſciſes reſtant de la longueur de leurs diametres ſeront encore en même raiſon; donc il y aura même rapport des rectangles de leurs parties aux quarrez des ordonnées.

[o]

Digitized by Google

Application à l'uſage.

On voit par cette propoſition quelles doivent être les courbes des ceintres de face, ou les joints de Doële des Berceaux Biais ou Rampans, ou en Talud, dont les arcs-droits ne ſont pas circulaires, mais de quelqu'autre des ſections côniques, qui les rendent ſurhauſſez ou ſurbaiſſez en portion de parabole, d'hyperbole ou d'Ellipſe; car quoique nous ayons mis les Berceaux Elliptiques au rang des cylindres ordinaires, mais ſcalenes, ils peuvent être compris dans cette propoſition, qui montre plus generalement, pourquoi la ſection oblique & la baſe ſont de même eſpece.

Et pour donner un exemple particulier de pratique, cette propoſition fait voir, que les arêtes des joints de Lit de cette eſpece de voute, en ſaillie hors du mur, qu'on appelle *Trompe en Tour ronde, érigée ſur une ligne droite*, dont l'arc droit eſt hyperbolique, comme il le doit être à celles qui portent les cabinets de l'Hôtel de la Feüillade, ſur la ruë des Bons Enfans, auprès de la Place de Victoire, à Paris, ſont toutes des arcs d'hyperboles differentes, plus ou moins, alongées, ſelon qu'elles s'approchent ou s'éloignent du milieu.

En ſecond lieu, elle fait voir que la projection d'une ſection cônique quelconque, inclinée au plan de la baſe horiſontaleou verticale eſt encore une Courbe de même eſpece; parce qu'on peut imaginer que les lignes perpendiculaires à ce plan paſſant par tous les points du contour de la courbe, forment un cylindre ou cylindroïde, dont la baſe eſt la Courbe de projection, & la courbe projettée peut être conſiderée comme la ſection oblique de ce cylindre.

THEOREME IV.

La Section d'un Cylindre creux, dont l'épaiſſeur eſt par-tout égale, coupé par un plan qui n'eſt pas parallele à ſa baſe, eſt une Couronne d'Ellipſe, compriſe par deux Ellipſes ſemblables & concentriques, mais non pas équidiſtantes, excepté la ſection ſouſcontraire dans les cylindres ſcalenes, où elle eſt une Couronne de Cercle. Planc. I.

Soit [*Fig.* 14.] une portion de cylindre *a a b* B, creuſe d'une cavité F *f* G *g*, qui eſt une eſpace cylindrique concentrique, & ſemblable à ce cylindre ſur l'axe commun C *x*, auquel la ſection plane AHB eſt oblique, je dis que les Ellipſes AHB & FIG, formées par cette ſection à la ſurface interieure & exterieure de ce cylindre creux, ne ſont pas équidiſtantes, quoiqu'il ſoit par-tout également épais. *Fig.* 14.

Digitized by Google

DEMONSTRATION.

Si l'on coupe un plan paſſant par l'axe du cylindre *a abB*, il ſe formera à l'interſection des ſurfaces des triangles ſemblables AB*a*, FB*f*, dont les lignes *a*A & *f*F ſont paralleles par la ſuppoſition, que les ſurfaces exterieure & interieure ſont équidiſtantes; donc B*a*:BA :: B*f*:BF, & en diviſant :: *af*: *a*F; mais B*a* côté d'un angle droit, B*a*A eſt plus petit que BA, qui eſt l'hypotenuſe; donc *fa*, diſtance des deux ſurfaces à la baſe droite eſt plus petite que FA, diſtance des mêmes à la ſection oblique, *ce qu'il falloit* premierement *démontrer.*

PRESENTEMENT nous pouvons démontrer, que l'intervale de ces mêmes ſurfaces, coupées par un plan perpendiculaire au premier, ou ſi l'on veut, au triangle *a*BA, & par l'axe *c*C, ſera égal, dans la ſection oblique AB, à celui de la baſe droite *a*B, par la ſeule raiſon que l'interſection MP du plan eſt perpendiculaire à l'axe C*c*, comme le Rayon de la baſe *ca* eſt perpendiculaire au même axe, & comme le rayon *cp* de la même baſe, lequel eſt parallele à CP.

POUR le concevoir plus diſtinctement, ſoit *m*MP*p* le ſecond plan perpendiculaire au parallelograme par l'axe *a ab*B, ce qu'il faut imaginer dans la figure, où il ne l'eſt qu'en perſpective; parce qu'en projection ce plan ne doit être repréſenté que par une ligne droite; or puiſqu'il paſſe par l'axe, il ſera deux parallelogrames, un à la ſurface interieure *l*LO*o*, l'autre à l'exterieure *m*MP*p*, dont les côtez ſeront paralleles entr'eux, & équidiſtans d'un côté & d'autre par la ſuppoſition; donc PO eſt égal à *p o*, mais *po* eſt auſſi égal à *fa*; donc PO eſt égal à *fa*, c'eſt-à-dire, que l'intervale des deux Ellipſes AHB & FOG au petit axe, eſt le même que celui de la vraïe épaiſſeur du cylindre; mais hors de cet axe il s'alonge continuellement juſqu'au grand axe AB, où cet intervale FA eſt le plus grand; donc les intervales des deux Ellipſes ſont inégaux, quoique les ſurfaces ſoient équidiſtantes entr'elles, *ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

DE-LA il ſuit que la portion du grand axe, qui eſt entre les deux Ellipſes, peut autant varier, à l'égard de celle du petit axe, qui marque la vraïe épaiſſeur du cylindre, qu'une ligne tirée obliquement entre deux paralleles à l'égard de la perpendiculaire; ainſi ſuppoſant que l'angle d'inclinaiſon AB*a*, de la ſection oblique à l'axe *c*C, ſoit de 60 degrez, la diſtance FA ſera double de l'épaiſſeur *fa*, comme GB de B*g*.

Digitized by Google

Ce que nous venons de démontrer dans le cylindre Droit eſt encore vrai dans le ſcalene, comme il eſt aiſé de l'appercevoir en ſuppoſant, que la courbe BMAP eſt un cercle, qui ſoit la baſe du cylindre ſcalene, alors la courbe B *m* a *p* ſera une Ellipſe; la ſeule difference qui en réſulte, eſt un changement de poſition dans les axes de la ſection inclinée à la baſe; car la ligne *m p* devient alors le grand axe, parce qu'elle eſt égale au diametre du cercle MP, égal par la ſuppoſition à B A, lequel eſt plus grand que B a, comme l'hypotenuſe d'un triangle rectangle A a B à l'égard de ſon côté B a.

Application à l'uſage.

Par le moyen de cette propoſition nous ferons voir au quatriéme Livre, qu'on ne peut faire deux ceintres Elliptiques de doële & d'extrados, qui ſoient équidiſtans à la Face d'une voute biaiſe, qu'on veut faire d'égale épaiſſeur, ſans la rendre inégale à l'Arc-droit. Elle fait auſſi voir les inégalitez qui réſultent à l'épaiſſeur des voutes biaiſes, lorſque leurs ceintres de face ſont faits d'Ovales, compoſées de portions de cercles concentriques; enfin elle ſervira à montrer la fauſſeté de l'ancien trait des voutes ſphéroïdes ſur un plan Elliptique.

CHAPITRE IV.

Des Sections Planes de quelques Corps régulierement irréguliers.

On peut imaginer une infinité de corps formez par des révolutions de lignes courbes, autour de leurs axes, ou de leurs tangentes, ou par le mouvement de quelques ſurfaces muës de differentes manieres; mais nous nous bornons à ceux dont on voit des exemples dans les parties des voutes uſuelles, qui ſe réduiſent à trois ou quatre eſpeces.

66. *La premiere*, eſt de ceux qui ſont formez par la révolution des Ellipſes, qu'on appelle ſphéroïdes; ſi la révolution ſe fait ſur le petit axe, le corps qui en réſulte ſera appellé *Sphéroïde Applati*, tels ſont à peu près les Oignons, les Pomes & quelques Citroüilles. Si la révolution ſe fait ſur le grand axe AX, nous l'appellons *Sphéroïde oblong*, tels ſont les Melons, & pluſieurs autres fruits, & particulierement les œufs. *Fig.* 21.

Digitized by Google

Fig. 22. 23. 67. *La ſeconde eſpece*, eſt de ceux qui ſont formez par la révolution d'une ſection cônique ouverte, Parabole, ou Hyperbole, tournant ſur ſon axe, on l'appelle *Conoïde*, tels ſont les corps ASB, aux figures 22. & 23.

La troiſiéme eſpece, moins réguliere, eſt celle des corps appellez *Ellipſoïdes*, qui ne ſont formez par la révolution d'aucune Ellipſe, conſtante ſur un de ſes axes, mais par la révolution d'une Ellipſe ſur un axe conſtant, dont l'autre varie de longueur; ſuivant le contour d'une autre Ellipſe, qui eſt perpendiculaire à la premiere, ou ſi l'on veut en prendre une autre idée, c'eſt une ſuite d'Ellipſes perpendiculaires à un axe, laquelle diminuë ſuivant le contour de deux autres Ellipſes, qui ſe croiſent ſur cet axe commun, c'eſt ce que j'appelle *Ellipſoïde*, & qui eſt appellé en Architecture, *Voute Sphérique ſurbauſſée ou ſurbaiſſée ſur un plan ovale*.

Fig. 24. *La quatriéme eſpece*, eſt celle des corps formez par la révolution d'une ſection cônique fermée, cercle ou Ellipſe, autour de ſa tangente, ou autour d'un autre cercle ou d'une Ellipſe, au plan duquel celui de l'Ellipſe ou du cercle generateur eſt toujours perpendiculaire. Dans le premier cas le corps s'appelle *Anneau fermé*, & dans le ſecond ſimplement *Anneau*, telles ſont les *Voutes ſur le Noyau*.

Fig. 25. *La cinquiéme eſpece*, eſt celle des corps formez par le mouvement d'un cercle ou d'une Ellipſe tournant autour d'une Hélice ou ligne en vis, enſorte que ſon plan ſoit dirigé à l'axe de l'Hélice, ou perpendiculaire à ſa Tangente. J'appelle ce corps *Hélicoïde*, tels ſont les vis & colomnes torſes, & en fait de voute, les *Berceaux tournans & rampans, & vis St. Giles*.

THEOREME V.

La Section d'un Sphéroïde & d'un Conoïde régulier, coupé par un Plan perpendiculaire à ſon Axe; eſt un cercle, & s'il lui eſt parallele ou oblique elle eſt une Ellipſe.

Fig. 21. 22. & 23. La premiere partie de ce Theorême eſt évidente, car puiſque le ſphéroïde ou conoïde eſt ſuppoſé formé par la révolution d'une demie Ellipſe ABX, ou d'une ſection cônique ouverte ASB (*Fig.* 22. & 23.) immobile ſur un de ſes Axes, chaque ordonnée à cet axe, comme CB, Kg, (*Fig.* 21.) ou CB, gT (*Fig.* 22. & 23.) décrira par ſa révolution un cercle dont elle eſt le rayon, & comme on peut appliquer une ordonnée à chaque point de l'axe, il ſuit que toutes les ſections,

Digitized by Google

faites par des plans qui lui ſont perpendiculaires, ſont des cercles dans les ſphéroïdes, alongez ou applatis, & dans les conoïdes.

Quant à la ſeconde partie de ce Theorême, touchant les ſections paralleles & obliques à l'axe, elle eſt démontrée dans la 15. propoſiton des Conoïdes & Sphéroïdes d'Archimede.

Premierement. Il n'eſt pas difficile à comprendre, que les ſections paralleles à l'axe ſont des courbes ſemblables à la Generatrice. Il n'eſt pas tout à fait ſi clair que les obliques ſont des Ellipſes; nous allons comprendre l'un & l'autre cas dans une démonſtration differente de celle d'Archimede.

Soit l'Ellipſe ADXB la ſection du ſphéroïde par ſon axe AX, laquelle eſt la même que l'Ellipſe generatrice : ſi l'on ſuppoſe deux plans paralleles entr'eux BD, gh, & perpendiculaires à l'axe AX, & au plan paſſant par cet axe, leurs ſections dans le ſphéroïde ſeront des cercles repréſentez en perſpective par les courbes BLD, gmh, de même que celle du plan paſſant par l'axe perpendiculaire au plan BADX, ſera une Ellipſe repréſentée par la courbe ALX, laquelle aura deux ordonnées CL, Km communes aux cercles BLD, gmh. Enfin ſi l'on coupe le ſphéroïde par un plan incliné à l'axe AX, comme en EF, & perpendiculaire au plan BADX, la courbe de la ſection repréſentée par EmnF aura auſſi deux ordonnées communes aux ſections circulaires, ſçavoir In, Km; il faut démontrer que les quarrez de ces ordonnées ſont entr'eux, comme les rectangles EI × IF & EK × KF.

Par une proprieté dont nous avons parlé (Article 40) les lignes paralleles menées dans une ſection cônique, & coupées par une troiſiéme perpendiculairement ou obliquement, ſont des parties d'abſciſſes, dont les rectangles ſont proportionels, BI × ID : EI × IF :: gK × Kh : EK × KF; mais à cauſe des cercles des ſections perpendiculaires à l'axe, $\overline{BI} \times \overline{ID} = \overline{In}^2$ & gK × Kh = Km^{2}; donc EI × IF : EK × KF :: $\overline{In}^2 : \overline{Km}^2$; c'eſt-à-dire, que les quarrez des ordonnées ſont entr'eux comme les rectangles des abſciſſes; donc la courbe EmnF eſt une Ellipſe, *ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire.

D'ou il ſuit, que ſi le plan coupant eſt parallele à l'axe, la ſection ſera une Ellipſe ſemblable à la generatrice.

Et que ſi deux plans inclinez à l'axe ſont paralleles entr'eux, leurs ſections ſeront des Ellipſes ſemblables, ce qui s'étend auſſi aux cô-

noïdes Paraboliques ou Hyperboliques, ce que nous allons démontrer par une autre maniere, qui eſt celle d'ARCHIMEDE.

Fig. 22. 23. SOIT (*Fig.* 22.) la courbe ASB la ſection d'un conoïde parabolique, coupé par un plan paſſant par ſon axe SC & DF, la ſection d'un plan perpendiculaire au précedent, ſoit menée PT, parallele à DF, & tangente à la parabole au point T, duquel ſoit mené T*g*, ordonnée à l'axe SC, & parallele à AB, & par S la ligne S*i*; ſoit enfin E*x* perpendiculaire à DF, qui ſera auſſi dans le plan du cercle A*x*B baſe Droite du conoïde, & par conſéquent une ordonnée commune à cette baſe & à la courbe D*x*F. Par la proprieté du cercle $\overline{Ex}^2 =$ AE X EB; or * DE X EF : AE X EB :: $\overline{TI}^2 : \overline{Is}^2$, & TI = IP, parce que par la proprieté de la parabole *g*S = SP *; donc DE X EF : $\overline{Ex}^2$ :: $\overline{IP}^2 : \overline{IS}^2$; donc $\overline{Ex}^2$: DE X EF :: $\overline{SI}^2 : \overline{IP}^2$, & parce que les triangles F D*h*, PIS ſont ſemblables, on démontrera de même que les quarrez des autres ordonnées au diametre DF, auront toujours un même rapport aux rectangles des abſciſſes, que le quarré D*h* au quarré DF, dont la ſection ſera toujours une Ellipſe.

* *Voyez la Hire, Prop.* 29. *l.* 3.

* Art. 45.

Il eſt viſible que DF eſt le grand diametre, & que le petit ſera égal à D*h*.

Fig. 23. SECONDEMENT. Pour la ſection oblique du conoïde Hyperbolique, tout étant diſpoſé comme à la figure précedente, (*Fig.* 23.) AE X EB : DE X EF :: $\overline{SI}^2 : \overline{IT}^2$, or $\overline{Ex}^2$: DE X EF :: $\overline{SI}^2 : \overline{IT}^2$, qui eſt une proprieté de l'Ellipſe. On démontrera de même que les quarrez des autres ordonnées à ce diametre auront un pareil rapport à leurs abſciſſes, comme $\overline{SI}^2 : \overline{IT}^2$; or SI eſt plus petit que IT, puiſque PI eſt plus petit que IT par la proprieté de l'hyperbole, donc la ſection faite par DF eſt une Ellipſe, dont le grand diametre eſt DF.

Art. 45.

COROLLAIRE.

DE-LA il ſuit, que la ſection plane d'un ſphéroïde creux, d'égale épaiſſeur, eſt une Couronne compriſe dans la circonference de deux Ellipſes ſemblables & concentriques; mais non pas équidiſtantes, comme nous l'avons dit des ſections du cylindre & de quelques-unes du cône; ce qui nous ſervira au quatriéme Livre à montrer l'erreur du trait des voutes ſphériques, ſuivant les Auteurs de la Coupe des pierres.

Digitized by Google

La seconde espece de corps régulierement irréguliers que nous avons à connoître pour la pratique des voutes, sont les *Annulaires*, qui sont des cylindres pliez sur leurs axes, ordinairement en portion circulaire, ensorte que les axes & les côtez sont des arcs de cercles concentriques.

THEOREME VI.

La Section d'un Corps Cylindrique Annulaire, dont l'Axe est courbe, en forme de circonference de Cercle, & qui est coupé par un Plan, perpendiculaire à celui qui passe par l'Axe courbe, est une Ovale du quatrième Ordre.

Soit le corps cylindique HD*h*, fait par la révolution du petit cercle GHI, élevé perpendiculairement sur le plan du grand cercle I D *i*, dont le centre est C, autour duquel s'est fait la révolution du petit cercle GHI, ensorte que le diametre GI ait toujours été dirigé au centre C; si l'on suppose ce corps coupé par le plan ALBO perpendiculairement au plan I D *i*, dont la commune section soit AB, il se formera à la surface du cylindre annulaire une courbe ALBOA, qui sera une ovale du quatriéme ordre. *Fig.* 23.

Par un point quelconque N de la commune section AB, considerée comme l'axe de la courbe, soit tiré du centre C le rayon CMK, qui coupe en M le cercle *g*FG, concentrique à *i*DI, & sur sa partie MK = GI ou *gi*, soit élevé un plan perpendiculaire au plan ID*i*, qui coupera celui qui passe par AB, & dont la commune section sera NL perpendiculaire à l'axe AB de la courbe cherchée ALB.

Soit donc le rayon C*i*, ou son égal CD que l'on suppose mené perpendiculairement à A B = *a*, le diametre du petit cercle G I ou *gi* ou MK = *b*, AE = *c* ou AB = 2*c*, l'absciſſe AN = *x*, l'ordonnée NL ou NO = *y*, on aura par la nature du cercle CE = $\sqrt{aa - cc}$ & EN = $c - x$; donc CN = $\sqrt{aa - 2cx + xx}$, & KN = $a - \sqrt{aa - 2cx + xx}$, MN = KM − KN = $b - a + \sqrt{aa - 2cx + xx}$; mais par la nature du cercle le rectangle KN × MN = NL; ainsi multipliant KN × MN, & égalant le produit à yy, on trouvera $ab - 2aa + 2cx - xx + 2a - b\sqrt{aa - 2cx + xx} = yy$. Pour abreger la réduction, soit nommé $2a - b = e$ = Ig ou *i*G, ce qui étant substitué, on aura cette équation $-ae + 2cx - xx + e\sqrt{aa - 2cx + xx} = yy$, ou bien en transposant pour mettre tous les rationels d'un côté $xx - 2cx + ae + yy = e\sqrt{aa - 2cx + xx}$; pour en ôter l'Asymmetrie, il faut

Digitized by Google

quarrer les deux membres de l'équation, ce qui donnera $x^4 - 4cx^3 + 2aexx + 2yyxx + 4ccxx - 4acex - 4cyyx + 2aeyy + y^4 = -2ceex + eexx$, réduisant cette équation à o. selon l'ordre des dimensions de x suivant la coutume on aura :

$$\begin{array}{l} x^4 - 4cx + 2aexx - 4acex + y^4. \\ \quad - ee + 2cee + 2aeyy \\ \quad + 4cc - 4cyy \\ \quad + 2yy \end{array} = o$$

Laquelle équation exprime la nature de la courbe ALB de la maniere la plus simple, dans son état de generalité ; ainsi c'est une courbe du quatriéme ordre ; parce que les co-ordonnées x & y montent à la quatriéme dimension ; mais il y a des cas particuliers où elle devient plus simple, par exemple :

Si la section AB passe par le centre, il est visible que la courbe ALB se partage en deux cercles ibg & IHG, dont l'équation est $xx + ex + yy = o$. Aussi dans ce cas notre équation trouvée se laisse diviser par ce diviseur $\frac{xx - 2ax + 2ae}{1 - e + yy}$, & le quotient donnera ladite équation $\frac{xx + ex + yy}{-2a} = o$, pour le cercle ibg ou IHG, comme il doit arriver, si l'on prend IG égal à tout le grand diametre Ii, c'est-à-dire, si Ig ou e est égal o, auquel cas le corps Annulaire HDb devient une sphère, ensorte que la courbe de la section ALB en sera un cercle mineur. Notre équation la doit marquer en effet, si vous y omettez les termes où se trouve la lettre e; puisque $e = o$, l'équation generale se change en celle-ci.

$$x^4 - 4cx^3 + 4ccxx - 4cyyx + y^4 + 2yy = o$$

Dont on peut tirer la racine quarrée $xx - 2cx + yy = o$; or il est clair que cette équation particuliere est pour le cercle, dont le diametre est $2c = AB$, qui marque évidemment, que la section ALB dégenere en cercle.

Ce sont là tous les cas possibles où la courbe en question puisse devenir d'un ordre inferieur que du quatriéme.

La troisiéme espece, de corps régulierement irréguliers, dont nous

avons beſoin de connoître les ſections, & celle des *Cylindriques Héli-caïdes* (en termes d'Architecture) des voutes en *vis.*

Nous appellons *Cylindre Hélicoïde* un corps cylindrique, qui, au lieu de tourner dans un plan autour d'un centre, tourne en s'élevant autour d'un axe, comme le Lierre ou plutôt le Liſeron, s'éleve en embraſſant un arbre, d'où vient le mot *d'Hélice*, uſité en Architecture, tiré du Grec *Heliſſo*, *circumvolvo.* Tel eſt le corps E G M g D, (*Fig.* 25.) *Fig.* 25.

Corollaire I.

De cette définition on peut conclure, que la ſection de ce corps, coupé par un plan parallele à ſon axe, ne ſera pas d'une eſpece differente de celle du corps Annulaire dont nous venons de parler, ſi la baſe ou projection de l'Hélice eſt un cercle; car toutes les diſtances de l'axe à ce corps, meſurées horiſontalement ſeront égales à celle de la ſection de l'anneau à ſon centre, & toutes les ſections verticales par l'axe ſeront des cercles égaux, comme celles de l'anneau, coupé par un plan paſſant par le centre C, (*Fig.* 24) & perpendiculairement au plan *i* D I, ſuppoſant l'un & l'autre corps cylindrique d'égale groſſeur; il n'y aura donc de difference, que celle du changement de hauteur de toutes ces ſections circulaires, qui s'élevent comme par degré les unes audeſſus des autres, au long d'un axe incliné au plan de la baſe.

Corollaire II.

D'ou il ſuit que pour connoître & tracer la ſection de l'Hélice, il faut commencer par tracer celle de l'anneau ſuppoſé ſur ſa baſe, & coupé à même diſtance du centre, que l'Hélice l'eſt de ſon axe, & donner à l'axe de l'Hélice l'inclinaiſon qu'il doit avoir, laquelle ſe trouve par la hauteur de la ligne *ab* (*Fig.* 25.) Nous ne nous arrêtons pas ici à la deſcription de l'une & de l'autre courbe, que nous donnerons au ſecond Livre; il ſuffit d'expoſer aux yeux leur rapport par la figure 26.

Application à l'uſage.

74. Cette propoſition fait connoître quelle eſt la courbure du ceintre d'une interruption de voute ſur le noyau par un mur ou une ſaillie droite, comme pourroit être la Tour quarrée d'un clocher, au chevet d'une Ellipſe, ainſi voutée à ſon bas côté; mais il ſert principalement à trouver la Cherche droite, qui doit guider la cour-

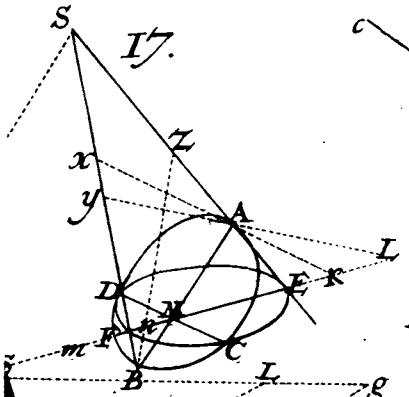
bure de la doële d'une voute ſur le noyau, ou d'une vis St. Giles perpendiculairement au rayon, venant du centre de la courbure de l'axe & des côtez, comme on en a beſoin pour l'appareil, ce que nous ferons voir dans le quatriéme Livre, où il s'agit de l'appareil; nous croyons n'avoir pas beſoin de nous étendre davantage ſur les changemens qui peuvent arriver à ces Courbes, par ceux qu'on peut faire aux ceintres des cercles generateurs IHG, ſoit en les ſurhauſſant ſoit en les ſurbaiſſant, ou à la courbure de l'axe, laquelle au lieu d'être circulaire pourroit être Elliptique; parce que nous pourvoirons dans la pratique à l'exécution de toutes ces variations; nous ne pouſſerons pas plus loin la Theorie des ſections planes, croyant en avoir dit aſſez pour les beſoins de la Coupe des Pierres; c'eſt pourquoi nous paſſerons à la ſeconde Partie de ce premier Livre, où nous tâcherons de connoître les Sections, que nous appellons *Solides*; parce qu'elles ſont faites par la pénetration des Corps.

SECONDE

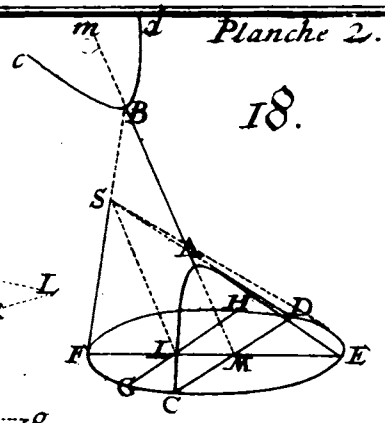
Digitized by Google

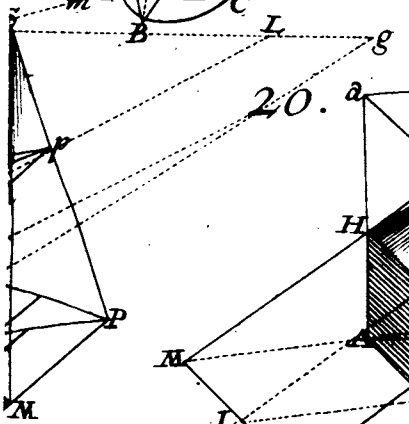
Planche 2.

17.

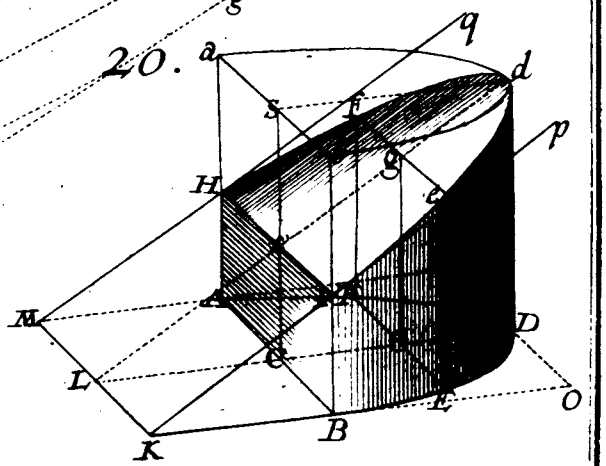


18.

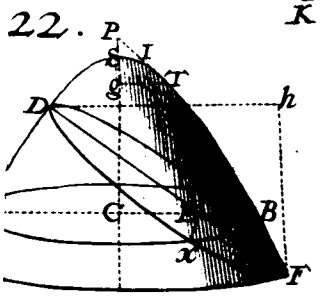




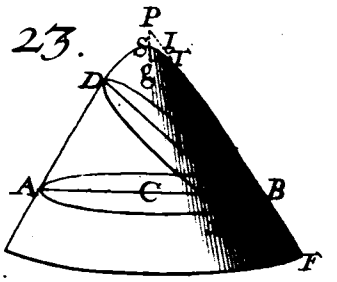
20.



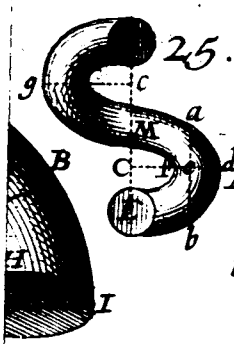
22.



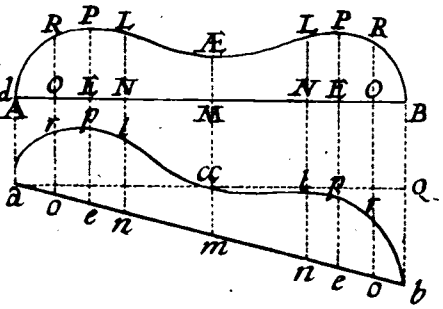
23.



25.



26.



UNIV. OF MICH.
Digitized by Google

Digitized by Google

SECONDE PARTIE
DU PREMIER LIVRE.

Des Sections faites à la ſurface des Corps par la pénetration d'autres Corps.

LEs Sections Planes dont nous venons de parler ne conviennent qu'aux ceintres des voutes ſimples, qui n'ont qu'une ſurface principale uniforme, & terminée par des plans; mais dans les voutes compoſées, qui ſont contiguës & liées avec d'autres, il ſe fait à leurs rencontres des angles & des courbes, qui les diviſent par des ſections tantôt planes tantôt *Solides*, je veux dire, qui ne peuvent être formées que par la pénetration des ſolides, leſquelles ne ſont pas dans une ſurface plane; ces dernieres ſont preſque les plus ordinaires, & parce que nous ne pouvons les connoître ſans les rapporter à des corps réguliers, dont les voutes ſont des imitations parfaites, nous allons examiner les ſections ſolides des Sphères, Cônes & Cylindres, qui ſe pénetrent mutuellement.

Premierement. Les ſections faites à la ſurface d'une Sphère, pénetrée par une autre Sphère, par un Cylindre, ou par un Cône.

Secondement. Celles des Cylindres par d'autres Cylindres, & par des Cônes.

Troiſiémement. Des Cônes par d'autres Cônes, ſituez differemment entr'eux.

Nous avons touché légerement les ſections planes de ces corps; parce qu'on ne manque pas de livres qui en traitent amplement; nous nous ſommes contentez d'en dire ce qui étoit indiſpenſablement néceſſaire à notre ſujet; mais parce qu'il n'en eſt pas de même de leurs ſections *Solides*, c'eſt-à-dire, qui ſont faites par la pénetration mutuelle des mêmes corps, nous en étendrons un peu davantage la Theorie.

En effet, ſi peu d'Auteurs en ont traité, qu'elles n'ont pas même de noms particuliers; le P. Coursier dans un Opuſcule Latin, qu'il

semble avoir fait pour l'Optique, est le premier que je sçache, qui en ait parlé : il les appelle *Curvitega*, c'est-à-dire, qui couvrent des surfaces courbes ; mais comme cette expression n'est pas uniquement propre à nos sections, puisqu'une surface plane en peut couvrir une courbe, comme un cercle couvre un segment de sphère, un parallelograme, celui d'un cylindre ; j'ai cru que j'étois en droit de leur donner d'autres noms, pour éviter les Périphrases & les équivoques ; je les tire du mot Latin *Imbrex*, qui signifie une tuile creuse, à laquelle on peut assez bien les comparer, ou du moins la surface qu'elles renferment ; il auroit été plus naturel de les comparer au cylindre, si je n'avois craint la confusion des idées, ayant aussi égard à la facilité de la composition des mots tirez *d'imbrex*. M. CLAIRAUT le Fils, de l'Academie des Sciences, nous a donné un excellent traité des *Courbes à double courbure* en general, qui comprend celles dont il est ici question, parmi plusieurs autres de differentes especes, dont il découvre les proprietez par l'Analyse avec beaucoup d'art & de netteté ; cet Ouvrage est d'autant plus digne d'admiration, qu'il a été la production d'un Jeune Homme de seize ans. Mais comme notre Stereotomie n'est qu'un traité de Geometrie lineaire, j'ai cru que je devois donner une Theorie de même nature que les Problêmes de pratique, auſquels elle doit servir d'introduction ; c'est pourquoi j'ai suivi une méthode tout-à-fait differente, croyant qu'elle deviendra plus utile aux gens qui se mêlent d'Architecture ; c'est ce que je vais expliquer.

De la nature des Sections Solides par la pénetration mutuelle des Sphères, Cônes & Cylindres.

DEFINITION I.

PLANC. 3. *Fig.* 27. 75. SI par les extremitez S T, du diametre d'un cercle S A T B (*Fig.* 27.) on fait passer une ligne courbe plane S *c* T, dont l'axe soit C *c*, suivant laquelle les ordonnées à ce diametre ST s'abaissent ou s'élevent parallelement à elles mêmes d'un mouvement uniforme, enſorte que leur milieu soit toujours dans le plan ST*c*, la courbe S *a* T *b*, qui terminera la surface creuse, qu'elles auront formé par cette arrangement, s'appellera un *Cicloïmbre*, par abreviation de l'expression Latine, *Circulus imbricatus*, cercle en façon de tuile creuse.

POUR se former une idée nette de ce changement de position des ordonnées, il n'y a qu'à se representer un cercle tracé sur la tran-

Digitized by Google

che d'un livre dans la preſſe, lorſque le Relieur l'a coupée d'une ſection plane; ſi enſuite il la renfonce vers le milieu, comme il arrive lorſqu'il donne de l'arrondiſſement au dos, ce cercle qui étoit plan devient un Cicloïmbre; parce que chaque feüille ſe reculant de ſuite, plus ou moins, ſelon qu'elle eſt près du milieu ou des extremitez de la tranche, forme l'eſpace d'une ſurface creuſe en façon de cylindrique, dont le contour n'eſt plus un cercle comme auparavant, mais une *Courbe à double courbure*, ſçavoir une autour du centre, & une en profondeur ou éloignement du plan paſſant par les extremitez du diametre S T.

Corollaire I.

De cette generation il ſuit, 1.° que quoique la ſurface creuſe ou convexe du cicloïmbre ſoit plus grande que celle du cercle plan generateur, elle ne contient pas plus d'ordonnées, puiſque le nombre des feüilles, dans l'exemple de la tranche du livre, n'a pas augmenté en ſe reculant ou en s'avançant au-delà de ce plan, depuis les extremitez S T, ce que l'on voit clairement dans la figure, par les paralleles qu'on a mené d'un côté aux lignes A *a*, C *c*, & de l'autre par les paralleles au diametre A B, qu'on ſuppoſe perpendiculaire au plan ST*c*. On voit ſeulement que ſuppoſant une ligne *c t* parallele & égale à C T, diviſée en parties égales, les lignes paralleles à la ligne C *c*, paſſant par ces diviſions, coupent la partie *c*T en parties inégales, quand même on les ſuppoſeroit infiniment petites.

Ce que nous diſons de l'axe courbe *c* T, auquel toutes les ordonnées ſont appliquées, eſt encore vrai à l'égard du Contour à double courbure *a d* T, quoiqu'il ſoit plus grand que l'axe & le contour du cercle generateur ATBS, qui eſt ici repréſenté en perſpective, où l'on apperçoit une petite notion des merveilles de la Geometrie de l'infini.

Corollaire II.

Il ſuit en ſecond lieu que les diametres, c'eſt-à-dire, les lignes droites, menées d'un des points du contour de la courbe à double courbure à ſon oppoſé, paſſant par l'axe C *c*, hors de la ſurface cylindrique, compriſe par cette courbe, ſont égaux entr'eux, comme les diametres du cercle generateur. Ainſi *g d* eſt égal à GD, *a b* à AB, &c. parce que les points G & D, A & B étant mûs parallelement à l'axe C*c* à diſtances égales, il eſt clair que G D *d g* eſt un parallelograme; par conſéquent *g d* ſera égal à G D.

Digitized by Google

Ou il faut remarquer que ſi la courbe S c T n'étoit pas uniforme, mais à differentes inflexions, ces diametres pourroient être inégaux, & alors la courbe ne ſeroit plus un cicloïmbre ; parce que c'eſt de l'égalité de ſes diametres que vient l'Analogie du nom.

COROLLAIRE III.

ON peut remarquer que de tous les diametres du cicloïmbre, il n'y en a qu'un, ſçavoir *a b*, qui ſoit dans la ſurface cylindrique, compriſe par ſon contour, lequel eſt celui qui paſſe par le ſommet *c*, de la courbe S c T, perpendiculairement au plan de cette courbe ; tous les autres ſont hors de cette ſurface.

COROLLAIRE IV.

DE ce que nous venons de dire, il ſuit que l'axe C *c* de la courbe, que j'appelle axe de *profondeur* S c T, coupe en deux également tous les diametres de la courbe du contour du cicloïmbre, plus ou moins loin de la ſurface cylindrique, ſelon qu'ils ſont plus ou moins obliques au plan de la courbe S c T.

COROLLAIRE V.

IL eſt viſible que ſi au lieu d'une ſeule courbe S c T, on en ſuppoſoit encore une ſeconde plus haut ou plus bas, audeſſus ou audeſſous du diametre S T, du même cercle generateur, il ſe formeroit deux cicloïmbres differens, qui auroient une profondeur inégale, mais dont le contour ſeroit à la ſurface du même cylindre, qui auroit pour baſe le cercle generateur ATBS ; puiſque tous les points de ces contours doivent être iſſus d'un de ceux du cercle generateur, mû parallelement à l'axe C *c* de la courbe de profondeur S c T.

DEFINITION II.

Fig. 28. 76. SI au lieu d'un cercle generateur ou ſuppoſe une Ellipſe BDLE, dont les ordonnées ED, GH s'écartent ou ſe rapprochent, de la même maniere que nous l'avons dit du cicloïmbre, non pas toujours perpendiculairement à un axe B L de cette Ellipſe, mais auſſi obliquement ſuivant un angle quelconque, comme B C *c* ou L C *c*, à peu près comme une chaîne lâche penduë aux extremitez d'un bâton incliné à l'horiſon, la ſurface formée par l'arrangement de ces ordonnées, ſuivant une courbe ſemblable, ſera terminée par un contour courbe, que nous appellons une *Ellipſimbre*, par abréviation de l'expreſſion Latine *Ellipſis imbricata.*

Digitized by Google

La néceſſité de donner des noms à des courbes, qui n'en avoient point, s'étend auſſi aux lignes qui leur ſont eſſentielles; nous en conſiderons quatre principales, qui méritent d'avoir un nom propre; parce que nous les nommerons ſouvent dans ce premier Livre.

Definition III.

77. Le diametre du cercle generateur, ou l'axe de l'Ellipſe plane generatrice, qui paſſe par les points S & T, ou B, L, où la courbe touche le plan du cercle ou de l'Ellipſe, s'appellera *Axe ſouſtendant*; la ligne courbe S *c* T, ou B *c* L, qui eſt dans le même plan que cet axe, qui coupe la ſection en deux parties égales, comme S *c* T, ou B *c* L, s'appellera *Axe courbe*; la ligne correſpondante au diametre perpendiculaire à l'axe ſouſtendant, qui eſt le petit ou le grand axe de l'Ellipſe, s'appellera *l'Axe droit*; parce que quoique droit, il ſera tout à la ſurface de la ſection concave; tel eſt *a b* (*Fig.* 27.) & *d e* (*Fig* 28.) La ligne C *c* qui eſt le plus au chemin que parcourt le centre C, dans l'abbaiſſement du diametre AB, ou DE en *ab*, ou *d e*, s'appellera *l'Axe de profondeur*, qui paſſera toujours par les deux centres de la ſection plane, & de la ſection courbe à double courbure par ſon contour. *Fig.* 27. 28.

Les lignes qui paſſeront par cet axe, & ſe termineront à la circonference de la ſection, s'appelleront *Diametres*.

Corollaire.

78. Puisque l'axe de profondeur C *c* peut n'être pas perpendiculaire à l'axe ſouſtendant BL, il ſuit que le diametre droit *d c* de la ſection, peut n'être pas au milieu de l'axe courbe B *c* L, puiſque le point *c*, centre de la ſection, correſpondant au centre C de l'Ellipſe generatrice, eſt évidemment plus près du point L que du point B; cependant le nombre des ordonnées de *c* en L, ſera toujours égal au nombre de celles qui ſont poſſibles de B en *c*; puiſqu'il ne peut y avoir un plus grand nombre de paralleles à C *c*, de B en C, que de C en L, ces deux diſtances étant ſuppoſées égales; l'exemple de notre tranche de livre, dont on arrondit le creux inégalement, peut ſervir à en concevoir la vérité; puiſque le nombre des feüilles n'augmente ni diminuë dans tous les changemens de concavité ou de convexité que l'on peut faire à la courbure de cette tranche.

Definition IV.

79. Si au lieu de ſuppoſer, que les ordonnées de l'Ellipſe plane gene-

Digitized by Google

ratrice d'une ſection ſolide, s'en éloignent, d'un mouvement inégal, mais uniforme dans les parties correſpondantes, & ſans changer de grandeur; on ſuppoſe au contraire qu'en s'éloignant, elles ſe rallongent ou ſe racourciſſent proportionellement à leur diſtance de l'Ellipſe plane, priſe ſur des plans convergens, qui ont tous une commune ſection, cette figure auſſi concave comme une tuile creuſe, aura pour circonference une courbe, que nous appellerons *Ellipſoïdimbre*, c'eſt-à-dire, qui imite en quelque choſe l'Ellipſimbre.

COROLLAIRE.

80. IL ſuit de cette définition, que l'axe droit *de* ne ſera plus égal à l'axe correſpondant DE de l'Ellipſe plane generatrice, qui eſt conjugué à celui qui eſt l'axe ſouſtendant de l'axe courbe de la ſection; mais qu'il ſera plus grand ou plus petit, plus grand s'il eſt du côté oppoſé à la commune ſection des plans convergens, & plus petit s'il eſt du même côté, ce que nous expliquerons plus nettement dans les ſections faites par la pénetration des cônes.

DEFINITION V.

81. LORSQU'UNE courbe ſera compoſée de deux portions des courbes nommées ci-devant, ſoit Cicloïmbre, ſoit Ellipſimbre, ſoit Ellipſoïdimbre, elle ſera dite *Compoſée* de ces courbes.

ENFIN on appellera de ſemblables noms toutes les courbes, leſquelles, ſuivant de pareilles loix, ſeront iſſuës de figures planes paraboliques ou hyperboliques, dont les ordonnées à leurs axes s'écarteront d'une maniere uniforme de leur ſommet d'un côté ſeulement; car puiſque ces figures ſont ouvertes, les ſections courbes ne les toucheront qu'en un point, & non pas en deux, comme les précedentes.

CHAPITRE V.

Des Sections ſolides des Sphères, & premierement, de leurs Variations.

LES ſections des ſphères peuvent varier de pluſieurs manieres.

1.° PAR la pénetration des Sphères entr'elles.

Digitized by Google

2.° Avec les Cylindres.

3.° Avec les Cônes.

La ſection commune à la ſurface de deux ſphères, qui ſe pénetrent, ne peut varier, elle ne peut être que la circonference d'un cercle; ſur quoi l'on peut remarquer, que les ſections faites par la pénetration des ſolides, peuvent en certains cas, être auſſi des ſections planes.

Les ſections faites à la ſurface de la ſphère, pénetrée par un cylindre, peuvent varier de quatre manieres.

1.° Lorsque l'axe du cylindre paſſe par le centre de la ſphère, dans la ſuppoſition du cylindre Droit.

2.° Dans le même cas, dans la ſuppoſition du cylindre ſcalene.

3.° Lorsque l'axe du cylindre ne paſſe pas par le centre de la ſphère, & que cependant le cylindre y entre de toute ſa circonference.

4°. Lorsque le cylindre n'entre dans la ſphère qu'en partie, à l'égard de ſa circonference.

Enfin les ſections faites à la ſurface de la ſphère, par la pénetration du cône, peuvent varier d'autant de manieres que par le cylindre, ſuivant les mêmes circonſtances de poſition rélative du centre de la ſphère, à l'égard de l'axe du cône, de celle de l'axe du cône ſur ſa baſe, & de la profondeur de la pénetration.

THEOREME VII.

La Courbe qui réſulte de la Section faite par la rencontre des ſurfaces de deux Sphères, qui ſe pénetrent, eſt la circonference d'un Cercle.

Soient les ſphères ABD, BFD qui ſe pénetrent, de quelque grandeur qu'elles ſoient l'une à l'égard de l'autre, dont les centres ſont en C & E, ſoit auſſi la ſection telle qu'elle puiſſe être repréſentée par la courbe BHD, qui doit paſſer par les points B & D, communs aux deux ſphères; puiſqu'ils ſont à l'interſection de deux cercles majeurs qui ſont dans le même plan, paſſant par les deux centres C & E, (*Fig.* 29. 30. 31.) le diametre de cette ſection ſera la ligne BD, qui paſſera par ces points B & D communs aux deux ſurfaces, lequel par la differente poſition des ſphères, paſſera ou entre les deux ſphères, comme à la fig. 29. ou par un des centres, comme à la fig. 30. ou au dehors des deux centres, comme à la fig. 31; de quelque façon que ce ſoit, la démonſtration ſera toujours la même. *Fig.* 29. 30. 31.

Digitized by Google

Ayant tiré une ligne CE par les centres C & E, & pris à volonté sur la courbe de la section un point H, on tirera des centres C & *c*, (*Fig.* 31.) des lignes CH, *ch*, & des points G & *g*, (*Fig.* 29. & 31.) ou E, (*Fig.* 30.) où les lignes passant par les centres, coupent les diametres BD & *bd*, des lignes au même point H, comme GH, EH ou *g h*.

Il est évident par la définition de la sphère, que les lignes CB, CH, CD sont égales entr'elles, étant des rayons de la sphère ABD, de même que EB, EH, ED, (*Fig.* 29. & 30.) & *eb*, *eh*, *ed*, (*Fig.* 31.) il est encore évident, que les lignes BD sont coupées également & perpendiculairement en G, par la ligne qui passe par les centres C & E; donc les triangles CBE, CHE, CDE, qui ont le côté CE commun, sont égaux en tout, de même que les triangles CBG, CHG, CDG rectangles en G, qui ont le côté CG commun, & les hypotenuses CB, CH, CD égales entr'elles; donc les côtez GB, GH, GD seront aussi égaux entr'eux; puisqu'ils sont d'ailleurs les perpendiculaires abaissées des sommets des triangles égaux CHE, CBE, CDE; donc (par la 4. du 11. d'Eucl.) ces trois lignes sont dans un même plan, & les rayons d'un cercle, dont les points B H D sont à la circonference qui est la commune section des deux sphères, *ce qu'il falloit démontrer.*

Fig. 30. La même démonstration est plus simple dans la fig. 30. où les points E & G sont confondus.

Application à l'usage.

86. On connoît par cette proposition, que le ceintre d'une voute sphérique, qui en rencontre une autre qu'elle coupe, est un cercle, par exemple, une niche qui est audessus de l'impoſte d'une voute sphérique, fait avec elle à l'arête *d'Enfourchement* un demi cercle parfait, supposé que l'une & l'autre de ces voutes ne soit ni surhaussée ni surbaissée, & que l'Impoſte d'une Calote de dôme, renfoncée en cû-de four, audessus d'une voute sphérique, est encore un cercle, aussi bien que celle de la premiere voute.

THEOREME VIII.

La Section faite par la rencontre des Surfaces d'une Sphère & d'un Cylindre Droit, dont l'axe passe par le centre de la Sphère, est un Cercle.

Soit la courbe AIBQ, la section faite par la rencontre des surfaces
Fig. 32. de la sphère ABDE, & du cylindre LNGF, dont l'axe MH passe par le

le centre C de la ſphère. Si du point I, pris à volonté à la circonference de cette ſection, on tire au centre C la ligne IC, & que du milieu K de la ligne AB, qui eſt ſuppoſée paſſer par les points A & B, communs à la ſurface de la ſphère, & à celle du cylindre, on mêne la ligne IK, on verra, comme dans la propoſition précedente, que les triangles AKC, IKC, BKC rectangles en K, qui ont le côté CK commun, & les côtez AC, CI, CB égaux, étant rayons de la même ſphère, les côtez AK, IK, BK ſeront auſſi égaux entr'eux, & dans un même plan, donc ils ſeront les rayons d'un cercle, dont les points AIB ſont à ſa circonference; mais la ligne CK étant par la ſuppoſition une partie de l'axe du cylindre, FLNG ſera auſſi perpendiculaire au même plan; donc la ſection commune à la ſphère ABDE, & au cylindre LNGF, ſera un cercle formé par la rencontre des ſurfaces de ces deux corps, *ce qu'il falloit démontrer.*

Application à l'uſage.

87. On voit par cette propoſition quel doit être le ceintre de la rencontre des voutes ſphériques avec les Berceaux Droits, dont les axes paſſent par le centre de la ſphère, tel eſt le Pui d'une cyterne voutée en cû-de-four, comme il y en a un à Phalsbourg, telle eſt la fenêtre à la Clef de la voute du Pantheon à Rome, telles ſont les Impoſtes de Lanternes ſur les dômes dans la plûpart des Egliſes modernes, les rencontres des Nefs en berceau avec les Chevets circulaires, voutez en quart de ſphère, ou d'une plus grande portion, ſi le diametre du ſanctuaire eſt plus grand que celui du berceau de la nef; ſuppoſé que l'une & l'autre de ces voutes ne ſoit ni ſurhauſſée ni ſurbaiſſée, & que la nef ne ſoit point biaiſe ſur le Chevet, quoique la direction de ſon axe, c'eſt-à-dire, de ſon milieu, paſſe par le centre de la portion de voute ſphérique; car pour peu qu'il y ait de biais, la ſection n'eſt plus un cercle, comme nous allons le démontrer.

THEOREME IX.

La Section faite par la rencontre des Surfaces d'une Sphère & d'un Cylindre Scalene, dont l'Axe paſſe par le Centre de la Sphère, eſt une Ellipſe.

Soit la ſphère ABIH, pénetrée par le cylindre ſcalene KLGF, (*Fig.* 33.) dont l'axe Xx paſſe par le centre C de la ſphère, ſi l'on ſuppoſe un plan paſſant par cet axe, il ſera deux ſections differentes, ſçavoir le parallelograme KLGF dans le cylindre, & le cercle SDE dans la ſphère, lequel ſera grand ou majeur, parce qu'il paſſe par le centre C, & dont les points A & B, où ſe coupent ces deux figures, ſont com- *Fig.* 33.

Digitized by Google

muns aux deux ſurfaces de la ſphère & du cylindre, de même que les points I & H de la ſection oppoſée, qui ſont ſur les côtez du parallelograme, & à la circonference du cercle en même tems, & tous autres points que ces quatre ne pourront être que ſur une des ſurfaces des deux ſolides; car s'ils ſont ſur celle du cylindre, ils ſeront au dedans de la ſphère, & s'ils ſont ſur celle de la ſphère, ils ſeront hors du cylindre, puiſque les arcs ADH & BEI ſont au dehors des côtez AH & BI. Si l'on imagine un ſecond plan perpendiculaire au premier, & qui paſſe par les points A & B, il coupera ces deux corps differemment du premier, & fera deux ſections differentes, ſçavoir un cercle A*e*B*l*, repréſenté ici en racourci de perſpective, dont le diametre ſera AB & qui ne ſera plus un grand cercle, mais un cercle mineur; parce qu'il ne paſſe pas par le centre C de la ſphère. L'autre ſection dans le cylindre ſera une Ellipſe A*d*B*k*, dont AB ſera le petit axe; parce que la ſection perpendiculaire à l'axe d'un cylindre ſcalene eſt une Ellipſe, & que le diametre KL du cercle de la baſe KMLN, incliné au côté LG eſt plus grand que AB, qui lui eſt perpendiculaire; en effet ſi on lui menoit une parallele A*r* par A, elle ſeroit l'hypotenuſe du triangle rectangle, dont AB ſeroit une jambe, or toute ſection qui n'eſt pas parallele à la baſe, & qui n'eſt pas ſouſcontraire eſt une Ellipſe.

Presentement puiſque le plan paſſant par AB fait deux ſections differentes, il eſt évident que ni l'une ni l'autre ne peut être commune aux deux ſurfaces; en effet l'Ellipſe du cylindre étant circonſcrite au cercle de la ſphère, avec lequel elle n'a de commun que les deux points A & B, eſt toute hors de la ſphère & le cercle de la ſphère eſt tout au dehors du cylindre, donc la ſection commune ſera une autre courbe, qui ſera hors de ce plan, & qui n'aura de commun avec les deux planes, que les points A&B, cette courbe paſſeradonc au deſſus ou au deſſous du plan, coupant ces deux corps par AB. Dans cet exemple elle paſſera du côté du centre C de la ſphère, comme A*f*B; parce que le diametre M N = *fi* eſt plus grand que AB. Il faut à préſent faire voir le rapport qu'elle a avec l'Ellipſe A*d*B, pour démontrer qu'elle eſt une Ellipſimbre, telle que nous l'avons défini ci-devant. Pour y parvenir il faut encore une préparation.

Quoique nous ayons déja ſuppoſé deux plans coupans la ſphère & le cylindre, l'un par l'axe X*x*, l'autre par les points A & B perpendiculairement au premier; il convient encore d'en imaginer au moins deux autres paralleles entr'eux, & perpendiculaires aux premiers, ſçavoir encore un par l'axe & le diametre MN de la baſe, & l'autre par l'ordonnée OPQ; cette multiplicité de plans eſt un peu embaraſſante pour le Lecteur, mais elle eſt inévitable pour la démonſtration des proprietez

Digitized by Google

de la courbe que nous examinons, on peut s'aider l'imagination par des reliefs de papier ou de carton; il ſera bon encore de ſe rappeller ici le onziéme & douziéme Livre d'Euclide; parce que tout cet ouvrage ne roule que ſur les ſections & rencontres des plans; on ſentira la conſéquence de cet avertiſſement dans la ſuite, où quelque attention qu'on ait eu à rendre les figures intelligibles, on ne ſe flatte pas d'avoir pû repréſenter bien ſenſiblement en ſaillie, ce qui eſt à plat ſur le papier, c'eſt à l'imagination du Lecteur à relever les objets, & les détacher du plan où ils ſont, pour les conſiderer où ils doivent être.

Soient donc deux plans paralleles à l'axe du cylindre, paſſant par les ordonnées MN, OQ, les ſections de ces plans dans la ſphère ſeront des cercles, dont *f* S *i* & *tsb* ſont des arcs, & des parallelogrames dans le cylindre, dont M*dk*N & *u*OQZ ſont des portions; parce que M*d* & N*k* ſont paralleles, étant les côtez du cylindre, & MN & *dk* auſſi paralleles entr'elles; parce que les plans KML de la baſe, & A*d*B de la ſection par AB, ſont perpendiculaires au même plan AKLB, paſſant par l'axe X*b*; or puiſque la ligne MN eſt perpendiculaire à l'axe CX, c'eſt-à-dire au rayon CS prolongé, elle eſt parallele à la tangente qui paſſeroit par S de l'arc de cercle *f*S*i*, & les lignes M*m* & N*n* étant paralleles à cet axe, & également éloignées de part & d'autre, les lignes M*f* N*i* rencontreront cet arc en des points *f* & *i*, équidiſtans de M & N; (par l'Art. 39.) donc la ligne *fi* ſera parallele à MN & à *dk*; donc *df*=*ki*, & *dk*=*fi*., c'eſt-à-dire, que l'ordonnée *dk* dans l'Ellipſe A*d*B eſt égale à l'ordonnée de la ſection commune aux deux ſurfaces, qui paſſent par *f* & par *i*. On démontrera de la même maniere que l'ordonnée *uz* eſt égale à l'ordonnée *tb* de la ſection ſolide, qui paſſe par *t*; donc toutes les ordonnées à l'axe courbe A*b*B, de la ſection ſolide, ſont égales à toutes celles de l'Ellipſe à l'axe AB; donc la ſection eſt une Ellipſimbre, *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire I.

88. Puisque le plan MN, par l'axe X*x* du cylindre coupe perpendiculairement l'axe ſouſtendant AB de la ſection, il ſuit que la plus grande ordonnée de l'Ellipſe plane, qui eſt ici *dk*, s'abaiſſe perpendiculairement à AB en *fi*, qui eſt *l'Axe droit* de la courbe, & par conſéquent que cet axe eſt équidiſtant des extremitez de l'axe ſouſtendant AB, ce qui n'arrive dans aucun cas, que dans celui des cylindres ſcalenes.

Corollaire II.

89. En ſecond lieu il ſuit que la plus grande profondeur, ou diſtance de l'Ellipſimbre à l'Ellipſe plane, eſt à l'axe droit *fi*; parce que la

Digitized by Google

plus grande difference *d e* du diametre *e l* du cercle de la ſphère A *e* B *l*, & de l'axe *d k* de l'Ellipſe A *d* B *k*, eſt dans le plan de l'axe droit *f i*; or puiſque *d e* ou L *k* eſt la plus grande diſtance, qu'il puiſſe y avoir de la circonference du cercle à l'Ellipſe, la diſtance *d f* ou *i* K ſera auſſi la plus grande qu'il puiſſe y avoir du plan A *d* B *k* à la courbe A *f* B *i*; & parce que cette difference des ordonnées du cercle à celles de l'Ellipſe, au même diametre AB, diminuë continuellement, il ſuit que la profondeur de l'Ellipſimbre diminuë auſſi depuis *f* juſqu'à B, où elle rejoint le cercle de la ſphère A *e* B *l*.

COROLLAIRE III.

90. POUR trouver cette profondeur ſur l'axe courbe de l'Ellipſimbre, qui eſt dans le plan de l'axe ſouſtendant AB; il n'y a qu'à décrire les ſections que font les plans paſſant par les ordonnées parallelement à l'axe du cylindre, leſquelles ſont des cercles de la ſphère, dont les centres ſont tous ſur la ligne DE, perpendiculaire à l'axe X *x* du cylindre par le centre C, & dont les lignes CS & WS en exprimeront les rayons; pour avoir les diſtances des côtez du cylindre, au plan paſſant par ſon axe & par AB, il faut faire à part (*Fig.* 34.) l'Ellipſe a *e b* E, ſur les axes donnez, ſçavoir, a *b* égal à AB de la fig 33. & E *e* égal au diametre KL de la baſe du cylindre ſcalene, dans laquelle on inſcrira le cercle a *d b* D, qui ſera égal à celui de la ſection de la ſphère par AB de la Fig. 33. Cette préparation étant faite on tirera à part une ligne *c s*, (*Fig.* 36.) ſur laquelle prenant *c s* égal à CS de la Fig. 33. pour rayon, on décrira un arc indéfini SF, enſuite portant la diſtance *s g* de la fig. 33. en *s g* de la fig. 36, on élevera ſur ce point une perpendiculaire *g d*, ſur laquelle prenant *g e* égal au demi diametre du cercle a *d b* D, c'eſt-à-dire à A *g* de la Fig. 33. on aura le point *e*, où la ſection plane coupe la ſphère; mais parce que ce point eſt au dedans du cylindre, il faut porter en dehors la diſtance DE de la fig. 34. qui eſt la difference du demi diametre du cercle & de l'axe de l'Ellipſe. Si par ce point *d* on mêne une parallele à *c s*, elle coupera l'arc *f s* au point *f*, qui ſera commun au côté du cylindre *d f*, & au cercle de la ſphère *s e f*; & par conſéquent à la circonference de l'Ellipſimbre; donc la ligne *d f* ſera la profondeur de cette courbe, au milieu à ſon axe droit, laquelle diſtance ſera égale à celle de l'axe courbe à l'axe ſouſtendant, dont l'un paſſe par *g* & l'autre par *b*; puiſque les ordonnées *d g* de l'Ellipſe, & *f b* de l'Ellipſimbre, ſont paralleles & égales.

Fig. 33. 34. 35. 36. IL ne ſera pas difficile de trouver cette profondeur pour tous les autres points de l'axe courbe; car ſi l'on porte la diſtance C W, de la Fig. 33. en *c* Y de la Fig. 35. on aura la diſtance des plans, qui

Digitized by Google

paſſent par MN & O Q de la fig. 33. & ſi l'on mene *u u* parallele à *e* E, fig. 34. on aura les ordonnées Y*u* de l'Ellipſe, & Y*x* du cercle, & en W*s*, Fig. 33. le rayon du cercle de la ſphère, avec lequel faiſant (*Fig.* 35.) l'arc *s* T, & la fléche *y s* égale à *y s* de la fig. 33. on menera par le point *y* la perpendiculaire *y u*, qu'on fera égale à Y*u* de la fig. 34. ſi par le point *u* on mene *u* T parallele à W*s* cette ligne, qui repréſente le côté du cylindre, coupera l'arc *s* T au point T, qui ſera commun à la ſphère & au cylindre, par conſéquent à la circonference de l'Ellipſimbre, la diſtance *u* T ſera celle des ordonnées *u y* de l'Ellipſe, & T*u* de l'Ellipſimbre que l'on cherchoit; ce qui n'a pas beſoin de démonſtration, puiſque cette figure eſt une exacte repréſentation de la ſection faite dans la ſphère & dans le cylindre, par le plan O Q *b t* parallele à ſon axe & au diametre de la baſe M N paſſant par l'axe X C, dont une partie eſt repréſentée ici (*Fig.* 36.) par la ligne C S rayon de la ſphère, & W P qui lui eſt parallele par W*s*, partie de W*p*, de même que *d f* de la fig. 36. repréſente une portion du côté du cylindre M*f*, & T*u* celle du côté O*t* de la fig. 33.

Application à l'uſage.

91. Ce Theoréme fait voir que lorſqu'une voute en berceau biaiſe & en plein ceintre dans ſon Arc de face, rencontre une voute ſphérique, dont le centre eſt dans l'alignement de l'axe du berceau, l'arête qui ſe forme à la jonction de ces deux voutes ne peut être en plein ceintre, ni dans un même plan Elliptique ſurhauſſé ou ſurbaiſſé, mais une Courbe dont les Aplombs s'écartent de la ligne droite, menée d'une impoſte à l'autre. Ainſi ſuppoſant qu'une nef d'Ellipſe ſoit un peu biaiſe ſur le Chevet circulaire du chœur, vouté en cul-de-four, c'eſt-à-dire, en portion de ſphère, ou ſeulement dont l'Arc-Droit ſoit ſurhauſſé ou ſurbaiſſé, comme il arrive très-ſouvent, la rencontre de ces voutes eſt une Ellipſimbre. L'Architecte qui n'a point de Theorie ſe trouve embaraſſé en pareil cas, pour éviter une eſpece de difformité de cette Courbe, à laquelle il ne s'attendoit pas; l'avantage de celui qui a des Principes, eſt de connoître du premier coup d'œil, ce qui doit réſulter de ſon deſſein, ce qui le met en état d'y remedier, ou par la ſaillie de quelque Arc-doubleau, ou par quelque induſtrieuſe correction des ceintres.

Digitized by Google

THEOREME X.

La Section faite par la rencontre des Surfaces d'une Sphere & d'un Cylindre Droit, qui la pénetre de toute ſa circonference, & dont l'Axe ne paſſe pas par le centre de la Sphere, eſt une Ellipſimbre.

Soit la ſphère ABTD, pénetrée par le cylindre LNDF, dont l'axe Mm ne paſſe pas par le centre C de la ſphère ; ſi l'on ſuppoſe un plan paſſant par ce centre & par l'axe M*m*, ce plan fera deux ſections differentes, ſçavoir, un cercle ASD dans la ſphère, lequel ſera majeur, & un parallelograme LNDF dans le cylindre, leſquelles deux ſections ſe couperont aux quatre points ABDE, qui ſeront par conſéquent, communs aux deux ſurfaces de la ſphère & du cylindre, & à la circonference des courbes oppoſées, formées par la pénetration du cylindre à ſon entrée & à ſa ſortie de la ſphère. Nous nous contenterons d'en examiner une, parce que l'autre lui ſera parfaitement égale. *Fig.* 38.

Si on ſuppoſe encore, comme au Theorême précedent, un ſecond plan perpendiculaire au premier & paſſant par les points A & B, il eſt évident qu'il fera deux nouvelles ſections, ſçavoir, un cercle dans la ſphère, repréſenté dans la fig. 38. par la courbe A*f*BF, dont le diametre ſera AB, & une Ellipſe dans le cylindre repréſentée par A*g*BG, dont AB eſt le grand axe ; parce que le cylindre eſt coupé obliquement ſuivant cette ligne, par la ſuppoſition, & dont le petit axe ſera la ligne G*g*, ou ſon égale KL, qui eſt le diametre de la baſe du cylindre LNDF, d'où ſuivent les mêmes preuves qu'on a déduites au Theorême précedent, que la ſection commune aux deux ſurfaces des corps ne peuvent être ni cercle ni Ellipſe ; puiſque l'un étant inſcrit dans l'autre, ces figures n'ont que deux points communs A & B, qui peuvent être à la rencontre de deux ſurfaces, & qu'enfin la ſection qui leur eſt commune eſt une Courbe à double courbure, qui n'eſt pas dans un plan, & qui n'aura de commun avec les deux ſections planes ci-devant, que les mêmes points A & B. La ſeule difference qu'il y a du cas du Theorême précedent à celui-ci, eſt que la ligne droite AB, qui paſſe par ces points communs, eſt le petit axe, & qu'ici elle eſt le grand axe, de ſorte que l'Ellipſe eſt toute au dedans du cercle de la ſphère dans ce cas, & tout au dehors dans le précedent. *Fig.* 38.

D'ou il ſuit que l'axe courbe de la ſection ſolide, qui eſt une Ellipſimbre dans l'un & l'autre cas, s'approche du centre de la ſphère dans le premier, & s'en éloigne dans le ſecond.

Au reſte les ordonnées à l'axe courbe de la ſection ſeront toujours

Digitized by Google

égales à celles de l'Ellipſe, appliquée à ſon grand axe AB, comme nous l'avons démontré à l'égard du petit, à la propoſition précedente, ce qui pourroit ſuffire pour l'établiſſement de la preuve de l'énoncé de celle-ci.

Cependant comme il importe de bien concevoir la nature & les proprietez de cette Courbe, qui eſt la clef de toutes celles qui ſe forment par la pénetration des corps, nous en allons reprendre l'explication pour la rendre plus intelligible, en la préſentant ſous une autre face, par une figure plus diſtincte, où, pour éviter la confuſion des lignes, on ne repréſente qu'une moitié des corps qui ſe pénetrent, parce qu'il eſt très-aiſé de conclure pour l'autre moitié.

Soit (*Fig.* 40.) KL*e*RQE la repréſentation en perſpective de la ſection faite par un plan, paſſant par l'axe du cylindre juſqu'au diametre RQ de la ſphere, perpendiculairement au plan paſſant par le même axe, & les points A & B, de ſorte que C^2M de la fig. 38. eſt la même que C^2M de la fig. 40. le demi cercle QSR, ſera la ſection que ce plan fait dans la ſphère, & le parallelograme K*l* celle de ce même plan dans le cylindre. Soit un autre plan parallele à celui-ci, paſſant par T*t*, *qr*, qui fait auſſi deux ſections de même nature, ſçavoir un demi cercle *qsr*, & un parallelograme T*tuv*. Il eſt évident que les interſections des côtez de ces parallelogrames avec les demi-cercles ſeront des points communs aux deux ſurfaces de la ſphère & du cylindre, tels ſont les points E*e*, I*i*, par leſquels le contour de la ſection ſolide doit néceſſairement paſſer de même que par les points A & B; la courbe E*i*BI*e* ſera donc à la rencontre des ſurfaces, depuis ſon axe droit E*e*, correſpondant du diametre de la baſe du cylindre KL juſqu'au point B, où elle va toucher la ſection plane de l'Ellipſe, paſſant par AB, que nous repréſentons ici par la Courbe AGB*g*. Cela ſuppoſé : *Fig.* 40.

Puisque le diametre KL de la baſe du cylindre eſt perpendiculaire à l'axe C^2M, que l'on ſuppoſe droit, & que les moitiez de ce diametre KM & ML ſont égales, les lignes KE & L*e* menées de leurs extremitez parallelement à cet axe, ſeront égales entr'elles (par l'Art. 39.) donc E*e* ſera parallele & égale à KL; mais parce que par la ſuppoſition, le plan AGB*g* eſt perpendiculaire au plan MN*n*C^2 paſſant par l'axe du cylindre M, C^2, & par la ligne AB, les angles G*c*M & *gc*M ſont droits; donc G*g* eſt parallele à KL, & par conſéquent à E*e*; mais auſſi à cauſe des paralleles K*k*, L*l*, qui ſont les côtez du cylindre, E*g* eſt un parallelograme; donc E*e* & G*g* ſont deux lignes égales: & par la même raiſon H*b* & *i*I le ſeront auſſi; or G*g* & H*b* ſont des ordonnées

Digitized by Google

de l'Ellipſe plane au grand axe AB; & E*e*, I*i*, des ordonnées de la ſection ſolide à ſon axe courbe D*x*B, partie de tout l'axe AD*x*B; donc les ordonnées de cette ſection ſont égales à celles de l'Ellipſe AGB*g* paſſant par les points communs A & B; donc cette courbe eſt du nombre de celles que nous avons appellé *Ellipſimbre, ce qu'il falloit démontrer.*

92. Il reſte à faire voir, que l'axe courbe AD*x*B, qui eſt dans le même plan que le ſouſtendant AB, lequel eſt le grand axe de l'Ellipſe AGB*g*, s'en éloigne & s'en approche dans le rapport des ſinus verſes des arcs de cercle de la ſphère, dont les ordonnées de l'Ellipſe & de l'Ellipſimbre ſont les ſinus droits dans les ſections circulaires de la ſphère, faites par les plans paſſant par ces ordonnées parallelement à l'axe du cylindre M C².

Car ſi du centre C² on mène les rayons C²E & C²*e*, aux extremitez de l'ordonnée E*e*, qui eſt la corde de l'arc ES*e*, on verra clairement que ſes moitiez E D, *e* D ſont les ſinus droits des moitiez de cet arc, dont DS eſt la fléche ou ſinus verſe; de même ſi du centre O du demi cercle *qsr* on menoit des lignes au point *i* & I, de la corde *i*I autre ordonnée à la ſection, on reconnoîtroit que ſa plus grande profondeur dans le cercle, qui eſt *xs*, ſeroit la fléche de cette corde, & le ſinus verſe de ſa moitié *ix* ou I*x*, ce qui eſt clairement exprimé dans les deux figures 35. & 36. en *b*S & *us*, comme nous l'avons expliqué au Theorême précedent.

Il en ſera de même de toutes les ordonnées poſſibles entre les points A & D, & D & B, dont les profondeurs diminuëront depuis l'axe droit E*e*, juſqu'à ces points A & B où elles ſe réduiront à rien; parce que les ordonnées du cercle AFB*f* de la ſphère, & de l'Ellipſe AGBS, dont la difference cauſe celle de la profondeur de la ſection, deviennent égales à o. en ces points.

Corollaire.

93. D'ou il ſuit que l'Ellipſimbre ne fait que toucher les ſections planes, circulaire & Elliptique; parce que ces deux dernieres ſe touchent ſeulement & ne ſe coupent point, & que dès le moment qu'il commence à y avoir de la difference entre les ordonnées à leurs diametres communs, dès ce moment auſſi il commence à y avoir quelque profondeur ou diſtance des ſections planes à la ſolide, dont l'axe courbe commence à s'éloigner du ſouſtendant. Donc la circonference courbe de l'Ellipſimbre ne fait que toucher les circonferences des ſections planes du cylindre & de la ſphère. 94

Digitized by Google

94. Nous avons donné au Theorême précedent la maniere ds trouver les ſinus verſes, qui ſont la profondeur de l'axe courbe, par le moyen du compas; mais ſi l'on vouloit, pour une plus parfaite operation, les trouver par le calcul, il ne ſeroit pas difficile. Il faut ôter du quarré du rayon du cercle de la ſection de la ſphère C^2S ou os, le quarré de l'ordonnée ED ou ix, & il reſtera le quarré de C^2D ou de ox, dont la racine quarrée étant ôtée du rayon C^2S ou os, il reſtera le ſinus verſe DS ou xs pour la profondeur de l'axe courbe ADxB dans la ſphère.

Et ſi l'on veut trouver la difference des profondeurs des ordonnées de la ſection plane & de la ſolide, il ne s'agit que de faire encore une operation, qui eſt d'ôter du rayon C^2S ou C^2F le quarré de l'ordonnée cF du cercle de la ſection plane, AFBf reſtera le quarré de C^2c, dont la racine étant ôtée du rayon, reſtera cS, dont ôtant Ds trouvé ci-devant, reſtera cD, difference de la profondeur de la ſection plane dans la ſphère, & de la ſection ſolide, laquelle eſt la diſtance des deux ordonnées correſpondantes dans l'Ellipſimbre & dans l'Ellipſe plane, *ce qu'il falloit trouver.*

95. Nous avons dit dans le cas du Theorême précedent, que la plus grande diſtance de l'Ellipſe plane à l'Ellipſimbre, qui eſt à l'axe droit, étoit au milieu de la ſection ſolide, à diſtance égale des points A & B, il n'en eſt pas de même dans celui-ci; car 1.° l'axe droit n'eſt pas à égale diſtance des points A & B. 2.° ce n'eſt pas à l'axe droit que la ſection ſolide eſt le plus éloignée de la ſection plane.

Que l'axe droit Ee ne ſoit pas équidiſtant des points A & B cela eſt évident: puiſque l'axe du cylindre étant incliné à l'axe ſoutendant AB, l'angle DcB eſt aigu, & DcA eſt obtus; donc le point D, qui eſt le centre de l'Ellipſimbre, eſt plus près de B que de A.

Secondement. Pour prouver que le point D n'eſt pas le plus éloigné de la ſection plane, qui paſſe par AB, ſoit fait à part (*Fig.* 39.) l'arc de cercle majeur aTb égal au ſegment, que la ligne AB retranche d'un grand cercle de la ſphère, dont le milieu de la corde eſt en C, par où on fera paſſer une ligne Ce, qui fera avec ab l'angle bCe égal à celui de l'inclinaiſon de l'axe du cylindre ſur la ligne AB, égal à l'angle LAB. (*Fig.* 38.) Soit auſſi aLdb l'axe courbe de la ſection ſolide, & ab le grand axe de la ſection plane Elliptique, la plus grande ordonnée à cet axe, qui eſt le petit axe, correſpond à celle qui paſſeroit par D de l'Ellipſimbre, qui tient lieu de centre de cette courbe; il faut prouver qu'il peut y avoir un autre point, par exemple, L, qui *Fig.* 39. *Fig.* 38.

Digitized by Google

ſoit plus éloigné de a*b* que le point D. Pour cela, ſi du point C on fait CT perpendiculaire ſur a*b*, & que du point T, où elle coupe l'arc a T *b*, on mene une tangente T*e* à cet arc, que du même point T on abaiſſe T L*f* parallele à DC, le point L, où elle coupera l'axe courbe, ſera le plus éloigné de l'axe ſoutendant a*b*; car les lignes *e*C, T*f*, qui ſont entre les mêmes paralleles a*b*, T*e*, ſont égales entr'elles, & parce que SC n'eſt que partie de *e*C, elle ſera plus petite que T*f*; or S*d* repréſente le ſinus verſe de l'arc, dont l'axe droit qui paſſe par D eſt la corde dans le cercle, qui eſt la ſection de la ſphère par l'axe du cylindre perpendiculairement au cercle a S*b*, & LT repréſente le ſinus verſe, ou la fléche, dont la double ordonnée, qui paſſe par le point L, eſt la corde, laquelle étant égale à celle qui paſſe par le point *f* de l'Ellipſe plane peut être très-petite; de-là on peut conclure, que ſon ſinus verſe peut être plus petit que *d*S, qui eſt dans un plus grand cercle que celui qui paſſe par L*f*, lequel eſt plus loin du centre C de la ſphère; (*Fig.* 34.) mais quand nous ſuppoſerions ces ſinus verſes égaux, il ſera toujours évident qu'ôtant des deux lignes inégales SC, T*f* des quantitez égales S*d*, TL, la partie L*f* reſtera plus grande que *dc*, qui eſt plus petite que T*f*; donc la diſtance oblique L*f* étant plus grande que *d*C, la diſtance perpendiculaire L*x* ſera auſſi plus grande que *dy*, *ce qu'il falloit démontrer*; car les triangles L*fx* & CD*y* ſeront ſemblables.

COROLLAIRE I.

96. D'ou il ſuit que plus la ligne AB eſt inclinée à l'axe CS, plus il doit y avoir d'irrégularité dans l'écartement des ordonnées de l'Ellipſimbre de celle de l'Ellipſe plane, comme auſſi dans la diſtance de ces ordonnées entr'elles ſur leur axe courbe a*d b*, comme on voit à la figure 41. puiſque les intervales A 2, 2 3, 3*d* ſont très inégaux, meſurez ſur cette courbe A*d*B, quoiqu'ils ſoient égaux étant meſurez ſur la droite AB en *p q c*, ou ſur une perpendiculaire à leur direction, comme en *mno*; puiſque ces ordonnées à l'axe courbe aux points 2, 3, *d*, 4, 5 ſont émanées de celles de l'Ellipſe plane, aux points *p q* C, &c. ou de la baſe du cylindre aux points *m n o*.

Fig. 41.

COROLLAIRE II.

97. D'ou il ſuit encore que les ordonnées à l'axe courbe de l'Ellipſimbre ne ſont pas en plus grand nombre, que celles de l'Ellipſe plane de part & d'autre du centre C ou D; mais qu'elles ſont plus preſſées d'un côté que de l'autre.

Digitized by Google

Remarque sur la difference des cas qui peuvent arriver dans les Cylindres Scalenes.

98. Nous avons supposé dans l'énoncé de ce Theorême, que le cylindre, qui pénetre la sphère, fût droit, parce que s'il étoit scalene, il pourroit arriver que la section commune aux deux surfaces seroit un *Cercle*, & non pas une Ellipsimbre, comme on peut le connoître par la figure 37. car si du centre H, de la base AB du cylindre scalene ABDE, on abaisse une ligne HC perpendiculaire au plan de cette base, & que du point C, pris sur cette ligne à volonté, & de l'intervale CA ou CB pour rayon, on décrive un cercle GABDE, il pourra être un des majeurs d'une sphère, qui auroit pour centre C; or si l'on prolonge les côtez du cylindre ABFE vers D, il est évident que ce cercle coupera les côtez du cylindre en DE de la même maniere qu'en AB, de sorte que l'angle EDB sera égal à l'angle ABD. *Fig.* 37.

Pour en sentir la vérité il n'y a qu'à mener CG perpendiculaire sur les côtez du cylindre jusqu'à la circonference du cercle en G, alors on reconnoîtra que les arcs GA, GE égaux entr'eux, * étant ôtez des arcs GD, GB, aussi égaux entr'eux par la même raison, les restes. AB & ED seront égaux, de même que leurs cordes, qui sont les diametres de la base du cylindre, donc la section ED sera égale à la base EF; égale par la supposition de la base AB, parce qu'elle est. souscontraire, * l'angle EDB étant égal à ABD, puisque tous les deux sont appuyez sur le même arc AGE; donc ED est un cercle, *ce qu'il falloit démontrer.* * *Euc. l. 3. p. 3. & 28.* * Art. 49.

Le même raisonnement sert aussi à prouver que les sections opposées AB, ED (*Fig.* 38.) sont égales entr'elles; puisque leurs grands axes AB, ED sont égaux, & que les petits axes sont égaux à ceux de la base du cylindre. *Fig.* 38.

Corollaire III.

99. Il suit aussi, que plus les axes AB, ED seront inclinez à l'axe M*m* du cylindre, plus les sections opposées se rapprocheront, & qu'enfin si le côté du cylindre *l l*, *f f* devient tangent à la sphère, les sections opposées aT, *d*T se toucheront au point T, & si ce côté du cylindre est hors de la sphère, ces sections se croisent également, & se mutilent réciproquement, comme nous l'expliquerons au Theorême suivant.

Application à l'usage.

100. Cette proposition sert à faire connoître qu'elle est la Cour-

Digitized by Google

be de l'arête d'Enfourchement des lunettes en berceau, pratiquées pour des fenêtres, ou pour la décharge ou pour la décoration dans une voute ſphèrique ; car ces lunettes étant ordinairement ou au deſſus de l'impoſte de la voute ſphérique, ou inclinées en Abajour ou Rampantes, ce ſont des moitiez de cylindre ou des cylindres entiers, dont l'axe ne paſſe pas par le centre de la ſphère, & qui doivent être cenſées faire le même effet, que ſi un cylindre entier entroit dans la ſphère de toute ſa circonference, comme ſi la fenêtre étoit un œil-de-bœuf, comme ſont ceux des quatre petits dômes de St. Pierre de Rome, dont la direction ne tend pas au centre de la voute, mais au deſſous, parce que l'Abajour eſt fort incliné. Il n'y a d'autre changement que l'addition d'une moitié de contour de même nature.

THEOREME XI.

La Section faite par la pénetration d'un Cylindre, qui n'entre dans la Sphère que d'une partie de ſa circonference, eſt une Ellipſimbre Compoſée.

Fig. 42. SOIT la ſphère BV*bp*, dont le centre eſt C, pénetrée par le cylindre YLND, qui n'entre qu'en partie de ſa circonference dans la ſphère, enſorte que la partie RP de ſon diametre RT (lequel étant prolongé-paſſe par le centre de la ſphère) en reſte dehors.

AYANT ſuppoſé comme dans les Theorêmes précedens, un plan qui paſſe par le centre C, & l'axe M*m* du cylindre, dont la ſection ſera un parallelograme YLND, & celle dans la ſphère un cercle majeur BV*bp*, on reconnoîtra que les points B & *b* ſont communs aux deux ſurfaces du cylindre & de la ſphère ; puiſqu'ils ſont la rencontre du côté du cylindre & du cercle majeur de la ſphère, & que le point P, qui eſt commun aux deux diametres RT du cylindre, & PV de la ſphère, ne l'eſt pas aux ſurfaces, puiſqu'il eſt dans le cylindre de la profondeur RP, qui eſt la moindre, & que l'ordonnée P*p* au diametre PV, qui paſſeroit par ce point, ſeroit toute hors de la ſphère étant une tangente ; donc elle ne pourroit être commune aux deux ſections, qui ſeroient faites par un plan perpendiculaire au premier, & paſſer par RV, lequel plan en feroit deux circulaires, ſçavoir RST dans le cylindre, & PBV dans la ſphère, qu'il faut imaginer en l'air, & non pas comme le repréſente la figure, ſur le plan paſſant par l'axe du cylindre & le centre de la ſphère ; mais parce que l'interſection des deux cercles RST du cylindre, & PSV de la ſphère, ſe fait en P, il ſuit que ce point S eſt à la circonference des deux ſurfaces, d'où ayant mené l'ordonnée S*q* au diametre RT, on voit que ſa partie PT eſt commune à ceux des deux corps, ſçavoir RT, PV.

Digitized by Google

Presentement ſi le cylindre YLND étoit ſcalene, & que la ſection par *q* & B, c'eſt-à-dire, E*q*B fût un cercle, elle auroit pour ſon égale & ſouſcontraire F*qb*, auſquelles *q* S ſeroit une ordonnée commune aux deux ſections des plans, coupant le cylindre par EB & F*b*, & aux deux cercles *e* B & *fb*, que ces mêmes plans ſeroient dans la ſphère, de ſorte qu'il eſt viſible que ces deux ſections planes, quoique de même eſpece, ne pourroient être communes aux deux ſurfaces; puiſque ce ſont deux cercles de differens diametres, qui ſe touchent aux points B & *b*, dont le plus petit, qui a pour diametre *e*B, ſeroit tout entierement dans le cylindre, & que le grand EB ſeroit dans toute ſa circonference hors de la ſphère.

La difference ſera plus grande, ſi le cylindre eſt Droit; parce que la ſection E B dans le cylindre eſt une Ellipſe, & que *e* B dans la ſphère un cercle fait par le même plan perpendiculaire à celui qui paſſe par l'axe du cylindre & par la ſphère; il en eſt de même de la ſection faite par le plan F*b*, paſſant par *q* & *b*, l'ordonnée commune *q*S retranchera une partie de ces ſections planes, depuis *q* vers E, & depuis le même point *q* vers F, tant de l'Ellipſe, que du cercle fait par chaque plan coupant les deux corps, qui eſt hors de la ſphère; mais parce que la ſection commune à leurs ſurfaces ne peut être en même tems un cercle & une Ellipſe, il ſuit qu'elle ne peut être dans le plan EB ni F*b*, quoiqu'elle y ait un point B ou *b*; donc elle s'en éloignera en ſe courbant vers la circonference du cercle de la ſphère, enſorte que les ordonnées à l'axe courbe *q u* B deviennent communes au cylindre en *ux* de la baſe FxK, & au cercle de la ſphère 2 *x* Z *y*; donc elle ſera une Ellipſimbre de même nature, que celle du Theorême précedent ſur chaque côté EB & F*b*, mais imparfaite, & mutilée par l'ordonnée commune *q*S où elles ſe rencontrent, & font un angle, de ſorte que la ſection totale, depuis B en *b* par *q* eſt Compoſée de deux parties d'Ellipſimbre, *ce qu'il falloit démontrer.*

Pour rendre cette explication ſenſible nous ſuppoſerons un cylindre ſcalene M L N *m*, plus petit que le précedent, dont le côté M*m* coupe la ſphère aux points 2 & 4, & que la ſection faite par un plan paſſant par 4B, & un autre par 2*b*, eſt un cercle parallele à ſa baſe, ou en ſection ſouſcontraire; il eſt évident que le même cercle ſera auſſi la ſection plane de la ſphère de chaque côté en 4 B & 2 *b*, donc le ſection courbe commune *b* 5B ſera la rencontre de deux portions de cercles égales, qui ont une ordonnée commune au point 5, laquelle eſt l'interſection de deux plans, qui feroient une figure ſemblable à celle qui eſt repréſentée à la figure 43. en A ou en B, ſelon *Fig.* 43. que le point 5. s'approchera d'un côté du cylindre ou de l'autre; car

Digitized by Google

Fig. 38. Fig. 43. si ce point de l'interſection des plans ſe faiſoit à la tangente, comme en T, (*Fig.* 38.) les deux arcs de cercles aboutiroient l'un à l'autre, & l'angle B (*Fig.* 43.) tomberoit ſur le point *t*; mais à meſure que le point 5 rentrera, le point B, qui eſt la rencontre des deux arcs, s'éloignera de *t*.

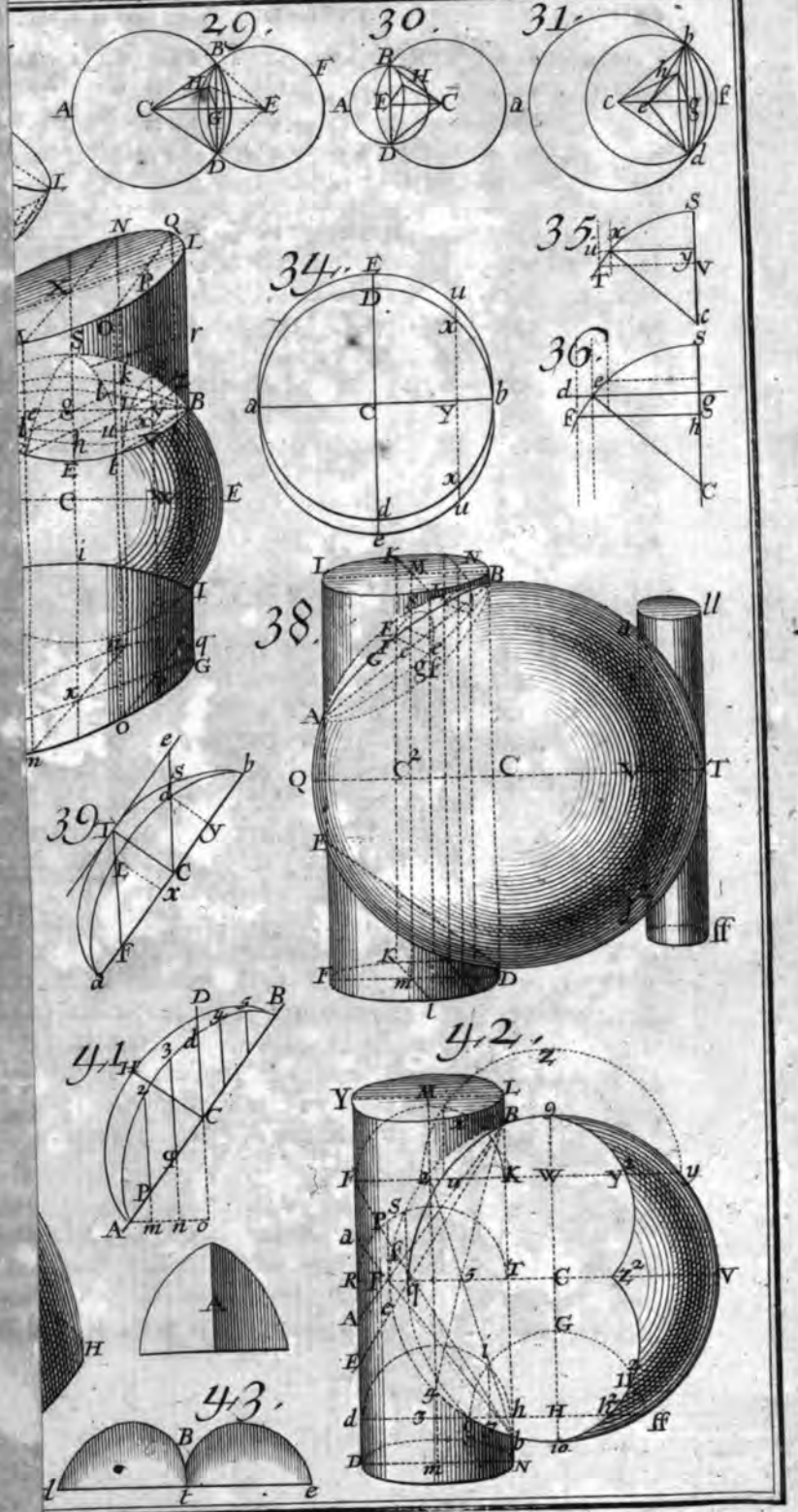
Fig. 42. La même choſe arrivera aux portions d'Ellipſimbre, lorſque le cylindre eſt une partie hors de la ſphère, alors ces deux courbes feront une inflexion au milieu en angle ſaillant, tel eſt l'angle curviligne 9 Z^2 10, quand la ſphère paſſera au-delà de l'axe du cylindre, comme en P; mais ſi l'axe du cylindre paſſe au dehors de la ſphère, alors la ſection compoſée, fait un angle rectangle, comme on voit dans la figure A; (*Fig.* 43.) la raiſon en eſt bien ſenſible, ſi l'on fait attention, que juſqu'à l'axe du cylindre la ſection monte dans la raiſon des ordonnées à la baſe R S T, & au contraire, que depuis l'axe elle baiſſe dans la même raiſon juſqu'au point R, auquel elle ſe joint, lorſque le côté YD eſt tangent à la ſphère, comme nous l'avons dit du point T. (*Fig.* 38.)

COROLLAIRE.

101. D'ou il ſuit que pour trouver les points de l'Ellipſimbre compoſé, il ne s'agit que de trouver les ordonnées communes aux ſections circulaires de la ſphère & du cylindre, & pour cela il faut leur trouver des diametres en partie communs, ce qui ſe fait en menant autant de perpendiculaires que l'on voudra à l'axe *Mm* du cylindre, qui coupent le cylindre & la ſphère, comme F*y*, RV, *dff*, dont les parties 2 K, P T, *gh*, ſont communes aux diametres du cylindre F K & 2*y* de la ſphère, RT, PV; *dh*, *gff*; ſi ſur chacun de ces diametres on éleve des demi-cercles F*x*K, 29*y*, PST, PBV, *dih*, *g*G*f*f leurs interſections *x*, S, *i* ſeront des points à la circonference de la Courbe, & les perpendiculaires menées de ces points aux diametres communs, qui les couperont en *u*, *q* & 7, donneront les points de l'axe courbe, & ſeront des ordonnées communes, leſquelles étant portées de W en Y, de C en Z^2, & de H en b^2, marqueront ſur un plan, qui auroit pour baſe la ligne 9, 10, des points, par leſquels faiſant paſſer une courbe 9 Y Z^2 b^2 10, on aura une expreſſion du contour de l'Ellipſimbre compoſée, ce que nous expliquerons plus au long dans les Problêmes du Livre ſuivant.

Il ſera encore vrai dans le cas de ce Theorême, comme dans le précedent, que les profondeurs de la ſection ſolide dans la ſphère ſeront dans la même raiſon des ſinus verſes, dont les ordonnées ſeront les ſinus droits, comme on le voit en 2*u*, P*q*, *g*7.

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

Si le côté LN du cylindre paſſe par le centre C de la ſphère, & que ſon demi diametre ML ne ſoit pas plus petit que le rayon CS de la ſphère, il ſera aiſé de décrire l'Ellipſimbre compoſée avec un compas, dont on mettra une pointe ſur ce côté, par exemple, en T, l'autre point le décrira.

La raiſon en eſt claire, car le rayon CS ne peut tourner autour d'un point fixe qu'en parcourant la ſurface d'une ſphère par l'autre extrémité mobile.

Application à l'uſage.

102. Cette propoſition fait voir quelle eſt la courbe de l'arête d'Enfourchement, qui ſe forme à la rencontre de la ſurface d'une Tour ronde, qui entre en partie dans une voute ſphérique, comme pourroit être un eſcalier à vis dans un dôme ou un pui, ſur le bord d'une citerne voutée en cû-de-four, ou d'une Tour verticale, dans laquelle ſont des renfoncemens en niche ſphérique, comme ſont les trois du dôme du Val de Grace, l'un ſur le Baldaquin, & les deux autres en Croix ſur le Chœur & la Chapelle oppoſée, qu'on appelle Niche en tour creuſe, ou encore d'une voute ſphérique, établie ſur quatre portions d'arc-de-Cloitre, ou qui rachete un berceau. Où l'on doit remarquer, que ſi la voute ſphérique n'avançoit pas juſqu'à la clef, il ſe feroit un angle en *Surplomb* contraire à la ſolidité; parce que les *Contreclefs* pouſſeroient à vuide.

De la rencontre des Surfaces des Sphères avec celles des Cônes.

THEOREME XII.

La Section faite par la rencontre des Surfaces d'une Sphère & d'un Cône Droit, dont l'Axe paſſe par le Centre de la Sphère eſt un Cercle.

Soit la ſphère ABED pénetrée par le cône SLN, dont l'axe SM paſſe par le centre C; ſoit auſſi la courbe DKE, la ſection faite par la rencontre de leurs ſurfaces, ſur laquelle ayant pris à volonté un point K, on menera du ſommet S la ligne KS, qui ſera à la ſurface du cône; puiſque le point K eſt ſuppoſé commun à ſa ſurface, auſſi bien qu'à celle de la ſphère. Si par les points D, K, E on méne des *Fig.* 44.

Digitized by Google

lignes au centre de la ſphère C, comme DC, KC, EC, & que du même centre C on tire des perpendiculaires CF, CG, CH aux côtez du cône SD, SK, SE, on reconnoîtra que les triangles FCS, HCS, GCS ſont égaux en tout; puiſqu'ils ont le côté SC commun, qu'ils ſont rectangles en F, G, H, & qu'ils ont les angles en S égaux entr'eux, qui ſont ceux de l'axe du cône avec les côtez; donc les parties de ces côtez SF, SG, SH ſont égales; de même les autres triangles FCD, GCK, & HCE ſont auſſi égaux en tout, car ils ſont rectangles par la conſtruction, ils ont les côtez DC, KC, EC égaux, puiſqu'ils ſont rayons de la même ſphère, & les côtez FC, CH, CG, comme nous venons de le démontrer, auſſi égaux entr'eux; donc les côtez DF, KG, HE le ſeront auſſi, leſquels étant ajoûtez aux lignes égales SF, SG, SH, on aura SD = SK = SE; par conſéquent les triangles SDI, SKI, SEI ſeront égaux entr'eux, puiſqu'ils ſont rectangles en I, qu'ils ont les angles en S égaux, & le côté SI commun; or les côtez ID, IK, IE étant égaux, & la ligne SI leur étant perpendiculaire, ils ſont tous dans le même plan, * & par conſéquent à la circonference d'un cercle, dont le centre eſt en I; mais par la ſuppoſition, les points D, K, E ſont à la ſurface de la ſphère, & à celle du cône dans l'interſection faite par leur pénetration, donc la ſection d'un cône droit, qui pénetre la ſphère, & dont l'axe paſſe par ſon centre, eſt un Cercle, *ce qu'il falloit démontrer.*

* *Eucl. l. 11. p. 5.*

On démontrera la même choſe de la ſection oppoſée AB, vers le ſommet du cône, qui eſt évidemment toujours plus petite que celle qui ſe fait vers la baſe.

Application à l'uſage.

103. Cette propoſition fait voir, quelle eſt la courbe de l'enfourchement d'une Trompe, d'une *Lunette ébraſée*, ou voute en canoniere droite, qui rachete une voute ſphérique, lorſque leurs impoſtes ſont de niveau, & leur direction tendant au centre de la voute ſphérique.

Si la trompe ou la lunette étoit biaiſe, quoique la direction de leur milieu tendit au centre de la ſphère, la courbe ne ſeroit plus un cercle, de même que ſi la direction ne tendoit pas au centre, comme on va le démontrer.

THEOREME

THEOREME XIII.

La Section faite par la rencontre des Surfaces d'une Sphère & d'un Cône Scalene, dont l'Axe passe par le Centre de la Sphère, est une ELLIPSOIDIMBRE, *ou un cercle si elle est sousconstraire.*

SOIT une sphère a*b*BA (*Fig.* 45.) dont le centre est C, par lequel passe l'axe SX du cône scalene SDE, qui la pénetre, il est clair, comme dans la proposition précedente, que si l'on suppose ces deux corps coupez par un plan, passant par l'axe SX du cône, les quatre points a, *b*, B, A seront communs à la surface du cône, & à celle de la sphère; puisqu'ils sont l'intersection d'un cercle majeur de la sphère, & du triangle par l'axe du cône. *Fig.* 45.

SI l'on suppose encore un plan perpendiculaire au premier, & passant par A & B, il fera deux sections differentes, sçavoir un cercle dans la sphère, que nous représentons ici par AKB, & dans le cône scalene (la section A B n'étant pas sousconstraire) une Ellipse que nous représentons ici par ALB, lesquelles sections n'ayant de communs, que les points A & B, ne pourront être ni l'une ni l'autre commune aux deux surfaces; donc la section solide passera au dehors des deux plans, avec lesquels elle doit cependant avoir les deux points A & B communs.

SOIT menée *h i* parallele à la base DE par le point M, intersection de l'axe SX & de la ligne AB, il est évident que *h i* sera le diametre d'un cercle, dont la moitié M*h*, portée en ML perpendiculairement sur AB, sera une ordonnée commune à l'Ellipse sur l'axe AB.

DE même si l'on mene *d e* parallele à D E par le point *m*, milieu de l'axe soutendant AB, & qu'on prenne une moyenne proportionelle entre *d m* & *m e*, cette ligne que nous supposons ici égale à *m* L sera aussi une ordonnée de l'Ellipse qui sera égale à la moitié du grand axe de la section Elliptique du cône, puisqu'elle l'est sur le milieu *m*, & qu'elle est plus grande que *m r*, rayon de cercle fait sur le diametre AB plus petit que *d e*.

SOIT de plus menée par le point *m* la ligne S*m*, du sommet du cône S, qui coupera le cercle a*b* B A en H & I; sur HI, comme diametre, on décrira le demi cercle H*f* I, qui sera une section de la sphère perpendiculaire au cercle majeur A B*b a*, puis sur la même HI on élevera au point *m* la perpendiculaire *m g* égale à *m* L; si du point *g* on mene au sommet S la ligne *g* S, elle coupera le cercle H*f* I, de la sphère au point *f*, qui sera commun aux deux surfaces, par conséquent à la section, puisque S*g* est un côté du cône, qu'il faut se représenter

Digitized by Google

en l'air perpendiculairement au plan ASB. A preſent ſi du point f on mene fy parallele à Sm, à cauſe des triangles ſemblables gfy & gSm, on aura $Sm : mg :: fy : yg$, c'eſt-à-dire, que la diſtance Sm du ſommet du cône à l'ordonnée de l'Ellipſe plane, qui en eſt la ſection par AB, ſera à cette ordonnée, comme la diſtance de l'Ellipſe à la ſection ſolide, priſe ſur un plan paſſant par le ſommet du cône, eſt à la difference gy des ordonnées gm, fx de l'Ellipſe plane, & de la ſection ſolide AxB, ce qui eſt ſuivant notre définition 4. * la proprieté de *l'Ellipſoïdimbre*; mais parce qu'on peut trouver autant de points f que l'on voudra, qui donneront toujours une pareille analogie, quoique leur diſtance fy ſoit plus ou moins grande, il ſuit que la courbe eſt une Ellipſoïdimbre, *ce qu'il falloit démontrer.*

* Art. 79.

COROLLAIRE I.

104. D'ou il ſuit que ſi par le point f on mene fx parallele à gm, & qui coupe la ligne Sm au point x, ce point ſera celui de la profondeur de l'axe courbe dans la ſphère au-delà du point m, correſpondant dans la ſection plane AB, & parce que les points m & M, & tout autre pris à volonté, produira ſuivant la même conſtruction differens points f, plus près de y, on aura autant de points x que l'on voudra, ſur differentes lignes Sm ou SM, venant du ſommet S du cône ſur l'axe ſoutendant AB, & par conſéquent donneront la courbure de l'axe AxB.

COROLLAIRE II.

105. IL ſuit encore que lorſque AB eſt le petit axe de l'Ellipſe plane de la ſection du cône, la ſection ſolide s'approchera du côté du ſommet S dans la grande ſection AB, & s'en éloignera dans la petite oppoſée ab, & au contraire, ſi AB eſt le grand axe de l'Ellipſe, comme nous le verrons dans le Theorême ſuivant, qui ſervira d'explication à celui-ci.

THEOREME XIV.

La Section faite par la rencontre des Surfaces d'une Sphère & d'un Cône, qui la pénetre de toute ſa Circonference, & dont l'Axe ne paſſe pas par le Centre de la Sphère, eſt une Ellipſoïdimbre. Si le Cône eſt Scalene elle peut être un Cercle.

Fig. 46. SOIT la ſphère A a b B (*Fig.* 46.) pénetrée par le cône DSE, dont l'axe SX ne paſſe pas par le centre C de la ſphère, ſoit auſſi dans les mêmes circonſtances qu'au Theorême précedent la ligne AB, par la-

Digitized by Google

quelle passe le plan perpendiculaire au triangle par l'axe, coupant les deux corps, dans lesquels il fait differentes sections, sçavoir une Ellipse ALB dans le cône, qu'il coupe obliquement, & un cercle AKB dans la sphère; il sera clair pour peu qu'on donne d'attention à cette figure, où on a mis les mêmes lettres qu'à la précedente, qu'il s'agit de la même section; car ni le cercle de la sphère, ni l'Ellipse du cône, qui n'ont que deux points communs A & B, ne peuvent être la rencontre des deux surfaces, qu'en ces deux points; par conséquent la courbe faite par leur intersection, s'écartera de leur plan, & y reviendra aux points A & B par où elle doit passer.

Pour reconnoître en quels points de la sphère entre les deux A & B, cette Courbe doit passer, il faut supposer des plans perpendiculaires à celui qui passe par ASB, que nous ne pouvons représenter ici qu'en les couchant sur le même plan, & sur la ligne droite de leur intersection. Soit, par exemple, un de ces plans passant par SI, la moitié de la section de ce plan coupant la sphère, sera le demi cercle H*u*I, qu'il faut imaginer en l'air, & parce que son diametre HI coupe AB en *m*, l'ordonnée *m*P à ce diametre sera en partie commune à l'ordonnée de l'Ellipse à l'axe AB; mais elle excedera, parce que le cercle AKB de la sphère est circonscrit à l'Ellipse ALB du cône; pour trouver donc où se termine cette partie commune, c'est-à-dire, la longueur de l'ordonnée de l'Ellipse, passant par le point *m*, on sçait qu'il n'y a qu'à prendre une moyenne proportionelle entre *dm* & *me*, puisque *de* est le diametre du cercle, fait par la section du cône parallelement à sa base, lequel a une ordonnée, commune avec l'Ellipse de la section oblique AB au point *m*.

Soit *mr* l'ordonnée de l'Ellipse égale à *m*R, la ligne S*r* passant par le sommet du cône, & le point *r* qui est à sa circonference, sera le côté du cône; mais à cause que ce point *r* est dans la sphère, il faut prolonger S*r* jusqu'à ce qu'il rencontre son cercle H*u*I au point *y*, lequel sera commun au cône & à la sphère, & si par ce point *y* on mene *yx* jusqu'à la rencontre de l'intersection des plans perpendiculaires en SI, le point *x* sera un de ceux de l'axe courbe de la section solide. Or si l'on fait comme dans le Theorême précedent *rg* parallele à SI, à cause des triangles semblables S*mr*, S*xy*, *rgy*, on aura S*m* : *mr* :: *rg* : *gy*. C'est-à-dire, que la distance du sommet du cône à l'ordonnée de l'Ellipse plane, sera à cette même ordonnée, comme la distance de la section solide à l'Ellipse plane, mesurée sur un plan passant par le sommet S, est à la difference des ordonnées de la section solide, & de la section plane du cône; & parce qu'on peut imaginer autant de plans que l'on voudra, perpendiculaires au plan ASB, comme

Digitized by Google

So, au lieu de Sm, & qu'on aura toujours la même Analogie à l'égard des ordonnées de l'Ellipſe, & de la ſection ſolide, il ſuit par notre quatriéme définition * qu'elle eſt une Ellipſoïdimbre, *ce qu'il falloit démontrer.*

* Art. 79.

Pour une plus ample explication, qui pourroit être un peu difficile aux commençans, nous avons jugé à propos de répeter la fig. 46. en façon de perſpective, au nombre 47. mais dans un ſens different, ce qui fait qu'on ne peut repréſenter les cercles que par des Ellipſes.

Fig. 47.

Soit $APBp$ le cercle de la ſection plane de la ſphère par la ligne AB, lequel eſt perpendiculaire au triangle par l'axe ESF; ſoit auſſi $ARBr$ l'Ellipſe de la ſection oblique du cône, qui paſſe par les mêmes points A & B; puiſque la ſection ſolide n'eſt pas dans ce plan, elle paſſe par deſſous, comme dans la partie $AbyB$. Nous n'en avons pas repréſenté davantage pour éviter la confuſion des lignes. Si l'on mene des ordonnées à l'axe AB, comme Pp, Qq, qui coupent l'axe AB en M & o, & que par ces points on mene des lignes du ſommet, comme Sx, Sz, & d'autres par les extremitez des ordonnées de l'Ellipſe, comme SyE, SYF, SVb, SuH; ces lignes qui ſeront des côtez du cône, rencontreront la ſurface de la ſphère en quelque point, comme en y, Y, b & H, par leſquels on menera des paralleles aux ordonnées de l'Ellipſe yY, bH, leſquelles ſeront les ordonnées de la ſection ſolide; enfin ſi par les points r, R, V, u, de l'Ellipſe on mene des paralleles aux lignes Sx, Sz, ſçavoir rt, RT, Vi, uI, on reconnoîtra comme dans la démonſtration précedente, que les triangles yrt, ySx, rSM ſeront ſemblables, de même que bVi, bSz, VSo; donc $SM : Mr :: rt : ty$, & $SO : OV :: Vi : ib$; dont la courbe $BybA$ eſt une portion d'Ellipſoïdimbre, *comme il a été démontré ci-deſſus.*

106. On voit qu'ici les ordonnées de la courbe ſolide excédent celles de l'Ellipſe; le contraire arrive à la ſection oppoſée ab, vers le ſommet, où les ordonnées de la courbe ſont plus petites que celles de l'Ellipſe plane de la propoſition précedente, où l'on a vû le contraire dans l'une & l'autre ſection, comme nous l'avons remarqué; la petiteſſe de la figure ne nous a pas permis de trouver celle qui eſt près du ſommet; mais pour peu d'attention qu'on y donne la choſe eſt claire, & ne mérite pas une plus longue explication; puiſqu'il eſt évident que la ſection ſolide ſera toujours plus grande ou plus petite que l'Ellipſe plane; parce que les côtez du cône étant eſſentiellement convergens, ne peuvent paſſer par l'extremité de deux ordonnées paralleles & égales.

107. Il faut remarquer que l'excès, ou le défaut des ordonnées de

Digitized by Google

la ſection ſolide ſur la ſection plane Elliptique, n'eſt pas proportionel d'une ordonnée à une autre, entre l'axe droit yY, & le point A ou B; mais qu'il augmente à meſure que l'ordonnée approche de l'axe droit yY, & diminuë en tirant vers A ou B; parce que le ſommet du cône S étant commun à tous les triangles formez par la ſection des plans, qui le coupent par ces ordonnées, ces plans ſont inclinez entr'eux; or ſi Mr étoit à xy, comme OV à zh, Sx ſeroit à SM comme Sz ſeroit à SO; donc xz ſeroit parallele à MO, ce qui eſt contre ce que nous avons démontré ci-devant; puiſque l'axe courbe $BxzA$ doit paſſer par A & B, & s'éloigner du plan de la ſection plane paſſant par AB; donc Mr n'eſt pas à ty comme OV eſt à ih; & par conſéquent les ordonnées de l'Ellipſoïdimbre ne ſeront pas en même raiſon entr'elles, que celles de l'Ellipſe, comme dans *l'Ellipſimbre*; d'où vient que nous l'appellons *Ellipſoïdimbre*, c'eſt-à-dire, qui imite ſeulement en quelque choſe l'Ellipſimbre; en effet cette courbe a un rapport eſſentiel avec l'Ellipſe dans les ordonnées, priſes dans la ſection triangulaire d'un plan, qui paſſe par le ſommet du cône & l'ordonnée de l'Ellipſe quelconque, dont l'excès ou le défaut eſt proportionné à l'éloignement des deux ſections meſuré ſur le même plan de la ſection triangulaire, & non pas à la diſtance abſoluë, qui ſeroit priſe ſur deux plans paralleles paſſant par les mêmes ordonnées.

Corollaire I.

108. Il n'eſt pas moins facile dans cette propoſition que dans la précedente, de trouver autant de points que l'on voudra de l'axe courbe de l'Ellipſoïdimbre, ce qui donne un moyen commode d'en faire la projection, comme nous le dirons en ſon lieu; car (*Fig.* 46.) ſi l'on veut avoir les points x & z de l'axe courbe correſpondans aux points m & o, ayant mené par ces points des lignes de, hi paralleles à la baſe DE, & par ces mêmes points des lignes SmI, SoQ, qui couperont le cercle majeur de la ſphère en H & I, q & Q, on décrira ſur ces lignes, comme diametres, des demi-cercles, comme HuI, auquel on menera par le point m, mP perpendiculaire à HI, enſuite ayant pris ſur mP la longueur mr égale à la moyenne proportionelle entre dm & me; du ſommet S on menera par le point trouvé r la ligne Sry, qui coupera le demi cercle HuI au point y, par lequel menant yx parallele à mP, le point x où elle coupera la ligne SI, ſera celui que l'on cherche; car le cercle HuI eſt une ſection de la ſphère par un plan, qui paſſe par le ſommet S, & le point r, qui eſt à la circonference de l'Ellipſe de la ſection oblique du cône, donne le côté du cône Sy, qui coupe le cercle en y; donc ce point eſt commun aux deux ſurfaces; & parce que ce plan eſt perpendiculaire à celui qui paſſe par *Fig.* 46.

Digitized by Google

ASB, lequel eſt auſſi perpendiculaire à celui qui paſſe par AB, l'interſection de ces trois plans ſera une ligne perpendiculaire au plan S*mx*, ſur lequel doit être meſurée la diſtance du point *m* au point *x* par une parallele à l'ordonnée de l'Ellipſe plane, & qui paſſe par le point *y*; donc *x* eſt un point de l'axe courbe, correſpondant au point *m*, *ce qu'il falloit trouver.*

109. Si l'on veut trouver cette diſtance par une Analogie, connoiſſant la diſtance du ſommet à l'Ellipſe ſur le côté du cône, en diviſant le rectangle P *rp* par *rb*, on aura *ry*; parce que la proprieté du cercle P*r* × *rp* = *br* × *ry*; & alors à cauſe des triangles ſemblables S*mr* & *rty* ou (*Fig.* 46.) *rgy* on aura S*r* : *ry* :: S*m* : *rt* ou *rg*. *Fig.* 47.

COROLLAIRE II.

110. Il faut remarquer que l'axe du cône ne paſſe pas ordinairement par le centre de l'Ellipſoïdimbre, parce qu'il ne paſſe pas par celui de l'Ellipſe plane; car l'axe du cône SX diviſe en deux également l'angle du ſommet DSE du triangle par l'axe; donc, par la huitiéme du ſixiéme d'Euclide, AS : AB :: AO : OB; or AS eſt plus petit que SB; donc AO eſt plus petit que OB; mais le centre de l'Ellipſoïdimbre doit ſe trouver au point correſpondant à G, milieu de AB, dans une ligne menée du point S par G, donc le point *z*, où l'axe du cône coupe l'axe courbe de l'Ellipſoïdimbre, n'eſt pas le centre de cette courbe, *ce qu'il falloit démontrer.*

111. Nous avons excepté dans l'énoncé de ce Theorême, touchant la pénetration du cône dans le ſphère, le cas qui peut arriver, ſi le cône eſt ſcalene, lorſque la ſection plane faite par la ligne a*b* (*Fig.* 48.) eſt ſouſcontraire; parce qu'alors étant un cercle dans le cône comme dans la ſphère, elle peut être commune à la ſurface des deux corps, non ſeulement dans une ſection comme a*b*, mais encore dans ſon oppoſée *ef*, c'eſt-à-dire, dans l'immerſion & dans l'émerſion du cône dans la ſphère, ſans que l'axe de l'un paſſe par le centre de l'autre; car puiſque le rectangle *fs* × *bs* = *es* × a*s*, *es* : *sf* :: *sb* : *sa*, & ſi l'on mene *fh* parallele à *ba*, les triangles *fsh*, *fse* ſeront ſemblables, & l'on aura *bs* : *sa* :: *fs* : *sh* :: *es* : *sf*; donc les angles *sfh*, *sef* ſeront égaux, c'eſt-à-dire, que la ſection *ef* ſera ſouſcontraire de la ſection a*b*, *ce qu'il falloit démontrer.* *Fig.* 48.

COROLLAIRE III.

112. Plus le côté *sf* s'éloigne du centre C, & plus les ſections oppoſées a*b* & *ef* ſe rapprocheront, de ſorte que s'il devient tangent à la

Digitized by Google

ſphère, comme s'il paſſoit par le point T, les ſections a T & T*e* ſe toucheront en ce point T; & ſi le côté SK eſt hors de la ſphère, alors il ſe formera une ſection compoſée de deux Courbes, qui ne ſeront plus des arcs de Cercles; parce qu'ils ne pourront être communs à la ſphère & au cône, qui eſt en partie dehors; mais de deux portions d'Ellipſoïdimbre, comme nous l'allons expliquer ci-après.

Application à l'Uſage.

113. Ces deux Theorêmes font voir quelle eſt la Courbe de l'enfourchement d'une trompe ou lunette Ebraſée, ou voute en canoniere, qui rachete une voute ſphérique de biais, ſoit parce que la direction de leur milieu ne tend pas au centre de la voute ſphérique, ſoit que, lorſqu'elle y tend, elle ſoit ſurhauſſée ou ſurbaiſſée dans ſon ceintre primitif, qui tient lieu d'arc-droit.

THEOREME XV.

La Section faite par la rencontre des ſurfaces de la Sphère & d'un Cône, dont l'Axe ne paſſe pas par le Centre de cette Sphère, & qui ne la pénetre pas de toute ſa Circonference, eſt une Courbe compoſée de deux portions d'Ellipſoïdimbre, ou d'autres Courbes de même nature, appartenant au Cercle, à la Parabole ou à l'Hyperbole.

Soit la ſphère a T*e* (*Fig.* 49.) pénetrée par le cône SGL, en partie ſeulement, enſorte que le côté SG ſoit hors de la ſphère. Soit menée du point S une tangente ST, qui touche le cercle majeur a T*e* au point T; ſi l'on ſuppoſe les deux points a & *e* communs aux ſurfaces des deux corps, & des lignes a T *b*, *e* T *f* menées de ces points à celui d'attouchement T, qu'on peut conſiderer comme les ſections de deux plans perpendiculaires au plan du triangle par l'axe, paſſant par le centre de la ſphère, les parties de ces lignes qui ſont dans la ſphère, comme aT, *e*T, ſeront les diametres des cercles des ſections de la ſphère, & les lignes *e f*, a*b* ſeront les grands axes des Ellipſes faites par les ſections obliques du cône; or ces cercles & ces Ellipſes n'ont rien de commun que les points a & *e*, donc ni les unes ni les autres de ces figures ne peuvent être les ſections communes aux ſurfaces de ces corps; donc les ſections ſolides ne ſeront pas dans leurs plans *ef* & a*b*, & ne pourront avoir deux points communs avec chaque ſection plane; puiſque les points *f* & *b* ſont hors de la ſphère, & les parties de l'Ellipſe, qui ſe croiſent au point T, & qui ſont hors de la ſphère, ſont mutilées par le plan qui paſſeroit par la tangente T, perpendiculairement au plan a T*e*, lequel en retranche les parties T*f* & T*b*, & la jonction de ces

Fig. 49.

Digitized by Google

plans a pour interſection l'ordonnée commune, qui paſſe par le point T; mais comme ces Ellipſes ne ſont pas communes aux ſurfaces des deux corps, donc la ſection eſt une Ellipſoïdimbre par le Theoréme précedent, il ſuit qu'on aura deux portions de cette eſpece de Courbe, correſpondantes aux deux portions d'Ellipſe, ce que nous appellons une *Ellipſoïdimbre compoſée.*

114. Il faut remarquer que puiſque les ſections ſolides s'écartent des plans des ſections planes, l'ordonnée commune aux deux portions d'Ellipſoïdimbre, ne ſera pas au point T, mais en quelqu'autre comme x; parce que l'une edf paſſe au deſſus de fe, & l'autre agb paſſe au deſſous de ab, comme nous l'avons dit des cas où la ſection Elliptique du cône eſt au dehors de la ſection circulaire de la ſphère.

COROLLAIRE I.

115. D'ou il ſuit que l'Ellipſoïdimbre compoſée ſera toujours un angle d'inflexion; non pas à ſon milieu comme l'Ellipſimbre compoſée, mais plus près d'un des points communs a ou e que de l'autre; parce que les ſections oppoſées étant eſſentiellement inégales à cauſe de la diminution du cône vers ſon ſommet, la partie de la Courbe qui en eſt plus près, comme ax; ſera plus petite que celle qui eſt vers la baſe, comme ex, ainſi qu'il eſt repréſenté dans la figure 49. par les courbes eiX & Xba. Fig. 49.

Secondement, que cette inflexion ſera un angle ſaillant, ſi les ſections oppoſées ſe croiſent au-delà du centre de la ſphère, & un angle rentrant, ſi elles ſe croiſent en-deça, comme nous l'avons dit des Ellipſimbres compoſées; de ſorte que ſi la tangente SH étoit le côté du cône, l'angle d'inflexion ſeroit le plus ſaillant & le plus aigu qu'il puiſſe être, puiſque les axes ne peuvent ſe croiſer plus loin des points a & e, & cet angle diminuëra à meſure que le point x ſe rapprochera de la ligne a e.

Nous donnerons dans la ſuite la maniere de tracer cette Courbe compoſée, ſoit par la projection ſur un plan, comme nous l'avons déja indiquée par celle de tracer l'Ellipſimbre compoſée, ſoit en effet dans ſon contour naturel ſur un cône ou ſur une ſphère.

COROLLAIRE II.

116. Quoique nous ayons parlé dans cette propoſition de la ſection qui produit l'Ellipſoïdimbre, nous n'avons pas prétendu qu'il n'en puiſſe arriver d'autres cas, où elle ne produit pas la même figure. Le cône en

Digitized by Google

ne en effet peut être ſitué de bien des façons à l'égard de la ſphère, qu'il ne pénetre qu'en partie, ce que l'on pourra connoître par la combinaiſon des differentes ſituations des côtez de ſon triangle par l'axe, & de l'inclinaiſon des axes des ſections planes, qu'on ſuppoſe toujours paſſer par les points communs aux côtez de ce triangle, & aux cercles majeurs de la ſphère, coupée par le même plan, qui forme le triangle par l'axe du cône, & enfin par le point d'attouchement de la ligne menée du ſommet du cône tangente au cercle majeur de la ſphère.

117. Premierement, puiſqu'un des côtez du cône doit couper la ſphère en deux points, & que ſa baſe, où un ſecond plan paſſant par un point commun aux deux ſurfaces, & par le point d'attouchement d'une ligne menée du ſommet, doit couper les côtez du cône, il ſuit que dans toutes ces ſections compoſées de portions de Courbes, il y en aura toujours une rélative au cercle ou à l'Ellipſe ; mais parce qu'un des deux plans, que nous ſuppoſons comme l'origine de ces ſections, peut être ſitué de maniere qu'il ne coupe le cône que d'un côté, la ſection qui en réſultera appartiendra à la parabole ou à l'hyperbole, & ſera une courbe, à laquelle nous pouvons donner le nom de Paraboloïdimbre ou d'Hyperboloïdimbre, c'eſt-à-dire, que dans toutes ces ſections, il ſera toujours vrai que les ordonnées à leur axe courbe, qui eſt dans le plan de l'axe droit de la ſection plane & du ſommet du cône, auront un excès ou un défaut ſur les ordonnées de la ſection plane correſpondantes, rélativement à leur diſtance dans un plan paſſant par le ſommet du cône & par les deux ordonnées ; de ſorte que connoiſſant cette diſtance on pourra toujours connoître la difference des ordonnées de la ſection plane & de la ſolide par cette analogie, comme la diſtance du ſommet du cône à l'ordonnée de la ſection plane :

Est à la longueur de la même ordonnée ;

Ainsi la profondeur ou diſtance de l'ordonnée de la ſection ſolide à celle de la plane, priſe dans un plan paſſant par le ſommet du cône :

Est à la difference des deux ordonnées, c'eſt-à-dire, à l'excès ou au défaut de l'ordonnée de la ſection plane.

Il eſt clair que par le moyen de cette difference, ajoutée à l'ordonnée de la ſection plane, connuë par les ſections cóniques, ou retranchée de cette ordonnée, on aura un point du contour de la ſection ſolide, telle qu'elle puiſſe être, Ellipſoïdimbre, Paraboloïdimbre, ou Hyperboloïdimbre.

Digitized by Google

Nous avons repréſenté dans les cinq figures ſuivantes les differentes combinaiſons de ces ſections compoſées.

Fig. 50. Dans la 1.re figure où les points a & *e* ſont communs à la ſphère & au cône, & le point T celui d'attouchement de la tangente menée du ſommet S du cône au cercle majeur de la ſphère *e* a T ; le plan *Fig.* 51. paſſant par *e* T perpendiculairement à la tangente ST, fait pour ſection un cercle dans la ſphère & un dans le cône, dont *ef* eſt le diametre, & l'autre plan paſſant par les points a & T fait une Ellipſe dans le cône, dont le grand axe eſt a*b*.

Fig. 54. Dans la figure 2.e le plan paſſant par les points *e* & T fait un cercle dans le cône, dont EF eſt le diametre, & l'autre plan paſſant par A & T fait une parabole dans le cône ; parce que A*b* eſt ſuppoſé parallele à SG.

Fig. 50. Dans la figure 3.e le plan *e*T fait une [illegible]e dans le cône, dont le grand axe eſt *ef*, & le plan aT fait une parabole, dont l'axe eſt a*b*.

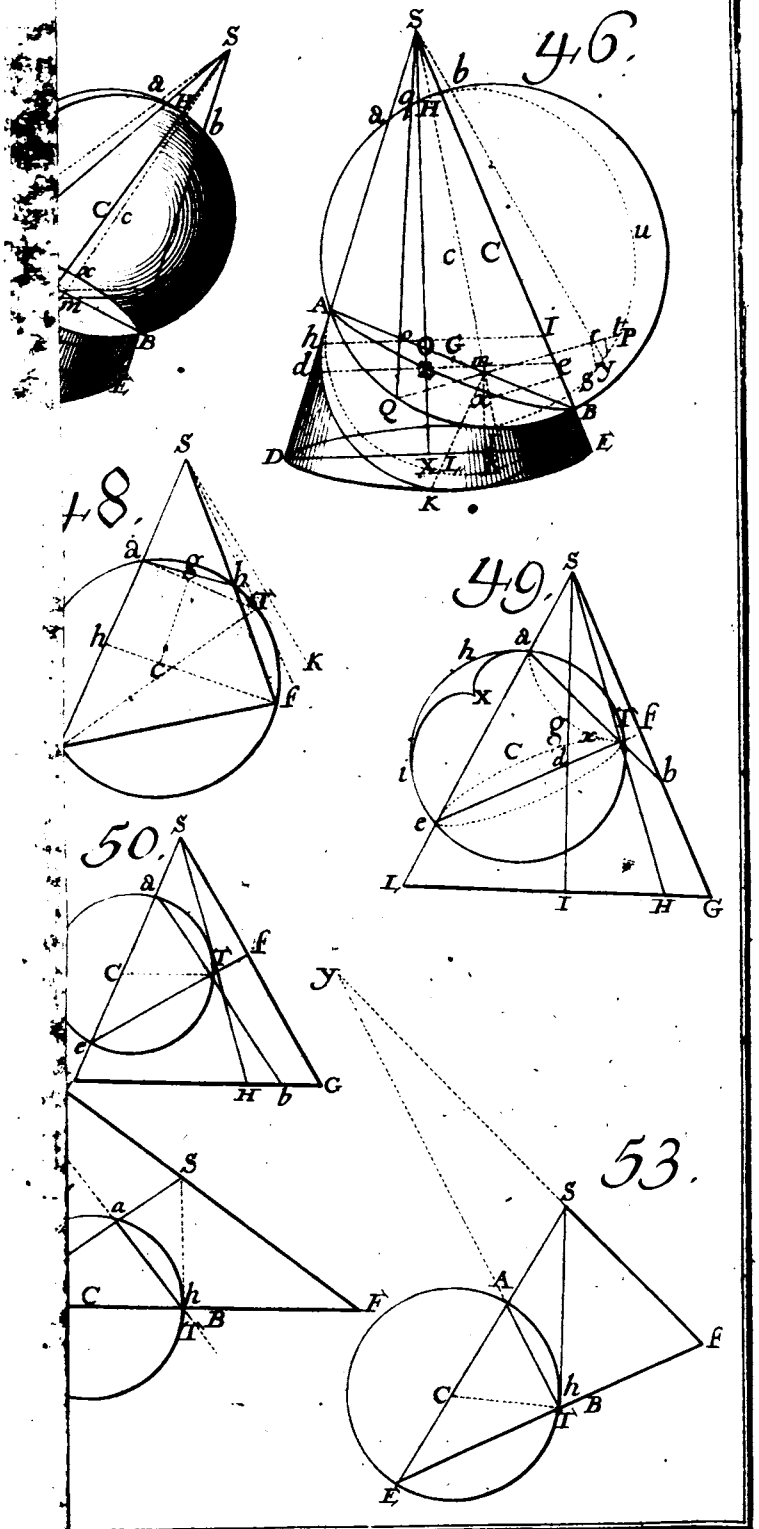
Fig. 52. Dans la figure 4.e le plan ET fait un cercle dans le cône, dont le diametre eſt EF, & le plan aT, qui rencontre le côté du cône SF, prolongé vers *z*, fait une hyperbole, dont a*z* eſt l'axe déterminé, & le point a ſon ſommet.

Fig. 53. Dans la figure 5.e le plan ET, qui coupe les deux côtez du cône SE & S*f* fait une Ellipſe, dont E*f* eſt le grand axe, & le plan AT, qui rencontre le côté *f*S, prolongé en *y*, fait une hyperbole, dont l'axe déterminé eſt A*y*, ſuppoſant toujours la ligne ST tangente au cercle majeur de la ſphère EAT.

Application à l'uſage.

118. Ce Theorême ne paroît pas d'une grande utilité pour la pratique ; on ne l'a mis ici que pour la perfection de la doctrine, il ſert ſeulement à faire connoître quelle ſeroit la courbe de l'arête d'enfourchement d'une Trompe ou voute en canoniere, qui rachêteroit par le côté une voute ſphérique, ce qui ne pourroit arriver que dans une conſtruction bizarre.

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

CHAPITRE VI.

Des Sections faites par la pénetration des Cylindres entr'eux & avec les Cônes.

THEOREME XVI.

La Section faite par la pénetration des Cylindres de même nature, égaux ou inégaux, dont les Axes ſont égaux en longueur, & paralleles entr'eux, eſt un Parallelograme.

LA démonſtration de cette propoſition eſt trop facile pour s'y arrêter; car puiſque la ſection d'un cylindre, faite par un plan paſſant parallelement à ſon axe, eſt un parallelograme (*Fig.* 55.) ceux qui paſſeront par des cordes égales de leurs baſes & dans une même longueur, ſeront égaux; or on voit que la ligne AB, qui joint les points A & B de l'interſection des cercles des deux baſes, eſt une corde commune aux deux cercles, donc le parallelograme, qui aura pour côtez cette corde & une égale longueur d'axe, ſera commun aux deux cylindres. *Fig.* 55.

Application à l'uſage.

119. CETTE propoſition fait voir pourquoi les voutes Gotiques, qu'on appelle en *Tiers-point*, font un angle rentrant à la Clef, qui ſe continuë en ligne droite, comme une diviſion marquée entre les deux côtez, & les pendentifs de celles qui ſe croiſent, parce que leurs Ceintres ſont compoſez de deux arcs de cercle CA, Ac, qui ſont les parties des baſes de deux cylindres, dont les axes ſont autant éloignez que les centres C & *c* de ces arcs, qui le ſont ordinairement de la longueur de leur rayon CA; ainſi la rencontre AD de ces portions de cylindre eſt un des côtez du parallograme de leur interſection totale s'ils étoient entiers. *Fig.* 55.

DANS l'Appareil des angles des murs on trouve auſſi fréquemment des cylindres qui ſe pénetrent dans la même circonſtance, comme on en voit à l'ancien Temple de la Galluce, & à l'Egliſe de la *Sapience* à Rome, dont les plans ſont des arcs de cercle inſcrits dans un Cercle entier, de ſorte que les murs ſont des portions de cylindre, qui ſe croiſent parallelement à leurs axes; mais cet Appareil n'a point de difficulté.

Digitized by Google

THEOREME XVII.

La Section faite par la rencontre des Surfaces de deux Cylindres égaux ou inégaux, dont les Axes ſe coupent perpendiculairement ou obliquement, & qui ont un Diametre égal & ſemblablement poſé ſur un Plan paſſant par leurs Axes, eſt une Ellipſe ; & ſi l'un des Cylindres eſt Droit & l'autre Scalene, ou tous les deux Scalenes & de Baſes égales, elle peut être un cercle.

Fig. 56. *Premierement.* SOIENT deux cylindres AF, FD(*Fig.* 56.) égaux, entr'eux la diagonale menée par la rencontre de leurs côtez eſt également inclinée ſur les uns comme ſur les autres ; donc le plan paſſant par cette diagonale, & perpendiculairement à celui qui paſſe par leurs axes, coupera les deux cylindres d'une obliquité égale ; par conſéquent ſera une Ellipſe commune à tous les deux.

Fig. W. & 57. *Secondement.* SI les deux cylindres ſont inégaux, comme KE & EN, (*Fig.* W. & 57.) ou il y en aura un droit *qt*, & un ſcalene, ou ils ſeront tous deux ſcalenes, comme KE : EN (*Fig.* W.) dans ce cas il eſt clair que la diagonale BE, menée par la rencontre de leurs côtez KB, LE & BN, ME peut être le diametre du cercle de la baſe d'un cylindre ſcalene, & par conſéquent de l'autre, qui a ce cercle auſſi pour baſe, ſoit qu'il ſoit droit comme *qt*, ou ſcalene comme KE, de ſorte qu'il peut être commun aux deux cylindres qui ſe rencontrent.

Fig. W. *Troiſiémement.* SI la rencontre des cylindres inégaux ne ſe fait pas à leur baſe, il eſt évident que le plan paſſant par la diagonale BE, (*Fig.* W.) menée par les angles de rencontre de leurs côtez KB, LE & BN, EM, & perpendiculairement au plan paſſant par les axes *ac* & CP ſera une Ellipſe égale dans chaque cylindre, car l'axe BE de l'Ellipſe eſt commun aux deux, & l'axe conjugué *x*X eſt ſuppoſé auſſi égal & ſemblablement poſé ; donc la ſection ſera une Ellipſe commune aux deux cylindres ; puiſqu'elle eſt équivalante à deux égales, *ce qu'il falloit démontrer.*

Fig. 58. 120. IL en ſera de même des ſections des cylindres inégaux, ayant un diametre égal, lorſqu'au lieu de ſe rencontrer ſimplement par leur extrémité, ils ſe croiſent comme à la figure 58. & ſe pénetrent réciproquement ; car la ſection EB ſera commune aux quatre cylindres LEBK, *g*EB*f*, *h*BE*i*, *n*BE*m*, & la ſection AD ſera commune aux quatre cylindres *h*DA*i*, LDA*k* & *f*AD*g*, *m*AD*n*, qui aboutiſſent les uns aux autres, comme dans le cas précedent ; donc BE & AD ſont deux Ellipſes. Mais ſi les cylindres ſont inégaux, & qu'ils n'ayent pas un diametre égal & ſemblablement poſé, leur ſection commune ne ſera plus une figure plane, comme nous le démontrerons au Theoréme ſuivant.

Digitized by Google

Application à l'uſage.

121. Cette propoſition eſt des plus néceſſaires pour la connoiſſance des courbes des *Enfourchemens* des voutes les plus uſuelles, qui ſont les Berceaux; elle fait voir que lorſqu'ils ſont de même hauteur, quelle que puiſſe être leur largeur, leur ceintre d'enfourchement, eſt toujours une Ellipſe, ſoit qu'ils aboutiſſent l'un à l'autre, perpendiculairement ou obliquement, & alors l'angle de leur rencontre eſt moitié rentrant vers l'angle ſaillant de leurs côtez, comme depuis C en B, ce que *Fig.* W. l'on appelle alors partie de voute en *Arc de Cloitre*, & moitié ſaillant vers l'angle rentrant des côtez, comme de C en E, ce qu'on appelle partie de *Voute d'Arête.* Soit que les deux berceaux ſe croiſent, & alors ils ſont tous ſaillans, & font ce que l'on appelle proprement *Voute d'Arête.* *Fig.* 58.

Cette obſervation eſt néceſſaire pour faire connoître la fauſſeté du Trait du ceintre ſurhauſſé des voutes d'arêtes, Berlongues dans le Livre de la Coupe des Bois du Sr. Blanchard, qu'il fait en Tiers-point non ſeulement dans la figure de la planche 17. mais encore dans le diſcours, car il dit *Page* 68. *que leurs élevations . . . tendent au centre ſuppoſé* 18. *de ſa Planche* 27.

THEOREME XVIII.

La Section faite par la rencontre des Surfaces de deux Cylindres Droits inégaux, dont les Axes ſe coupent perpendiculairement, eſt un Cicloïmbre.

Soit le cylindre ABED, dont l'axe FG eſt perpendiculaire à l'axe *Fig.* 59. CO d'un autre cylindre plus petit HILK, & dont la baſe eſt le cercle HMIN, ayant ſuppoſé un plan qui paſſe par les deux axes, ſi l'on en ſuppoſe d'autres qui lui ſoient perpendiculaires & à l'axe FG, ces plans qui ſeront paralleles entr'eux feront deux ſections differentes chacun, ſçavoir un parallelograme MNQR, dans le cylindre ſuperieur HILK, qu'ils couperont par l'axe, ou parallelement à ſon axe, & un cercle QSRT dans le cylindre inférieur ABED, qu'ils couperont perpendiculairement à ſon axe, leſquelles deux ſections ſe rencontreront en deux points oppoſez RQ, *rq*, qui ſeront par conſéquent communs à la ſurface des deux cylindres, & à la circonférence de la Courbe, qui eſt formée par l'interſection des deux ſurfaces, auſſi bien que les points K & L, qui ſont à l'interſection des deux parallelogrames, formez par la ſection du premier plan, paſſant par les deux axes des cylindres; de ſorte que cette courbe paſſera néceſſairement par les points K*R*r*L* d'un côté, & K*Q*q*L* de l'autre, & ſi l'on joint les points oppoſez par des lignes QR, *qr*, ces lignes ſeront perpendiculaires au plan paſſant par les deux axes des cylindres, qui les coupe en deux également

Digitized by Google

aux points P & *p*, par où paſſe l'axe courbe de la ſection ſolide KP*p*L; or il eſt aiſé de voir que ces ordonnées ſont paralleles & égales à celles de la baſe du cylindre MN, *mn*; puiſque cette baſe HMIN eſt perpendiculaire au plan paſſant par les axes, auſſi bien que QR & *qr*, qu'elles ſont entre mêmes paralleles QM, RN, ou *qm*, *rn* qui ſont les côtez du cylindre, étant dans le même plan MR, ou *mr* paſſant par l'axe O P, ou parallelement à cet axe, & s'il reſtoit quelque doute ſur l'égalité des côtez MQ, NR; pour établir le paralleliſme de MN & QR, il n'y a qu'à ſe rappeller l'article 39. où l'on a fait voir que MN étant parallele à la tangente du cercle QSR par S, & les points M & N étant également éloignez du point O, qui eſt dans le diametre TS prolongé, les paralleles à ce diametre MQ & NR, terminées à la circonference du cercle, ſeront égales entr'elles; donc les ordonnées QR & *qr* ſont égales aux correſpondantes de la baſe du cylindre dans les mêmes plans MN & *m n*. On prouvera la même choſe de toutes les ordonnées poſſibles. Donc la ſection creuſe KLRQ eſt celle que nous avons appellée un *Cicloïmbre*, par la premiere définition, *ce qu'il falloit démontrer.*

Art. 39.

Art. 75.

Il n'eſt pas néceſſaire d'ajouter que les ordonnées de cette ſection ſolide ne ſont pas dans un même plan, puiſqu'il eſt évident qu'elles s'éloignent de celui qui paſſeroit par l'axe ſouſtendant KL, à meſure qu'elles s'éloignent de ces deux points, juſqu'au milieu QR, qui répond au diametre M N, perpendiculaire au plan paſſant par les axes des cylindres; or il eſt aiſé de faire voir dans quelle raiſon elles s'éloignent ou ſe rapprochent de l'axe ſouſtendant KL; car puiſque toutes les ſections faites dans le cylindre AE, par les plans paſſans par les ordonnées de la baſe HMIN au diametre HI, parallelement à l'axe OP, ſont des cercles égaux à celui de la baſe AD; il ſuit que les ordonnées de la ſection ſolide, qui ſont égales à celle de la baſe HMIN, ſont autant de cordes inſcrites dans un cercle égal à la baſe du cylindre AE, qu'on a mis en ſuite en a*d* par les lignes ponctuées P P', *pp' p'*; de ſorte que la profondeur de ces cordes dans le cercle eſt meſurée par la longueur de leurs fléches a P', a*p'* égales à SP, *sp*, qui font voir de combien la Courbe s'éloigne du plan, qui paſſeroit par l'axe KL ſouſtendant de l'axe courbe KP*p*L, à meſure qu'elle approche du milieu de ces deux points communs KL; de ſorte qu'elles augmentent continuellement en longueur dans la raiſon de celle des ordonnées de la baſe HMIN, & de profondeur dans le rapport des fléches des doubles ordonnées, inſcrites dans la baſe du cylindre AE; ou ſi l'on veut prendre les ordonnées pour des ſinus droits, leur profondeur ſera meſurée par les ſinus verſes, ce qui montre évidemment que toutes les doubles ordonnées priſes enſemble forment une ſurface courbe, en façon de tuile creuſe, plus ou moins

Digitized by Google

profonde ſelon la grandeur rélative des deux cylindres, qui ſe pénetrent perpendiculairement; de ſorte que s'ils ſont égaux la ſection eſt la plus profonde qu'elle peut être; parce qu'alors la plus grande ordonnée du milieu, que nous appellons l'axe droit, paſſera par l'axe du cylindre AE, c'eſt-à-dire, par le centre C^2 du cercle aR^2dQ^2, & alors la ſection change de nature, & devient plane comme au Theorême précedent, ſe diviſant en deux parties, qui font un angle rentrant KCL.

122. Il reſte à démontrer que tous les diametres de cette ſection ſolide ſon égaux, c'eſt-à-dire, toutes les lignes, qui, paſſant par l'axe de profondeur SP, ſont terminées à la circonference de la courbe. Premierement il eſt clair que l'axe ſouſtendant KL = HI eſt auſſi égal à l'axe droit QR = MN = HI; puiſque ce ſont les diametres du même cercle HMIN. Il en ſera de même des diametres W V & U*u*, qui ſeront entre mêmes paralleles WU & V*u*, & d'une égale profondeur au deſſous de KL, mais tous hors de la ſurface creuſe, formée par les ordonnées, qui forment la circonference de la ſection; car ils coupent l'axe SP au deſſus du centre P, par exemple, en x. Donc par la définition premiere la ſection ſera un Cicloïmbre, *ce qu'il falloit démontrer.* Art. 75.

Corollaire I.

123. Non ſeulement les ordonnées au plan paſſant par KPL, dans lequel eſt l'axe courbe, ſont égales aux correſpondantes ordonnées au diametre HI, mais encore celles qui ſeroient perpendiculaires au plan paſſant par QSR, dans lequel eſt l'axe droit, ſeroient égales aux paralleles à l'axe HI, correſpondantes dans un plan parallele à l'axe OP, leſquelles renfermeroient une portion cylindrique, terminée par la courbe KRLQ.

Lorsque nous avons dit que tous les diametres du cicloïmbre ſont égaux, nous n'avons entendu parler que des lignes droites, menées d'un point de la courbe à ſon oppoſé en paſſant par l'axe de profondeur SP; car ſi l'on voùloit appeller diametres les lignes courbes, qui paſſent à la ſurface du cylindre par le point S, & les points oppoſez de la circonference du cicloïmbre, on s'apperçoit bien que de tels diametres ſeroient tous inégaux en longueur & en courbure, le plus grand eſt l'arc de cercle QSR, dont l'axe droit QR eſt la courbe, & les autres ſeroient des portions d'Ellipſe, toujours moins concaves à meſure qu'elles s'éloigneroient de cet arc de cercle, & qu'elles approcheroient de l'axe ſouſtendant KL, où l'arc Elliptique ſe change en ligne droite, dans la ſuppoſition qu'elles paſſent toutes par le milieu S; & parce que tous ces arcs inégalement courbes, auroient pour corde des

Digitized by Google

diametres droits, égaux entr'eux; il ſuit que ces courbes ſeroient toutes inégales en longueur dévelopée, c'eſt-à-dire, rectifiée.

COROLLAIRE II.

124. D'où il ſuit que le cicloïmbre, conſideré comme une portion de la ſurface du cylindre, étenduë en ſurface plane, ſeroit une Ovale, dont le grand axe ſeroit QSR, & le petit KL.

COROLLAIRE III.

125. IL ſuit encore que plus le cylindre HL ſera petit à l'égard du cylindre AE, moins la ſection ſolide ſera creuſe; & au contraire, plus le cylindre HL ſera grand à l'égard du cylindre AE, plus elle ſera creuſe, ſoit qu'on la conſidere comme portion de la ſurface du cylindre, ou comme une autre ſurface formée par une ſuite d'ordonnées à l'axe courbe KPL; de ſorte qu'en cas d'égalité, comme nous l'avons dit, la ſection ſolide devient égale à deux moitiez de ſections planes Elliptiques, qui ſe rencontrent au diametre paſſant par l'axe FG; parce qu'alors les côtez MQ, NR du cylindre HL deviennent tangens au cylindre AE, & par conſéquent ne le coupent qu'en un point chacun, qui eſt à l'extremité du diametre du cylindre AE; de ſorte que la profondeur ſera SC, qui ne peut être plus grande; parce qu'au cas que le cylindre HL divienne encore plus grand, ce ne ſera plus lui qui pénetrera, mais qui ſera pénetré par le cylindre AE.

ON remarque bien auſſi que dans le cas d'égalité des cylindres, les plans des demi-Ellipſes, qui ſe rencontrent en C, ſe coupent à angle droit; puiſque les rayons KS, SL & SC ſont égaux, les angles imaginez en KCS & LCS ſont de 45. degrez; donc KCL ſera de 90. c'eſt-à-dire Droit.

COROLLAIRE IV.

126. DE ce que nous avons dit que la profondeur du cicloïmbre dans le cylindre, étoit meſurée par les fléches des cordes égales aux ordonnées à ſon axe courbe, inſcrites dans la baſe du cylindre, on tire une maniere fort aiſée de trouver autant de points que l'on voudra de ſon axe courbe; car ayant fait un cercle a R d Q, & lui ayant mené par le point a une tangente *t* a T, perpendiculaire au diametre a *d*, on portera ſur cette tangente les ordonnées PR, & *pr* en aT & a*z*, & par les points T & *z* on menera TR^2, $2r^2$ paralleles au diametre a*d*, qui couperont la circonference du cercle aux points R^2 r^2, par où menant

nant des paralleles à la tangente aT, on aura sur le diametre a*d*, qu'elles couperont, les fléches aP^2, ap^2, qui sont les profondeurs des points de l'axe courbe, correspondans aux ordonnées M N, *mn* de la base du cylindre HL, égales à celles du cicloïmbre.

Si l'on vouloit trouver ces profondeurs par le calcul, on se servira de la même méthode qu'on a donnée ci-devant au Theorême IX. pour trouver celle de l'Ellipsimbre, avec cette difference qu'elle est plus aisée dans celui-ci, parce que toutes les ordonnées s'inscrivent dans un même cercle, & que pour l'Ellipsimbre de ce Theorême elles devoient toutes être inscrites dans des cercles inégaux.

Il est inutile de faire remarquer que les cicloïmbres opposez sont égaux dans l'immersion d'un cylindre dans un autre, comme dans son émersion ; cette vérité se fait sentir par le paralleliſme des côtez de l'un & de l'autre de ces solides.

Application à l'usage.

120. Rien n'est plus ordinaire dans les voutes que la Courbe dont nous parlons, on voit presque par-tout les berceaux en plein ceintre, percez de Lunettes droites, aussi en plein ceintre, dont les impostes sont à même hauteur que la naissance de la voute, comme seroient celles de la nef du Val de Grace, si les vitraux étoient parfaitement en demi cercle. On connoît donc par cette proposition, que la courbe de l'arête de leur enfourchement est un *Cicloïmbre*. Cette courbe n'est pas moins commune dans l'Architecture militaire ; car les soupiraux circulaires des souterrains en berceaux de niveau & en plein ceintre, & posez à plomb sur la clef, sont des cylindres qui en pénetrent d'autres perpendiculairement sur leur axe, tels sont encore les puis des citernes, posez au milieu des voutes, comme à Phalsbourg.

THEOREME XIX.

La Section faite par la rencontre des Surfaces de deux Cylindres inégaux, dont les Axes se coupent obliquement, & qui se pénetrent de sorte, que l'un entre dans l'autre de toute sa circonference, est une Ellipsimbre.

La démonstration de cette proposition est si semblable à celle de la précedente, qu'on peut l'appercevoir à la seule inspection de la figure 60. Soit a*b e d* un cylindre droit, dont l'axe est *fg*, pénetré par un autre cylindre *h i k l* plus petit, c'est-à-dire, d'un moindre diametre, dont l'axe xX, coupe l'axe *fg* obliquement en C. Ayant supposé comme dans la proposition précedente un plan qui passe par les axes de *Fig.* 60.

ces lignes, il fera pour ſection deux parallelogrames, dont les interſections des côtez, qui ſe couperont en K, L, V*u* donneront les points K & L, communs aux deux ſurfaces. Si l'on ſuppoſe d'autres plans perpendiculaires à celui-ci, qui paſſent par l'axe *x*X, ou parallelement à cet axe comme *my*; ces plans feront deux ſections differentes, ſçavoir un parallelograme MY ou *my*, dans le cylindre *bl*, & une Ellipſe SRT, ou *srt* dans le cylindre a*d*, dont les interſections R & *r* ſeront communes à la ſurface des deux cylindres, ce qui eſt évident. Si enfin l'on ſuppoſe un autre plan, auſſi perpendiculaire au premier, mais paſſant par KL, ou parallelement à *ab* par *b*I, ce plan fera pour ſection dans le cylindre *b*L une Ellipſe *b*MIN, dont toutes les ordonnées à l'axe *b*I comme NO, *no* ſeront égales à toutes les ordonnées RP, *rp* de la ſection ſolide, par les mêmes raiſons, que nous avons expliquées fort au long dans la propoſition précedente; car la ligne MN étant (par la ſuppoſition) perpendiculaire à OC, puiſqu'elle eſt l'interſection de deux plans *b*NI, ONYX perpendiculaires à un troiſiéme *b*ILK, elle ſera parallele à la tangente, qui paſſeroit par le point S; donc NR & MQ, qui ſont paralleles, étant les côtez du cylindre, & également éloignées du diametre de l'Ellipſe SRT prolongé en O, couperont cette Ellipſe à des diſtances égales de N & M; donc RQ ſera parallele à NM, elle lui ſera auſſi égale, puiſqu'elle eſt entre mêmes paralleles NY, MZ. On démontre la même choſe de l'ordonnée *rq*, donc toutes les ordonnées à l'axe courbe KPL, de la ſection paſſant par KRrL, ſont égales à celles de l'Ellipſe plane *b*MIN, correſpondantes dans des plans paralleles entr'eux, & à l'axe *x*X du cylindre *bl*; or toutes ces ordonnées PR, *pr* ne ſont pas dans un même plan, puiſqu'elles s'écartent & ſe raprochent de l'axe ſouſtendant KL, auquel elles viennent ſe terminer à rien aux points K & L; donc leur ſomme forme une ſurface creuſe, comme celle du Theorême IX. dont le contour eſt une *Ellipſimbre* ſuivant notre définition, *ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

128. ON doit tirer les mêmes conſéquences de ce Theorême que du précedent. 1.° Que plus le cylindre *bi*LK ſera grand par rapport au cylindre a*bde*, la ſection KRLQ, ſera plus profonde; de ſorte que ſi les deux cylindres deviennent égaux, elle changera de nature, de ſection ſolide qu'elle étoit, elle deviendra une ſection plane, compoſée de deux Ellipſes, qui ſe rencontrent au diametre du cylindre a*d* paſſant par l'axe *fg*, au point C & perpendiculairement au plan a*d*, ou ſera l'interſection des plans des deux demi-Ellipſes, ce qui retombe dans le cas du Theorême XVII. & de la figure 58. où deux cylindres

Digitized by Google

inégaux ont un diametre commun ou ſemblablement poſé, à l'égard du plan paſſant par les axes des cylindres.

Et au contraire plus le cylindre *bl* ſera petit à l'égard de l'autre *al*, moins la ſection ſera profonde; car puiſque les profondeurs de l'axe courbe ſont déterminées par les fléches, dont les ordonnées de la ſection ſont les cordes inſcrites dans une commune Ellipſe, qui a pour grand axe la ſection oblique ST, plus les ordonnées ſeront petites, moins elles entreront dans l'Ellipſe, où les plus petites cordes ſont toujours les plus éloignées du centre, de même qu'on l'a dit du Cercle.

Corollaire II.

129. Nous remarquerons auſſi comme au Theorême X. que la plus grande profondeur de l'Ellipſimbre n'eſt pas au milieu des points K & L; parce que l'axe droit correſpondant au petit axe MN de l'Ellipſe *b*MIN eſt plus près de L que de K, l'angle KSP étant plus grand que l'angle LSP, d'où il ſuit que les ordonnées à l'axe courbe KPL, qui ſont en nombre égal à celles de l'Ellipſe plane *b*MIN à l'axe *b*I, ſeront plus preſſées d'un côté que de l'autre, ſçavoir de P en L, que de P en K.

130. La méthode de trouver les profondeurs de la ſection, c'eſt-à-dire, les points de ſon axe courbe KPL eſt tout-à-fait la même que celle du Theorême précedent; la ſeule difference eſt que l'on inſcrit ici dans une Ellipſe, qui eſt la ſection oblique du cylindre, les ordonnées qu'on inſcrivoit dans le cercle de ſa baſe.

Si l'on fait l'Ellipſe SDTB (*Fig.* 61.) égale à la ſection oblique, qui a pour grand axe ST, ou S*t* de la Fig. 60. & le petit axe BD égal au diametre *bd* de la baſe du cylindre a*d*, (*Fig.* 60.) enſuite que l'on faſſe la ligne SH, perpendiculaire ſur ST grand axe, S1 = PR & S2 = *pr*, qu'enfin on mene par les points 1 & 2, les ſignes 1R, 2*r*, paralleles à l'axe ST, qui rencontreront l'Ellipſe SRB aux points R & *r*, ces lignes 1R, 2*r*, ou leurs égales S*p*, SP, ſont les profondeurs des points de l'axe courbe, correſpondant aux points O & *o* de l'axe *b*I de l'Ellipſe *b*MIN. *Fig.* 61.

Dans le cicloïmbre nous avons trouvé que ces lignes SP, S*p* étoient les ſinus verſes des ſinus droits RP, *rp*, ici ce ſont des abſciſſes du diametre ST, leſquelles ſont encore en même raiſon que ces ſinus verſes; car ſi l'on fait l'angle LSC (*Fig.* 62.) égal à l'angle LSC, de la Fig. 60. & S*i* perpendiculaire ſur SC, & que l'on prenne ſur SC les parties SP & S*p*, égales aux abſciſſes de la fig. 61. ſi par ces *Fig.* 62.

Digitized by Google

points P & *p*, on mene PO, & *po* perpendiculaires à la ligne SL, les lignes SO, S*o* ſeront les abſciſſes de *b*I, ; or il eſt clair que SP : SO :: S*p* : S*o* à cauſe des paralleles *po* PO. Si enfin l'on fait l'angle LS*i*, égal à l'angle IH*i*, & que l'on mêne des points *o* & O les lignes *of*, OF, perpendiculaires ſur S*i*, les lignes S*f*, SF repréſenteront les abſciſſes du Cercle, c'eſt-à-dire les fléches, dont les doubles ordonnées de la ſection ſolide ſont les cordes, ou les ſinus verſes des ordonnées conſiderées comme ſinus droits, leſquelles ſont encore en même raiſon ; car SO : SF :: S*o* : S*f* :: SP : S*p*, *ce qu'il falloit démontrer*, c'eſt-à-dire, que les abſciſſes de l'axe ST de l'Ellipſe SRTQ ſont à celles de l'axe *b*I, de l'Ellipſe *b*MIN, comme celles-cy ſont à celles du cercle.

Application à l'uſage.

131. CETTE propoſition fait voir quelle eſt la Courbe de l'enfourchement d'une lunette biaiſe dans un berceau, lorſque les impoſtes de l'une & de l'autre ſont ſur un même plan, ou la courbe de l'enfourchement, d'un puits ou d'un ſoupirail circulaire, qui rachete un berceau rampant, comme on en voit au Fort St. Jean à Marſeille, & en pluſieurs Fortereſſes.

THEOREME XX.

La Section faite par la rencontre des ſurfaces de deux Cylindres, dont l'un pénétre l'autre de toute ſa circonference, perpendiculairement ou obliquement à ſes côtez, ſans que leurs Axes ſe rencontrent, eſt une Ellipſimbre.

Fig. 63. POUR rendre la figure néceſſaire à l'intelligence de la démonſtration de ce Theorême, auſſi ſimple qu'il eſt poſſible, nous ne ſuppoſerons qu'une tranche du grand cylindre (*Fig.* 63.) faite par deux plans paralleles entr'eux, perpendiculaires à ſon axe, & tangens au petit cylindre HILK, que nous ſuppoſons premierement perpendiculaire aux côtez du grand cylindre, enſorte que ſon côté HB tombe à angle droit ſur le côté V*u* du grand cylindre ; nous verrons cy-après qu'il peut tomber obliquement ſans qu'il arrive de changement à la ſection ſolide.

SI (comme dans toutes les propoſitions précedentes) nous commençons par ſuppoſer un plan paſſant par l'axe du petit cylindre HL, & perpendiculairement à celui du grand, nous verrons qu'il ſera deux ſections differentes, ſçavoir un parallelograme HILK dans le petit, & un Cercle DVGU dans le grand, qui ſe couperont aux points AB, EF, leſquels ſeront par conſéquent communs aux deux ſurfaces des cylindres. Si par deux de ces points A & B, on fait paſſer un ſe-

Digitized by Google

cond plan parallele à l'axe du grand cylindre, il fera auſſi deux ſections differentes dans ces deux corps; ſçavoir un parallelograme STUV dans le grand, & une Ellipſe AMBN dans le petit, qu'il coupe obliquement, dont le grand axe ſera AB, & le petit MN, égal au diametre de la baſe HI, & les côtez du parallelograme STUV ſeront tangens de cette Ellipſe à l'extremité de ſes axes, & par conſéquent au dehors du cylindre; donc il ne peut être la ſection commune aux deux ſurfaces; l'Ellipſe AMBN ne peut auſſi être une ſection commune, puiſqu'elle eſt toute au dedans de la ſurface du grand cylindre, avec laquelle elle n'a de commun que les points A & B; donc la ſection commune faite par la rencontre des ſurfaces ſera une courbe differente de ces deux figures avec leſquelles elle doit cependant avoir les points A & B communs, par conſéquent elle ne ſera pas dans un plan, mais une courbe à double courbure, cependant elle aura toutes les ordonnées à ſon axe courbe égales à celles de l'Ellipſe, qui eſt la ſection oblique du petit cylindre par les points communs A & B.

Pour trouver les points par où cet axe courbe paſſe, il eſt plus aiſé dans cette propoſition que dans toutes les précedentes Ellipſimbres; puiſqu'il n'eſt pas une courbe inconnuë, mais un arc de cercle APB, qui eſt portion de celui de la ſurface du grand cylindre, coupé par un plan perpendiculaire à ſon axe, & paſſant par les points DBAV, ſi le cylindre HL tombe perpendiculairement ſur les côtez du grand.

Ou dans un autre cas cet arc courbe ſera une portion de l'Ellipſe, faite par un plan paſſant par l'axe du cylindre HL, & coupant obliquement le grand cylindre par les points A & B.

Soient les points RQ & *rq* la rencontre des deux ſurfaces, les ordonnées menées par ces points à la courbe de la ſection ſolide, ſeront donc ſur la ſurface du grand cylindre, dont elles ſeront partie des côtez, telles ſont ici PR, *pr*, leſquelles ſeront paralleles & égales aux correſpondantes NC: *no* dans l'Ellipſe plane AMBN ſur des plans paralleles à l'axe *x*X; car les lignes paſſant par ces points NR, *nr* parallelement à l'axe *x*X ſont des parties de côtez du cylindre HL; par conſéquent paralleles entr'elles; mais parce que les doubles ordonnées NM, *nm* ſont paralleles à l'axe du grand cylindre, elles le ſeront auſſi aux côtez du même cylindre; donc RM & *rm* ſont des parallelogrames, par conſéquent *rq* = *nm*, & RQ = NM; c'eſt-à-dire, que les ordonnées ou doubles ordonnées de la ſection ſolide, ſont égales à celles de l'Ellipſe plane, dont le grand axe eſt le ſoutendant de l'axe courbe BPA; donc la ſection eſt une Ellipſimbre, *ce qu'il falloit démontrer.*

Digitized by Google

COROLLAIRE I.

132. D'ou il ſuit que cette Ellipſimbre eſt beaucoup plus parfaite & plus ſimple que celles des propoſitions précedentes; plus parfaite en ce que ſon axe courbe eſt une portion réguliere de Cercle ou d'Ellipſe; & plus ſimple en ce que ſes ordonnées ne ſont pas une ſurface differente de celle du grand cylindre, comme dans les Ellipſimbres précedentes, & par conſéquent le centre P de cette ſection ſe trouve à la ſurface du cylindre, où eſt auſſi l'axe droit RQ, qu'il diviſe en deux également. Tous les autres diametres courbes, qui paſſeront par le centre P ſeront des portions d'Ellipſes, dont les cordes ſeront les diametres droits de la ſection, égaux auſſi à ceux de l'Ellipſe plane ſoujacente AMBN.

Au reſte cette Ellipſimbre a toutes les proprietez des autres, ſes ordonnées, par exemple, ſont plus ſerrées d'un côté que de l'autre, excepté qu'elle eſt encore plus ſimple dans les profondeurs de ſon axe courbe, leſquelles ſe trouvent naturellement en faiſant d'un point donné ſur l'axe ſouſtendant *ab*, mis au bas de la fig 63. l'angle *poa* ou PCa égal à celui de l'axe *x*X, avec la ligne AB, & toutes les lignes paralles à PC, ou *p o* iront ſe terminer à l'arc de cercle *b*PA de la baſe du grand cylindre, ſi le petit le traverſe perpendiculairement à ſes côtez, ou à un arc d'Ellipſe *b*PA, s'il le traverſe obliquement, comme à la figure 64. ſi l'on veut avoir les profondeurs perpendiculaires à l'axe ſouſtendant *b*a, il ſera bien aiſé d'abaiſſer des perpendiculaires *p d*, PD ſur cet axe, elles donneront ces profondeurs.

Fig. 64.

133. Il nous reſte à faire voir que ſoit que le petit cylindre traverſe le grand perpendiculairement à ſes côtez, comme nous l'avons ſuppoſé (*Fig.* 63.) ſoit qu'il le traverſe obliquement, la ſection ſera toujours une Ellipſimbre, ce qui eſt aſſez clair de ſoi-même; car ſoit que le côté HB tombe d'une façon ou de l'autre ſur VB, le plan VSTU ſera toujours un parallelograme dans le grand cylindre, & une Ellipſe AMBN dans le petit, la ſeule difference eſt, que la ligne AB (*Fig.* 63.) eſt néceſſairement le grand axe de l'Ellipſe, & que ſi le cylindre *b*L (*Fig.*64.) eſt oblique ſur le côté AB du grand cylindre, elle peut devenir le petit axe.

134. Nous ſuppoſons dans l'un & l'autre cas le petit cylindre Droit, s'il étoit ſcalene, le plan VSTU pourroit le couper de maniere que ſa ſection ne ſeroit plus une Ellipſe, mais un cercle, & alors la ſection ſolide ne ſeroit plus une Ellipſimbre, mais un cycloïmbre; parce que l'axe ſouſtendant *b*a ſeroit égal à l'axe droit AB, & toutes les ordonnées de la ſection ſolide & de la plane étant paralleles & égales, les

Fig. 64.

Digitized by Google

diametres droits seroient égaux entr'eux, ce qui est la proprieté du *Cicloïmbre*, qui en constituë la difference avec l'Ellipsimbre où ils sont tous inégaux.

135. L'obliquité du petit cylindre sur les côtez du grand, occasionne encore une difference dans la maniere de trouver les profondeurs perpendiculaires de la section solide sur la section plane. Premierement, en ce qu'au lieu d'un arc de cercle pour son axe courbe, il faut trouver l'arc de l'Ellipse formée par l'obliquité du plan passant par l'axe du petit cylindre, de laquelle le grand axe sera FG, & le petit *hi* base du petit cylindre; mais ce n'est pas assez d'avoir trouvé cet arc *ba*, car les perpendiculaires *p d*, PD, sur la corde *ba*, ne sont pas perpendiculaires au plan VSTU de la fig. 63., lequel est parallele à l'axe du grand cylindre, parce que la ligne PD, & la parallele *p d* est encore inclinée au côté du grand cylindre *dk*, de sorte que pour trouver cette inclinaison il faut faire à part l'angle PD*y* égal à l'angle FCH ou *x*CH de l'axe *x*X avec le côté LH du grand cylindre, la perpendiculaire P*y* sur le côté D*y* sera la profondeur que l'on cherche. *Fig.* 64.

Corollaire II.

136. D'ou il suit comme au Theorême X. que plus le côté HK du petit cylindre approchera de l'extremité D du rayon CD, perpendiculaire à l'axe *x*X, plus la section sera alongée, & plus les sections opposées AB, EF se rapprocheront, de sorte que si le côté HK devient tangent au cercle D V G U, les sections se toucheront au point D, & qu'enfin s'il est hors du grand cylindre, elles se tronqueront réciproquement, & la section totale sera composée de deux portions d'Ellipsimbre, comme nous l'avons dit ailleurs. *Fig.* 63.

Application à l'Usage.

Cette proposition fait connoître quelle est la Courbe des arêtes des lunettes droites ou biaises, dont la naissance est au dessus des impostes d'une voute en berceau, dans laquelle elles sont pratiquées, soit que leurs Clefs ne montent pas à la hauteur de celle du berceau, comme sont celles de la Nef du Val de Grace à Paris, & de la Chapelle de Versailles, soit que leurs Clefs soient de niveau, comme aux Traverses du Rampart de Landau à la Gorge des Tours Bastionnées, ce qui est le cas du second Corollaire, où le côté du petit cylindre HK devient tangent au grand au point D; alors il se forme une voute d'arêtes difformes en ce qu'elles ne peuvent pas se bornoyer en lignes droites dans les diagonales, comme aux voutes d'arêtes, dont les clefs & les im-

Digitized by Google

poſtes ſont de niveau. En effet dans celles-ci, les interſections ſont des Ellipſes planes, comme nous l'avons démontré au Theorême XVII. & dans l'autre cas ce ſont des Ellipſimbres, c'eſt-à-dire, des courbes à double courbure, qui ne peuvent être bornoyées en ligne droite, en quelque ſituation que le ſpectateur puiſſe ſe mettre.

Si au lieu de faire attention aux rencontres des ſurfaces concaves des deux cylindres, on conſidere la convexe de l'un & la concave de l'autre, on reconnoîtra la courbe de rencontre d'une Tour ronde dans un berceau, ou ſi l'on veut s'arrêter à de petits ouvrages, on remarquera que c'eſt celle d'un pilier rond Gotique, qui rachete un Chapiteau Octogone dans une moulure de cavet; comme on le voit ordinairement aux anciennes Egliſes entre la Nef & les bas Côtez.

On peut donner un grand nombre d'autres exemples de conſtructions qui ont rapport à ce Theorême, comme ſont les Abajours cylindriques, qui éclairent des berceaux, par une direction qui ne tend pas à leurs axes, comme ſont ceux des voutes ſouterraines des tours baſtionnées de Landau, leſquels ſont fort ſurbaiſſez dans leur orifice, c'eſt-à-dire, que ce ſont des cylindres ſcalenes, dont les rencontres avec les cylindres droits des berceaux, ſont des courbes à double courbure en Ellipſimbres.

On verra au quatriéme Livre, lorſque nous donnerons les Traits des Deſcentes biaiſes, qui rachetent un berceau, l'uſage du petit triangle DP*y*, qui eſt ſous la figure 63. pour en trouver la double obliquité.

THEOREME XXI.

La Section faite par la rencontre des Surfaces de deux Cylindres, dont l'un ne pénetre l'autre que d'une partie de ſa Circonference, & dont les axes ne ſont pas paralleles, eſt une Ellipſimbre *compoſée*.

Fig. 65. Soit, comme dans la fig. 63. une tranche de cylindre *g*VN*u* (*Fig.* 65.) repréſentée en perſpective, laquelle eſt pénetrée par le cylindre HL, qui n'y entre qu'en partie de ſa circonference, le côté IL étant hors du grand cylindre; je dis que la ſection formée par la rencontre de leurs ſurfaces ſera compoſée de deux portions d'Ellipſimbre,

Car ſi l'on ſuppoſe un plan paſſant par l'axe *x*X du petit cylindre perpendiculairement à l'axe du grand, il ſera dans l'un un parallelograme, & dans l'autre un cercle, leſquels ſe coupant aux points A & *a* marqueront que ces points ſont communs aux deux ſurfaces des cylindres,

Digitized by Google

lindres, & ſi par le point D, équidiſtant des points A & a, pris ſur la circonference du cercle *u d* V D, on fait paſſer deux plans coupans les deux cylindres par les points A & a parallelement à l'axe du grand cylindre, ils feront chacun deux ſections differentes, ſçavoir un parallelograme dans le grand cylindre, & une Ellipſe dans le cylindre HL, laquelle ſera en partie hors du grand cylindre, & parce que ces plans ſe croiſent en D, leur commune interſection GH ſera une ordonnée commune aux deux Ellipſes AHBG & a*H*bG; mais parce que la ſection commune aux deux ſurfaces des cylindres, qui ſe coupent, eſt une Ellipſimbre, par le Theorême précedent, il ſuit que chaque ſection plane Elliptique correſpondra à deux portions d'Ellipſimbre, qui ſe tronqueront mutuellement, comme les Ellipſes avec les ordonnées, deſquelles elles ont un rapport d'égalité, dans les plans paralleles à l'axe *x*X, & perpendiculaire au plan paſſant par les points ADa; donc la ſection totale ſera compoſée de deux portions d'Ellipſimbre, *ce qu'il falloit démontrer.*

Cependant puiſque par la propoſition précedente la ſection ſolide peut être un cycloïmbre, dans le cas où le cylindre, qui en pénetre un plus grand, eſt ſcalene, il peut auſſi arriver que la ſection totale ſoit un *Cicloïmbre compoſé.*

137. Quelque ſoit la ſection, ſi l'on veut trouver l'ordonnée commune aux deux courbes à laquelle elles ſe terminent réciproquement à leur angle d'inflexion, il n'y a qu'à mener du centre C de la ſection circulaire du cylindre *d*V D*u*, la figure CF perpendiculaire ſur l'axe *x*X, laquelle coupera les côtez du cylindre HL en E & F; ſur EF comme diametre, ayant fait le demi cercle ETF, on élevera du point D, ſection des lignes AB, a*b*, la perpendiculaire DT; cette ligne qu'il faut imaginer couchée ſur les côtez du grand cylindre, parallalement à ſon axe, ſera l'ordonnée que l'on cherche; car le point T & ſon oppoſé au diametre, paſſant par l'axe *x*X du cylindre HL, ſeront à ſa circonference, puiſque ce cercle ETF eſt égal à la baſe; & que la ligne DT eſt à la ſurface du grand cylindre, quoique par la néceſſité de joindre dans la figure les plans qu'on ſuppoſe perpendiculaires entr'eux, elle ne paroiſſe pas dans ſa ſituation, qui ſeroit celle de DH, & ſon double en GH.

Corollaire.

138. On tirera la même conſéquence de la difference des inflexions du milieu de l'Ellipſimbre compoſée, que dans la propoſition 11. c'eſt-à-dire, que plus & moins le cylindre HL entrera dans l'autre, plus l'in-

flexion ſera ſenſible, que plus le point D approchera de l'axe, moins elle ſera ſenſible, & que depuis le point D vers F elle ſera un angle ſaillant, & au contraire depuis D vers E elle ſera un angle rentrant.

Application à l'uſage.

139. On voit par cette propoſition quelle eſt la Courbe de l'enfourchement d'une Tour ronde, qui rachete un berceau de niveau, ou rempant; & qu'il n'eſt pas poſſible de ſupprimer les murs de la tour ſous cet enfourchement, lorſqu'elle pénetre le berceau au-delà de la clef, parce que l'angle d'inflexion devenant ſaillant, les *Contreclefs* de l'arcade, qui devroient ſupporter la tour, pouſſeroient au vuide au contraire en-deça de la clef, il ſera facile de faire porter la tour par une Arcade; parce que l'angle d'inflexion eſt rentrant, & fait l'effet d'une voute en tiers-point.

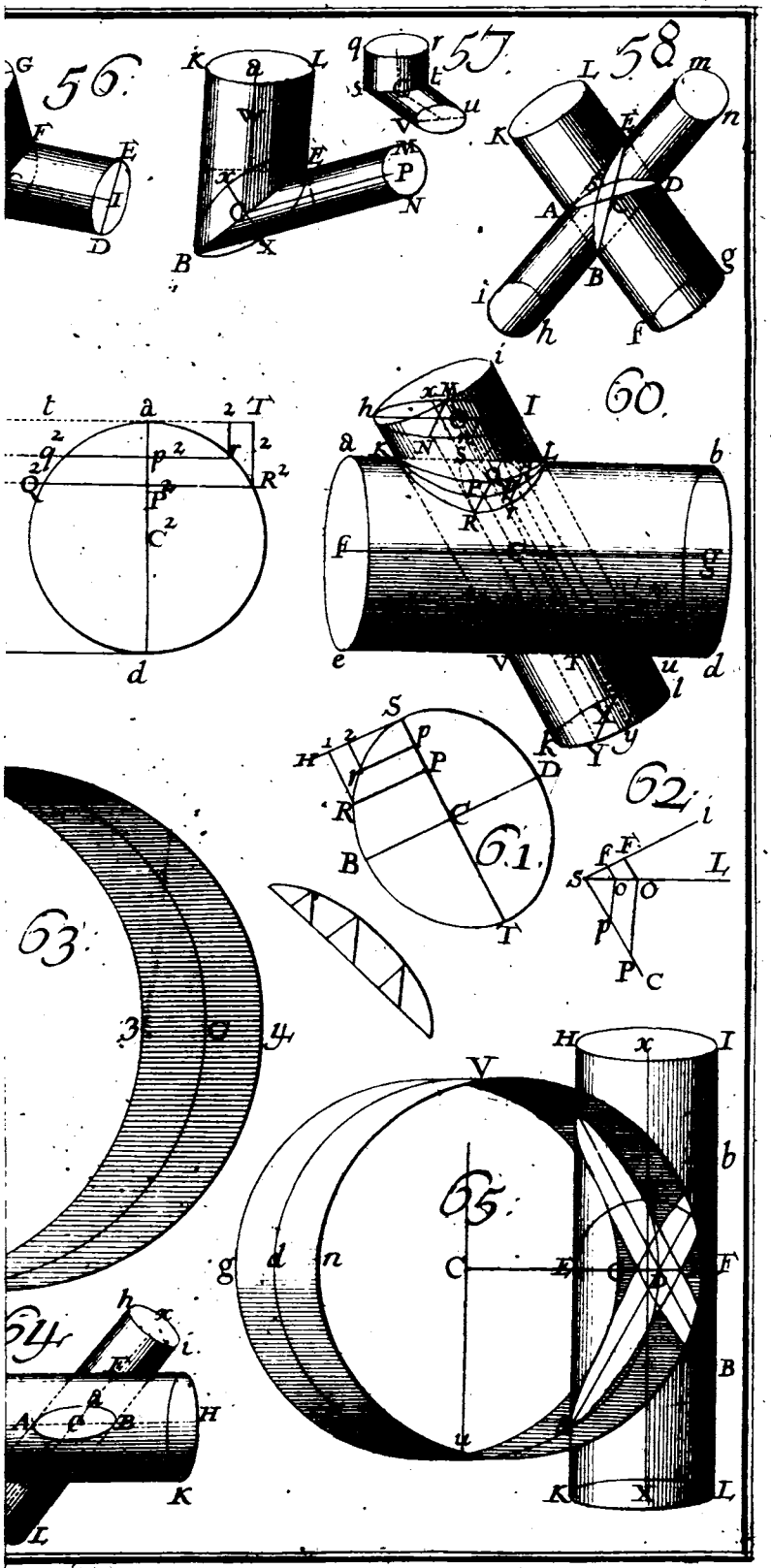
REMARQUE.

140. Il eſt conſtant que les ſections des cylindres entr'eux ſont les plus néceſſaires à connoître; parce que les plus communes de toutes les voutes ſont les berceaux circulaires, ou ſurhauſſez ou ſurbaiſſez; or quelques ſoient les ceintres de leurs *Arcs-Droits*, c'eſt-à-dire, des ſections perpendiculaires à leurs axes, tant qu'ils ne varieront que du cercle à l'Ellipſe, ou d'une Ellipſe à une autre plus ou moins alongée, il n'arrivera aucun changement à la nature des courbes, qui ſe feront par les interſections de leurs ſurfaces, puiſque les cylindres ſurhauſſez ou ſurbaiſſez ſont de vrais cylindres, leſquels, au lieu d'être Droits, ſont ſcalenes; de ſorte qu'ils peuvent toujours être coupez, de maniere qu'ils auront pour baſe un cercle, comme nous l'avons dit dans les ſections cylindriques, ce qu'il n'eſt pas inutile de répeter, afin qu'on y faſſe attention dans la pratique.

Des Sections faites par la rencontre des Surfaces des Cônes & des Cylindres qui ſe pénetrent.

141. Il ſemble au premier abord, que ſoit que le cylindre pénetre le cône, ou que le cône pénetre le cylindre, il en doit réſulter une même ſection à leur ſurface. Cependant nous y ferons voir de la difference; dans le premier cas le cône embraſſe le cylindre, & dans le ſecond le cylindre embraſſe le cône; or quoiqu'un cône d'une grandeur donnée n'embraſſe pas le

Digitized by Google



UNIV. OF MICH.
Digitized by Google

Digitized by Google

cylindre donné ; il eſt cenſé le faire, lorſqu'étant prolongé il le peut ; ainſi les deux axes de ces corps étant paralleles, quoique le cylindre ne coupe qu'une partie du cône, il ne faut pas mettre en queſtion lequel des deux embraſſe l'autre ; car il eſt évident qu'en prolongeant les côtez du cône il s'élargira de maniere, qu'il envelopera le cylindre auſſi prolongé, & la ſection ſera toujours la même, quoiqu'avant la prolongation elle fût moindre, parce qu'elle étoit imparfaite. Il n'en eſt pas de même, lorſque les axes ſe croiſent ſans ſe rencontrer, la ſection eſt tellement mutilée, que le prolongement du cône ne peut la rendre plus complete.

THEOREME XXII.

La Section faite par la rencontre des ſurfaces d'un Cône & d'un Cylindre Droits, ou d'un Cône & d'un Cylindre Scalenes de même obliquité ſur leurs baſes, dont les Axes ſe confondent, eſt un cercle.

La démonſtration de cette propoſition eſt ſi aiſée qu'elle ſe préſente d'elle-même ; car puiſque les ſections de ces corps coupez par des plans paralleles à leurs baſes, ſont des cercles, il eſt évident que les ſections FG (*Fig. 66.*) & fg (*Fig. 67.*) ſont paralleles aux baſes AB, & ab ; car les corps étant coupez par un plan paſſant par leurs axes communs SC, KC, les triangles ADF, BEG ſeront égaux ; par conſéquent F & G équidiſtans de D & E, (*Fig. 66.*) & dans la fig. 67. à cauſe des paralleles bd, ie on aura $be : eg :: bc : cs$, & $ad : df :: ac : cs$, mais $ac = cb$, & $ad = be$, donc $eg : cs :: df : cs$, donc $eg = df$, par conſéquent fg eſt parallele à ab, & la ſection faite par un plan paſſant par les points communs f & g, qui ſera un cercle dans le cylindre, comme dans le cône, ſera commune aux deux ſurfaces, dont elle ſera l'interſection, à leur rencontre. On peut démontrer la même choſe en ſuppoſant le point R à la circonference de la ſection ; car on connoîtra (*Fig. 66.*) que les trois triangles rectangles en L, SLF, SLG, SLR, qui ont le côté SL commun, & les angles en S égaux, ſont égaux en tout, par conſéquent que les trois lignes LF, LR, LG ſont égales, & dans un même plan* & les rayons d'un même cercle ; & [*Fig. 67.*] à cauſe de l'égalité des rayons de la baſe ca, cP, cb, & des triangles ſemblables acs, Fls ; Pcs, Rls ; bcs, gls les lignes lf, lR, lg ſont égales, & dans un même plan ; par conſéquent rayons d'un même cercle comme au cône, & au cylindre, *ce qu'il falloit démontrer.*

Fig. 66. & 67.

* *Eucl. l. 11. p. 5.*

142. Quoique les axes du cône & du cylindre ſe confondent dans leur pénetration, ſi l'un de ces deux corps eſt Droit & l'autre ſcalene, comme ſi [*Fig. 68.*] le cylindre an étoit Droit ſur la baſe circulaire de, Fig. 68.

Digitized by Google

la ſection ne ſeroit plus un cercle, mais une autre courbe à double courbure.

Application à l'uſage.

143. On voit par cette propoſition que le ceintre de l'Ebraſement d'une porte étant de même nature que celui de la porte circulaire, Droit ou biais par tête, & en plein ceintre, l'arête d'enfourchement de la partie qui fait berceau avec celle qui eſt ébraſée, eſt un cercle, c'eſt-à-dire, une portion de cercle égale à celle de la porte, qui peut être d'une moitié ou d'un arc moindre, comme à celles qui ſont ſimplement Bombées.

THEOREME XXIII.

La Section faite par la rencontre des Surfaces d'un Cylindre & d'un Cône, qui ne ſont pas de même nature, c'eſt-à-dire, dont l'un eſt Droit & l'autre Scalene, & dont les Axes ſe confondent, eſt une Ellipſoidimbre.

Fig. 68. Soit [Fig. 68.] le cône BSA ſcalene, pénetré par le cylindre Droit D E *e d*, dont l'axe *x*X eſt en partie commun avec l'axe SC du cône. Ayant ſuppoſé un plan paſſant par ces axes, qui fera deux ſections differentes, ſçavoir, un triangle BSA dans le cône, eſt un parallelograme D E *d e* dans le cylindre, qui ſe couperont aux points *b* & a; on reconnoîtra que ces deux points ſont communs aux deux ſurfaces, par conſéquent à la circonference de la ſection. On ſuppoſera enſuite un ſecond plan perpendiculaire au premier, paſſant par *b* a, lequel fera deux ſections differentes, ſçavoir un cercle dans le cône ſcalene; parce que nous avons démontré que *b* a étoit parallele à la baſe BA [au Theorême précedent] & une Ellipſe dans le cylindre, qu'il coupe obliquement, leſquelles figures ſoient repréſentées par leurs moitiez *bg*a, demi cercle & *b f a* demi Ellipſe, ayant pris un point P à volonté ſur le diametre commun *b* a, on abaiſſera une perpendiculaire P *g*, ſur ce diametre, laquelle coupant le cercle & l'Ellipſe, donnera les ordonnées de l'un & de l'autre, P*g* pour le cercle, & P*f* pour l'Ellipſe. Du même point P ayant mené au ſommet du cône *s* la ligne PS, & ſur cette ligne une perpendiculaire. PF égale à P*f*; on prendra PF égale à P*f*; par le point F qui appartient à l'Ellipſe, on fera paſſer une parallele à *x*X pour repréſenter un côté du cylindre, & par les points G & S une ligne GS, qui repréſentera le côté du cône, & coupera celui du cylindre en *y*, ou ſera un des points de la ſection des deux ſurfaces, par ce point *y* on menera une parallele *yv* à PG, & une autre *yz* à PS, cette préparation étant faite.

Digitized by Google

A cauſe des triangles ſemblables GSP & Gyz, on aura SP : PG :: yz : zG, c'eſt-à-dire la diſtance du ſommet du cône à l'ordonnée de l'Ellipſe, comme la profondeur ou diſtance de la ſection ſolide à cette ordonnée, eſt à la difference des ordonnées du cercle & de la ſection ſolide, donc cette ſection eſt une *Ellipſoïdimbre*, par la quatriéme définition.

Et parce que yv eſt parallele à PG, le point v qui eſt dans le plan paſſant par les axes, & les *Points b* & a ſeront à l'axe courbe bva de l'Ellipſoïdimbre. Art. 83.

Quelque point P que l'on prenne dans l'axe, on aura toujours la même conſtruction & la même analogie; puiſque le plan ba étant perpendiculaire à celui qui paſſe par les axes, toutes les lignes menées du ſommet du cône à la ligne ba ſeront perpendiculaires aux ordonnées des ſections de la circulaire bga & de l'Ellipſe bfa, & parce que les intervales de ces deux courbes ſont toujours inégaux, les points y ſeront toujours inégalement éloignez du plan paſſant par ba, où ſont les ordonnées du cercle, qui eſt la ſection cônique, de ſorte que le point y ſe rejoindra en b & en a, ſi les points P ſont pris en b & en a.

Application à l'uſage.

144. Cette propoſition fait voir que ſi *l'Arc-Droit* d'un berceau ou d'une porte eſt en plein ceintre, & qu'on lui faſſe une lunette ou un ébraſement en biais, auſſi en plein ceintre, l'arête d'enfourchement de l'ébraſement & du berceau ſera une courbe à double courbure, de ſorte que les *Aplombs*, c'eſt-à-dire, les verticales tirez de pluſieurs de ſes points, ne tomberont pas ſur une ligne droite. La même choſe arrivera mais en ſens contraire, ſi l'ébraſement eſt ſurhauſſé ou ſurbaiſſé & le biais du berceau en plein ceintre par tête.

THEOREME XXIV.

La Section faite par la pénetration d'un Cylindre & d'un Cône, dont les Axes ſe coupent obliquement, peut être dans un ſeul cas [expoſé cy-aprés] une Ellipſe plane.

Soit [*Fig.* 69.] le triangle BSA la ſection d'un cône par ſon axe Sc, dont la baſe BA eſt indéfiniment prolongée vers D. Soit EL le diametre de la ſection Elliptique, faite par un plan perpendiculaire au triangle par l'axe SC, lequel ſoit prolongé juſqu'à la rencontre de la baſe en F; ayant mené par le ſommet S la ligne SD parallele à DE, qui rencontrera la baſe prolongée en D, ſi l'on fait Dx moyenne proportionelle *Fig.* 69.

Digitized by Google

entre BD & AD, & qu'on la place de D en x, sur le diametre de la base, le point x donnera la position du pied d'une ligne parallele à l'axe d'un cylindre, laquelle passant par le sommet du cône S, déterminera celle des côtez par les points E & L, en lui menant les paralleles Gg, Kk, je dis que la section faite par le plan passant par EL, perpendiculaire à celui qui passera par les axes du cône & du cylindre, sera l'Ellipse ERLr, dont EL sera le grand axe, & que cette section plane sera commune aux deux corps.

Pour le démontrer, soit pris sur le grand Axe EL un point P à volonté, par lequel ayant mené bi parallele à la base BA, qui coupera le cône aux points b & a, & le cylindre aux points g & i, sur les lignes ba & gi, comme diametres, on décrira deux demi-cercles boa, goi, qui représenteront les sections faites dans le cône & dans le cylindre, par un plan passant par P perpendiculairement au triangle par l'angle BSA. Si du point P on éleve une perpendiculaire PO, qui coupe le cercle du cône en R & celui du cylindre en O.

On démontrera que cette ligne est une ordonnée commune aux deux cercles & à l'Ellipse ERLr; car dans le cône à cause des triangles semblables EPb, SDB, aPL, LAF & SAD on aura les analogies suivantes; $\left.\begin{array}{l} EP : P\,b :: SD : DB \\ PL : Pa :: SD : DA \end{array}\right\}$ donc $EP \times PL : P\,b \times Pa = \overline{PR}^2 : \overline{SD}^2 : DB \times DA$. Dans le cylindre à cause des triangles semblables EPg, iPL, SDx, on aura encore les analogies suivantes; $\left.\begin{array}{l} EP : P\,g :: SD : D\,x \\ PL : P\,i :: SD : D\,x \end{array}\right\}$ donc $EP \times PL : Pg \times Pi = \overline{PO}^2 : \overline{SD}^2 : \overline{D\,x}^2$, ou ce qui est la même chose à $DB \times DA$. Donc les lignes PO & PR ont même rapport aux lignes PE, PL; donc elles sont égales & se confondent en une terminée en P & en O ou R, qui deviennent un même point; & puisqu'on peut prouver la même chose de tous les points P, pris à volonté, il suit que l'Ellipse du cylindre est la même que celle du cône; puisque les ordonnées à l'axe EL seront toujours communes. Donc la section d'un cône & d'un cylindre dont les axes se coupent obliquement, peut être une Ellipse plane, *ce qu'il falloit démontrer.*

Hors de ce cas la section faite par la pénetration de ces corps ne peut être une figure plane, comme nous le démontrerons dans la suite.

Corollaire.

145. Il suit de cette proposition qu'un cône BSA étant donné & une

Digitized by Google

Ellipſe ERL*r* dans ce cône, il eſt facile de trouver le cylindre qui a pour ſection la même Ellipſe; puiſqu'ayant trouvé une troiſiéme proportionelle aux lignes BD & DA, on aura ſur la baſe du cône un point *x*, lequel avec le ſommet S détermine la poſition de l'axe du cône, & les points E & L celle des côtez.

Nous donnerons l'inverſe dans les Problèmes, c'eſt-à-dire, la maniere de trouver le cône, auquel convient l'Ellipſe de la ſection d'un cylindre donné.

Application à l'uſage.

146. Cette propoſition fait voir qu'il faut examiner quelle eſt la poſition du cylindre dans le cône, lorſque les axes ſe coupent obliquement, pour reconnoître ſi la ſection eſt plane ou ſolide, comme elle eſt preſque toujours. Et dans la pratique elle peut être appliquée à la conſtruction d'une arriere-vouſſure cónique ou ébraſement biais, rachêtant un ceintre ſurhauſſé ou ſurbaiſſé, dont la direction du milieu ſe croiſe avec celle de l'ébraſement.

THEOREME XXV.

La Section faite par la rencontre des ſurfaces d'un cône & d'un Cylindre, qui le pénetre, enſorte que les Axes de ces deux Corps ſe croiſent, ou ſoient paralleles entr'eux, eſt une Ellipſimbre.

Ce Theorême renferme deux cas, & les comprendroit tous en le joignant aux précedens, s'il comprenoit celui où les axes ne ſe rencontrent pas ſans être paralleles; mais il eſt ſi compoſé que nous le laiſſons à la recherche de quelque bon Mathematicien. Cependant quoique ce défaut rende notre Theorie un peu imparfaite, la pratique ne s'en reſſentira pas; parce que nous trouverons une maniere Geometrique de trouver autant de points qu'on voudra, de la courbe de cette ſection, quoiqu'elle nous ſoit inconnuë en general, on ne perd en cela qu'une formule generale d'Algebre, qui embraſſe tous les cas.

Premier cas, où les Axes ſe coupent perpendiculairement ou obliquement.

Soit [*Fig.* 70.] ASB le triangle par l'axe du cône, & IGHK le parallelograme par l'axe du cylindre, ou un autre plan CDFS paſſant par l'axe SC du cône, & par celui du cylindre *x*X, ce dernier plan coupera la ſurface du cône ſuivant une ligne droite SP, ſuivant laquelle un troiſiéme plan perpendiculaire au plan CF ſera ſuppoſé couper le cylindre & toucher le cône, de ſorte qu'il ne fera qu'une ſection dans un *Fig.* 70.

Digitized by Google

des corps, ſçavoir une Ellipſe dans le cylindre, qu'il coupe obliquement en E*m*LM, dont EL ſera le grand axe, lequel eſt dans la ligne SP à la ſurface du cône, auquel cette Ellipſe étant tangente, ſera toute au dehors.

Si par les points M & *m*, N & *n*, pris à volonté ſur la circonference de cette Ellipſe, on mene de lignes QM, *q*N paralleles à l'axe du cylindre *x*X, prolongées juſqu'à la rencontre de la ſurface du cône, aux points Y & *y*, ces points ſeront à la circonference de la ſection ſolide, auſſi bien que les points E & L; de ſorte que la ligne E*y*YL ſera au contour de la ſection ſolide, & ſi par les mêmes points M & N, ou ceux qu'ils ont produit à la baſe du cylindre Q, R, *qr*, on mene des ordonnées au diametre GH, ou EL, par leſquelles on ſuppoſe des plans YR, *yr*, qui coupent le cylindre & le cône, ils feront deux ſections differentes, ſçavoir des parallelogrames *yr* & YR, dans le cylindre, & des cercles ou des Ellipſes dans le cône, dont YTV & *yty* ſeront des arcs; mais parce que les ordonnées M*m* & N*n* ſont tangentes à ces courbes, que les points M & *m* ſont également éloignez du point d'attouchement T & *t*, de même que N & *n*, & que les lignes YM, *y*N, qui ſont les côtez du cylindre, ſont paralleles entr'elles; il ſuit que les ordonnées de la ſection ſolide YV & *yu* ſont paralleles & égales aux ordonnées à l'axe EL de l'Ellipſe plane E M L*m*, donc la courbe EYLV eſt une Ellipſimbre, *ce qu'il falloit démontrer.*

Second cas, où les Axes ſont paralleles entr'eux.

Fig. 71. Soit AS*b* le triangle par l'axe du cône, & un plan SFPC paſſant par l'axe X*x* du cylindre GH, ce plan fera deux ſections differentes, ſçavoir un parallelograme GH*bg* dans le cylindre, & un triangle aSP dans le cône, dont SP ſera un côté, & par conſéquent à ſa ſurface. Si l'on ſuppoſe un troiſiéme plan, qui lui ſoit perpendiculaire & tangent au cône, ſuivant la même ligne SP, il fera par ſa ſection dans le cylindre une Ellipſe EML*m*, dont l'axe EL ſera partie de cette ligne SP, laquelle Ellipſe ſera toute hors du cône, & dans le cylindre. Si enſuite on prend à la circonference des points M & N à volonté, & que par ces points on mene des paralleles à l'axe *x*X, comme MY, N*y*, elles rencontreront la ſurface du cône en quelques points Y & *y*, qui ſeront à la circonference de la ſection ſolide, puiſqu'ils ſont communs à la ſurface du cône & à celle du cylindre, dont ces lignes ſont les côtez; donc la ligne courbe E*y*YL eſt celle de la ſection ſolide.

Il reſte à démontrer que les ordonnées à l'axe courbe de cette courbe ſeront égales à celles de l'Ellipſe à l'axe EL, ce qui eſt facile par l'application de la démonſtration précedente, dont celle-ci n'eſt qu'une répeti-

Digitized by Google

répetition ; car les plans paralleles à l'axe du cylindre paſſant par les ordonnées de l'Ellipſe plane *Mm*, *Nn* ſont un parallelograme dans le cylindre, & des hyperboles ſemblables dans le cône, dont les arcs YTV & *ytu* ſont touchez aux points T & *t* par les ordonnées de l'Ellipſe plane *Mm* & *Nn*, & les points M & *m*, N & *n*, également diſtans des points T & *t*; donc par l'Article 39. les lignes MY, *m*V coupent l'hyperbole à des diſtances égales de la tangente MT*m*; par conſéquent les lignes YV, & *yu* ſont paralleles aux lignes *Mm* & *Nn*, & elles leur ſont égales, puiſqu'elles ſont entre mêmes paralleles, qui ſont les côtez du cylindre MY, *m*V; donc la ſection eſt une Ellipſimbre, *ce qu'il falloit démontrer.*

147. Quant au troiſiéme cas où les axes ne ſont pas paralleles, & ne ſe coupent pas; quoique nous ne déterminions pas la figure qui réſulte de la rencontre des ſurfaces du cône & du cylindre par un Theorême general, nous donnerons dans les Problêmes la maniere de trouver autant de points que l'on voudra de cette courbe, en coupant le cône & le cylindre par des plans paralleles entr'eux; mais parce que l'inclinaiſon de ces plans peut changer quatre fois la courbe de la ſection du cône, & deux fois celle du cylindre, la rencontre des ſurfaces des deux corps ſera dans l'interſection de differentes ſections; quelquefois d'une parabole & d'une Ellipſe, d'une hyperbole & d'un cercle, de deux Ellipſes ou de deux cercles, de ſorte que la combinaiſon de ces ſections devient fort compoſée, d'où réſulte une ſi grande varieté, que je laiſſe à quelque Sçavant l'invention d'une formule algebrique, qui donne la ſolution de tous les cas de cette propoſition.

Corollaire.

148. Il ſuit de la pénetration du cylindre dans le cône, que lorſque leurs axes ſont perpendiculaires entr'eux les ſections oppoſées ſont égales, & que lorſqu'ils ſont obliques elles ſont inégales. Celle qui eſt plus près du ſommet du cône eſt la plus petite, & ſon oppoſée la plus près de la baſe, la plus grande ; cette obſervation eſt encore vraye, lorſque les axes ne ſe coupent pas, & qu'ils ne ſont pas paralleles.

Application à l'Uſage.

149. Cette propoſition fait connoître quelle eſt la Courbe de l'enfourchement d'une voute en canoniere, percée de lunettes en berceau, comme il peut arriver au grand Eſcalier du Vatican à Rome, où cel-

Digitized by Google

le d'un Ebraſement fait au bout d'un berceau, dont la naiſſance ne ſeroit pas de niveau avec celle du plein ceintre de l'Ebraſement.

THEOREME XXVI.

La Section faite par la pénetration d'un Cône dans un Cylindre eſt une Ellipſoïdimbre.

Un cône peut pénetrer un cylindre de ſix manieres.

1.° Lorsque l'axe du cône coupe perpendiculairement celui du cylindre.

2.° Lorsqu'il le coupe obliquement.

3°. Lorsque l'axe du cône ne rencontre pas celui du cylindre, mais qu'il tombe perpendiculairement ſur ſon côté, & entre dans le cylindre de toute la circonference de ſon contour.

4.° Lorsque, dans les mêmes circonſtances, ſon axe tombe obliquement ſur les côtez du cylindre.

5.° Lorsqu'il ne pénetre le cylindre que d'une partie de ſa circonference, & que ſon axe tombe perpendiculairement ſur le côté du cylindre.

6.° Enfin lorſqu'il n'y a qu'une partie de ſon contour qui entre dans le cylindre obliquement.

Dans tous ces cas la ſection eſt une Ellipſoïdimbre de même eſpece, que celle dont nous avons parlé ci-devant au Theorême XXIII.

Fig. 72. Pour le premier & ſecond cas. Soit un cylindre D*d* F*f* (*Fig.* 72.) pénetré par un cône BAS, dont l'axe SC coupe celui du cylindre KX perpendiculairement ou obliquement. Si l'on ſuppoſe un plan paſſant par ces deux axes, il coupera le cylindre ſuivant une ligne droite EL, dont les points E & L ſeront communs aux deux ſurfaces, étant à l'interſection du triangle par l'axe fait dans le cône, & du parallelograme par l'axe du cylindre, à la ſurface duquel ſera la ligne EL. Si l'on ſuppoſe un ſecond plan tangent au cylindre ſuivant la ligne EL, que nous ſuppoſons oblique à l'axe CS, ce plan fera dans le cône une ſection Elliptique, dont EL ſera le grand axe : ſi enſuite l'on prend à ſa circonference autant de points que l'on voudra à volonté, comme M*m*, N*n*, par leſquels on mêne des lignes droites au ſommet S du

Digitized by Google

cône, ces lignes rencontreront la surface du cylindre en quelques points Y & *y*, lesquels seront communs aux deux surfaces, puisqu'ils sont à l'intersection des côtez du cône & du cylindre; donc la courbe E*y*YL est celle de la section solide.

Si par les mêmes points M & N on tire des ordonnées à l'axe EL, elles toucheront le cylindre aux points T & *t*, & seront perpendiculaires aux lignes TS, *t*S, & les plans qui passeront par ces ordonnées feront dans le cône des triangles SM*n*, SN*n*, & des cercles ou des Ellipses dans le cylindre, dont YTV, & *ytu* seront des arcs, & les ordonnées YV & *yu* de la section solide, seront leurs cordes; il est visible qu'à la section solide la plus près de la base, ces cordes seront plus petites que les ordonnées de l'Ellipse M*m* & N*n*, puisque les lignes MV, N*u*, *m*Y, *ny* sont convergentes, en ce qu'elles tendent toutes au sommet S; or si l'on prend leur difference en tirant les lignes *h*Y, HV, & *yo* paralleles à l'axe KX on aura des triangles semblables ST*m*, Y*hm*, & S*tn*, *yon*, dans lesquels on aura les analogies suivantes ST : T*m* :: Y*h* : *hm*, & S*t* : *tn* :: *yo* : *on*; c'est-à-dire, que la distance du sommet du cône à l'ordonnée de l'Ellipse plane est à cette ordonnée, comme la profondeur de la section, ou distance à l'ordonnée de l'Ellipse plane, est à la difference de cette ordonnée avec celle de la section solide; donc * la courbe E*y*YL est une Ellipsoïdimbre, *ce qu'il falloit démontrer.* * Art. 79.

150. Il paroît inutile de répeter ici ce que nous avons dit de pareilles sections, que les opposées avoient leur axe courbe, tourné en sens contraire, de sorte, que si dans l'une la difference des ordonnées de la section solide & de l'Ellipse plane est un excès, dans l'autre elle sera un défaut, sans que le rapports des analogies soit changé pour cela.

On sçait encore que le même rapport de cette difference ne peut être appliqué à toutes les ordonnées, mais chacune d'entr'elles a un rapport different à la correspondante; car il est clair que le rapport de *on* à *tn*, est bien plus petit que celui de *hm* à T*m*, la raison est que si les axes du cône & du cylindre se coupent à angle droit, les triangles S*m*, ST*m* sont de même hauteur, ayant leurs sommets en S & leurs bases inégales, *tn* étant plus petit que T*m*, & si les axes se coupent obliquement, ces differences de rapport subsisteront encore comme nous l'avons démontré au Theoréme XXV. ce qui comprend le second cas.

151. Dans le troisiéme cas de cette proposition, si l'axe du cône

Digitized by Google

ne rencontre pas celui du cylindre, mais qu'il tombe perpendiculairement sur son côté, c'est-à-dire sur une ligne prise à la surface du cylindre parallele à son axe: je dis que la courbe est encore la même.

Fig. 73. Soit (*Fig.* 73.) le triangle *b*Sa, qui pénetre le cylindre G*gd*D, dont l'axe S C ne rencontre pas celui du cylindre KX, comme on le voit par le profil, où *s* C' ne passe pas par le centre *x* du cercle 2*el*, mais qui tombe perpendiculairement sur le côté du cône, comme si ST est perpendiculaire sur HI, si l'on imagine un plan SEL, coupant l'axe du cylindre perpendiculairement à la ligne HI, les points E & L, qui sont à l'intersection des côtez du cylindre Q*q*, R*r*, & de ceux du cône SE, SL seront communs aux deux surfaces, & par conséquent à la circonference de la section solide. Si ensuite on suppose un second plan, passant par ces deux points parallelement à l'axe KX du cylindre, il fera deux sections, l'une dans le cylindre, qui fera un parallelograme Q R *r q*, & une Ellipse EML*m* dans le cône, qu'il coupe obliquement; parce que l'axe SC du cône ne passe pas par le centre du cercle, qui est la section faite dans le cylindre par le plan ESL, où il faut remarquer, que dans la figure on a représenté ce plan en perspective, ensorte qu'il n'est pas perpendiculaire à HI; pour éviter la confusion des lignes, & faire voir l'arc ETL, partie de ce cercle, qui auroit été confondu en une ligne droite.

Si suivant notre méthode on mene des ordonnées M*m*, N*n* à l'axe EL de l'Ellipse, & que par les points de sa circonference MN, *mn*, qui sont dans le cylindre, on tire des lignes au sommet du cône S, ces lignes seront à sa surface & couperont celle du cylindre (au dessous de laquelle les points MN, *mn* sont enfoncez) en quelques points comme *y* Y, V & *u*, lesquels seront à la circonference de la section solide, comme il est évident, puisqu'ils sont à l'intersection des côtez du cône & de ceux du cylindre; donc la ligne qui passera par les points E*y*YL V*u* sera la courbe de la circonference de la section solide.

Maintenant pour trouver le rapport des ordonnées de cette section avec celles de l'Ellipse plane EML*m*, qui est la section oblique du cône par un plan, il n'y a qu'à mener des paralleles aux lignes SP & S*p* par les points Y & *y*, lesquelles retrancheront des ordonnées de l'Ellipse les differences M*b*, N*o* de leurs excès sur celle de la section solide Y*x*, *yz*, & donneront les analogies suivantes, à cause des triangles semblables SPM, Y*b*M & S*p*N, *yo*N, qu'on a répeté à côté de la figure, pour éviter la confusion des lignes S P: P M :: Y*b*: *b*M & S*p*: *p*N :: *yo*: *o*N; donc la courbe E*y*YL est une Ellipsoïdimbre, *ce qu'il falloit démontrer.*

Digitized by Google

REMARQUE.

152. On voit ici que la difference des ordonnées de la ſection ſolide à l'Ellipſe eſt en défaut, comme l'on a vû dans les exemples des ſections précedentes, dans la partie la plus près de la baſe (*Fig.* 72.) ce qui ſemble ſe contrarier, puiſque les ſections oppoſées ſont tournées en ſens contraire ; mais il faut remarquer que dans le cas précedent les points E & L ſont conſiderez poſez ſuivant la longueur du cylindre, enſorte que le plan par la ligne E L eſt tangent, par conſéquent au dehors du cylindre, & de la ſection ſolide ; & qu'ici au contraire le plan paſſant par EL coupe le cylindre & ſe trouve au dedans de la ſection, de ſorte que l'Ellipſe plane à laquelle on la compare, étant differemment ſituée, il n'eſt pas étonnant qu'elle donne des analogies de défaut, quoique la ſection ſoit plus près du ſommet, où elle donneroit de l'excès ; ſi on l'avoit ſituée comme à la figure 72. en examinant la ſection, qui paſſeroit par *eT/* du profil. Au reſte les rapports ſont toujours les mêmes dans chaque plan paſſant par les ordonnées des deux ſections & le ſommet du cône. La diſtance de ce ſommet à l'ordonnée de la ſection plane eſt toujours à cette ordonnée, comme la profondeur de la ſection ſolide eſt à la difference des ordonnées des deux ſections par excès ou par défaut.

Il eſt aiſé de voir les differences qui peuvent arriver à ces Courbes dans les cônes ſcalenes, où les ſections planes que nous avons conſideré comme des Ellipſes, peuvent être des cercles.

153. *Quatriéme cas.* Où l'axe du cône tombe obliquement ſur les côtez du cylindre, il n'y aura aucune difference de ſection, toute celle qui en peut réſulter, c'eſt qu'il peut arriver que les diametres EL & *Mn* deviennent égaux, & que la ſection ſoit une eſpece de cicloïmbre alteré, pour lequel nous n'avons pas fixé de nom.

154. Enfin au cinquiéme & au ſixiéme cas, ſi l'axe du cône tombe perpendiculairement ou obliquement ſur le côté du cylindre, & que le cône ne le pénetre que d'une partie de ſa circonference ; la ſection ſera compoſée de deux portions de courbes, l'une plus grande que l'autre ; parce que celle qui approchera du ſommet ſera plus petite que celle qui ſera plus près de la baſe, comme nous l'avons déja remarqué, & ces courbes feront entr'elles deux angles d'inflexion, plus ou moins rentrans, ſelon que la pénetration du cône dans le cylindre ſera plus ou moins profonde ; car ſi un de ces côtez touche celui du cylindre, elles ſeront toutes les deux fermées & ſe toucheront en un point, comme nous l'avons dit de toutes les autres ſections

Digitized by Google

compoſées, ce qui ne mérite pas de répetition, avec cette difference que celles-ci ne peuvent pas être égales, quand même les deux côtez du triangle par l'axe du cône toucheroient le cylindre. Et ſi enfin ces deux côtez du cône s'élargiſſent, de ſorte qu'ils ſoient tous les deux hors du cylindre, la ſection change de nature, & retombe dans le cas du Theorême précedent, où le cône embraſſe le cylindre; car il s'agit alors de conſiderer la pénetration du cylindre dans le cône, & non pas celle du cône dans le cylindre, dont nous avons fait la diſtinction au commencement de ce Chapitre.

Application à l'uſage.

155. CETTE propoſition fait connoître quelle eſt la Courbe de l'arête d'enfourchement de toutes ſortes de lunettes ébraſées dans des berceaux, ſoit qu'elles ayent leurs naiſſances de niveau avec celle du berceau, & qu'elles ſoient Droites, comme au premier cas; ſoit qu'elles ſoient biaiſes comme au ſecond; ſoit que leurs naiſſances ſoient au deſſus ou au deſſous de celle du berceau, comme dans le troiſiéme & quatriéme cas, ce qui peut ſouvent arriver; ſoit enfin que la lunette fût priſe en maniere d'Abajour, en partie hors du berceau, ce qui ne peut guères arriver, à moins qu'on ne voulût le faire exprès par caprice, ou au bout d'un berceau, comme on en voit aux Souterrains des nouvelles Fortifications de Manheim dans le Palatinat.

Fig. 74. LA figure 74. fait voir l'effet du cône, qui embraſſe le cylindre, enſorte que les deux ſections ſe raprochent, tellement que ſi le cylindre s'écartoit encore un peu plus du milieu du cône, elles n'en feroient plus qu'une compoſée.

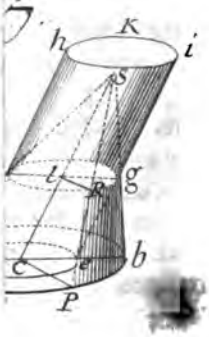
CHAPITRE VII.

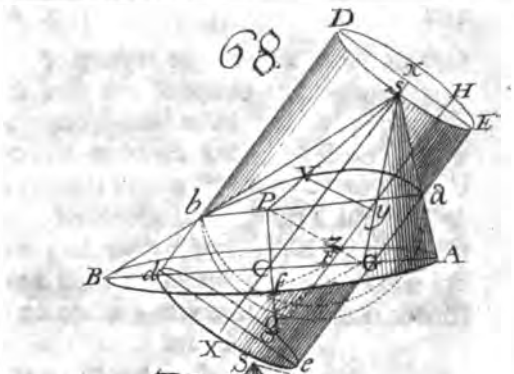
Des Sections faites par la pénetration des Cônes entr'eux.

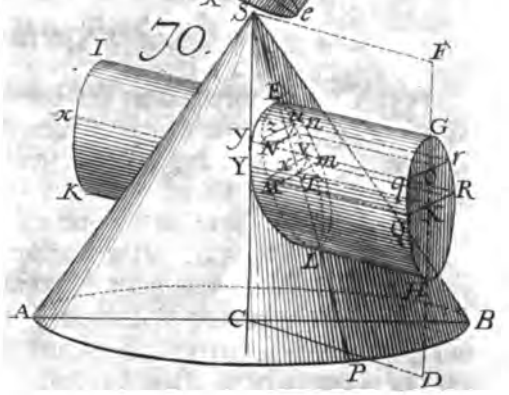
UN cône peut être à l'égard d'un autre cône de differente grandeur, & en differente poſition; d'où réſultent les cas qui changent la nature des ſections formées à leurs ſurfaces, par leur pénetration mutuelle.

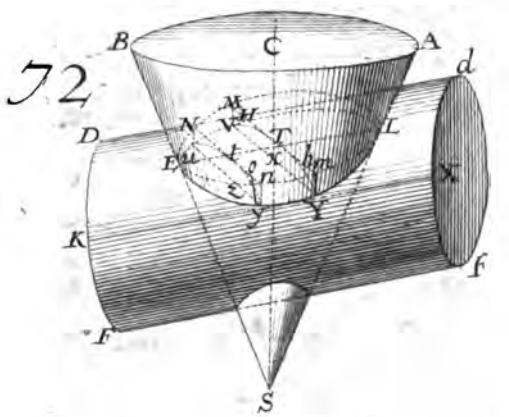
LA combinaiſon de leur ſituation reſpective peut beaucoup plus va-

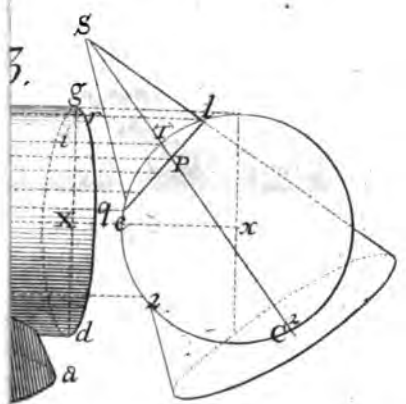
Digitized by Google

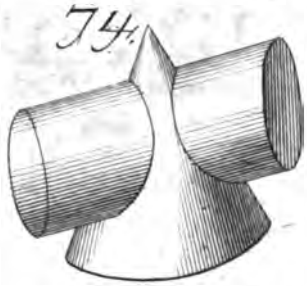












Digitized by Google

Digitized by Google

nier que celle des cylindres entr'eux, qui ſont des corps plus ſimples, & dont les ſections ne peuvent être que de trois eſpeces; celles des cônes au contraire peuvent être de cinq eſpeces, qui donnent neuf combinaiſons, rejettant les inutiles. Je ne doute pas cependant qu'on ne puiſſe trouver une formule generale, qui comprendroit tous les cas des ſections ſolides, qui peuvent ſe faire par la pénetration des cônes entr'eux, dans quelque ſituation que ſoient leurs axes & leurs côtez, les uns à l'égard des autres, il ſeroit à ſouhaiter que quelque Sçavant Algebriſte voulût y travailler. Le célebre M. Bernoully de Bâle, qui a bien voulu jetter les yeux ſur ce petit Ouvrage, & me donner des inſtructions ſur la Courbe de la ſection de l'Anneau, m'a dit que le calcul pour la formule generale de l'interſection des cônes étoit plus long que difficile, pour moi qui le trouve au deſſus de mes forces, je me contenterai de ce que la geometrie lineaire pourra nous indiquer ſuivant notre méthode ordinaire, de la ſuppoſition des plans coupans ces corps de differentes façons, & comparant les ſections planes aux ſolides; & quoique je n'en approfondiſſe pas la Theorie, je fournirai les moyens néceſſaires à la pratique pour en trouver les courbes par celui de la projection, ce qui ſuffit au projet de cet Ouvrage, où l'on s'eſt borné aux connoiſſances qui doivent être de quelque uſage dans l'Architecture. Je puis auſſi dire que les rencontres des voutes coniques entr'elles ſont des cas aſſez rares, comme on le verra au quatriéme Livre; cependant nous ne laiſſerons rien à déſirer de ce qui peut tomber en pratique, quoique nous ne puiſſions donner ici une Theorie complete ſur cette matiere; quelque Sçavant pourra peut-être ſuppléer à ce qui manque ici à la curioſité.

THEOREME XXVII.

Les Sections faites par la pénetration de deux Cônes égaux, dont les Axes (s'ils ſont Droits) ou les côtez ſemblables (s'ils ſont Scalenes) ſe coupent à diſtances égales de leur Sommet, ſont des Sections Planes.

Ce Theorême contient ſept combinaiſons de poſition de cônes, qui ſe pénetrent, lorſqu'ils ont l'axe commun & qu'ils ſont tournez en ſens contraire.

1.° Lorsque leurs axes ſe confondent, & qu'ils ſont tournez en ſens contraire, comme à la fig. 83. *Fig.* 83.

2.° Lorsque les cônes ſont Droits & leurs axes paralleles entr'eux. *Fig.* 75.

3.° Lorsque leurs axes ſont inclinez entr'eux, & qu'étant prolongez ils ſe rencontrent au-delà des ſommets. *Fig.* 76.

Digitized by Google

Fig. 77. 4.° LORSQU'ETANT inclinez ils ſe croiſent au deſſous des ſommets; & que les côtez oppoſez ſont paralleles entr'eux.

Fig. 78. 5.° LORSQU'ILS ſe croiſent au deſſous des ſommets, & que les quatre côtez ſe coupent,

Fig. 79. 6.° LORSQUE, les cônes étant ſcalenes, les côtez ſemblables & oppoſez ſont paralleles entr'eux, mais tournez en ſens contraire, le ſommet de l'un, du côté de la baſe de l'autre.

Fig. 80. 7°. LORSQU'ETANT auſſi ſcalenes ils ſont tournez en ſens contraire, ſeulement à l'égard de la baſe, & qu'ils ont un axe commun.

Au deuxiéme & troiſiéme cas la ſection HD eſt une hyperbole; au quatriéme, PR une parabole; au cinquiéme, EL, & au ſixiéme, *b*B une Ellipſe; & au ſeptiéme, SD*d* un triangle iſoſcele.

DEMONSTRATION.

Si l'on ſuppoſe un plan paſſant par les axes des deux cônes il fera par la ſuppoſition deux triangles ſemblables & égaux ASB, a*s*b, & ſi un ſecond plan perpendiculaire à celui-ci, le coupe par le point H *Fig.* 76. d'interſection des côtez SB, *s*a, & des axes CX, *c*X en X, ou paral- & 75. lelement aux axes, s'ils ſont paralleles entr'eux comme la figure 75. il eſt clair qu'il retranchera des ſegmens de cercles égaux DEa, DE*b*, dans chaque baſe du cône; puiſque les abſciſſes Da, D*b*, qui ſont les fléches des arcs, ſont égales par la ſuppoſition; mais auſſi il retranchera des ſegmens de cône DHa, DHB, qui ſeront de même hauteur & inclinaiſon ſur ces portions de baſe, puiſqu'il les coupe à diſtances égales des ſommets S & *s* par la ſuppoſition; donc tous les arcs de ces ſegmens de cône, paralleles à ceux de la baſe comme *f*G, FG, ſeront encore égaux entr'eux, parce qu'ils ſeront coupez en même raiſon dans chaque cône à même diſtance de la baſe; donc ils n'avanceront pas plus d'un côté que de l'autre; & par conſéquent aboutiront au même plan, qui fera deux ſections égales, une à droite dans un cône, & une à gauche dans l'autre, ou pour mieux dire une ſection équivalante à deux.

QUANT à la figure de la ſection, il eſt viſible qu'elle ſera déterminée par la poſition du plan coupant perpendiculairement les triangles par les axes, comme s'il n'y avoit qu'un ſeul cône, puiſque ſa poſition à l'égard de l'autre eſt ſuppoſée égale.

Appli-

Digitized by Google

Application à l'uſage.

Cette propoſition, conſiderée 1.° au ſecond & troiſiéme cas, fait voir quelles ſont les arêtes de rencontre des crenaux paralleles, convergens & divergens, joints enſemble dans une ſeule ouverture intérieure, comme on en voit en pluſieurs vieux Chateaux, & dans les Fortifications modernes aux Redoutes de Luxembourg & ailleurs. *Fig.* 75. 76. & 77. 2.° Au quatriéme & cinquiéme cas des cônes égaux, dont les axes & les côtez ſe croiſent, on voit quelle eſt la Courbe, qui ſe forme à l'angle rentrant des enfourchemens des voutes ſphériques, fermées en polygones, à leurs diagonales dans la méthode du *Trait*, qui ſuppoſe des cônes tronquez, inſcripts dans la ſphère, pour y former des Panneaux de dévelopement, comme on le verra au Chapitre ſeptiéme du quatriéme Livre, où nous ferons voir en quoi conſiſte l'erreur du trait du P. Deran & du P. Déchalles qui l'a ſuivi, & que M. de La Ruë, qui l'a connu à-peu-près n'en a pas apperçû la raiſon. *Fig.* 78. 3.° Au 6.e cas, cette propoſition fait voir quelle ſeroit la courbe d'arête d'enfourchement d'une *Corne de Vache double* exactement faite, comme ſi ſes piédroits étoient ceux d'un biais paſſé. *Fig.* 79.

4.° Au 7.e cas elle fait voir que les Trompes coniques, que tous les Auteurs de la coupe des Pierres mettent aux angles des Eſcaliers, ſuſpendus à repos, ſont un compoſé de deux cônes, qui font un *Jarret* à la clef, en angle ſaillant; car la ſection par les points A & a, faite par un plan perpendiculaire aux deux triangles par l'axe commun SX, fait deux Ellipſes, l'une AC dans le cône ſcalene ASB, l'autre a*c* dans l'autre cône égal S*ab*, leſquelles ſe croiſent en *m* ou en *i* entre les deux axes *c*H & C*b*, de ſorte que cette ſection eſt une courbe compoſée, telle qu'elle eſt repréſentée en AH*b*a, & en projection par la droite A *c m* C a. *Fig.* 80.

THEOREME XXVIII.

La Section faite par la pénetration des Cônes Droits inégaux, dont les Axes ſe confondent, ou des Cônes Scalenes inégaux, dont les Axes ſe confondent, & ſont également inclinez à leurs Baſes, eſt un Cercle.

La vérité de cette propoſition ſe préſente d'elle-même, & n'a pas beſoin de démonſtration; car les ſections planes, paralleles à la baſe par les points communs E F & D *d*, *d d*, ſont des cercles communs aux deux cônes, ſoit que les baſes ſoient confonduës comme aux figures 81. 82. ou parallelement éloignées comme aux figures 83. & 84. *Fig.* 81. 82. 83. & 84.

Digitized by Google

THEOREME XXIX.

La Section faite par la pénetration de deux Cônes inégaux, mais ſemblables, dont les Axes & les Côtez ſont paralleles entr'eux, eſt un Paraboloïdimbre.

Fig. 85. Soit (*Fig.* 85.) le triangle A*s*D la ſection par l'axe du petit cône, & BSE celui du grand, & le point P commun aux deux ſurfaces des cônes. Si l'on ſuppoſe un plan qui coupe le premier A*s*D perpendiculairement, ſuivant le côté BS, parallele à A*s*, il touchera le grand cône, & fera dans le petit une parabole qu'on repréſente ici par la courbe P*r*RL, dont l'axe ſera PB, auquel ſi l'on tire à volonté les ordonnées *or*, OR, & par le ſommet *s* les droites *sz* & *s*R*y*, ces lignes, qui ſeront les côtez du petit cône, étant prolongées, rencontreront la ſurface du grand BSE en quelques points *z* & *y*, par leſquels on menera des paralleles *zx* & *y*X aux ordonnées *or* & OR, juſqu'à la rencontre des lignes *sx*, *s*X, tirées du ſommet *s* par les points *o* & O, & enfin par les mêmes points *r* & R d'autres lignes *rq*, RQ, paralleles à ces mêmes lignes *sx*, *s*X, on aura des triangles ſemblables *rqz* & *sor*, RQ*y* & *s*OR; par conſéquent les mêmes analogies à l'égard de la parabole plane, qu'on a eu dans les Theorêmes XXIII. & XXV. à l'égard de l'Ellipſe, ſçavoir, la diſtance du ſommet du cône à l'ordonnée de la ſection plane, à cette même ordonnée, comme la diſtance à celle de la ſection, eſt à la difference des deux ſections *so* : *or* :: *rq* : *qz*, & *s*O : OR :: RQ : Q*y*; donc la ſection (par la def. 4.) eſt un paraboloïdimbre, *ce qu'il fallait démontrer.*

THEOREME XXX.

La Section faite par la rencontre des ſurfaces de deux Cônes, qui ſe pénetrent, dont les Axes ſont paralleles, & dont l'un des Côtez d'un des Triangles par l'Axe rencontre celui de l'autre [*prolongé s'il le faut*] *eſt une Ellipſoïdimbre.*

Fig. 86. Soit [*Fig.* 86.] les triangles B*s*A & *b*Sa la ſection faite par un plan paſſant par les axes de deux cônes qui ſe pénetrent, dont les points E & L ſont communs aux deux ſurfaces. Si l'on ſuppoſe un plan paſſant par EL perpendiculairement au premier, il touchera le cône B*s*A, & fera une Ellipſe dans l'autre *b*Sa, qu'il coupe obliquement ſuivant la ligne EL, qui en ſera le grand axe, auquel ayant mené des ordonnées *or* & OR à volonté, on tirera par le point S des lignes S*r* & SR, juſqu'à la rencontre de la ſurface du cône B*s*A en *z* & en *y*, ces points ſeront à la circonference de la ſection ſolide, laquelle ſera la courbe E*z*y*y*L; or faiſant, comme au Theorême précedent *zx*, parallele à *ro*,

Digitized by Google

& yX parallele à RO juſqu'à la rencontre des lignes S o, SO, tirées du ſommet du cône, & prolongées vers x & X, & tirant enſuite des mêmes points r & R des lignes rq & RQ paralleles aux lignes Sx & SX, on aura les mêmes Analogies à l'égard des ordonnées de l'Ellipſe, qu'on a eu dans la propoſition précedente à l'égard de la parabole; ſçavoir, So : or : : rq : qz, & SQ : OR : RQ : Qy; donc la ſection ſolide eſt une Ellipſoïdimbre, *ce qu'il falloit démontrer.*

Nous avons ajouté à l'énoncé de la propoſition, que le côté d'un des triangles par l'axe d'un cône devoit couper celui de l'autre, prolongé [s'il le faut] parce qu'il peut arriver comme à la fig. 89. que le côté *Fig.* 89. sA du triangle BsA ne rencontre pas le côté S a de l'autre triangle, mais il le rencontrera ſi l'un & l'autre ſont prolongez vers L; parce que nous ſuppoſons qu'ils ſoient inclinez entr'eux, & non pas paralleles; de ſorte que la ſection ſera toujours la même. La ſeule difference qu'il y aura avec le cas précedent, c'eſt qu'elle ne ſera pas une Ellipſoïdimbre complete, mais mutilée, qui ſera défaillante de toute la partie correſpondante à A L de l'axe ſouſtendant EL, laquelle eſt hors du cône.

REMARQUE.

156. Il faut remarquer que, quoique le plan que l'on feroit paſſer par la ligne SE perpendiculairement à celui des triangles par les axes sC, Sc, doive faire une hyperbole dans le cône AsB, la ſection ne ſera pas pour cela une hyperboloïdimbre; parce que les côtez As & aS étant divergens vers S, ſont convergens vers L; de ſorte qu'en prolongeant ces côtez, on revient toujours au premier cas de l'Ellipſoïdimbre.

THEOREME XXXI.

La Section faite par la rencontre des ſurfaces des deux Cônes, dont les Axes ſe coupent perpendiculairement ou obliquement, enſorte que les côtez prolongez de l'un ou de l'autre, ne ſe rencontrent pas au deſſus & au deſſous du ſommet d'un d'entr'eux, eſt une Ellipſoïdimbre.

La démonſtration de cette propoſition eſt tellement ſemblable à cel- *Fig.* 87. le de la précedente, qu'on s'eſt contenté d'en mettre ici la figure, pour & 88. le cas où les axes ſe coupent perpendiculairement; & la figure 88. pour celui où ils ſe coupent obliquement; en coupant les cônes, qui traverſent, par des plans tangens aux cônes qui ſont pénetrez, comme on a fait cy-devant, il ſera bien aiſé de voir les rapports des ordonnées de la ſection ſolide à celle de la ſection plane, & parce que ſuivant

Digitized by Google

les conditions du Theorême, ces ſections planes ne peuvent être que des Ellipſes ſi les cônes ſont Droits, ou des cercles s'ils ſont ſcalenes ; il ſuit que la ſection ſolide ſera une Ellipſoïdimbre, ou eſpece de cicloïmbre élargi ou reſſerré, c'eſt-à-dire une courbe, dont les ordonnées ont un excès ou un défaut ſur celles du cercle.

Nous n'avons rien à ajouter à ce que nous avons dit des ſections oppoſées ; elles ſont ici comme ailleurs les mêmes, diſpoſées en ſens contraire à l'égard du ſommet, & l'une toujours plus petite que l'autre.

On verra par le Theorême ſuivant, la raiſon pour laquelle nous exceptons dans l'énoncé de celui-ci, le cas où les côtez prolongez ſe rencontrent.

THEOREME XXXII.

La Section faite par la rencontre der ſurfaces de deux Cônes, dont les Axes ſe coupent obliquement, & dont un Côté d'un des Triangles par l'Axe rencontre les deux de l'autre Triangle, qui eſt dans le même Plan, ou un des côtez étant prolongé au deſſus de ſon ſommet, eſt une Hyperboloïdimbre dans l'un & l'autre Cône.

Fig. 91. Soient [*Fig.* 91. les triangles BSA & DEF les ſections d'un plan paſſant par les deux axes CS & *g* E, des cônes qui ſe pénetrent dans une poſition reſpective, où le côté DE rencontre les deux du triangle BSA, l'un SA qu'il coupe naturellement en H, l'autre BS en *y*, parce qu'il eſt prolongé au dela du point S en *y* ; ou bien, où le côté SA du triangle BSA rencontre les deux DE, EF du triangle DEF, ſçavoir DE en H, & FE prolongé en X.

Si l'on ſuppoſe des plans perpendiculaires à celui qui paſſe par les axes SC, E*g*, & qui coupent les cônes, l'un par HA, l'autre par HD, les ſections qu'ils feront ſeront des hyperboles, dont HA & HD ſeront les axes, & HX, H*y* les axes déterminez, & les mêmes plans qui coupent un cône ſeront tangens de l'autre. Soit une moitié de ces hyperboles la courbe H*r*R, ſur laquelle ayant pris le point *r* à volonté, on menera l'ordonnée *r o* à l'axe HD, & par le même point *r* & le ſommet S la ligne S*r z*, cette ligne rencontrera la ſurface de l'autre cône DEF en quelque point *z*, qui ſera à la circonference de la Courbe de la ſection ſolide, qui paſſera par le point H, commun aux deux ſurfaces, & par le point *z*, qui leur eſt auſſi commun, puiſqu'il eſt la rencontre du côté du cône BSA avec la ſurface de l'autre DEF ; or parce que la ligne S*r z*, part du même point S, que la ligne SA, ces lignes s'écartent & ſont divergentes, de ſorte qu'on peut ſuppoſer comme

Digitized by Google

aux Theorêmes précedens une ligne parallele à SA, & tirée du point *r*, juſqu'à la rencontre de la ligne *zx*, ce qu'on n'a pû faire bien nettement dans la figure pour éviter la confuſion des lignes, mais qu'on peut bien ſe repréſenter par la figure 90. miſe à côté, où *hx* repréſente HD, & l'on aura des triangles ſemblables *sor*, *rqz*; donc S*o* ou E*o*: *or* :: *rq*: *qz*; par conſéquent la courbe qui paſſera par *hz*, ſur la ſurface des cônes, ſera une hyperboloïdimbre, *ce qu'il falloit démontrer.* Fig. 90.

Il en ſera de même à l'égard de l'autre cône, & cette ſection commune variera ſuivant la difference des grandeurs reſpectives des deux cônes.

THEOREME XXXIII

La Section faite par la rencontre des ſurfaces de deux Cônes, dont les Axes ſe coupent obliquement, & dont un des Côtez des Triangles par l'Axe eſt parallele à un des Côtez de l'autre Triangle de la Section par l'Axe de l'autre Cône, eſt une Courbe équivalemment differente dans chaque Cône; ſçavoir un Hyperboloïdimbre dans l'un des Cônes, & un Paraboloïdimbre dans l'autre, ſelon que l'un des deux Cônes ſurpaſſe ou eſt ſurpaſſé par l'autre, dans l'alignement de ces Côtez.

Soient [*Fig.* 92.] les triangles BSA & DEF les ſections de deux cônes, coupez par un plan qui paſſe par leurs axes *c*S, CE, leſquels étant prolongez vers K ſe coupent obliquement. Soit auſſi le côté DE parallele au côté BS; il faut démontrer que la courbe H*x*, qui eſt faite par l'interſection des ſurfaces de ces deux cônes, a des rapports d'excès & de défaut avec les ſections planes, faites par des plans tangens aux côtez des cônes SA & DE, ce qui ſe fera de la même maniere qu'à la propoſition précedente; car le plan tangent par DE fera une parabole dans le cône BSA, & le plan tangent en SA fera une hyperbole dans le cône DEF, dont YH eſt l'axe déterminé, & HI l'axe prolongé; or ſi l'on prend dans le contour de ces courbes differentes un point *r*, par lequel & par le ſommet on tire une ligne S*rz*, qui rencontre la ſurface de l'autre cône en *z*, la courbe, qui paſſera par H & *z* ſera celle de l'interſection des deux corps; mais du même point *z* menant au ſommet E une ligne *z*E, cette ligne qui ſera un côté du cône DE*f* paſſera à la circonference de l'hyperbole, dont HI eſt l'axe & ſon ordonnée, c'eſt-a-dire la perpendiculaire menée du point *z* au plan paſſant par les axes, aura un rapport d'excès ou de défaut avec cette hyperbole, qui ſera proportioné à la profondeur de la ſection ſolide, ceſt-à-dire à la diſtance du plan de l'hyperbole, meſurée dans un plan paſſant par les ordonnées correſpondantes & le ſommet du cône; donc cette ſection ſera un paraboloïdimbre, conſiderée comme étant dans le cône DEF, & une hyperboloïdimbre, conſiderée dans le cône BSA, *ce qu'il falloit démontrer.* Fig. 92.

Digitized by Google

Il faut ici que l'imagination aide un peu à la figure, qui ne peut bien repréſenter le relief.

Il nous reſteroit à déterminer la courbe, qui ſe fait par l'interſection des ſurfaces des cônes, dont les axes ne ſe coupent pas & ne ſont pas paralleles; mais ſans qu'il ſoit beſoin d'un Theoréme general, nous pouvons en trouver autant de points que nous voudrons pour chaque poſition reſpective de cônes donnez; ce qui ſuffit à la pratique, puiſque nous démontrerons que chacuns de ces points ſont bien trouvez, comme on le verra au Livre ſuivant.

Nous n'ajouterons rien ici des ſections compoſées de deux portions de courbes, qui ſe mutilent réciproquement, lorſqu'un cône n'en pénetre un autre que d'une partie de ſa circonference; nous en avons aſſez dit aux Theorémes XXI. & XXVII. où nous avons auſſi fait remarquer que ces parties de ſections ſont toujours inégales; celle qui approche le plus du ſommet étant toujours la plus petite.

USAGE

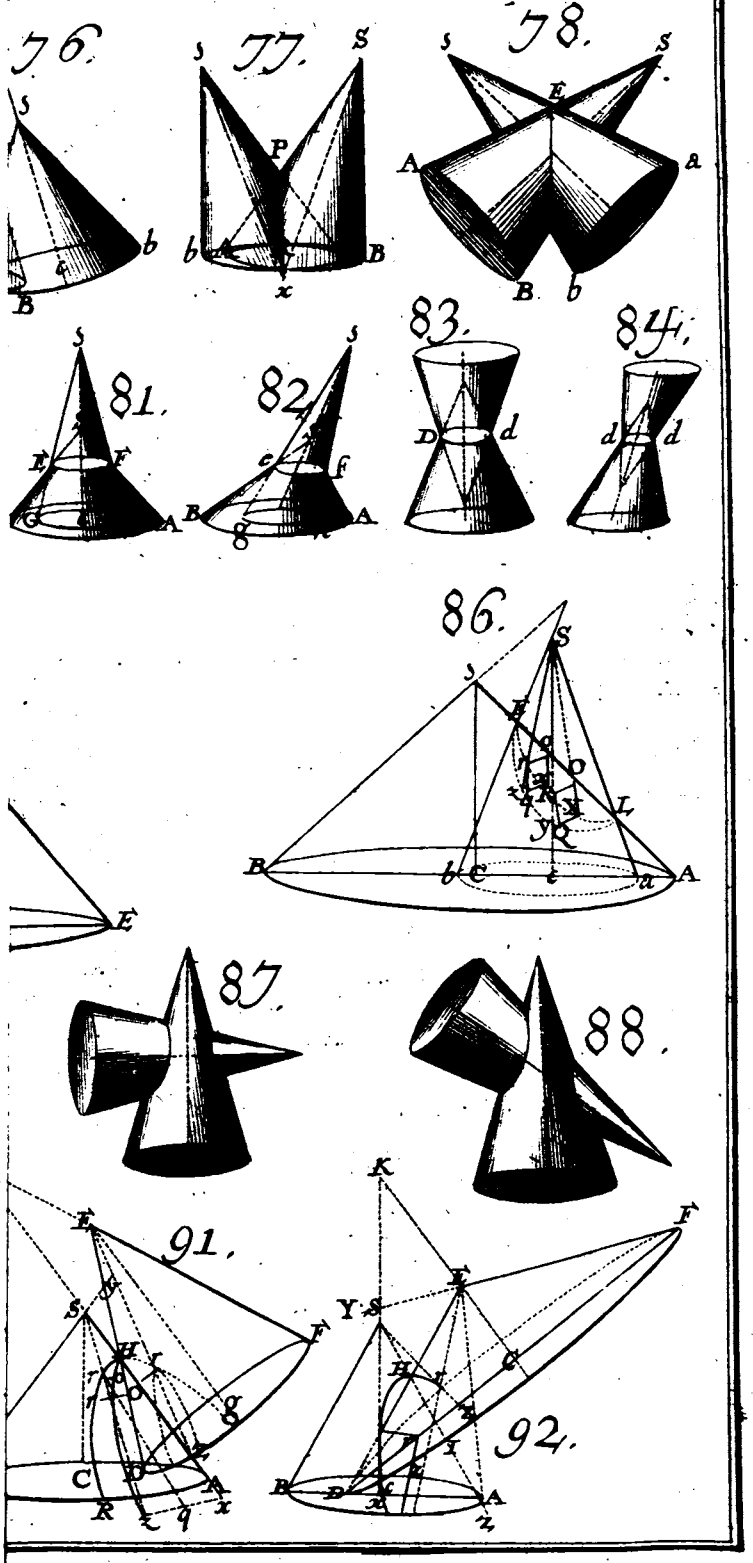
157. Les rencontres des voutes coniques entr'elles tombent rarement dans la pratique, nous n'en trouvons d'exemples que dans les Trompes & voutes coniques, qui rachetent une Tour ronde & en talus, dans les lunettes ébraſées d'une voute en canoniere, ou dans les crenaux qui ſe croiſent, ce qui eſt de peu d'uſage & de conſéquence.

CHAPITRE VIII.

Des Sections faites à la ſurface des Sphéroïdes, pénetrez par des Sphères, Cônes ou Cylindres.

Fig. 93. & 94. NOus avons diſtingué au Chapitre IV. differentes ſortes de ſphéroïdes, mais nous ne parlons ici que des plus réguliers, qui ſont faits par la révolution d'une demi-Ellipſe ſur un de ſes axes, ſçavoir de *l'Oblong* PL*p* [*Fig.* 93.] ſur le grand axe P*p*, & de *l'Applati*, ſur le petit axe AL comme P*tp* [*Fig.* 94.]

Digitized by Google



UNIV. OF MICH.
Digitized by Google

Digitized by Google

THEOREME XXXIV.

La Section faite par la rencontre des Surfaces d'un Sphéroïde avec celle d'une Sphère, d'un Cylindre & d'un Cône, qui le pénetrent, ou qui en ſont pénetrez, de maniere que les Axes de ces Corps ſe confondent, eſt un Cercle.

Cette propoſition eſt claire, ſi l'on fait attention à la generation de ces corps, car :

1.° Pour le ſphéroïde & la ſphère, puiſque le ſphéroïde eſt formé par la révolution d'une demi-Ellipſe DBE ou *dbe* ſur ſon axe, DE ou ſur le petit *de*, & la ſphère par celle d'un demi cercle PF*p*, l'ordonnée MO ou *mi* à l'axe commun D*e*, auquel elle eſt perpendiculaire, étant commune au ſphéroïde & à la ſphère, formera par ſa révolution autour de ſon point M ou *m*, immobile, un cercle qui ſera commun à la ſphère & au ſphéroïde, dont la circonference ſera à la ſurface de l'un & de l'autre ; par conſéquent à leur interſection, *ce qu'il falloit démontrer.* *Fig.* 95.

2.° Le même raiſonnement s'applique naturellement à l'interſection des ſurfaces du ſphéroïde & du cylindre Droit ; [*Fig.* 96] puiſque ce dernier eſt formé par la révolution d'un parallelograme rectangle M O *im*, ſur ſon côté M*m* ; or dans la ſuppoſition que ce côté qui eſt l'axe du cylindre, ſe confond avec les axes du ſphéroïde, ſoit Applati comme *dbe*, ou alongé comme DBE, il eſt viſible que les côtez MO & *mi* ſont des ordonnées communes, dont la révolution fait un cercle, qui ſera l'interſection commune de ces deux corps. *Fig.* 96.

3.° Il en ſera de même de l'interſection d'un ſphéroïde & d'un cône Droit, qui eſt formé par la révolution d'un triangle rectangle SCF ou *scf*, ſur ſon côté SC ou *sc*, qui en devient l'axe, paſſant par les axes des Ellipſes, qui engendrent le ſphéroïde, les ordonnées MO & *mi* feront les rayons des cercles, dont la circonference ſera l'interſection des deux ſurfaces, ſoit que le ſommet *s* du cône ſoit au dehors du ſphéroïde ou au dedans comme KCF, (*Fig.* 97.) auquel cas l'ordonnée commune eſt *nh*. ou *vu* fig. 98. *Fig.* 97. & 98.

Application à l'uſage.

Cette propoſition fait voir que l'arête d'enfourchement d'une lunette en Berceau ou Ebraſée, qui rachete une voute en cû-de-four ſurhauſſée ou ſurbaiſſée, dont les impoſtes ſont de niveau à celle de la voute, & dont la direction, c'eſt-à-dire celle de leurs axes, tend au centre du cû-de-four, eſt une circonference de cercle, en terme de l'Art, un plein ceintre.

Digitized by Google

De même que l'arête d'enfourchement d'une niche ſurhauſſée ou ſurbaiſſée, ou plutôt renfoncée ou applatie par ſon plan horiſontal, dans une voute ſphérique, avec les mêmes circonſtances de direction de ſon axe au centre de cette voute eſt un cercle, ce qui n'eſt pas rare dans les bâtimens.

THEOREME XXXV.

La Section faite par la rencontre des Surfaces d'une Sphère & d'un Sphéroïde, dont l'Axe ne paſſe pas par le Centre de la Sphère, eſt une eſpece d'Ellipſi-dimbre, c'eſt-à-dire, une Courbe à double Courbure, dont on peut marquer quelque rapport conſtant à une Ellipſe.

Soit une ſphère ABRN, pénetrée par un ſphéroïde APBp, dont l'axe Pp ne paſſe pas par le centre C de la ſphère. Si l'on ſuppoſe un plan paſſant par le centre & par l'axe du ſphéroïde, il fera pour ſection un cercle dans la ſphère & une Ellipſe dans le ſphéroïde, par le Theoréme V. dont l'interſection qui eſt aux points A & B marquera que ces points ſont communs aux deux ſurfaces, mais non pas les autres points de ces deux courbes, qui ſont l'une en dedans de la ſphère, l'autre au dehors du ſphéroïde, de ſorte que ni l'une ni l'autre de ces ſections ne peut être commune à la ſphère & au ſphéroïde.

Presentement ſi l'on veut lui chercher quelque rapport avec d'autres courbes planes, il faut ſuppoſer un plan perpendiculaire au premier (comme nous avons fait juſqu'ici) paſſant par les points communs A & B, lequel fera deux ſections de même eſpece que les précedentes, ſçavoir une Ellipſe AKB dans le ſphéroïde, & un cercle AMB dans la ſphère; d'où il ſuit évidemment que la commune ſection de ces deux ſurfaces eſt une courbe à double courbure; puiſqu'elle ne peut être en même tems cercle & Ellipſe, & cette courbe étant tournée du côté du Pôle P du ſphéroïde, a des ordonnées à ſon axe courbe AYB, toujours moindres que celles de l'Ellipſe plane de la ſection faite par les points communs A & B dans le rapport des ordonnées à l'axe Pp du ſphéroïde, qui paſſe l'un par l'axe ſouſtendant AB, l'autre par l'axe courbe AYB.

On pourroit conſiderer le ſphéroïde comme une infinité de petits cônes tronquez (*Fig.* 101.) faits par la ſection de pluſieurs plans *e e*, perpendiculaires à ſon axe Pp, & c'eſt ainſi en effet qu'on le reduit le plus ſouvent pour la pratique de la Coupe des Pierres; ces cônes tronquez auroient tous leur ſommet ſur l'axe Pp, prolongé, par exemple, en S, & les cotez du cône *f e*, *f e* ſeroient tangentes au ſphéroïde. *Fig.* 101.

Alors

Digitized by Google

Alors on pourroit trouver la courbe de la ſection ſolide par les Analogies de celle du cône dans la ſphère comme au Theorême XIV. mais à chaque cône on auroit un nouveau ſommet S, & parce que le nombre de ces cônes à la ſurface du ſphéroïde eſt infini, il y auroit autant de ſommets que de points dans l'axe prolongé; de ſorte que la courbe de cette ſection n'eſt pas de la même eſpece que l'Ellipſoïdimbre, telle que nous l'avons défini.

Cependant elle y a quelque rapport, la difference eſt que les ordonnées à l'axe de l'Ellipſe, & celles à l'axe courbe de la ſection ſolide n'ont pas des excès ou des défauts les unes à l'égard des autres, en raiſon Arithmetique, comme les côtez du triangle, mais en raiſon Geometrique, comme les racines des quarrez des ordonnées des Ellipſes planes faites par des plans paſſant par ces ordonnées, & l'extrémité de l'axe du ſphéroïde, ce que l'on va démontrer comme il ſuit.

Ayant ſuppoſé comme ci-devant le ſphéroïde APL*p* [*Fig.* 101.] qui pénetre une ſphère ABRN, & que les points A & B ſont communs à leurs ſurfaces, ſoit AKB*b* l'Ellipſe faite par la ſection d'un plan paſſant par AB perpendiculairement à celui qui paſſe par l'axe du ſphéroïde & le centre C de la ſphère. Soit auſſi AMB*m* le cercle fait par la ſection du même plan dans la ſphère.

Si par le centre C on tire une perpendiculaire CE à l'axe P*p*, elle le coupera au point D, duquel pour centre & pour rayon DH ou DN, moitié de HN conſiderée comme corde de la ſphère, ayant décrit un demi cercle HEN, il rencontrera en *x* la demi-Ellipſe PA*p* du ſphéroïde, & donnera ainſi un point *x* commun aux deux ſurfaces, par lequel menant une perpendiculaire *xy* à l'axe P*p*, on aura *xy* pour ordonnée de la ſection ſolide; mais parce que la ſection plane paſſant par A & B coupe l'axe au point *g*, l'intervale *gy* ſera la difference des profondeurs des deux ſections dans la ſphère, & la ligne F*g* perpendiculaire à P*p* ſera l'ordonnée de la ſection circulaire de la ſphère, & G*g* celle de l'Ellipſe dans le ſpheroïde; or par la proprieté de l'Ellipſe $Py \times yp : Pg \times gp :: \overline{xy}^2 : \overline{Gg}^2$. Donc ſi l'on connoît la longueur des ordonnées on trouvera leur diſtance, & ſi on connoît leur diſtance, c'eſt-à-dire, la profondeur de l'axe courbe à la ſection plane par AB, on connoîtra les longueurs des ordonnées, & par conſéquent leur difference.

Il en ſera de même ſi par le point P on fait paſſer un plan par les ordonnées *or* de la ſection ſolide, & *nq* de l'Ellipſe plane, leſquelles ſont ici exprimées en façon de perſpective à l'égard du cercle

AMB & de l'Ellipſe AKB, qui ſont repréſentez de même, parce que ces deux plans étant partie confondus enſemble, & ayant le diametre commun AB, ſeroient auſſi confondus avec ce diametre, ſi l'on n'aidoit un peu l'imagination.

Pour voir ces ordonnées plus diſtinctement, il faut les conſiderer comme ci-devant, dans un plan perpendiculaire au premier PANR, & paſſant par le pole P comme PR, alors faiſant un demi cercle IQR ſur IR, corde de la ſphère, & une demi-Ellipſe PvL ſur PL, comme grand axe, dont x eſt le centre, & ſur xZ moyenne proportionelle entre xu & ut pour moitié du petit axe, l'interſection v du demi cercle IQR, & de la demi-Ellipſe PvL donnera un point v de la ſection ſolide, duquel abaiſſant une perpendiculaire vo ſur PR on aura le point o à l'axe courbe de cette ſection, & le point n à l'axe droit par une analogie ſemblable à la précedente $Po \times oL : Pn \times nL :: ov : nz$.

Corollaire.

158. D'ou il ſuit qu'on peut trouver autant de points qu'on veut de l'axe courbe & leur diſtance à l'axe droit, ſur un plan paſſant par le point P perpendiculairement au plan paſſant par l'axe Pp du ſphéroïde & le centre C de la ſphère; puiſque nous avons démontré au Theorême V. que toutes les ſections planes des ſphéroïdes, leſquelles ſont obliques à leurs axes ſont des Ellipſes, & que celles de la ſphères ſont des cercles, on aura toujours à l'interſection de ces deux courbes un point commun, qui ſera à la circonference de la ſection ſolide.

Usage.

159. Cette propoſition fait voir quelle eſt la courbe de l'enfourchement d'une Niche renfoncée ou raplatie dans une voute ſphérique, ſi les impoſtes ne ſont pas de niveau, c'eſt-à-dire, que l'un des deux ſoit au deſſus ou au deſſous de l'autre, quoique chacune ſoit de niveau entr'elles, ou que les unes ſoient de niveau, & les autres rampantes; alors la Courbe de l'arête qui ſe fait à la rencontre des deux ſurfaces, eſt une courbe à double courbure, dont les *Aplombs* ne ſont pas dans une ligne droite, comme au Theorême précedent, & cette courbe a quelque rapport avec celle que nous avons appellé Ellipſoïdimbre, parce que ces ordonnées à ſon axe courbe ont toujours un rapport connu avec celle de la ſection Elliptique ou ſphéroïde, coupé par un plan paſſant par AB.

La même choſe arrivera ſi les Niches, au lieu d'être renfoncées ou

Digitized by Google

raplaties horiſontalement, étoient ſurhauſſées ou ſurbaiſſées verticalement, la ſeule difference qu'il peut y avoir eſt le changement du rapport des ordonnées, qui ont, dans un cas, un excès ſur celles de l'Ellipſe, & dans l'autre un défaut, mais toujours en même proportion.

THEOREME XXXVI.

La Section faite par la rencontre des Surfaces d'un Cylindre droit & d'un Sphéroïde, dont l'Axe eſt perpendiculaire à celui du Cylindre, eſt un Cicloïmbre.

Soit un cylindre AB*b*a, dont l'axe *mn*, prolongé en C & *c*, eſt perpendiculaire à celui d'un ſphéroïde alongé P*fpg*, ou applati P*dpe*. Ayant ſuppoſé ces corps coupez par un plan paſſant par leurs axes, & une ſeconde fois par un autre plan perpendiculaire au premier, & paſſant par les points A & B, a & *b* communs aux deux ſurfaces du cylindre & du ſphéroïde; on reconnoîtra que cette ſeconde ſection ſera un cercle dans le cylindre & une Ellipſe dans le ſphéroïde, laquelle ſera ſemblable à celle de ſa ſection par l'axe P*p*. La rencontre des deux ſurfaces n'eſt donc pas dans un plan, puiſque l'Ellipſe eſt hors du cylindre, & le cercle au dedans du ſphéroïde; cependant elle doit paſſer par les points A & B ou *a* & *b*. Fig. 99.

Supposant un troiſiéme plan perpendiculaire au premier, paſſant par l'axe du cylindre, ou parallelement à cet axe, il ſera un cercle dans chaque ſphéroïde, & un parallelograme dans le cylindre. Soit le quart d'un de ces cercles *d*H ou *gh*, & le point X ou *x*, celui où il rencontre le côté du cylindre, ce point ſera commun aux deux ſurfaces, d'où ſi l'on abaiſſe la perpendiculaire XY ou *xy* ſur l'axe C*c*, qui le coupera en Y ou en *y*, ce point ſera un de ceux de l'axe courbe AYB ou a*yb* de la ſection ſolide; mais parce que toutes les ordonnées à cet axe ſont perpendiculaires aux côtez du cylindre, & qu'elles ſe terminent toutes à ſa circonference, il ſuit qu'elles ſont toutes égales & paralleles à celles de ſa baſe, ce qui eſt évident; donc tous les diametres droits ſeront auſſi paralleles & égaux à ceux de la baſe du cylindre, comme nous l'avons démontré en pareil cas au Theorême XVIII. donc la ſection ſolide eſt un cicloïmbre, *ce qu'il falloit démontrer.*

La difference qu'il y a de celui qui ſe fait à la rencontre des ſphéroïdes differemment poſez à l'égard du grand ou petit axe, eſt que le cicloïmbre, fait à la rencontre des ſurfaces du cylindre & du ſphéroïde alongé, s'approche du grand axe en creuſant, pour ainſi dire, dans ce ſphéroïde, & qu'à celle du ſphéroïde applati, il s'éloigne du petit axe en s'approchant de la ſurface, comme on le voit dans la figure 99. par les lignes AYB & a*yb*.

Digitized by Google

COROLLAIRE.

160. IL eſt aiſé de trouver autant de points que l'on voudra de l'axe courbe, en tirant par un point quelconque K de la ligne *ab* une ligne K*l* parallele à l'axe C*c*, & décrivant ſur *or* & *m*A pour rayons des arcs de cercles. Si l'on fait K*s* = K*s* & *tz* parallele à C*c* pour côté du cylindre, elle coupera l'arc *tr* en *z*, par où on menera *zq* perpendiculaire à L*l*, laquelle donnera ſur *or* un point *q* qui ſera celui de la courbe que l'on cherche.

ON appliquera ici tout ce que nous avons dit du rapport des profondeurs de la ſection ſolide au Theorême XVIII. ſoit en les conſiderant comme les fléches des cordes inſcrites dans differens cercles, ou comme les ſinus verſes des ordonnées priſes pour des ſinus droits.

THEOREME XXXVII.

La Section faite par la rencontre des Surfaces d'un Cylindre & d'un Sphéroïde, dont les Axes ne ſe rencontrent pas, eſt une eſpece d'Ellipſombre. Et peut être une Ellipſe dans certains cas.

ſig. 100. SOIT [*Fig.* 100] un cylindre AB*ba*, qui rencontre obliquement un ſphéroïde alongé ou applati. Ayant ſuppoſé un plan paſſant par l'axe du cylindre, qui ſera pour ſection un parallelograme dans ce corps, & une Ellipſe dans le ſphéroïde, dont les interſections *a* & *b*, A & B donnent des points communs à ces ſurfaces, ſi l'on coupe ces corps par un plan perpendiculaire au premier & paſſant par A & B, a & *b*, la ſection ſera de deux Ellipſes qui peuvent être égales, en ce cas la ſection faite par la rencontre des ſurfaces devient plane; mais comme la difference des ſphéroïdes peut donner une infinité d'Ellipſes differentes, la ſection ſera ordinairement ſolide à cauſe de l'inégalité des Ellipſes du cylindre & du ſphéroïde, ce qu'il eſt aiſé d'appercevoir.

OR parce que toutes les ordonnées de cette ſection doivent être terminées à la ſurface du cylindre auſſi bien qu'à celle du ſphéroïde, il ſuit qu'elles doivent toutes avoir un rapport d'égalité avec celles de l'Ellipſe plane, qui eſt la ſection oblique du cylindre ſuivant la ligne AB, ce que nous avons aſſez expliqué aux Theorêmes IX & X. pour qu'il ne ſoit pas néceſſaire d'entrer ici dans un plus grand détail. Il y a même ſi long-tems que nous rebattons la même démonſtration, appliquée à differentes occurrences, que je crains que le Lecteur ne ſe trouve offenſé de la défiance qu'il ſemble qu'on ait de ſa pénetration, en entrant dans un trop grand détail.

Digitized by Google

Corollaire.

On peut facilement appercevoir les changemens que les cylindres ſcalenes cauſeroient aux ſections faites par la rencontre des ſurfaces des ſphéroïdes ; puiſque les ſections obliques, qu'on a ſuppoſé Elliptiques, peuvent être circulaires, & les perpendiculaires aux axes des Ellipſes.

Application à l'uſage.

Cette propoſition & la précedente font voir quelle eſt la Courbe de l'arête d'enfourchement d'un berceau, qui rachete une voute ſphéroïde ſurhauſſée ou ſurbaiſſée, ou directement ou obliquement. Ce cas n'eſt pas rare dans l'Architecture, telles ſont les lunettes de la voute ſphérique ſurbaiſſée de la Chapelle du St. Sacrement du Val de Grace, dont les Naiſſances ſont audeſſus de celles du cû-de-four, ou hémiſphéroïde applati.

THEOREME XXXVIII.

La Section faite par la rencontre des Surfaces d'un Sphéroïde & d'un Cône, dont l'Axe rencontre celui du Sphéroïde, perpendiculairement ou obliquement, eſt ordinairement Courbe à double Courbure, telle qu'eſt l'Ellipſoïdimbre ; mais dans certains cas elle peut être une Ellipſe Plane.

La démonſtration en eſt aiſée ; car 1.° ſi l'axe du cône SC paſſe hors du centre C du ſphéroïde, ou qu'il y paſſe, mais qu'il coupe obliquement ſon axe FG, comme celui du cône D*s*E, il eſt clair dans ces deux circonſtances, que le plan perpendiculaire à celui qui paſſe par les axes SC du cône, & FG du ſphéroïde, qu'on ſuppoſe auſſi, (comme nous l'avons toujours fait) paſſer par les points communs aux deux ſurfaces A & B, où *a* & *b* fera deux Ellipſes, l'une dans le cône coupé obliquement, comme en a*b*, l'autre dans le ſphéroïde, leſquelles ne ſeront les mêmes que lorſque leurs deux axes ſeront égaux, hors de ce cas ces ſections étant inégales, il eſt clair que la ſection ſolide ſera une courbe à double courbure, telle que celle que nous avons appellé Ellipſoïdimbre, qui aura des excès ou des défauts ſur l'Ellipſe plane du cône, dans le rapport des profondeurs de l'axe courbe. Fig. 102.

2.° Si l'axe du cône paſſe par le centre C du ſphéroïde, & perpendiculairement à ſon axe FG, il ſe fera deux ſections en AB, dont l'une ſera un cercle dans le cône, & l'autre une Ellipſe dans le ſphéroïde ; & par conſéquent la ſection ſolide ſera une courbe à double courbure de même eſpece que les précedentes, avec cette difference que les

Digitized by Google

excès ou les défauts de ces ordonnées ſur la ſection plane du cône ſeront comparez à un cercle & non pas à une Ellipſe.

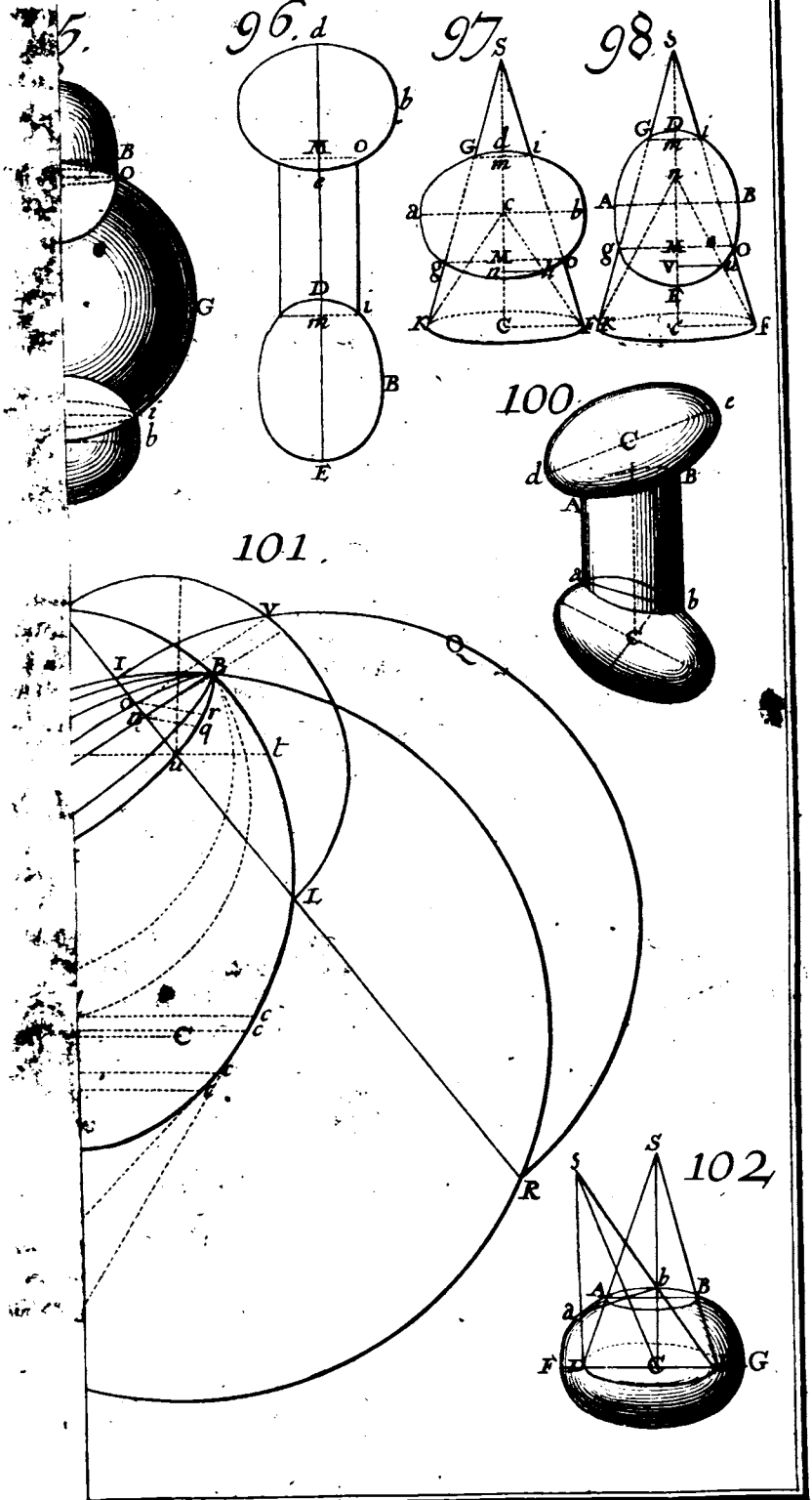
Application à l'uſage.

Les lunettes évaſées dans les voutes en cû-de-four ſurhauſſées ou ſurbaiſſées, ou *ſur un plan Ovale*, c'eſt-à-dire, un ſphéroïde oblong ou applati, ſont le ſujet de ce Theorême, qui fait voir que l'arête d'enfourchement eſt à double courbure, lorſque l'axe de la lunette, c'eſt-à-dire, la direction de ſon milieu tend au centre. 2.° Qu'elle l'eſt ordinairement ſi elle eſt blaiſe, & que cependant il peut arriver dans ce cas qu'elle ſoit Ellipſe plane.

Nous n'ajoutons rien ici des courbes compoſées des ſections des ſphéroïdes, nous croyons en avoir dit aſſez ci-devant pour mettre le Lecteur en état d'en juger par la comparaiſon des précedentes des autres corps ronds, il eſt tems d'en venir aux Problêmes, qui donnent les moyens de tracer toutes ſortes de ſections.

Si quelqu'un eſt curieux d'entrer d'une maniere plus ſçavante & plus generale dans la Theorie des courbes à double courbure, il peut s'inſtruire parfaitement dans le beau traité de M. Clairaut, dont nous avons parlé. Il ne faut pour l'entendre qu'une médiocre connoiſſance du calcul Algebrique, tant il eſt clair & méthodique dans ſes démonſtrations.

Digitized by Google



UNIV. OF MICH.
Digitized by Google

Digitized by Google

TRAITÉ DE STEREOTOMIE.

LIVRE SECOND.

De la Deſcription des Lignes Courbes formées par la ſection des Corps.

LES Corps peuvent être coupez par des ſurfaces planes ou par des ſurfaces courbes.

Les lignes courbes formées par les ſections de la premiere eſpece, peuvent être décrites ſur des ſurfaces planes & ſur des ſurfaces courbes; mais celles de la ſeconde eſpece ne peuvent être exactement décrites, que ſur des ſurfaces courbes, ſi j'en excepte peu de cas. La raiſon eſt que les lignes courbes formées par l'interſection des ſurfaces de deux corps, peuvent être conſiderées comme étant ſur la ſurface qui coupe, & ſur celle qui eſt coupée; puiſque l'interſection eſt commune à tous les deux;

Digitized by Google

par conſéquent ſi on coupe une ſphère, un cône ou un cylindre par une ſurface plane, la courbe peut être conſiderée comme étant ſur le plan qui coupe, & ſur la ſurface de la ſphère du cône ou du cylindre, qui eſt coupé ; ainſi elle peut être décrite ſur deux ſurfaces de differente eſpece, l'une plane, l'autre courbe, & ſi les ſurfaces qui ſe coupent ſont toutes deux courbes, il eſt à préſumer que la ſection ne convient point aux planes ; il en faut cependant excepter certains cas, où la même interſection eſt commune à deux ſurfaces courbes & à une troiſiéme qui eſt plane ; telles ſont les interſections des ſurfaces de deux ſphères, quelquefois de deux cylindres & de deux cônes en certaines circonſtances de poſition & de grandeur, dont nous avons parlé au Livre précedent.

PREMIERE PARTIE.

De la Deſcription des Sections Planes ſur des Plans.

LA plûpart des ſections planes que nous avons pour objet dans cet Ouvrage, ſont ces quatre ſortes de courbes qu'on appelle les *Sections Coniques* ; quoiqu'elles ne ſoient pas toutes particulieres au cône, puiſqu'il y en a deux qui conviennent auſſi à la ſphère & au cylindre.

Nous en avons cependant quelqu'autres à décrire, comme la ſection plane de l'Anneau & la Spirale : cette derniere n'eſt pas proprement une ſection de corps ordinaire, à moins qu'on ne la conſidere comme celle d'un coquillage ; mais à cauſe qu'elles ſont de peu d'uſage en comparaiſon des autres, nous jettons toute notre attention ſur les ſections côniques.

LA maniere de les décrire n'eſt pas toujours la même, on eſt ordinairement aſſujetti dans la pratique à les faire paſſer par certains points ou lignes données en dedans ou en dehors, qui en changent totalement la deſcription ; c'eſt ce qu'on appelle les *Données*, qu'on peut tellement varier, que la ſolution des Problemes néceſſaires, pour réſoudre tous les cas poſſibles, fourniroit aſſez de matiere pour un gros Volume ; nous nous bornons ici à ceux qui peuvent être d'uſage dans l'Architecture.

CHAP.

Digitized by Google

CHAPITRE I.

De la Deſcription du Cercle.

NOus avons peu de choſe à dire du Cercle, parce que les Elemens ordinaires de la Geometrie en traitent aſſez au long pour la pratique des arts, & que nous ſuppoſons dans tout cet Ouvrage, que le Lecteur eſt initié dans cette ſcience. Nous voulons ſeulement ſuppléer à ce qu'on n'y trouve qu'indirectement pour la ſolution d'un cas qui ſe preſente aſſez ſouvent en Architecture, tant pour l'exécution des Traits des voutes, que de certains arondiſſemens de mur, dont le Rayon eſt ſi grand, qu'on ne trouve pas commodément une place pour le faire mouvoir ſur un centre; ſoit parce que le lieu du centre eſt embaraſſé, ou enfermé dans quelque bois ou bâtiment, ſoit parce que la longueur de ce Rayon cauſe de la difficulté dans l'uſage du *Simbleau*; car ſi on ſe ſert de Corde, elle s'alonge & altére la régularité du Contour; ſi on lui ſubſtitue une Chaine qui ſemble ne devoir pas s'alonger, elle a auſſi ſes inconveniens; car le frotement interrompt ſon mouvement, lorſqu'elle eſt poſée à plat ſur une aire horiſontale, ou inclinée, & fait varier ſon extenſion quelque précaution qu'on prenne, ce qui doit arriver néceſſairement; car il eſt démontré en Méchanique que quelque petit que ſoit ce Frotement, ou ſon poids, ſi elle étoit penduë par ſes extremitez, elle ne peut ſe mettre en ligne droite, il faut que cette Puiſſance du milieu, Frotement ou Peſanteur s'anéantiſſe, & pour que la Courbure reſte toujours égale, il faut que la Puiſſance, ou l'effort de la main qui tire, ſoit toujours parfaitement égal, ce qui eſt moralement impoſſible; de ſorte qu'on ne peut s'aſſûrer de décrire régulierement un Arc de cercle par ce moyen; celui de faire un Simbleau avec des perches eſt le plus ſûr, mais il a ſes incommoditez, lorſqu'il en faut ajoûter pluſieurs bout-à-bout, il faut le ſoûtenir bien droit pour le faire mouvoir ſans le plier, & ſuppoſer que le milieu n'eſt occupé par aucun mur ni materiaux. Il eſt donc fort agréable de pouvoir éviter toutes ces incommoditez par une pratique de Géometrie que voici.

Probleme I.

Par trois points donnez tracer un Arc de Cercle par pluſieurs autres points trouvez, ou par un mouvement continu, ſans le ſecours du Centre.

On ne peut à moins de trois points déterminer ni tracer un arc de Cercle, puiſque par deux points donnez, on en peut faire paſſer une infinité de differentes grandeurs, mais ces points peuvent être donnez dans des circonſtances qui occaſionnent differentes manieres de

Digitized by Google

le tracer : Car 1°. ou on les donne tous trois à la circonference, 2.° ou l'on n'y en donne que deux, & le troiſiéme en idée pour le centre, en déterminant ſeulement la longueur du Rayon, ſans en marquer la poſition à l'égard des points donnez.

Au premier cas les points peuvent être donnez à diſtances égales entre eux, ce qui arrive ſouvent en Architecture, où l'on détermine ordinairement les points des Naiſſances, & celui de la clef pour les voûtes, ou celui du milieu pour les arondiſſemens des murs ; ou bien ces points ſont donnez à diſtances inégales. Ces differentes circonſtances peuvent donner occaſion à differentes manieres de décrire l'arc.

Fig. 103. Soit [*Fig.* 103.] les points ADB donnez aux deux extremitez & au milieu de l'arc qu'on doit tracer. Ayant tiré les cordes AB, AD, DB, on fera du point A pour centre & d'une ouverture de Compas priſe à volonté, l'arc *f* K terminé en *f* & en K aux cordes AD & AB, puis de la même ouverture, & du point B pour centre, on décrira l'arc indéfini FE, dont le point F eſt ſur la Corde DB; enſuite par le point A on tirera autant de lignes droites qu'on voudra avoir de points de l'arc propoſé entre D & B, par exemple ici pour trois, les lignes AX, A*x*, A*y* qui couperont au hazard l'arc *f* K aux points *g h i*, enſuite on portera les parties de cet arc, priſes entre *f* & K, ſur l'arc F E en dehors de F en E; ainſi *fg* en FG, *fh* en FH, *fi* en FI, & par le point B & les points F G H I on tirera des lignes droites, dont les ſections avec les précedentes donneront autant de points de l'arc demandé, ſçavoir BI, coupant A*y*, donnera le point *y*; BH, coupant A*h*, donnera le point *x*, & BG, coupant A*g*, le point X, on en fera de même pour l'autre côté AD.

Fig. 104. Secondement, ſi le point donné D n'eſt pas au milieu comme à la Fig. 104. on peut trouver pluſieurs points correſpondans à ce point D conſideré comme dans un plus grand ou plus petit arc. Du point *a* pour centre & pour Rayon *a* D, ayant fait l'arc DE; du point *b* pour centre & de la même ouverture de compas, on fera l'arc *e d* égal à DE, qui donnera un quatriéme point *d*, puis on tirera la droite D *b* qui coupera cet arc en F. du point D pour centre & de la même ouverture de compas *a* D on fera l'arc *f* 3 = F *d* qui donnera le point 3. on tirera *d a* qui coupera l'arc *f* 3 en G ; du point *a* pour centre & de la diſtance *d* 3. pour Rayon, on fera l'arc *g* 4. = G 3. qui donnera le point 4; ainſi de ſuite, on trouvera autant de points qu'on voudra, par leſquels avec une Regle pliante on tracera l'arc a D *b*, qui eſt celui qu'on cherche.

Demonstration.

Dans la premiere conſtruction, où les angles DAB & ABD ſont é-

Digitized by Google

gaux, les lignes AX, Ax & Ay font des angles avec la corde AB plus petits que DAB de la quantité d'une partie de l'arc fk, qui en eſt la meſure: par exemple AX, de la quantité fg, de laquelle on a augmenté l'angle ABD, en tirant par le point G au dehors, la ligne BX, qui rencontre AX au point X; donc la ſomme des angles XAB, XBA eſt égale à celle des angles DAB, DBA, dont le ſupplément a deux droits, AXB eſt égal à l'angle qui eſt à la circonference ADB: donc (par la 21. du 3. Livre d'Euclide) le point X eſt à la circonference du même arc de cercle, que les points donnez ADB. ainſi des autres x & y.

Dans le deuxiéme cas il eſt viſible qu'on a fait l'angle bda = a Db, de même que l'angle Dbd = bD 3; a d 3. = da 4. donc tous les points trouvez ſont dans le même arc que les donnez aDb, puiſque les angles faits dans chaque ſegment ſont toûjours égaux à ceux que font les cordes des points correſpondans, D & d, d & 3, 3 & 4, D & 5, &c. *ce qu'il falloit faire.*

Corollaire.

De la proprieté du cercle dont nous venons de faire uſage, on tire une maniere *de décrire un Arc de Cercle organiquement par un mouvement continu ſans le ſecours du Centre & ſans connoître la longueur du Rayon*, mais ſeulement par le moyen de trois points donnez.

Car (*Fig.* 107.) ſi l'on fait avec deux regles de bois GE, EI aſſemblées par le moyen d'une troiſiéme FH, un angle GEI égal à l'angle ABD, dont le ſegment AEBD eſt capable, & qu'on faſſe couler cet inſtrument entre deux cloux ou chevilles A, D, le crayon qui ſera au ſommet E de l'angle que font ces deux regles, tracera l'arc demandé AEBD, lequel paſſera par les trois points donnez ABD. *Fig.* 107.

Il faut remarquer que chacune des regles EG, EI doit avoir en longueur au moins l'intervale des deux points A & D les plus éloignez, afin que le ſommet E étant tranſporté en D, la branche EG touche & s'appuye encore au point A, qui en doit regler la direction.

Autrement.

On peut encore tracer l'arc demandé par un mouvement continu avec une autre machine, mais plus compoſée que la précedente. Ce ſont deux roues AB, DE de diametres inégaux, aſſemblées ſur un eſſieu commun FC, ſur lequel la plus grande AB eſt fixe, & l'autre ED eſt mobile, en ſorte qu'on peut l'approcher ou l'éloigner de la premiere au-

Digitized by Google

tant qu'il eſt beſoin, & l'arrêter par quelque cheville à la diſtance où elle doit être ; enſuite appuyant ſur l'eſſieu vers le milieu M on fait tourner cette eſpece de Train boiteux, dont les roues décrivent deux arcs de cercles concentriques, il eſt clair que leurs rayons ſont d'autant plus longs que les diametres des roues ſont moins inégaux, & qu'elles ſont plus éloignées entre elles; enſorte que ſi elles étoient infiniment peu differentes, leurs traces ſeroient des lignes droites.

Cette Machine, qui eſt de l'invention De Perrault, eſt plus ingénieuſe qu'utile; car il eſt moralement impoſſible de la faire mouvoir avec l'uniformité qu'elle demande, puiſque l'experience nous fait voir qu'il eſt très difficile de conduire en ligne droite un Train de deux roues égales, à plus forte raiſon en ligne courbe deux inégales; ſoit par le défaut de la direction de la main, ſoit par l'inégalité du frottement de l'eſſieu & du terrain ſur lequel on la fait rouler, de ſorte qu'on ne pourroit s'aſſûrer de la régularité de l'arc qu'on veut tracer. Quoiqu'il en ſoit de l'exécution, ſi l'on veut connoître la longueur du Rayon que la trace de la grande roue décrit, il n'y a qu'à faire cette Analogie ; comme la difference A *d* des deux Rayons des roues AC, D *c* eſt au diametre AC de la grande, ainſi la diſtance D *d* des deux roues eſt au Rayon SC du cercle ou arc que la grande décrit, d'où par l'inverſe on tire l'Analogie néceſſaire pour trouver la diſtance des deux roues, lorſque le rayon SC eſt donné, en faiſant CA : CS :: *d* A : *d* D, ce qui eſt clair à la ſeule inſpection de la figure, à cauſe des triangles ſemblables S CA, D *d* A.

Par où l'on voit qu'avec deux petites roues de 6. à 7. pouces de diametre & un petit eſſieu, on pourroit tracer les ceintres des plus grandes voutes, ſi l'exécution répondoit à la juſteſſe du principe ſur lequel la machine eſt fondée, mais je n'en conſeille à perſonne l'uſage, par les raiſons que j'en ai dit.

Erreur du Trait de Maître Blanchard.

Maitre Blanchard dans ſon traité de la Coupe des bois [page 6.] a voulu réſoudre le Probleme, dont il eſt ici queſtion, par un *Trait* dont il eſt à propos de montrer l'erreur pour en déſabuſer les Ouvriers, qui n'ont pas aſſez de connoiſſance pour l'appercevoir.

Supposant les trois points donnez ADB [*Fig.* 105.] il décrit un Parallelelograme AEFB, il tire les Cordes AD, DB, qu'il diviſe en un certain nombre de parties à volonté, par exemple ici en quatre, aux points *b*, *c*, *d*, ſur leſquels il éleve autant de perpendiculaires *b x*, *c y*,

Digitized by Google

dz. Puis diviſant le côté AE en un même nombre de parties égales aux points *e*, *f*, *g*, il tire des lignes droites au point D, qui coupent les précedentes aux points *x y z*, qu'il prétend être à la circonference du même arc de cercle où ſont les trois points donnez ADB.

Il eſt très aiſé de faire voir qu'il ſe trompe groſſierement par la ſeule inſpection de la figure de ſa conſtruction, faite dans un quart de cercle comme en DG, puiſqu'elle donne au lieu du quart de cercle DSG une courbe DYZG, qui eſt conſiderablement au dedans; mais il convient de *Fig.* 105. juſtifier la figure par le raiſonnement Geometrique; il eſt démontré dans les Elemens d'Euclide au l. 3. prop. 14, que les lignes équidiſtantes du centre dans le cercle ſont égales entr'elles; par conſéquent les lignes LX, *i*Z équidiſtantes [par la conſtruction] du milieu K de la corde DG, c'eſt-à-dire, du Rayon CS, doivent être égales; mais elles ne le ſont pas, donc elles ne ſont pas terminées à la circonference du cercle.

Pour voir cette inégalité d'un coup d'œil, il n'y a qu'à porter la longueur G*m* en DM, & tirer MG qui coupera LX environ au tiers de ſa longueur en *x*, quoique le point X ſoit déja au dedans du Cercle DSG, par conſéquent il s'en faut d'environ la moitié de la longueur *i z* que le point *z* parvienne au cercle en *r*.

Démonstration.

Pour le démontrer ſoit, [*Fig.* 105.] la ligne KY prolongée en H, à laquelle on menera par les points *o* & *m* les Paralleles *op*, *mq*.

A cauſe des triangles ſemblables GHK & G*op*, on aura G*o*: GH:: G*p*: GK; mais G*o* = $\frac{1}{4}$ de GH, donc G*p* ſera auſſi les $\frac{1}{4}$ de GK; par conſéquent *p*K eſt la huitiéme partie de DG, & D*p* les $\frac{1}{8}$; or à cauſe du triangle iſoſcele rectangle *op*G, la ligne *po* ſera égale à *p*G.

Presentement pour rendre la démonſtration ſenſible aux Ouvriers, nous ſuppoſerons chacune des huit parties ſoudiviſée en dix, afin de faire mieux connoître la difference des longueurs des lignes LX & *iz*.

A cauſe des triangles ſemblables DLX, D*po*, on aura D*p* [50.]: *po* [30.]:: DL [20.]: LX [12.] & à cauſe des triangles ſemblables D*qm*, D*iz*, on aura D*q* [70]: D*i* [60]:: *qm* = *q*G [10]: *iz* $8\frac{4}{7}$; donc les lignes LX & *iz* ſont entr'elles comme 12. eſt à $8\frac{4}{7}$, c'eſt-à-dire, qu'elles ſont conſiderablement inégales, par conſéquent que les points X & *z* ne peuvent être à la circonference du même cercle; on ne voit par cette démonſtration que le rapport de ces lignes entr'elles; ſi quelqu'un eſt curieux de connoître plus preciſément que par le tracé de la figure, ce-

Digitized by Google

lui qu'elles ont à celles qui parviennent jusqu'au cercle en S ou en r, on le pourra par la maniere suivante.

Tous ceux qui sont un peu initiez dans l'Algebre, sçavent que l'équation primitive du cercle (nommant d le diametre, x l'abscisse, & y l'ordonnée) est $dx - xx = yy$; ainsi on cherchera le diametre en quarrant DK & KC, & tirant la racine quarrée de leur somme, qui sera égale au Rayon DC, & son double au diametre $= d$, ensuite pour avoir l'abscisse x, on ajoûtera la longueur K i au Rayon, ou on en retranchera KL; par le moyen de ces deux grandeurs connuës, on aura $dx - xx$, dont on tirera la racine quarrée, de laquelle on ôtera la longueur CK, le reste sera la longueur ir, qui parvient au cercle en r; & par ce calcul on trouvera que le point X est au dedans du cercle d'environ une partie de trois, & z de quatre, je dis environ à cause des fractions qui restent.

Ce que nous démontrons ici dans le quart de cercle, se peut démontrer facilement de tous les arcs d'un moindre nombre de degrez; on trouvera seulement que la difference des longueurs des lignes LX & iz diminuera, mais elle subsistera toûjours; ainsi la pratique de Maître Blanchard sera toûjours fausse pour faire un arc de cercle, elle pourroit seulement servir à faire un arc de section cônique ouverte, à laquelle il n'a pas pensé, & dont il n'est pas question.

Il nous reste à donner la solution du *second cas* de ce probleme, où l'on ne suppose que deux Points donnez à la circonference de l'arc de cercle demandé, & au lieu du troisiéme point, la longueur du Rayon indépendamment de sa position qui donneroit le centre, duquel on ne veut, ou on ne peut faire aucun usage.

Fig. 108. Soient [*Fig.* 108.] les deux points donnez L & M, ayant tiré la ligne LM de l'un à l'autre, on aura la corde de l'arc demandé, & parce que le rayon est donné de longueur, on aura les trois côtés d'un triangle Isoscele LMC, dont on peut trouver l'angle C par la Trigonometrie, ou méchaniquement par un triangle semblable fait par le moyen d'une Echelle. La moitié de l'angle LCM sera le supplément à deux droits de l'angle LNM, nécessaire pour tracer l'arc demandé par le moyen de la description Organique, dont nous venons de parler au cas precédent, avec deux Régles qui feront l'angle LNM, dont le segment LHNM est capable.

Fig. 109. Ou bien on cherchera [*Fig.* 109.] le point X milieu du segment AXB par le moyen de la flêche MX; pour cet effet, ayant quarré le Rayon donné AR, & la moitié AM de la corde AB, on retrancho-

Digitized by Google

ra le quarré de AM, & du reſtant on extraira la racine quarrée du quarré de AR pour avoir le côté MR, lequel étant retranché du Rayon AR, donnera MX pour la flêche que l'on cherche, & par conſéquent le point X milieu de l'arc demandé. Par le moyen de ce point X & des deux autres A, B on tracera l'arc par pluſieurs points, comme nous l'avons dit au premier cas.

On peut propoſer un *troiſiéme cas* de ce probleme, en donnant une meſure déterminée au contour de l'arc qu'on veut décrire, au lieu des deux points de ſes extrémitez, & enſuite la longueur du Rayon; alors on trouvera l'angle LMN par un calcul aſſez ſimple. *Fig.* 108.

Premierement par le moyen de la longueur du Rayon, il ſera aiſé de trouver la circonference entiére en le doublant, & faiſant l'analogie ordinaire, comme 7. à 22. ou 100, à 314; ainſi le diametre donné eſt à la circonference totale meſurée en pieds, pouces & lignes. Enſuite par une ſeconde Analogie, on trouvera le nombre de degrez que doit contenir l'arc d'une longueur donnée, en diſant comme le nombre des pieds, pouces & lignes, trouvé par la premiere analogie pour la circonference entiére, eſt au nombre des pieds, pouces & lignes de l'arc donné en dévelopement ou rectification: ainſi 360. degrez, valeur totale de la circonference, eſt au nombre de degrez que vaut l'arc propoſé, dont la longueur du contour eſt donnée, alors on aura un angle dont le ſupplément à deux droits, ſera l'angle cherché LNM, ainſi ſuppoſant l'angle trouvé de 60. degrez, on l'ôtera de 180. valeur de deux droits; il reſtera pour l'angle cherché 120. degrez, qu'on formera avec deux régles, ſi on veut décrire l'arc organiquement, comme nous l'avons dit au premier cas.

Démonſtration du 2.e & 3.e Cas.

L'angle LNM vaut la moitié de l'arc ſur lequel il eſt appuyé, & l'angle L*d*M vaut de même la moitié de l'arc LNM, donc ils valent pris enſemble la moitié du cercle, c'eſt-à-dire deux angles droits; & par conſéquent la moitié de l'angle LCM, qui eſt égale à l'angle L*d*M, par la 20. du 3.e d'Euclide, ſera le ſupplément à deux droits de l'angle cherché LNM. *Ce qu'il falloit faire.*

USAGE.

Ce probleme eſt néceſſaire pour l'exécution de pluſieurs Traits de la coupe des Pierres, où il faut tracer des arcs de cercle, dont les centres ſont extrêmement loin, par exemple pour trouver l'arc de déve-

Digitized by Google

lopement de la baſe de la Porte en Tour ronde en Talud, qui eſt celle d'une portion de Cône, dont le ſommet qui doit être à la rencontre des côtés du Cône prolongez, c'eſt-à-dire les côtés de la Tour en Talud, peut être à une diſtance conſiderablement éloignée de la baſe; ſuppoſant, par exemple que la Tour eut ſeulement 15. pieds de Rayon, 30. d'hauteur, & un dixiéme de Talud, le ſommet du Cône, qui ſeroit le centre du dévelopement, ſeroit à 150. pieds loin de la circonference; ce qui rend les préceptes du Pere DERAN & de ſon Sectateur M. de LA RUE impraticables, ſans le ſecours de ce probleme.

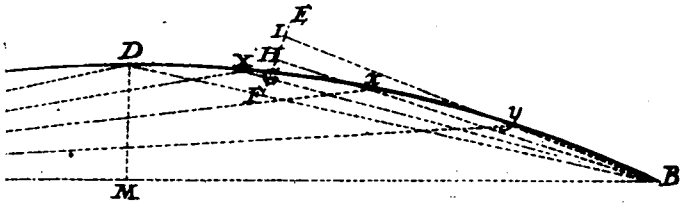
IL eſt encore néceſſaire pour trouver les arcs des Panneaux de Doële des premieres Aſſiſes des voutes ſphériques, ſphéroïdes, & ſur le Noyau dans le ſyſtéme de pratique qui exécute ces voutes par le dévelopement des cônes tronquez, comme nous le dirons en ſon lieu.

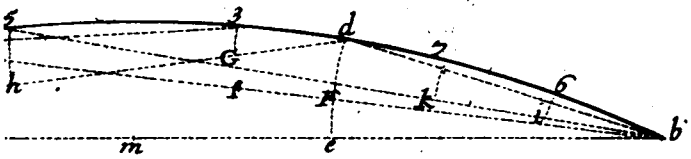
JE me ſerts ordinairement de la deuxiéme pratique du ſecond cas pour faire les Arondiſſemens des Contreſcarpes de nos Fortifications, *Fig.* 109. par le moyen d'un panneau A *d e* B X fait d'une planche taillée, comme la partie hachée de la figure, que je mets ſur le revêtement, le faiſant courir de piquets en piquets; mais comme le Parement eſt en Talud, & que cet arc de cercle augmente de Rayon à meſure que le mur s'éleve, je fais faire un panneau convexe ſur le derriere qui eſt à plomb, pour ſervir à jauger l'épaiſſeur qui régle le contour du Parement en Talud à chaque aſſiſe; & je trouve que cette méthode conduit facilement les Ouvriers.

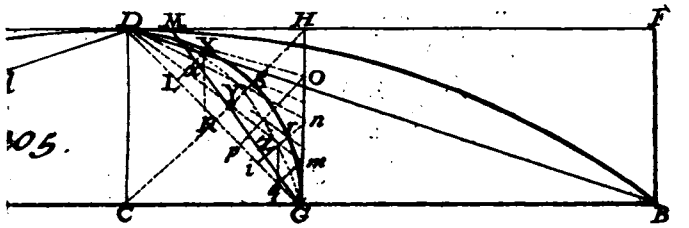
SI l'arc de cercle qu'on doit décrire, étoit ſi grand qu'on ne pût ſe ſervir du compas pour faire les angles qu'on doit prendre égaux entre eux, il faudroit ſe ſervir du *demi cercle* ou Graphométre, & de piquets d'alignement, au lieu de lignes tracées à la Régle ou au Cordeau, dont on trouveroit l'interſection par la rencontre des deux Rayons viſuels des points A & B pour centre de l'inſtrument. C'eſt ainſi que l'Architecte de la nouvelle Ville de *Carls-Roube*, qu'a fait bâtir le Margrave de Bade-Dourlack, auroit pû tracer les Rûës concentriques au Château qui ont deux & trois cens toiſes de Rayon, comme je puis l'eſtimer à vûë d'œil.

CHAPITRE

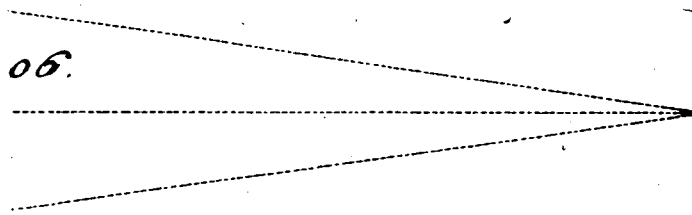
Digitized by Google





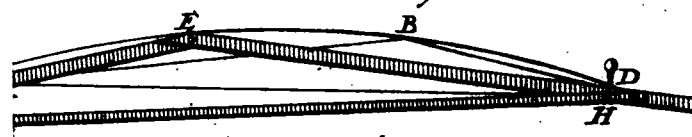


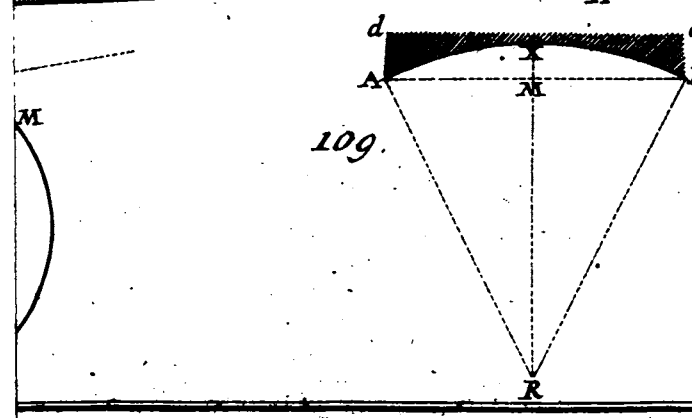
105.



106.

107.





109.

UNIV OF MICH.
Digitized by Google

Digitized by Google

CHAPITRE II.

De l'Ellipſe, premierement conſiderée comme étant faite.

PROBLEME II.

Trouver 1.° *le Centre.* 2.° *les Diametres conjuguez* 3.° *les Axes* 4.° *les Foyers d'une Ellipſe donnée.*

1.° SOIT l'Ellipſe donnée DEIG [*Fig.* 110.] on tirera les lignes OO, *oo* paralleles entre elles, & terminées à la circonference de l'Ellipſe. On les diviſera en deux également en *r* & R, par où on fera paſſer une ligne DI qui ſera un Diametre: le point C, milieu de ce diametre, ſera *le Centre* que l'on cherche. 1°. Pour le Centre. *Fig.* 110.

2.° Si par le centre C on tire une ligne EG parallele à OO, cette ligne EG ſera *un Diametre* conjugué au diametre DI; parce qu'il eſt parallele aux Ordonnées *o r* OR & à la tangente T*t*, tirée par le point D du diametre DI. 2.° Pour un Diametre.

3.° Si du point C comme Centre & d'une ouverture de compas priſe à volonté, on décrit un arc KH qui coupe la circonference de l'Ellipſe en K & en H, & que de ces points comme centres, & d'une ouverture de compas priſe auſſi à volonté, on faſſe une ſection de deux arcs de même rayon en Z, la ligne AB tirée par les points C & Z, & terminée à la circonference de l'Ellipſe de part & d'autre, ſera *un des Axes*, & la ligne LM, qui lui ſera perpendiculaire, paſſant par le centre C ſera *l'autre Axe.* 3.° Pour les Axes.

4.° Si l'on prend l'intervale AC avec un compas, & qu'on s'en ſerve comme de Rayon d'un Cercle, qui auroit L ou M pour Centre, faiſant des arcs qui coupent l'Axe A B aux points F & *f*, ces points ſeront les *Foyers de l'Ellipſe.* 4.° Pour les Foyers.

DEMONSTRATION.

PAR la définition [Art. 20.] les Diametres ſont des lignes qui coupent en deux également toutes les lignes paralleles entr'elles, par conſéquent auſſi la ſurface de l'Ellipſe, puiſqu'on peut conſiderer ſa ſurface comme compoſée d'une infinité de lignes paralleles infiniment proches. Art. 20.

2.° PAR la définition [avant l'Art. 24.] le diametre parallele à ces appellé *Conjugué*.

3.° PAR la conſtruction, les points K & H ſont également éloignez du centre C, & l'on a fait AZ perpendiculaire ſur la Corde qui ſeroit tirée de H en K, laquelle ſeroit une double ordonnée, qu'elle couperoit en deux également, & à angle droit, ce qui ne convient qu'à un Axe par la définition.

Art. 28. 4.° Enfin les points F & *f* ſont les Foyers de l'Ellipſe, parce que la ſomme des lignes FL, L*f* eſt égale, par la conſtruction, à la ligne AB, & ſi les lignes FD, D*f* priſes enſemble lui ſont auſſi égales, le point D ſera à la circonference de l'Ellipſe. (Art. 29.)

USAGE.

ON trouvera dans la quatriéme Partie de ce Traité des occaſions continuelles de faire uſage de ce Problême; parce que l'Ellipſe eſt la Courbe la plus ordinaire dans la coupe des Pierres.

PROBLEME III.

Par un point donné mener une Tangente à une Ellipſe donnée.

LE point donné peut être à la circonference, ou au-dehors.

Fig. III. 1.° S'IL eſt à la circonference, par exemple en D, [Fig. III.] & que les Foyers F*f* ſoient donnez, on menera à ce point D des lignes FD, *f*D qui feront un angle en D, qu'on diviſera en deux également par la ligne D*n*; ſi par ce point D on fait TD perpendiculaire à D*n*, cette ligne T D ou T*f* ſera la Tangente que l'on cherche.

Ou bien on fera *f*a = au grand Axe GA, on tirera aF qu'on diviſera en deux également en *t* d'où tirant une ligne au point donné D, la ligne *t*D ſera la Tangente demandée.

Fig. III. 2.° SI on n'a pas les Foyers; ayant trouvé le centre C [Fig. III.] on menera par le point donné D le diametre DB, & un autre à volonté comme GA, par l'une des extrêmitez duquel A ou G on menera AE parallele à DB, qui rencontrera l'Ellipſe en E, par où l'on menera au point G la ligne EG, laquelle ſera une Ordonnée au diametre DB, à laquelle ſi on tire une parallele par le point D, cette ligne *t*T ſera la Tangente demandée.

Digitized by Google

3.° Si le point donné D eſt hors de l'Ellipſe comme en *d*, ayant mené par le centre C la ligne *d*C, on fera CK perpendiculaire à C *d*, & égale à CL interſection de la ligne C *d*, & de la circonference de l'Ellipſe; enſuite ayant tiré *d*K, on lui fera la perpendiculaire KH, qui coupera *d* C prolongée en H, on portera la diſtance CH en C *i* ſur la ligne C *d*, enſuite on menera au diametre L *m* une ordonnée quelconque * par la conſtruction précedente, ce qui eſt aiſé; car il ne s'agit que de mener une parallele à *m*L par un point pris à volonté, comme *o*P, la diviſer également en deux au point *q*, & mener *q*C ou ſa parallele *o r*, à laquelle on menera une parallele *i*K par le point *i*, qui rencontrera la circonference en K, la ligne menée de ce point K au point donné *d* hors de l'Ellipſe ſera la Tangente que l'on cherche.

* Voyez l'art. 36. l. I.

Et ſi l'on prolonge K *i* en *k* ce point ſera encore à l'attouchement d'une autre ligne menée de *d* en *k*, de ſorte que du même point donné *d*, on peut mener deux Tangentes à l'Ellipſe AEKGA, une d'un côté, l'autre de l'autre.

Demonstration.

Pour le premier cas de ce problême, il eſt démontré dans les Sections Coniques que les angles F D *t*, & *f*DT ſont égaux entr'eux; ſi on ajoute de part & d'autre les angles F D *n*, & *f*D *n* égaux entr'eux par la conſtruction; les angles *n*D *t* & *n*D T ſeront auſſi égaux entr'eux, par conſéquent droits; donc *t*T ſera une Tangeante au point D. Fig. 111.

Secondement. [Fig. 97.] A cauſe des paralleles AE, CB, GC: CA:: GS: ES; mais AC demi diametre eſt égal à GC, GS = SE, laquelle eſt une ordonnée au diametre DB, puiſqu'il la diviſe en deux également; & [par la conſtruction] D *t* ou *t* T eſt parallele à SE, donc D *t* eſt une Tangente de l'Ellipſe au point D, *ce qu'il falloit faire.*

Troiſiémement. Par la conſtruction, on a fait CH troiſiéme proportionelle à la diſtance du centre C au point *d*, rencontre de la Tangente K *d* & du demi diametre CL, prolongé en *d*, & à ce demi diametre CL, on a fait auſſi C *i* = CH, donc *d*C: CL:: CL: C *i*, diſtance du centre C à la Souſtangente *i d*; donc * *d*K & *d k* ſont des Tangentes à l'Ellipſe aux points K, ou *k* menées du point donné *d* hors de cette Courbe, *ce qu'il falloit faire.* * Art. 46

Usage.

Ce Probleme eſt néceſſaire pour éviter les jarrets dans la jonction des lignes droites, avec des arcs Elliptiques, dans pluſieurs circonſtances d'arondiſſemens des parties droites contiguës aux Courbes, comme

Digitized by Google

il arrive ſouvent dans l'Architecture; parce que l'angle fait par la rencontre d'une Courbe & de la Tangente eſt le plus petit qu'on puiſſe imaginer; donc il différe infiniment peu de la ligne droite, à la jonction de la Courbe, par conſéquent la tranſition de la ligne droite à la Courbe devient imperceptible à la vûë.

De l'Ellipſe conſiderée comme à faire.

PROBLEME IV.

Un Diametre quelconque & une Ordonnée à ce diametre étant donnez, trouver ſon conjugué.

Fig. 113. SOIT AB [*Fig.* 113.] le diametre donné & E D ſon ordonnée, du point C milieu de A B, ayant élevé une perpendiculaire C H, on décrira le quart de Cercle H F B, on menera enſuite par le point E de la rencontre de l'ordonnée avec le diametre A B, une ligne E G parallele & égale à C H, qui coupera le cercle en F, par où & par l'extrémité D de l'ordonnée E D, ayant tiré la ligne F D, on lui menera par le point G la parallele G L, qui rencontrera E D prolongée en L. Je dis que E L ſera égale au demi diametre Conjugué que l'on cherche; ainſi ayant mené par le point C la ligne I K parallele à E L, on portera du centre C de part & d'autre C K & C I égale à E L.

DEMONSTRATION.

A cauſe des paralleles G L, F D, on aura E G : E L :: E F : E D, mais E G [Conſtr.] = C H & E L = C K, donc E F : C H :: E D : C K; c'eſt-à-dire, que les ordonnées au diametre A B dans le cercle ſont en même raiſon que celles de la courbe, qui paſſeroit par les points K & D, ce * Art. 41. qui eſt une proprieté de l'Ellipſe; * donc C K, ou ſon double K I eſt le diametre conjugué à A B, *ce qu'il falloit trouver.*

PROBLEME V.

Les Diametres conjuguez étant donnez, trouver les Axes de l'Ellipſe.

Fig. 112. SOIENT [*Fig.* 112.] les lignes A B D E données pour diametres Conjuguez d'une Ellipſe à décrire, qui ſe coupent également en C où eſt ſon centre. Du point A extrêmité du plus grand, ayant abaiſſé la perpendiculaire A P, on la prolongera vers G, portant la moitié C D du plus petit en A G. Puis ayant tiré G C, on la diviſera en deux également,

Digitized by Google

en m, d'où l'on tirera par le point A la ligne mg, qu'on fera égale à mG ; ſi du point g on mene par le centre C la droite indéfinie gx, on aura la poſition du grand Axe, dont la longueur Xx ſera déterminée en portant de part & d'autre du centre C la ſomme des lignes Cm, & mA en CX & Cx ; enſuite on élevera au point C une perpendiculaire à gx, ſur laquelle on portera de part & d'autre la longueur Ag de C en Y, & de C en y ; la ligne yY ſera le petit axe, *ce qu'il falloit trouver.*

Demonstration.

Du point C pour centre & pour rayon CX, on décrira un quart de cercle XH, & l'on menera par le point A la ligne Ko, perpendiculaire à XC qui paſſera à l'interſection K de l'arc de cercle HX, & de la droite CG, parce que mA = mt = mK & At parallele à la même.

Par la ſuppoſition le point A qui eſt à l'extrêmité d'un des diametres, eſt à la circonference de l'Ellipſe AEBD, il faut démontrer que les points X & Y ſont à la même circonference, & à l'extrêmité des axes. Puiſque mg = mC [par la conſtruction] mt ſera égale à mA, & tC = Ag = CY [par la conſtruction] or à cauſe des triangles ſemblables CKo, Ctu, Ko : Ao = tu :: CK = CX = CH : Ct = CY ; donc (Art. 41.) le point Y eſt à la circonference de l'Ellipſe, de même que le point X, comme il eſt aiſé de le prouver par la même raiſon. Art. 41.

Et parce que les lignes CX & CY ſont perpendiculaires entr'elles, ce ſont des demi-axes ; donc Xx & Yy ſont les axes demandez, *ce qu'il falloit démontrer.* Art.

Corollaire.

De-là on tire une maniere aiſée de décrire l'Ellipſe par un mouvement continu, au moyen d'un inſtrument compoſé de trois pieces, ſçavoir, d'une petite branche droite Cm, d'un triangle mAP, dont l'angle m eſt attaché par un pivot en m à cette branche, & d'une grande régle qu'on applique ſur le diametre DE, à laquelle la petite branche Cm eſt attachée ſur le point C par un pivot, ſur lequel elle peut tourner, ainſi que l'angle m du triangle à ſon autre extrêmité m : ſi l'on conduit avec la main l'angle P en droite ligne au long de la régle DE, le Crayon poſé au ſommet de l'angle A décrira en même tems la demie Ellipſe XYx, on peut même ſans remuer la régle faire paſſer le triangle AmP, & la branche mC de l'autre côté de la régle DE, mais ſa largeur couvrira une partie qu'on ne pourra tracer, c'eſt pourquoi il faudra la changer de côté. Fig. 112. Plan. 10.

Digitized by Google

Il faut remarquer que la ligne GP n'eſt pas toujours la ſomme deſdits diametres CD, & de la perpendiculaire AP, mais qu'elle en eſt quelquefois la difference, lorſque la direction de la branche C*m* tombe entre les points A & P.

USAGE.

Cette propoſition eſt très utile dans pluſieurs Traits de la coupe des Pierres où les Axes conjuguez ſont donnez, comme aux Arcs-droits des *Deſcentes*, en ce qu'elle fournit les moyens de tracer les Ellipſes, par le mouvement continu du Trait du Jardinier, dont nous parlerons au Problême VII.

PROBLEME VI.

Un Axe & un point à la circonference de l'Ellipſe étant donnez, trouver l'autre Axe.

Ce Problême n'eſt qu'une eſpece de Corollaire du Problême IV. parce que les ordonnées aux Axes étant des perpendiculaires; en donnant un Point à la circonference, c'eſt comme ſi l'on donnoit une ordonnée à l'axe grand ou petit.

Premierement, *le grand Axe étant donné, ſi l'on cherche le petit.*

Fig. 114. Soit AB le grand axe [*Fig.* 114.] & D le point donné à la circonference de l'Ellipſe, on abaiſſera de ce point ſur AB la perpendiculaire indéfinie OF, puis du point C milieu de AB pour centre, & CB pour Rayon, on décrira un quart de cercle B*b*, qui coupera OF en R; on portera ſur OF le Rayon CB, qui donnera le point F, & la longueur OD en C*d*, parallelement à OF. Par les points R & *d*, on tirera R*y*, qui coupera l'axe donné AB en *y*.

Si de ce point *y*, on tire au point F, une ligne *y* F, elle coupera CD prolongé en X; je dis que CX eſt la moitié du petit axe que l'on cherche.

Secondement, *le petit Axe étant donné, ſi l'on cherche le grand.*

Par le point D donné à la circonference, on tirera ſur CX la perpendiculaire D*d*; puis du point C pour centre, & la moitié CX du petit axe donné pour Rayon, on décrira le quart de cercle XE qui coupera D*d* au point V, & la perpendiculaire AB ſur le milieu C au point E, par les points E & V, on tirera E*z*, qui coupera CX prolongée au point Z; ſi par les points Z & D, on tire la droite ZB,

Digitized by Google

elle coupera la perpendiculaire AB au point B, je dis que CB eſt la moitié du grand axe que l'on cherche.

Demonstration.

Pour le premier cas, à cauſe des Triangles ſemblables OγR, γCd, & γOF, γCX, on aura γO:OR::γC: Cd, & γO: OF::γC:CX, donc OR: OF = Cb = CB:: OD = Cd: CX, donc * le point X eſt à la circonference de l'Ellipſe, & à l'extrêmité de l'axe conjugué à AB. * Art. 41.

Pour le ſecond cas, à cauſe des Triangles ſemblables ZCE, ZdV & ZCB, ZdD, on aura Zd: dV:: ZC: CE, & Zd: dD:: Zc: CB, donc dV: dD:: CE = CX: CB, donc [par l'Art. 41.] le point B ſera à l'extrêmité du grand axe, *ce qu'il falloit trouver.*

Usage.

Entre pluſieurs uſages de ce Problême, on fera voir au 4.e Livre qu'il eſt néceſſaire pour le Trait du Quartier de Vis ſuſpendu, ſuivant la maniere du P. Deran, & de M. de La Rue, & pour le Trait de la Trompe ſphérique dans un angle ſaillant.

Il pourroit auſſi ſervir pour la diminution des Colones, ſi au lieu de la Conchoïde De Nicomede, qu'on y employe ordinairement, on vouloit ſe ſervir d'un arc Elliptique, le petit axe donné eſt le diametre de la Baſe; le point à la circonference, eſt l'extrêmité du diametre ſous l'Aſtragle du Chapiteau, éloigné du petit axe des deux tiers de la longueur de la colonne, ſi le renflement eſt au tiers.

Probleme VII.

Les Axes d'une Ellipſe étant donnez, la décrire par pluſieurs Points, ou par un mouvement continu.

Premierement, par pluſieurs Points trouvez au compas [Fig. 110.] Fig. 110.

Ayant porté la moitié du grand axe pour Rayon, on portera une des pointes du compas en L, d'où, comme centre, on décrira des arcs qui couperont cet axe en F & f pour avoir les Foyers.

De ces points F & f pour centres, & d'un intervale pris à volonté pour Rayon, pourvû qu'il ſoit moins grand que fA, ou FB, on décrira des arcs de cercle en quatre endroits 1. 2. 3. 4. au deſſus, & au deſ-

Digitized by Google

ſous de l'axe AB, comme en 1*n*, 2*n*, 3*n*, 4*n*, puis on portera la même longueur du Rayon *de*, A en P, & de l'ouverture PB [reſte de la longueur du grand axe] pour Rayon, on décrira des mêmes centres F & *f* des arcs de cercle, qui couperont les precédens aux Points 1. 2. 3. 4. qui ſeront à la circonference de l'Ellipſe; on recommencera pareille operation avec des ouvertures de compas, plus ou moins grandes pour avoir encore quatre autres Points; & ainſi on trouvera tant de Points, & ſi près les uns des autres, qu'on jugera à propos, pour tracer ce contour à la main de l'un à l'autre avec aſſez d'exactitude, ou mieux dans le grand, avec une Régle pliante également mince, qu'on peut arrêter & courber par le moyen de quelques pointes de cloux plantées ſur les points trouvez en dedans & en dehors, ou tous en dehors en appuyant de la main gauche par dedans, pendant qu'on trace de la droite.

SECONDEMENT, par un mouvement continu, on peut le faire de pluſieurs façons. 1.°

Fig. 110. PAR le moyen d'un Cordeau, on fait ce que nous venons de faire avec le Compas; on plante deux cloux aux Foyers F & *f*, trouvez comme nous venons de le dire; puis ayant fait une boucle au bout du Cordeau, & une autre à diſtance de celle-ci, parfaitement égale à la longueur du grand axe AB, on met chacune de ces boucles à un clou des Foyers, & comme le cordeau eſt lâche, on pouſſe ſon pli F D*f* pour le faire tendre, & y faire couler un crayon D, ou une pointe de quelque Outil; ainſi le même cordeau qui faiſoit le pli F D*f* fera au milieu le pli F L*f*, & le crayon qui étoit en D, ſera tranſporté en L, ce qui eſt ſi connu de tous les Ouvriers, qu'il eſt inutile d'expliquer. Cette conſtruction, qu'on appelle le *Trait du Jardinier*, quoique Méchanique; donne l'Ovale Geométrique, que j'appelle toujours *Ellipſe*, pour la diſtinguer des autres Ovales.

IL eſt clair que pour avoir l'Ellipſe entiere, il faut faire paſſer le cordeau en deſſous d'AB, comme au deſſus.

DEMONSTRATION.

Nous avons dit à l'article 29. du premier Livre, qu'une des principales proprietez de l'Ellipſe conſiſte dans l'égalité de la ſomme des deux lignes tirées des Foyers au même point de la circonference, avec la longueur du grand axe; donc la courbe tracée eſt la vraie Ellipſe qui eſt une des Sections Coniques; puiſque la conſtruction par pluſieurs points trouvez au compas, & le cordeau par le mouvement continu, fourniſſent toujours la même égalité, *ce qu'il falloit faire,*

USAGE.

Digitized by Google

USAGE.

Cette pratique eſt très aiſée, mais peu éxacte dans les grands Ouvrages, parce que le cordeau s'alonge, ſelon qu'il eſt plus ou moins long & tors, & que l'on pouſſe le crayon dans le pli avec une force plus ou moins grande; une chaînette eſt moins ſujette à cet inconvenient, mais elle a les ſiens; car outre qu'elle cauſe des Ondulations, elle eſt encore un peu ſuſecptible de l'inégalité d'extenſion, cauſée par ſon poid, dans un plan vertical, ou par ſon frottement ſur un Plan horiſontal; de ſorte qu'elle ne peut ſe remettre en ligne droite, ſuivant les loix de la Méchanique; puiſque ce poid, ou ce frottement, ſont une troiſiéme Puiſſance qui fait effort contre celles des bouts, leſquelles ne peuvent, en tirant l'une contre l'autre, faire dreſſer la chaine, que lorſque la troiſiéme eſt infiniment petite; c'eſt pourquoi nous allons propoſer une autre maniere Organique qui n'a pas ces défauts.

Seconde Méthode de tracer l'Ellipſe par pluſieurs Points, ſans le ſecours des Foyers ſeulement avec deux ouvertures de compas, ou ſans compas par le moyen d'un cercle & d'une meſure conſtante.

Soient [*Fig.* 116.] les axes donnez AB, HF: on portera la moitié du petit axe CH de C en E ſur le grand, & l'on diviſera leur difference EB en deux également en M. *Fig.* 116.

Du point C pour centre, & de l'intervale CM pour Rayon, on décrira un cercle: il nous ſuffit ici pour exemple d'en mettre le quart N 2. M: ſur la circonference de ce cercle, on prendra à volonté autant de points qu'on en voudra pour tracer l'Ellipſe avec plus ou moins d'exactitude, comme ici les Points 1, 2, 3, deſquels, comme centres & toujours du même intervale CM pour Rayon, on décrira de petits arcs qui couperont l'axe AB, prolongé aux points M, *g*, *h*, d'où l'on tirera à leurs centres 1, 2, 3, des lignes 1 M, 2*g*, 3*h*, ſur leſquelles on portera toujours la moitié de la difference des demi-Axes ME, ou MB, en 1*x*, 2*x*, 3*x*, laquelle donnera tous les points *x*, *x*, *x* à la circonference de l'Ellipſe demandée.

DEMONSTRATION.

Du point C pour centre, & des longueurs CA, & CH pour Rayons, on décrira deux quarts de cercles A Q*b*, *r q* H; puis par un des points trouvez comme D, on tirera les lignes *r* Q, & P L perpendiculaires aux axes; & enfin par le centre C, la ligne C *q*.

Digitized by Google

A cauſe des paralleles rC, Pq, on aura $Cq : CQ :: rP : rQ$; mais $Cq = CH$, & $CQ = Cb$; donc $CH : Cb :: rP : rQ$; c'eſt-à-dire, que les ordonnées de l'Ellipſe à l'axe AB, ſont proportionelles à celles du cercle AQb au même axe, qui en eſt le diametre; donc [Art. 41. du premier Livre,] le point P eſt à la circonference de l'Ellipſe, *ce qu'il falloit démontrer.*

La même organiquement par un Mouvement continu.

Fig. 118. AYANT diviſé la difference Ae des deux demi-Axes CA, Cb en deux également en m, ou leur ſomme eB en M, on aſſemblera deux Régles égales chacune à la moitié MB, par le moyen d'une cheville, ou d'un clou arondi, comme Cd, dG en d, ou deux Régles d'inegale longueur, l'une D, égale à la difference Am, l'autre Da au demi-Axe AC, puis ayant pris une troiſiéme Régle de longueur égale à quatre fois Cd, ou deux fois eB, pour la 1.^e conſtruction, avec les Régles Cd, dG, ou ſeulement au grand Axe pour la ſeconde, on attachera à ſon milieu C, la Régle Cd, ou CD, avec un pivot; en ſorte que le point C ſoit ſur l'alignement d'un de ſes côtez eG, puis on portera ſur la branche dG la longueur Am, pour y poſer un crayon en x, ou ſur la Régle Da en Dg, pour y poſer une pointe propre à faire couler le long de la Régle AB, & le crayon en a; dans cette diſpoſition, il ne s'agit que de faire couler le point G, dans le premier cas, ou g dans le ſecond, au long de la Régle AB, les crayons poſez en x, ou en a traceront l'Ellipſe qu'on demande, comme il eſt clair par la démonſtration précedente, pour la conſtruction par pluſieurs points, puiſque celle-ci eſt parfaitement la même réduite en Inſtrument.

Autre Maniere Organique, avec l'Inſtrument appellé Compas à Ovale.

LORSQU'IL ne s'agit que de former un quart d'Ellipſe, le compas à Ovale eſt une ſimple Equerre, ſur les côtez de laquelle on fait couler deux pivots attachez à certaine diſtance, à une Régle au bout de laquel-
Fig. 117. le eſt un crayon pour le tracer. D'où il ſuit que pour une Ellipſe entiere, il faut aſſembler quatre Equerres ſéparées par une couliſſe, pour laiſſer le paſſage de ces pivots; ſuppoſant qu'on ne veuille tracer qu'une demi-Ellipſe, il faut un Inſtrument compoſé de deux Equerres, avec une couliſſe entre deux, comme on voit à la *Fig.* 117. ABCE, & afin que la branche du milieu ſoit ferme, on y ajoute des liens, comme mn, MN, qui empêchent qu'elle ne puiſſe s'incliner vers A, ni vers B.

ON prend enſuite une troiſiéme Régle RT, qu'on fait entrer dans

Digitized by Google

trois anneaux de fer ou de cuivre quarrez H, G & K, dans leſquels on l'enfile, & afin de pouvoir les fixer où l'on veut, on y ajoute une vis.

A deux de ces anneaux faits en façon de petite Boëte, tient une queuë en forme de pivot conique, qu'on fait entrer par les bouts de la rènure CE, & dans la rènure AB, ſi l'on en fait une, qui n'eſt neceſſaire que pour mieux aſſujettir le mouvement de la Régle RT; c'eſt pourquoi on fait ces rènures plus larges au fond que par le haut, & les pivots étant coniques, quoiqu'ils puiſſent être Cylindriques. A la boëte K au lieu de pivot, on met un crayon, ou une pointe, comme on le juge à propos pour mieux tracer.

L'Instrument étant ainſi fait, il ne s'agit plus que de ſçavoir déterminer la diſtance des pivots HG entre eux, & à l'égard du crayon K, pour tracer l'Ellipſe ſuivant la longueur des axes donnez.

Ayant porté ſur le grand Axe AB, la longueur CD de la moitié du petit, de A en F, la difference des deux demi-axes FC, ſera cette diſtance qu'on cherche du pivot H au pivot G; & la longueur CD ſera celle du pivot G au crayon K.

Les pivots & le crayon étant ainſi arrêtez par le moyen des vis, afin qu'ils ne puiſſent varier, il n'y a qu'à faire mouvoir la Régle RT ſur ſes pivots, en ſorte qu'il y en ait toujours un engagé dans la rènure des couliſſes AB, EC, qui ſont ici à angle Droit, parce que les axes ſont donnez; & à meſure que la Régle tournera ſur ces deux pivots, le crayon K tracera l'Ellipſe demandée.

J'ay dit que ces deux couliſſes étoient à angle Droit, parce que les deux axes ſont donnez; car ſi au lieu des axes, on avoit donné deux diametres conjuguez, elles devroient faire entr'elles d'autres angles que ces diametres, un obtus d'un côté, & un aigu de l'autre, qui ſeront d'autant plus aigus & obtus, que les diametres conjuguez approcheront de l'égalité; ainſi [*Fig.* 115.] ayant porté la diſtance CB de D en F, *Fig.* 115. on fera la couliſſe inclinée à l'égard du diametre donné AB, ſuivant la ligne CF, ou ce qui eſt la même choſe, ſuivant les angles FCB & ACF, & l'on aura le crayon en D, & les deux pivots en P & F, de ſorte que ſi les lignes CB & DP étoient parfaitement égales, cet inſtrument ne pourroit plus avoir lieu.

Ou il faut remarquer que la diſtance DP, qui eſt la difference de la perpendiculaire FP, & du demi diametre CB, peut tomber entre les points D & P, ſi le demi diametre CB eſt plus petit que DP.

Digitized by Google

SECONDEMENT, qu'on peut s'épargner la peine de faire une couliſſe ſur AB, pourvû qu'on tienne le pivot G, *Fig.* 117. ou P, *Fig.* 115. toujours appliqué à la Régle AB.

Fig. 117. SI l'on vouloit en même tems tracer une ſeconde Ellipſe parallele, ou à peu près à la premiere, il n'y auroit qu'à ajouter un quatriéme anneau en X, pour y appliquer un ſecond crayon, comme on a fait en K; mais ces deux Ellipſes ne ſeront pas ſemblables; parce que leurs diametres ne ſeront pas proportionels, de ſorte qu'elles ne peuvent pas être la ſection d'un berceau ou cylindre creux, de même épaiſſeur; la raiſon eſt que ſi des demi-axes CD, CB, on ôte des quantitez égales D*d*, BL, les reſtes C*d*, CL ne ſont plus en même proportion, C*d* n'eſt plus à CL, comme CD à CB; car ſuppoſant CD=2, CB=4, D*d*=1, C*d* ſera à CL, comme 1 à 3, ce qui eſt tout different du rapport ſuppoſé CD: CB:: 2:4.

DEMONSTRATION.

Du point C pour centre, & de l'intervale de la moitié du grand axe CB pour Rayon, on décrira le quart de cercle SB, & par le point K, on tirera ſur CB la perpendiculaire O*r*, qui coupera le cercle au point O, & du centre C la ligne CO, qui ſera parallele à HK; parce que OK eſt parallele à CH, & que HK=CS=SO; donc C*o* KH eſt un parallelograme. Que HK ſoit égal à CS, il eſt évident par la conſtruction, puiſque GK=AF, & GH=CF, & CS ou BC=CA, or à cauſe des paralleles, on aura CO: GK:: O*r*: K*r*; mais CO=CS, & GK=CD; donc CD: CS:: *r*K: *r*O: donc [Art. 41.] la courbe DKB eſt une Ellipſe.

Ou il faut remarquer. 1.° Que les deux triangles rectangles GHC, GK*r*, qui ſont ſemblables, varient continuellement par le changement de poſition de la Régle RT; en ſorte que les côtez CH, CG, G*r*, *r*K augmèntent ou diminuent, & cependant ils ne ſont jamais que la ſomme des quarrez de leurs hypotenuſes, qui ſont conſtantes HG, KG.

2.° QUE l'intervale CH, qui eſt la diſtance du centre C à un pivot, eſt toujours égal à l'excès KO de l'ordonnée du cercle, ſur celle de l'Ellipſe.

D'ou l'on peut tirer une maniere aiſée de trouver autant de points que l'on voudra d'une Ellipſe à peu près parallele à une autre donnée, comme *d*xL, en imitant ce qui a été fait avec l'inſtrument. Il n'y a qu'à porter l'intervale OK en CH, ou *o k* en C*b*, pour avoir les

Digitized by Google

inclinaiſons de pluſieurs lignes HK, *hk*, ſur leſquelles on portera la diſtance donnée D*d* en KX, & *kx*, pour mener par les points donnez & trouvez *d*, X, *x*, L l'Ellipſe demandée, à peu près équidiſtante à DK*k*B donnée.

Si l'on veut qu'elle ſoit exactement équidiſtante, il faut connoître les Foyers F*f*, [*Fig.* 111.] mener de chacun une ligne au point donné D, ou tout autre pris à volonté, & diviſer l'angle F D *f* en deux également par une ligne D*n*, ſur laquelle on portera du point D, la largeur du Bandeau, Archivolte, ou tout autre Ouvrage qu'on veut faire exactément de même largeur par-tout. *Fig.* 111.

Pour rendre cette operation plus facile, il n'y a qu'à prendre au contour de l'Ellipſe donnée, ou toute autre courbe, pluſieurs points à volonté pour centre 1. 2. 3. &c. deſquels avec l'intervale donné D*d* pour la largeur, on fera autant d'arcs de cercles, auſquels on menera à la main une courbe tangente a*tt d*, qui ſera celle qu'on cherche. *Fig.* 117.

Mais il faut obſerver qu'une telle Courbe, & toute autre qui n'eſt pas une concentrique ſemblable à la courbe donnée, n'eſt pas convenable aux ceintres qui doivent prendre leur naiſſance ſur un piedroit, parce qu'elle y feroit un jarret en *a* avec le piedroit *ap*, lequel ſera d'autant plus ſenſible & choquant à la vûë, que l'intervale D*d* ſera grand; car, il eſt viſible que les perpendiculaires à la courbe 1*a*, & A*a* ſe couperont en quelque point comme en *a*; de ſorte que tout l'arondiſſement de la naiſſance A 1, ſe réduit à la courbe intérieure en un ſeul point a, où ces deux perpendiculaires ſe croiſent, par conſéquent, puiſque une partie ſemblable s'y trouve de moins, il s'y fera un angle avec le diametre AB, plus aigu que l'angle mixte a A 1. qui eſt droit à ſon origine A, ou infiniment peu different du droit, & égal à celui d'un piedroit perpendiculaire ſur A B, donc l'angle mixte de la courbe *da*, avec le piedroit *ap* perpendiculaire ſur A B, fera un angle different, qui ſera d'autant plus aigu, que l'arc A 1. ſera grand, par conſéquent un jarret; ce qui eſt inſupportable en Architecture.

Corollaire.

De ce que nous venons de dire, il ſuit encore, que la méthode de ceux qui prennent la meſure de la largeur à l'intervale des deux courbes, ſur les diametres de l'Ellipſe donnée, comme l'enſeigne le P. *Fig.* 111.

Digitized by Google

Alia interior Ellipsis non tantùm concentrica, sed etiam æquali inter vallo distans ab interiori quæ distantia immatur secundùm radios à centro procedentes.

DECHALES, Livr. 5. Prop. 21. est encore très fautive ; car il est visible que si cette distance est, par exemple, D*y*, sur D*n* ou D*u*, sur DC, le point *u* s'approche plus de la circonference que le point *y*, par conséquent l'Ellipse ne sera plus équidistante à l'exterieure ADmG donnée ; de sorte qu'en cet endroit, le Bandeau ou Archivolte qu'on se propose de faire de même largeur, se trouvera plus étroit : or la ligne D*n*, qui divise l'angle FD*f* en deux également, ne tombe jamais sur les rayons, que lorsque le point D est à l'extremité du petit diametre ou axe ; car (par la 3.e Prop. du 6.e Livre d'Euclide,) la ligne qui divise un angle d'un triangle *f*DF en deux également, coupe la base de ce triangle proportionellement aux côtez ; mais les rayons ou demi-diametres coupent tous la base *f*F en deux également en C, donc ils ne divisent pas l'angle FD*f* en deux également ; nous démontrerons encore d'une autre maniere la fausseté de cette pratique, au chap. VIII. du 4.e Livre.

REMARQUE.

QUOIQUE *le Compas à Ovale* soit un assez bon instrument, on peut s'en épargner la façon, & operer très juste dans les grands Ouvrages, en cherchant plusieurs points de la circonference de l'Ellipse qu'on se propose de faire, sur lesquels on appuye une régle pliante fort mince, & d'une épaisseur bien égale qu'on arrête de chant, ou avec les mains, ou avec des pointes de cloux, comme nous l'avons dit ci-devant, au long de laquelle on peut tracer un contour aussi ferme, & aussi net qu'avec aucun Instrument ; voici d'autres problémes pour l'une & l'autre Methode.

PROBLEME VIII.

Les Diametres conjuguez étant donnez, tracer l'Ellipse par plusieurs Points, ou par un mouvement continu, sans connoître les Axes ni les Foyers.

Fig. 115. SOIENT [*Fig.* 115.] les diametres conjuguez AB, ED, par le point D, extremité du plus grand, on tirera sur AB la perpendiculaire indéfinie FP, sur laquelle on portera la longueur AC, de D en F, d'où l'on tirera au centre C la ligne FC ; en suite du point I pris à volonté sur CD, on menera une parallele IG à la ligne FP, & une autre IH au diametre AB. Si du point G, où IG coupe FC pour centre & pour rayon DF, ou AC, on fait un arc de cercle qui coupe IH en H & *h* ; je dis que les points H & *h* sont à la circonference de l'Ellipse.

Digitized by Google

DEMONSTRATION.

Soit pris CL sur AB égale à HI, & mené LH qui sera parallele à CD.

A cause des paralleles IG, PF, on aura CD : DF :: CI : IG, mais DF = GH = AG par la construction, & CI = LH; & à cause du triangle rectangle HIG, $\overline{IG}^2 = \overline{GH}^2 - \overline{HI}^2 = CA - \overline{CL}^2$ = au rectangle BL×LA (par la 5.e du 2.e Livre d'Euclide) donc si au lieu de CI, on met son égal LH, & au lieu de DF son égale CA, on aura $\overline{CD}^2 : \overline{LH}^2 :: \overline{CA}^2 : BL : \times LA$: donc le point H est à la circonference de l'Ellipse, *ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

D'ou il suit qu'on peut décrire une Ellipse par un mouvement continu au tour de deux axes conjuguez, sans autre instrument, qu'une Régle & une fausse Equerre, ou deux autres Régles qui fassent un angle égale à FCB, trouvé comme nous venons de l'enseigner, & une troisiéme percée, suivant les distances P, D, F, pour mettre une cheville en P, & en F, assez saillantes, pour pouvoir y appuyer les régles FC, & CB; on mettra un crayon au troisiéme trou en D, ou une pointe propre à tracer l'Ellipse; si l'on fait couler le point F, où est la cheville, le long de la régle FC, & la cheville P le long de la régle CB, le crayon D tracera le quart d'Ellipse D*b*B, & si l'on en fait de même de l'autre côté de la ligne FC, transportant la régle CB en CA, de même que la régle FP, on tracera l'autre quart d'Ellipse CHD, qui fera avec le precedent la demie Ellipse ADB, *ce qu'il falloit faire* par un mouvement continu. Pour ne pas changer la régle CB, il faut la faire longue, en sorte qu'elle excéde les points A & B de chaque côté, de la longueur de DP.

USAGE.

Ce Problême peut servir à tracer des arcs rampans, & les projections des faces Elliptiques en talud, dont on n'a ordinairement que les diametres conjuguez, pour s'épargner la peine d'en chercher les axes; mais on peut le faire par plusieurs points d'une maniere encore plus simple.

SECONDE MANIERE.

Soient les diametres conjuguez AB, DE: [*Fig.* 121.] ayant mené par le point D la ligne DT, parallele à AB, & par le point C la per- *Fig.* 121.

Digitized by Google

pendiculaire CK, qui rencontrera DT au point K, on prolongera cette ligne vers F. Du point C pour centre, & pour rayon CK, on décrira le quart de cercle HK, & du même centre; & pour rayon le demi diametre CB, on décrira un autre quart de cercle FB, que l'on diviſera en autant de parties égales ou inégales que l'on voudra, 1, 2, 3, F; il convient pour la commodité & la promptitude de l'operation qu'elles ſoient égales, parce qu'il faut diviſer l'autre quart de cercle HK, en un même nombre de parties, & ſi elles étoient inégales, il faudroit qu'elles fuſſent proportionelles à leurs correſpondantes; par chaune de ces diviſions 1, 2, 3, dans l'un & l'autre quart de cercle, on menera des parelleles au diamettre CB, comme $a a$, $b b$, $c c$, dans le quart de cercle HK: & 1L, 2M, 3N, dans le quart de cercle BF; en ſuite par les mêmes points 1, 2, 3, du même quart de cercle FB, on menera d'autres lignes $3g$, $2b$, $1i$ parelleles à FC, par conſéquent perpendiculaires à AB, leſquelles couperont ce diametre aux points g, b, i; on menera par ces points des lignes gc, bb, ia, paralleles à CD, leſquelles couperont les précedentes $a a$, $b b$, aux points a, b, c qui ſeront à la circonference de l'Ellipſe.

Ces Points étant trouvez, il ſera bien aiſé de trouver ceux de l'autre côté du diametre ED; car il n'y aura qu'à porter les longueurs oa, pb, qc en oa, pb, qc, ſur les mêmes lignes aa, bb, cc, de l'autre côté du diametre CD: on aura ainſi pluſieurs points à la circonference de l'Ellipſe, par leſquels menant une ligne courbe à la main, ou avec une régle pliante, on aura la demie Ellipſe, & l'Ellipſe toute entiere, ſi l'on veut; puiſque la moitié CDB eſt égale à l'autre, qui paſſeroit par ACE, mais diſpoſée en ſens contraire.

DEMONSTRATION.

A cauſe des paralleles au diametre AB, & des diviſions égales en nombre, & proportionelles dans les quarts de cercle HK, & FB, les rayons CK & CF ſont diviſez proportionellement, de même que les lignes CK & CD, le ſont auſſi entr'elles; donc CD: Cq:: CF: CN: & CD: Cp:: CF: CM & CD: Co:: CF: CL, mais $Cq = gC$, $Cp = bb$ & $Co = ia$: & par la même raiſon $g3 = CN$, $b2 = CM$ & $i1 = CL$, donc gc: bb:: $g3$: $b2$, c'eſt-à-dire, que les ordonnées au diametre du cercle, & celles au diametre de l'Ellipſe ſont en même raiſon entr'elles, *ce qu'il falloit démontrer.* Art. 41.

PROBLEME

Probeme IX.

Alonger ou racourcir les Ellipſes en telle Raiſon qu'on voudra, en ſorte qu'elles ſoient toujours les Sections d'un même Cylindre.

Soit [*Fig.* 119.] le demi cercle BFE, la haſe d'un Cylyndre quelconque; ayant abaiſſé ſur ſon diametre BE, autant de perpendiculaires que l'on voudra *or*, *or*, *c*F, on joindra l'axe AB, qu'on ſuppoſe donné, ou pris à volonté, au diametre BE, ſous quelque angle que l'on voudra, comme ABE, & l'on achevera de former le triangle, en tirant une ligne par les extremitez A, E; enſuite par tous les points *o*, *o* & *c*, on menera des paralleles à la ligne AE, juſqu'à la rencontre de l'axe AB aux points *h*, *h*, C, par leſquels on élevera, ſur AB, autant de perpendiculaires indéfinies *hi*, *hi*, CD, qu'on fera égales aux ordonnées *or*, *or*, CF, en ſorte qu'elles ſoient terminées aux points *ii*D, par leſquels on fera paſſer une courbe à la main, ou avec une régle pliante, & l'on aura la circonference de l'Ellipſe demandée; nous n'en mettons ici que la moitié pour rendre la figure plus ſimple, l'autre moitié étant parfaitement égale. *Fig.* 119.

Demonstration.

Si l'on ſuppoſe le demi cercle EFB, relevé en E*d*B, & la demie Ellipſe ADB perpendiculaires au plan du triangle ABE, toutes les perpendiculaires aux diametres EB, AB le ſeront à ce plan, donc les diſtances des ſommets correſpondans F, D, *r* & *i*, qui ſont les mêmes que *d*D, R*i*, ſeront égales aux diſtances *ho*, C*c* du plan ABE; puiſque les lignes *or* ou *o*R & *hi*, leur ſont perpendiculaires, & que ces mêmes *or* & *hi* ſont égales entr'elles; donc elles formeront autant de parallelogrames, comme *c*CD*d*; donc ſi la figure E*d*BDAE eſt une moitié de Cylindre, la ligne C*c* ſera ſon axe, & D*d*, qui lui eſt parallele, ſera ſon côté; c'eſt-à-dire, à la ſurface: il en ſera de même de toute autre jonction des ſommets *i* & *r* ou R, comme *hi*, R*o*, *i*R qui ſera parallele, & égale à *ho*, laquelle eſt parallele à C*c*, donc *i*R ſera parallale à l'axe C*c*, & par conſéquent à la ſurface du Cylindre, *ce qu'il falloit démontrer.*

Que la ligne ADB ſoit une Ellipſe, nous l'avons fait voir au Probleme precédent; puiſqu'à cauſe des paralleles AE, *ho*, C*c*, les lignes EB, & AB ſont diviſées proportionellement, & que les ordonnées à ces diametres, ſont égales entr'elles, & par conſéquent proportionelles à celles du cercle, par la conſtruction; donc la courbe ADB eſt une Ellipſe Geometrique.

Digitized by Google

Il eſt à propos que je rende raiſon, pourquoi j'ajoute ici l'épithete *Geometrique* au nom propre de l'Ellipſe formée par ce problême; c'eſt que Daviler fameux Architecte, qui a fort bien écrit ſur ſon Art, étoit aſſez peu verſé en Geometrie, pour ne pas connoître l'exactitude de cette operation, s'imaginant apparemment qu'elle produiſoit une courbe d'une nouvelle eſpece; ce qui lui a donné occaſion de lâcher une abſurdite, dont j'ay montré le faux au commencement, & en pluſieurs endroits de cet Ouvrage, *la ſeverité des régles de Geometrie*, (dit-il, Page 237.) *eſt inferieure à la pratique, comme la methode des Cherches ralongées vaut mieux que les figures Geometriques, d'autant qu'en cet Art, la pratique eſt preferable à la Theorie*; quelle miſere d'entendre ainſi raiſonner un Auteur, un Maître de l'Art, & ce qui eſt encore plus ſingulier, en appeller au Tribunal d'un *Ouvrier*, qui n'eſt qu'un eſpece de Singe d'un Geometre, dans les traits de la coupe des Pierres, dont il parle, *le meilleur* (dit-il) *eſt de prendre quelque habile Ouvrier pour ſe conduire, parce qu'il ſoulage & inſtruit*? quelle inſtruction peut donner un homme qui n'agit que par mémoire, & une imitation ſervile de ce qu'il a vû faire à un Maître qui ſouvent étoit auſſi borné que lui, incapable de rendre raiſon de ce qu'il enſeignoit à ſon Diſciple; par conſéquent ſuſceptible d'adopter le faux; comme le vrai? n'eſt-ce pas choiſir un Aveugle pour ſe conduire? car enfin remontons à ces Maîtres, de qui ont-ils pû ſe tranſmettre ces preceptes que d'un Geometre? un tel raiſonnement ne vaudroit pas la peine d'être relevé, s'il n'étoit trop commun parmi les Architectes, & oſerois-je le dire parmi les Ingenieurs, où il n'eſt auſſi que trop ordinaire d'entendre exalter le merite de la ſeule pratique; il me ſemble ouïr ces Chirurgiens, qui ſe mêlent de Médecine, décrier les Médecins tant qu'ils peuvent, fiers d'avoir fait quelques cures, par le moyen de quelques Remêdes qu'ils ont tiré de cette ſcience, & appliqué au hazard; ils avancent hardiment que la Pratique vaut mieux que toute la Theorie de la Faculté: mais revenons à notre ſujet, cette digreſſion m'entraine au delà des bornes d'une ſimple remarque.

Corollaire.

Il eſt évident que ſi au lieu du diametre AB, on en avoit pris ou donné un plus petit, comme aB, la conſtruction auroit été parfaitement la méme; cette ligne auroit été diviſée auſſi proportionellement à la ligne EB, aux points *l*, *m*, *n*, & *a*; & en élevant ſur ces points autant de perpendiculaires à aB, égales aux correſpondantes *or*: on aura autant de points à la circonference d'une Ellipſe, qui ſera beaucoup plus courte que la precédente, & qui ſera cependant toute à la ſurface du même Cylindre par la même raiſon.

Digitized by Google

Corollaire II.

D'ou il ſuit: 1.° Que ſi l'angle B*c*C eſt aigu ou obtus, le Cylindre en queſtion ſera ſcalene; de ſorte qu'il pourra arriver, que ſi l'on prenoit un diametre égal à BE qui fit avec C*c* un angle égal à B*c*C, la ſection ſera encore un cercle, comme par exemple E*x*.

2.° Que ſi au lieu du demi-cercle EFB, pris pour baſe d'un Cylindre ſcalene, on avoit le demi-cercle AGB, & que l'on prit le diametre EB pour l'axe d'une Ellipſe racourcie, on trouveroit par la même conſtruction *cf* égale à la moitié du grand axe de cette Ellipſe, en portant CG en *cf*, & *h*L en *e*K; & ainſi de ſuite pour toutes les ordonnées.

Corollaire III.

Non ſeulement, on peut transformer ainſi une Ellipſe en un autre, plus ou moins alongée, ou une Ellipſe en un cercle, qui ſoit la baſe d'un même Cylindre; mais auſſi l'on peut encore transformer une portion moindre que la demie Ellipſe, ou que le demi-cercle en une autre plus alongée, & plus accourcie, en telle raiſon que l'on voudra, ſans qu'il ſoit neceſſaire d'en avoir les diametres, par le ſeul alongement des abſciſes, & la repétition des ordonnées correſpondantes.

Soit [*Fig.* 120.] un Secteur, de cercle B C*e*, ou ſimplement un arc D*e* qu'il faut convertir en portion d'Ellipſe *d*E qui ſoit ſection d'un même Cylindre, dont D*e* eſt portion de la baſe. Ayant mené par les extremitez D & *e* deux lignes droites D a, *e* a qui faſſent entr'elles un angle droit ou quelconque en a; on diviſera la ligne aD en autant de parties égales qu'on voudra, comme ici en trois, & l'on menera par les points 2, & 3. des paralleles 2*p*, 3*p* à la ligne a*e*; enſuite ayant fait à part l'angle *d*A E, égal à l'angle D a*e*, on diviſera A*d* en même nombre de parties égales, ou proportionelles; ſi les diviſions de la premiere ligne aD étoient inégales, & par les points 2. & 3. de diviſion de la ligne donnée A*d*, on menera des lignes 2 P, 3 P, paralleles & égales aux precédentes, correſpondantes aux mêmes diviſions 2*p*, 3*p*; la ligne courbe qui ſera menée par les points E P *pd*, ſera la portion *d'Ellipſe que l'on cherche.* *Fig.* 120.

Pour ſentir la raiſon de ce Corollaire, il faut achever le cercle, en trouvant le centre C de l'arc donné D*e*, & mener C B parallele à a D; qui coupera les lignes *p*2, *p*3 prolongées aux points *f* & *g*.

Presentement, puiſque à la Figure 119. nous avons operé ſur les

Digitized by Google

diametres AB, EB; on peut conſiderer le triangle ABE, comme une ſection par l'axe du Cylindre, dont le rayon CB de la Figure 120. peut repreſenter une partie de la ſection de ce plan avec la baſe B*y* *e* B, & la ligne aD, celle d'un plan parallele à la ſection par l'axe, lequel retranche des lignes paralleles *fp*, *gp*, des parties égales *f*2, *g*3, non ſeulement dans le cercle de la baſe, mais encore dans l'Ellipſe de la ſection; par conſéquent, puiſque les ordonnées de l'Ellipſe doivent être égales à celles du cercle de la baſe du Cylindre, ſi l'on retranche des correſpondantes, des parties égales, les reſtes doivent encore être égaux; mais les abſciſes par la conſtruction ſont proportionelles, donc l'arc E*d* de la ſection oblique du Cylindre correſpond parfaitement à l'arc *e* D de ſa baſe, *ce qu'il falloit faire.*

USAGE.

Ce Problême eſt ſans contredit le plus utile de tous ceux, dont on peut faire uſage pour la coupe des Pierres; car comme la plûpart des des voutes ſont des Cylindres Droits ou ſcalenes, & coupez obliquement par des differentes rencontres de plans ou de Cylindres égaux, ou de baſes Elliptiques égales; on a continuellement beſoin d'alonger ou de racourcir les courbes des ceintres, ce que les Ouvriers appellent la *Cerce ralongée.*

Quant à l'uſage du ſecond Corollaire, il eſt auſſi fréquent en pluſieurs rencontres, par exemple pour trouver les joins de tête de la Porte en Tour ronde, &c. comme on le verra au 4.e Livre.

De la Parabole.

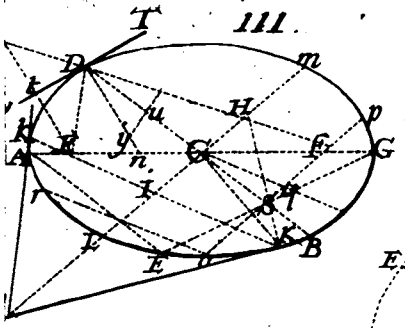
Probleme X.

L'Axe d'une Parabole, & un Point à ſa circonference étant donnez, la tracer par pluſieurs Points, & par un Mouvement continu.

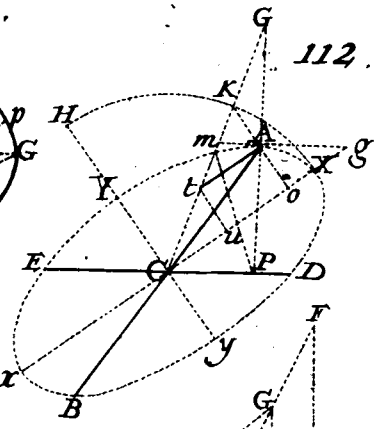
Pl. 11.
Fig. 122. Soit [*Fig.* 122.] SO4. l'axe donné, & D le point de la Parabole à ſon contour. Ayant tiré de ce point une perpendiculaire DO ſur l'axe SO, on tirera la ligne SD, ſur laquelle au point D, on fera la perpendiculaire D4, qui coupera l'axe SO prolongé au point 4; la longueur O4. ſera le Paramétre de la Parabole, qu'on diviſera en quatre parties égales, dont on en portera une de part & d'autre du ſommet S en F, pour avoir le Foyer F, & en G ſur l'axe 4S prolongé pour avoir la Directrice H*b*, laquelle eſt une perpendiculaire à l'axe prolongé d'un

Digitized by Google

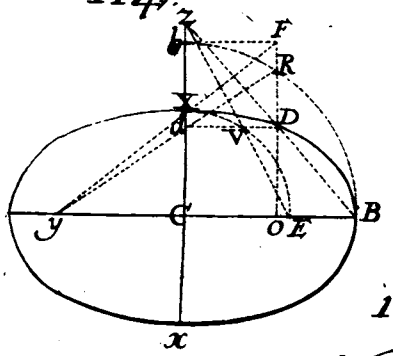
111.



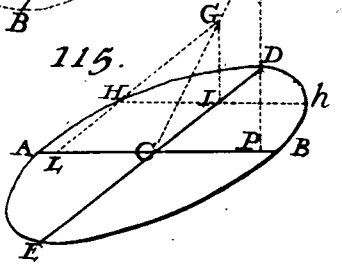
112.



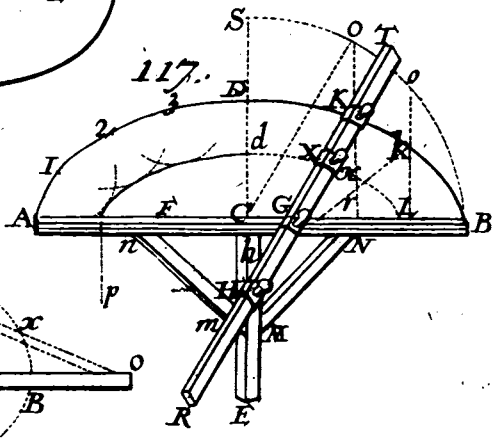
114.



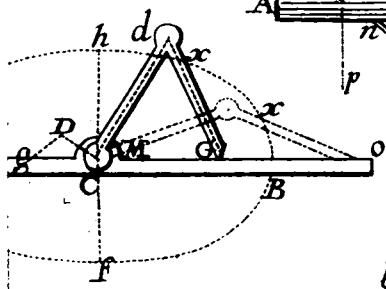
115.



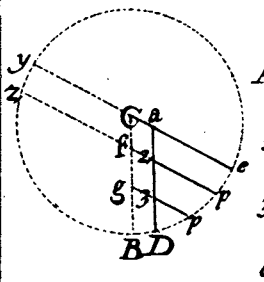
117.



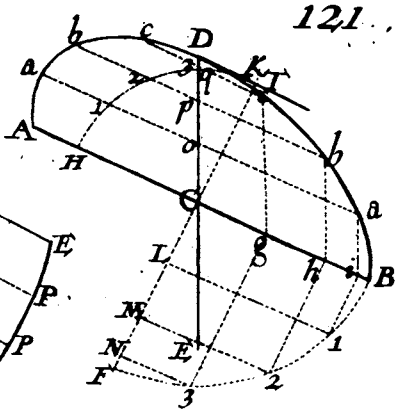
118.



120.



121.



UNIV. OF MICH.
Digitized by Google

Digitized by Google

quart du Parametre au-delà du ſommet S, nous en dirons l'uſage ci-après.

On tirera enſuite autant de perpendiculaires que l'on voudra à l'axe SO, pour avoir la même quantité de points au contour de la Courbe comme *i*K, dont les points *i* & *i* ſont pris à volonté; ou bien on cherchera le Parametre, en prenant au contour de la Parabole un point K à volonté, par lequel & par le ſommet S, on menera KS*a* indéfinie, puis portant en S*b* la longueur *i*K, on tirera par le point *b* une perpendiculaire à l'axe prolongé, laquelle coupera K*a* au point *a*, la ligne *b a* ſera le Parametre qu'on cherche, dont le quart porté de S en G, donnera la ſection de l'axe & de la Directrice; enſuite ouvrant le compas de l'intervale G*i*, à chaque point *i* en particulier, on poſera une des pointes en F, d'où comme centre, on décrira un arc qui coupera en K chaque perpendiculaire en *i*K, pour laquelle on a pris l'intervale *i* G correſpondant, faiſant de même pour toutes les lignes, on ſe ſervira du même centre F, & par tous les points SKKD; on tracera à la main, ou avec une Régle pliante une courbe qui ſera la parabole que l'on cherche; on en fera de même pour l'autre côté SC*d*.

Demonstration.

La ligne O4. par la définition du Parametre à la premiere conſtruction, ou *a b* à la ſeconde ayant été faite troiſiéme proportionelle à l'axe SO, & à l'ordonnée OD ou *i*K, eſt le Parametre de la Parabole, dont le quart eſt la diſtance du ſommet S au Foyer F, & au point G par où paſſe la directrice.

Or la diſtance de cette ligne eſt toujours égale à celle du Foyer à l'extremité de l'ordonnée, comme il eſt démontré dans les ſections coniques, donc la courbe SKD eſt une Parabole.

Seconde Maniere par un Mouvement continu.

On prendra un cordeau égal à la diſtance OG, dont on atachera un bout ſur la branche EL, d'une Equerre HEL, meſurant ſa longueur depuis le point E de ſon angle, & l'autre bout ſera arrêté à un clou au Foyer F: enſuite ayant poſé la branche EL ſur l'axe SO, & l'autre branche EH ſur la directrice HA, on y appliquera une régle HR, puis appuyant avec un crayon ou une pointe ſur le cordeau pour le tenir appliqué contre la branche EL, on reculera l'Equerre le long de la régle HR, & à meſure qu'on l'écartera de l'axe SO toujours parallelement à elle-même, le crayon coulant dans le pli du cordeau au

Digitized by Google

point C, tracera la Parabole d'un côté de l'axe ; on tranſportera enſuite l'Equerre pour tracer l'autre moitié du côté apoſé.

Il eſt évident que cette operation eſt preciſément la même que la precédente, mais executée d'une maniere Méchanique ; puiſque l'on aura par-tout CE = CF, comme l'on a eû Gi = FK, ce qui eſt la proprieté de la Parabole.

USAGE.

La deſcription de la Parabole n'eſt pas d'un fréquent Uſage dans la coupe des Pierres ; elle ſert cependant pour tracer les arcs de face des Trompes quarrées par devant dans un angle Droit : l'axe qui eſt la ligne du milieu de niveau à l'Impoſte eſt donné, & la rencontre du milieu de la Trompe, avec l'aplomb au bout de cette ligne, eſt le point donné au contour de la Parabole.

Elle peut auſſi ſervir à tracer un arc Rampant, dont les Piedroits ſont en ſurplomb, dans une circonſtance, dont nous parlerons dans la ſuite. Elle ſert encore à tracer les jambages des cheminées les plus propres à réfléchir la chaleur du Feu, comme l'a démontré M. Gauger dans la Méchanique du Feu, où il en fait voir l'avantage ſur ceux qui *ſont paralleles* entr'eux.

Comme cette courbe reſemble ſi fort à la *Chainette*, que quelques Mathématiciens s'y ſont mépris, comme le grand Gallilei, & après lui M^rs. Blondel dans ſes Problêmes de l'Architecture, Parent, & le P. Castel dans ſa Mathématique univerſelle ; on pourroit s'en ſervir à tracer les Cintres des voutes, dont on fait les Vouſſoirs égaux. Je crois auſſi avoir lû quelque part qu'un fameux Architecte ſe ſervoit de la Parabole dans les ceintres des Lunettes dans un Berceau.

Enfin on pourroit faire uſage de ce Probleme pour le renflement & courbure du profil de diminution des colonnes, au lieu des deux manieres uſitées, l'axe donné eſt le diametre de la baſe, l'abciſſe eſt la difference des deux demi-diametres à la baſe, & ſous le chapiteau ; c'eſt-à-dire, la diminution d'un côté, le ſommet eſt l'extremité de ce diametre ; & le point à la circonference eſt celui de diminution du diametre ſuperieur, c'eſt-à-dire, ſon extremité ſous l'Aſtragale.

Digitized by Google

De l'Hyperbole.

Probleme X.

Le Centre, le Sommet & un point au contour de l'Hyperbole étant donnez, la décrire par pluſieurs Points, & par un Mouvement continu.

Fig. 123.

Soit le centre C, le ſommet S, & le point D à la circonference, la ligne CO mené du centre par le ſommet S en O, ſera l'axe prolongé, auquel la perpendiculaire OD ſera une ordonnée. Des points S & D pour centres, & pour rayon une ouverture de compas priſe à volonté; on fera des ſections d'arcs en *p* & *q*, pour mener par ces points une ligne *p q*, laquelle étant prolongée, s'il le faut, coupera l'axe CO en V; d'où comme centre, & de l'intervale VS, ou VD; on décrira le demi-cercle SDG, qui rencontrera SO prolongée en G: enſuite ayant porté la longueur OG ſur la ligne DO, prolongé en OH, on lui menera par le point S la parallele indéfinie IST; on prolongera SC en R, faiſant CR = CS: on tirera RH, qui coupera IT en I; on portera la longueur SI en SK, pour avoir la ligne KR, qu'on diviſera en deux également au point M, ou ſera le centre d'un demi-cercle RTK, dont elle ſera le diametre, & dont l'arc coupera la ligne ST en T; puis ayant diviſé ST en deux également au point N, on portera la diſtance CN en CF; le point F ſera un des Foyers de l'Hyperbole, & ſi on porte la diſtance SF en R*f*, on aura l'autre Foyer.

Cette preparation étant faite, ſi l'on veut trouver pluſieurs points de l'Hyperbole avec le compas d'une ouverture *f*L priſe à volonté, pourvû qu'elle ſoit plus grande que *f*S, pour rayon, & du point *f* pour centre, on fera un arc *l*L; enſuite on portera le même intervale *fl* de R en *o*, par exemple, ſur l'axe prolongé, & l'on prendra la difference *o*S de cet intervale & du premier axe RS, & de cette difference *o*S pour Rayon, & du Foyer F pour centre, on fera un autre arc *x y*, qui coupera *l*L au point *x*, lequel ſera à la circonference de l'Hyperbole, on trouvera de même autant de points que l'on voudra de cette Courbe.

Seconde Maniere par un Mouvement continu.

Ayant pris une régle *f*E d'une longueur convenable, qui excede la plus grande diſtance *f*D du Foyer oppoſé *f*, au point donné D; on lui fera un trou au bout *f* pour y paſſer un clou, ſur lequel elle ſera mobile; on portera ſur cette régle la longueur RS du premier axe de *f* en Q; enſuite on prendra un cordeau de longueur égale à QD, dont

Digitized by Google

on attachera un bout à l'autre Foyer F, puis posant la régle fE sur Fo, on étendra le cordeau qui est lâche dans cette situation, en le tirant par un pli de F en S, le long de la régle, & en l'écartant par le bout E, l'autre restant fixe en f, on appuyera sur le pli du cordeau avec un crayon ou une pointe d'outil contre la régle, en le faisant couler vers D, & l'on tracera ainsi l'Hyperbole, comme nous l'avons dit de l'Ellipse & de la Parabole.

DEMONSTRATION.

L'on a cherché une troisiéme proportionelle OG à l'abscisse OS, & à l'ordonnée OD, pour trouver par son moyen le Pammetre SI, car HO = OG: SI:: RO: RS; mais aussi le Parametre est troisiéme proportionelle au premier axe RS, & au second bY, donc en cherchant une moyenne proportionelle ST entre SR & SI = SO, on aura bCY qui lui est égale; or il est démontré dans les sections coniques, que la distance du centre C au point N, milieu de ST est égale à celle de ce centre au Foyer, parce que SN est moyenne proportionelle entre RF & SF, ou ce qui est la même chose entr fS & SF, comme il est évident par la construction; donc les points f & F sont les Foyers; il est aussi démontré que la difference des lignes fD, FD tirées des foyers à un point de l'Hyperbole est égale au premier axe RS; donc l'Hyperbole est décrite par les points S & D, *ce qu'il falloit faire.*

Il est clair que la seconde operation, par un mouvement continu, est precisément la même que la premiere par plusieurs points; puisque l'on y a pris la difference FD du premier axe RS, pour en faire la distance du foyer au crayon D; ce n'est donc que la même chose faite méchaniquement avec un cordeau, au lieu d'un compas.

COROLLAIRE.

Fig. 124. Si les deux axes sont donnez, les foyers se trouvent très-facilement en élevant du point S une perpendiculaire Sd = CD, & tirant Cd qui sera la distance du centre C au foyer F, que l'on transporte en F par un arc dF sur le premier axe prolongé.

Fig. 124. Il faut remarquer que dans l'Architecture où les Cônes sont presque toujours donnez, & le point ou la position du plan de leur section dans le triangle par l'axe du Cône, les deux axes sont aussi toujours donnez; car [*Fig.* 124.] soit ADB le triangle par l'axe, & le plan coupant HSC prolongé; si l'on prolonge aussi le côté BD jusqu'à la rencontre du plan en X, la distance SX est la longueur du premier axe, lequel étant divisé en deux également en C, la ligne CD sera la moitié

du

du second axe; & si par le centre C, on tire deux lignes droites CP & CT, paralleles aux côtez DA, DB, on aura aussi les Asymptotes, dont on peut faire usage pour décrire l'Hyperbole par plusieurs points. Cependant comme il peut arriver que le triangle par l'axe du Cône ne soit pas donné; parce que l'on peut considerer les sections coniques hors du Cône. Nous allons faire voir comment l'on peut trouver les Asymptotes d'une Hyperbole, dont on ne connoît que le centre, le sommet & une ordonnée; de même que dans la proposition precedente, ou seulement un diametre & une ordonnée.

Probleme XII.

Etant donnez le Centre, le Sommet & une Ordonnée à l'Hyperbole, ou seulement un premier Diametre & une Ordonnée, trouver les Asymptotes & la décrire par plusieurs Points.

Soit [*Fig.* 125.] le centre C, le sommet S, & l'ordonnée DO, on aura l'intervale CS pour la moitié d'un diametre, dont le double SP sera le diametre entier, auquel [étant prolongé] la ligne DO est une ordonnée qui lui sera perpendiculaire, si ce diametre est un axe. *Fig.* 125.

Par le point S, on menera AB parallele indéfinie à DO, & par le point donné D, au contour de l'Hyperbole; on tirera la ligne DP qui coupera AB en A; on fera SG égal à AS, & par le point G ayant mené GR parallele à DO, ou AB; on tirera la droite DSR qui coupera GR au point R, la ligne GR sera le Parametre que l'on divisera en deux également en M; on portera la longueur GM de S en *b*, & sur *b*C, comme diametre ayant décrit un demi cercle; on menera SN perpendiculaire à C*b*, laquelle étant moyenne proportionelle entre le demi diametre CS, & le demi Parametre GM = S*b*, sera égale à la moitié du diametre conjugué au premier SP: on portera donc la longueur SN en SB, qui est parallele à DO [par la construction] la ligne menée du centre C par le point B, sera une Asymptote: la même distance portée de l'autre côté vers A donnera aussi le point par où doit passer l'autre Asymptote CE; *ce qu'il falloit premierement trouver.*

Les Asymptotes étant données, il est très facile de trouver autant de points que l'on voudra au contour de l'Hyperbole; car ayant fait O*d* égal à l'ordonnée OD prolongée de part & d'autre vers *r* & *r*, on tirera à volonté les lignes *qr*, Q*r* par les points D & *d*, ensuite portant les longueurs D*r*, *d r* de *q* en I, & Q en *i*; on aura les points *i* & *i* qui sont à l'Hyperbole; on tirera autant de ces lignes Q*r* qu'on voudra trouver de points *i*, & par ces points, & les points D, S, *d*, on tracera

une courbe à la main, ou avec une régle pliante, laquelle donnera le contour de *l'Hyperbole qu'on cherche.*

On voit, comme au Problême précedent, que ſi on a la moitié du diametre conjugué toute l'operation eſt abregée; puiſqu'il ne s'agit que de la porter de S en B, pour avoir le point B de l'Aſymptote qu'on doit mener par le centre C donné.

La démonſtration de ce Problême dépend de quelques proprietez des ſections coniques que nous ne pouvons rappeller ici; on les trouvera dans tous les Traitez des ſections coniques.

La principale eſt que les lignes qui traverſent les Hyperboles d'une Aſymptote à l'autre ſont coupées également par leurs diametres; & parce que les ordonnées DO & *d*O ſont égales, comme dans toutes les ſections coniques, les reſtes D*r*, & *dr*, ſont auſſi égaux; ce qui fait la baſe de l'operation.

USAGE

On rencontre aſſez ſouvent des Hyperboles, lorſqu'il s'agit de faire des voutes ou d'autres corps coniques. La deſcription de cette courbe eſt néceſſaire, 1.° pour faire l'Epure de la Porte en Tour ronde, & en Talud, ſuivant notre méthode; 2.° pour le trait de la Trompe conique à trois Pans; 3.° pour la Trompe en tour ronde érigée ſur une ligne droite; 4.° pour les joins de la Corne de Vache; 5.° pour les naiſſances des arrieres vouſſures bombées; 6.° pour la nouvelle arriere vouſſure de Marſeille; 7.° pour les lunettes ébraſées dans une voute ſphérique; 8.° les arcs rampans dont les piedroits, ſeroient en ſurplomb dans certains cas; 9.° pour les joins montans des arrondiſſemens coniques des angles en talud; 10.° pour la ſolution du Problême qui donne la maniere de tirer les joins de Tête des ceintres Elliptiques ou Hyperboliques par des points donnez hors de ces courbes; 11°. enfin le Problême précedent peut ſervir ſi l'on veut au trait de la courbe de diminution & de renflement des colomnes, au lieu de la Conchoide de Nicomede; l'Hyperbole ſelon moy vaudroit mieux pour la grace du contour, parce que ſi on les diminuoit à la maniere des anciens dès le bas, le fuſt de la colomne auroit plus de grace étant portion d'Hyperboloide que de Cône tronqué; & par la nature de l'Hyperbole la partie inferieure de la colomne auroit le plus grand arrondiſſement qui diminueroit & le redreſſeroit en montant ſous le chapiteau; ce qui auroit une grande analogie avec celui que la nature fait

Digitized by Google

aux Arbres, & par conſéquent une plus grande beauté, qui eſt une plus parfaite imitation de la nature.

On auroit donc pour ſommet le côté de la baſe, pour point à la circonference de l'Hyperbole, & pour ordonnée celui de la diminution ſous l'Aſtragale du chapiteau, & pour le centre la diſtance du Module, ou demi diametre de la colomne à la baſe porté ſur la prolongation de ce diametre hors de la colomne, ce qui tombe dâns le cas du Probléme précedent.

De tout ce que l'on vient de dire, & de pluſieurs autres endroits où nous avons parlé des ſections coniques; on peut conclure que ceux qui diſent comme l'Autheur Moderne de la pratique de la coupe des Pierres, que les ſections coniques n'y ſont pas néceſſaires, n'en connoiſſent pas les uſages.

Scholie.

Par une conſtruction ſemblable à celle de ce Probléme, on peut décrire au dehors ou au dedans d'une ſection conique quelconque une courbe ſemblable, dont il ſuffit d'avoir un ſeul point donné.

Soit, pour exemple [*Fig.* 127.] une Ellipſe donnée PTB, dans laquelle on en veut décrire une ſemblable par un point donné *e*; on tirera à volonté par ce point *e* une ligne 1. 2. qui coupera l'Ellipſe donnée aux points 1. 2. on portera l'intervale *e* 1. de 2. en *f*, le point *f* ſera un ſecond point de l'Ellipſe demandée; lequel ſervira à en trouver un troiſiéme, en menant par *f* une ligne auſſi à volonté *g* 4; on portera l'intervale 3*f*, de 4. en *g*, où ſera un troiſiéme point, lequel ſervira à en trouver un quatriéme *b*, en tirant 5 *g* 6, & portant *g* 5 en 6 *b*, ainſi de ſuite.

Ce que nous diſons ici pour l'Ellipſe convient auſſi à la Parabole & à l'Hyperbole; c'eſt pourquoi M. de La Hire a appellé les Figures ſemblables inſcrites ou circonſcrites à une ſection conique; avec cette proprieté *Aſymptotiques*, en ce que l'une peut être conſiderée à l'égard de l'autre, comme une Aſymptote courbe, j'explique ce nom que j'adopterai quelques-fois pour éviter les périphraſes, parce que j'ay trouvé un grand Mathematicien qui ne le trouvoit pas à ſon gré.

Digitized by Google

PROBLEME XIII.

Par cinq Points donnez qui ne ſoient pas en ligne droite, tracer une Section conique quelconque par un Mouvement continu, ſans en connoître les Axes, les Diametres, les Centres ni les Foyers.

Fig. 126. SOIENT [*Fig.* 126.] les points donnez ABCDE, par leſquels on veut faire paſſer une ſection conique qui ſe trouvera ſuivant leur ſituation une Ellipſe, une Parabole, ou une Hyperbole; dans l'exemple propoſé, ils conviennent à une Ellipſe. Ayant tiré par deux de ces points, comme AB une ligne FG, prolongée au delà des points A & B, on tirera les lignes AC, AB, AE & BC, BD, BE: enſuite on prendra avec deux régles, ou avec l'inſtrument qu'on appelle Sauterelle les angles DAF, DBG, dont on appliquera le côté AD en AC, la branche AF ſe rangera ſur A*x*, de même la branche BD de l'autre angle étant portée en BE, l'autre branche BG ſe rangera en BX; on en fera de même des angles BE*b*, BDI, & l'on aura l'interſection des côtez E*b* avec A*x* au point *x* & *i*, avec BY, au point Y. On tirera la ligne droite *xy*; enſuite ayant fait avec les mêmes Sauterelles ou quatre régles les angles BAD, ABD mobiles ſur les points A & B, comme ſur des pivots, on fera croiſer les deux branches de la Sauterelle tout le long de la ligne droite *xy*, comme par exemple en *k*, les deux autres branches A*g*, B*f* ſe croiſeront en un point comme L, qui ſera à la circonference de la ſection conique; on continuera de même en promenant la croiſée de K tout le long de *xy*; mais lorſque les branches B*f*, AG ſeront au deſſous de B & A du côté de la ligne *xy*, il faudra en prolonger l'alignement par une régle appliqué au long de A*g* ou de BF.

La démonſtration de cette conſtruction eſt un peu trop longue pour lui donner place ici: il ſuffira de dire qu'il eſt démonſtré dans les Traitez des ſections coniques, qu'on peut en faire paſſer pluſieurs differentes par quatre points donnez, mais non pas par cinq; or ſuppoſant (comme il eſt vrai) que ce mouvement organique ne peut produire qu'une courbe du ſecond ordre, ſi les points ſe trouvent diſpoſez pour une Ellipſe; il n'y en aura qu'une qui ſatisfaſſe à la propoſition. On peut voir ſur cela le ſçavant Livre de M. *Mac-Laurin* intitulé *Geometria Organica.*

PROBLEME XV.

Deux Touchantes avec les Points d'attouchement à une Section Conique, & la Direction d'un ſeul Diametre étant donnez, trouver autant de Points que l'on voudra de cette Courbe, ſans connoître le Centre de la Section, ni la grandeur d'aucun Diametre.

Fig. 129. SOIENT les deux touchantes données AD, DB, [*Fig.* 129.] qui

Digitized by Google

touchent la section conique cherchée aux points A & B: soit aussi la ligne AP portion d'un diametre, dont on n'a pas la longueur, mais seulement la position, c'est-à-dire, l'angle DAP, qu'il fait avec la touchante AD: ayant tiré la droite AB d'un point d'attouchement à l'autre, on la divisera en deux également en F, par où on tirera la ligne droite DFC indéfinie, qui sera portion d'un diametre, sur lequel on cherche un point de la Courbe.

On sçait que si la section est une Parabole, cette ligne DC sera parallele à AP, autre position de diametre donnée: si elle doit être une Ellipse, les lignes AP & DC seront convergentes vers C, & si elle doit être une Hyperbole, elles seront divergentes, & concourront hors de la Courbe.

Par le point F, on tirera FG parallele à AP, qui coupera AD au point G, & l'on divisera GD en deux également en I; par le point G, on menera GH perpendiculaire à AD, puis du point I pour centre, & de l'intervale IA pour Rayon; on fera un arc H*h*, qui coupera GH au point H: ensuite on menera A*d* parallele à DC, on fera AK égale, si l'on veut à GH, où l'on en prendra une partie aliquote, comme la moitié, le tiers ou le quart, ou on la fera plus grande, & l'on fera A*d* égal à AD, ou à la même partie aliquote, que AK l'est de GH, & l'on tirera par le point D la ligne *d*E, jusqu'à la rencontre de AB prolongée, s'il le faut, en E, par où on tirera EK qui coupera DC au point *x*, lequel sera un de ceux de la Courbe.

Pour avoir ensuite un autre point de cette Courbe; on menera par le point *x* une ligne *a b* parallele à AB, & l'on fera la même operation sur les lignes A*a*, & *a x*, & B*b*, & *b x* qui seront deux tangentes données, qu'on a fait ci-devant sur les deux AD, DB, & l'on aura deux autres tangentes, dont une sera toujours une partie de AD; & ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait cinq points de la Courbe pour la tracer par un mouvement continu par le Problême XIII. ou que les points trouvez soient multipliez & approchez autant qu'on le souhaite, pour la tracer éxactement à la main ou à la Régle pliante.

Demonstration.

Il est démontré dans les sections coniques qu'un diametre, lequel étant prolongé, passe par la rencontre de deux tangentes, coupe en deux parties égales la ligne qui passe par les deux points d'attouchement; & par conséquent toutes celles qui lui sont paralleles, & par l'inverse que si l'on divise une ligne qui passe par les points d'attouchement de

Voyez la Hi. rel. 2. p. 19.

deux autres, en deux également, & que de leur rencontre, & par le milieu de cette ligne, on en mene une autre prolongée, elle paſſera par le centre de la ſection conique, ſi elle en a un; or par la conſtruction nous avons coupé AB en deux parties égales en F; donc la ligne DFC eſt un diametre.

Nous avons auſſi dit Article 46. que la partie de ce diametre coupée par la ligne AB, qui joint les points d'attouchement, celle qui eſt coupée par la courbe de la ſection, c'eſt-à-dire, le demi diametre de celles qui ont des centres, & l'intervale du centre au concours des deux tangentes ſont continuellement proportionelles; donc ſuppoſant ce centre en C, qui ſera dans cette propoſition (ſi l'on veut) hors de la Figure 129. il ſera toujours vrai que CF: Cx:: Cx: CD & que AP & DC doivent concourir au centre de la ſection, ſi elle en a un; mais parce que on a fait HG moyenne proportionelle entre AG & GD, ſi l'on porte GH en AI: la ligne Ix ſera parallele à AP; comme FG l'eſt à AP (par la conſtruction,) preſentement à cauſe des trois lignes CF, Cx, CD qui ſont en proportion continuë, ou des trois AG, AI, AD; on aura CF: Cx:: Fx: xD, ou:: AG: AI, c'eſt-à-dire:: AK: Ad (par la conſtruction;) donc à cauſe des paralleles Ad & FD, on a Fx: xD:: AK: Kd:: CF: Fx:: Cx: CD; donc le point x eſt à la ſection, puiſqu'il coupe FD, de maniere que Cx eſt une moyenne proportionelle entre CF & CD: *ce qu'il falloit démontrer.*

Nous avons dit que ſi CD eſt parallele à AP, la ſection ſera une Parabole, alors le point G tombera en D, & AI deviendra la même que AD, d'où il ſuit qu'il ſuffit de diviſer FD en deux également en z pour avoir ce point à la Parabole; ce qui ſe trouveroit auſſi par la premiere conſtruction, parce que AK & Kd ſeroient égales, & par conſéquent Fx & xD qui leur ſont paralleles dans le triangle ADE.

Si les lignes DC & AP concourent au dehors, la conſtruction ſera toujours la même, mais renverſée, telle eſt l'Hyperbole à l'égard de l'Ellipſe.

USAGE

Cette propoſition peut ſervir dans l'arrondiſſement des angles des Figures irregulieres, par exemple pour une cage d'Eſcalier dans un angle aigu ou obtus, dont on prend la naiſſance à des points donnez par la convenance du lieu: elle peut auſſi ſervir pour les arcs Rampans, où l'on a trois tangentes & trois points d'attouchement donnez; mais pour ceux-ci, nous donnerons le Problême ſuivant.

Digitized by Google

Problème XIV.

Trois Tangentes à une Section Conique, & leur Point d'attouchement étant donnez, trouver celle des Sections qui doit les toucher, & les Lignes néceſſaires pour la décrire.

Premierement, on peut facilement connoître la nature de la ſection conique demandée par les obſervations ſuivantes.

1.° Si deux de ces tangentes ſont paralleles, comme AS, BO *Fig.* 130. & 131. la ſection ne peut être qu'un cercle ou une Ellipſe; parce qu'il n'y a que ces deux qui rentrent en elles-mêmes. Elle ſera un cercle ſi les tangentes PC, CT ſont égales de même que T*i* & *ir*, & une Ellipſe, ſi elles ſont inégales, comme PE, EF * & RS, ST, &c. *Fig.* 130. & 131. *Fig.* 131.

2.° Si deux de ces tangentes, n'étant pas paralleles, concourent en X *Fig.* 127. du côté oppoſé au troiſiéme point d'attouchement T donné, comme PA, RB, la ſection demandée ſera encore une Ellipſe, par la même raiſon, ou un cercle.

3.° Si les deux tangentes extrêmes AS, BO étant prolongée, concourent du côté du troiſiéme point d'attouchement T donné; & que la tangente moyenne ſoit parallele à la ligne RP *Fig.* 128. qui paſſe par les points d'attouchement P & R des extrêmes, comme SO parallele à RP; il ſera encore facile de connoître qu'elle eſt la Courbe qui ſatisfait à la queſtion. *Fig.* 128.

Ayant diviſé RP en deux également en *m*, on tirera *m*X, qu'on diviſera en deux également en T.

1.° Si la tangente moyenne SO paſſe par ce point T, la courbe demandée ſera une Parabole.

2.° Si cette ligne paſſe au deſſous, comme en EL, elle ſera une Ellipſe.

3.° Si elle paſſe au deſſus du côté de X, comme en *by*, elle ſera une Hyperbole.

4.° * Si la tangente moyenne SO n'eſt pas parallele à RP, qui paſſe par les deux points d'attouchement des extrêmes; on connoîtra encore facilement qu'elle eſt la ſection qui ſatisfait à la propoſition; car ayant prolongé RP & SO, juſqu'à ce qu'elles concourent en Y, il ne s'agit que d'examiner le raport des parties des lignes SY & PX, ſi SY : SO :: XO : OP, la courbe ſera une Parabole, ſi le raport de SY à YO, eſt *Fig.* 132. *Fig.* 132.

Digitized by Google

moindre que celui de XO à OP, elle ſera une Ellipſe, s'il eſt plus grand, elle ſera une Hyperbole.

Fig. 133. *Premiere ſolution pour la Parabole* ayant diviſé RP en deux également en M, & tiré MX qui coupera SO en T; on lui menera par les points P & R, les paralleles PQ, RV juſqu'à la rencontre de SO prolongée, qui les coupera aux points V & Q; on diviſera enſuite les lignes TX, PQ, RV en un même nombre de parties égales, par exemple ici en trois, à commencer le compte des diviſions vers la ligne SO; les lignes menées par les points correſpondans 1. & 1. 2. & 2. ſe couperont en des points *y* & *z*, Y & Z qui ſeront à la circonference de la Parabole; ainſi menant une ligne à la main, ou avec une Régle pliante par les points R*z*y T Y*z* P; on aura le contour de la ſection qui touche les trois lignes données.

Seconde ſolution pour l'Ellipſe & l'Hyperbole, par les points d'attouchement donnez RTP, ayant tiré les lignes RT, PT [*Fig.* 134.] on les
Fig. 134. 135. diviſera en deux également en N & *n* par où, & par les points S & O, on menera les lignes NS, *no*, leſquelles étant prolongées, ſe couperont au point C, où ſera le centre de la ſection, par le moyen duquel on a déja un diametre en portant CT en C*t* ſur la même ligne prolongée; ainſi la queſtion ſera réduite à celle-ci: *un diametre & une ordonnée à ce diametre étant donnée, trouver ſon Parametre, & autant de points que l'on voudra de la ſection.*

PAR les points P & *t* ayant mené VP*t*, qui coupera SO prolongée en V; on portera VT en TD ſur le diametre T*t* prolongé [*Fig.* 134.] & ſur la prolongation, on menera D 3. parallele à SO, qui ſera terminée au point 3. par la droite PT 3. par ce point, on menera 3. Q parallele & égale à DT, & l'on diviſera les longueurs 3. Q & TV en même nombre de parties égales, par leſquelles & par le point T, on menera les lignes 1T*y*, 2T*z*, & du point *t* par les diviſions de TV, les droites *ty*, *tz*, qui couperont les précedentes aux points *y* & *z*, & qu'ils feront à la circonference de l'Ellipſe *Fig.* 134. ou de l'Hyperbole *Fig.* 135. ſi par les points *y* & *z*, on mene des paralleles *yf*, *zf* à SO, qui couperont le diametre T*t*, *Fig.* 134. ou ſa prolongation *Fig.* 135. en *e* & *g*, & qu'on faſſe *ef* = *ey*, *gf* = *g*P, on aura les points *t*, *f* & *f* correſpondans à ceux de l'autre côté de la courbe; & on pourra la tracer à la main, ou avec une Régle pliante; *ce qu'il falloit faire.*

DEMONSTRATION.

Premierement, pour l'invention du centre de la ſection. Puiſque les lignes RT & TP qui joignent les points d'attouchement ſont diviſées en deux également

également en N & n, & que les lignes NS & nO passent par la rencontre * des tangentes; elles sont dans la direction des diametres, par conséquent chacune d'elles passera par le centre qui sera au point C qui leur est commun, & le point T étant à la circonference, la ligne menée par CT sera encore un diametre égal à 2. CT = Tt, par la construction; & parce que SO tangente passe par T, toute ligne comme gP qui lui sera parallele, sera une ordonnée à ce diametre; par le moyen de laquelle on a trouvé son Parametre, qui doit être une troisiéme proportionelle au premier Tt, & au second inconnu, qu'on suppose ici pour la facilité de la démonstration égal EI, *Fig.* 134.

Art. 56. *Voyez la Hire l. 2. p. 19. L'Hopital* Art. 20.

Ayant mené tI jusqu'en SO prolongée en u, & ayant fait comme dans la construction TW = Tu, W4, parallele à SO, & tiré T4, la ligne W4. sera le Parametre du diametre tT; car si l'on appelle tT $2a$, CI b, Tu, d, 4W, x; à cause des triangles semblables Ttu, CtI, on aura $2a$: d:: a: b, & à cause de TW = Tu, & des triangles semblables T4W, TIC, on aura a: d:: b: x, donc en multipliant ces deux analogies, on aura $2aa$: dd:: ab: bx, & $2aabx = ddab$, & retranchant de part & d'autre ab: on aura $2ax = dd$, c'est-à-dire, que le rectangle de $2a$ = Tt par x = 4W, sera égal au quarré de dd = 2CI = EI, donc 4W est le Parametre qui est égal pour toutes les Ordonnées gP, ez, ey au diametre Tt, auquel il est troisiéme proportionelle; *ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire.

Dela on tire la maniere de connoître quelle est la section qui convient aux trois tangentes données; car si les lignes qui passent par les rencontres des tangentes, & les milieux des lignes qui joignent les points d'attouchement, concourent en dedans, comme à la Figure 134. la section est une Ellipse, si elles concourent en dehors, *Fig.* 135. c'est une Hyperbole, & si elles ne concourent point, qu'elles soient paralleles, c'est une Parabole, *Fig.* 133.

Digitized by Google

CHAPITRE III.

De la Deſcription de quelques Courbes Uſuelles dans l'Architecture.

Leſquelles ne ſont pas des Sections Coniques.

PROBLEME XVI.

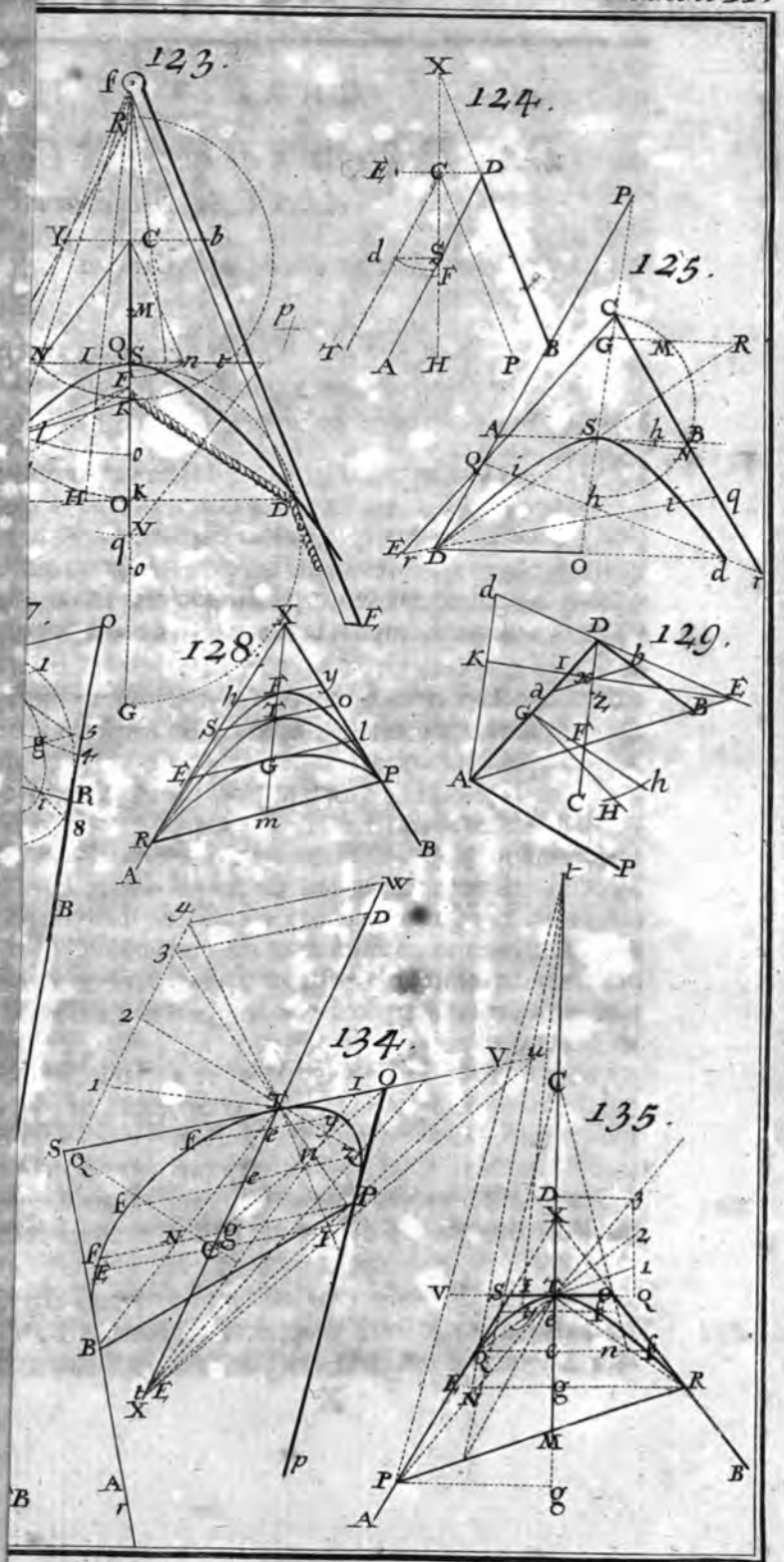
Tracer une Ovale du quatriéme Ordre formée par la Section plane d'un Corps Cylindrique, Annulaire, Horiſontal ou Rampant, c'eſt-à-dire, Helicoide.

Pl. 13. *Fig.* 149. SOIT [planche 13. *Fig.* 149.] la moitié d'un corps Cylindrique, Annulaire *i*DIGF*gi*, dont les côtez *i*DI exterieur, & *g*FG interieur, ſont des cercles Concentriques au centre C, & dont l'axe courbe eſt dans le même plan que ces deux cercles. Soit un autre plan perpendiculaire à celui-ci qui coupe le corps Annulaire, ſuivant la ligne AB; il faut décrire la courbe formée à la ſurface de ce corps par la ſection du plan.

Sur *ig* diametre du corps Cylindrique ayant fait le demi cercle *ibg*, qui repreſente la moitié de ſa baſe; on diviſera ce diametre *ig* en autant de parties que l'on voudra avoir de points de la courbe pour ſa moitié, juſqu'à une ligne CD, qui ſera priſe pour Rayon du cercle exterieur, & perpendiculairement ſur *i*I; par les points de diviſion 1, 2, 3, 4, on fera du même point C pour centre autant d'arcs concentriques, prenant ſucceſſivement pour Rayons de ces arcs C1, C2, C3, C4, & terminant ces arcs à la ligne AB, par où paſſe le plan coupant, aux points KLM, par leſquels on élevera autant de perpendiculaires indéfinies ſur AB, & pour en déterminer la hauteur, on élevera de même ſur le diametre *ig* autant de perpendiculaires par les points 1, 2, 3, 4, leſquelles couperont le demi cercle *ihg* aux points *s*, *t*, *h*, *u*, *x*; enſuite portant les longueurs 1*s* en K*k*, 2*t* en L*l*, 3*u* en M*m*, & 4*x* en EÆ; on aura les points *klm*Æ, par leſquels on fera paſſer une courbe tracée à la main, ou avec une Régle pliante. On portera les Ordonnées correſpondantes de l'autre côté de CD en N*n*, O*o*, P*p*, & on aura tout un côté de cette Ovale depuis ſon axe AB, auquel l'autre ſera égal; ſi on a beſoin de le tracer; ce que nous n'avons pas fait dans cette Figure pour ne la rendre pas trop confuſe.

A l'égard du milieu où eſt le plus grand abaiſſement de l'inflexion; il ſera trouvé par l'arc tangent à la ligne AB qui eſt ici 4E, & ſa hauteur 4*x* portée en EÆ.

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

Corollaire I.

Si le Plan coupant approche plus près du point F que la ligne AB, l'infléxion au milieu ſera plus grande ; de ſorte que ſi le plan coupant paſſe par F, au point d'attouchement du cercle *g*F G, qui eſt le côté interieur de l'Anneau, la courbe ſe diviſe en deux, & le point Æ tombe ſur le point F ; parce que le point *g* correſpondant de la baſe *ihg* eſt dans le même plan que le point F, par conſéquent l'ordonnée E Æ ſe réduit à rien. Si au contraire le plan coupant AB, toujours perpendiculaire à CD, paſſe par le point T milieu de FD, l'infléxion de la Courbe ceſſera vers ſon milieu où elle ſera très peu courbe, & preſque droite ; & au contraire à meſure que le plan AB s'aprochera de D, toujours perpendiculairement à CD, la courbe deviendra de plus en plus courbe vers ſon milieu, & reſemblera fort à une Ellipſe, ce que l'on peut facilement concevoir par la tranſpoſition des ordonnées 1*t*, 2*t*, *ch*, qui vont en s'élevant, & qui ſe rapprochent à meſure que le plan coupant s'approche de D : & parce que l'ordonnée 4*x* qui s'abaiſſe à l'égard de *ch* n'a plus lieu, lorſque le plan coupant paſſe en T, ou au delà vers D, de même que l'ordonnée 3*u* n'a plus lieu, lorſque le plan coupant AB eſt plus près de D que le point 3. de la baſe *ihg*, n'eſt éloignée du point *i* ; & ainſi des autres.

Corollaire II.

Il eſt évident que ſi le corps Annulaire eſt fort épais à l'égard du vuide de ſon milieu *g*F G, la ſection ſera plus ſenſiblement pliée dans la partie interieure, c'eſt-à-dire, quand la ſection ſe fait au dedans de T, & plus arondie au delà.

A l'égard de la ſeconde partie de ce Problême qui concerne la Coubre faite par la ſection d'un corps Annulaire, dont l'axe n'eſt pas dans un même plan, mais élevé en Helice tournant autour d'un axe, comme le Lierre autour d'un arbre ; nous avons dit qu'elle étoit la même que la précedente, avec cette ſeule difference que ſes Ordonnées K*k*, L*l*, M*m* ſous la Figure 149. ne font pas un angle Droit avec leur axe a*b*, mais un angle aigu a K*k*, a L*l*, &c. leſquelles cependant ſeront toujours paralleles entr'elles, & inclinées à leur axe ſuivant le même angle.

Ainsi pour tracer la Courbe du corps Cylindrique, Helicloide coupé par un plan parallele à l'axe de l'Helice ; on commencera par tracer la ſection d'un corps Annulaire, Horiſontal, de même demi diametre de revolution CD, & de même diametre de baſe *ig* : enſuite ayant fait une ligne *ab*, qui repreſente la ſection du plan vertical AB, avec l'Horiſontal *ab* on élevera au point *a*, une ligne *a*a perpendiculaire à *ab*, & d'une

Digitized by Google

longueur *a*a, qui ſera déterminée par l'élevation de l'Helice ſur l'Horiſon au point où le plan vertical coupe le côté exterieur montant du corps cylindrique, helicoide ; & de ce point a d'hauteur donnée, on tirera la ligne a*b* inclinée, qui ſera l'axe de la ſection qu'on cherche ; il ne s'agit donc plus que de diviſer cet axe en même raiſon que l'axe AB du corps Annulaire eſt diviſé, pour cela il n'y a qu'à en tranſporter les diviſions des abſciſſes ſur l'horiſontale *ab*, ou (ſi on les met ſur le même axe ED, en ſorte que AB ſoit parallele à *ab*,) on ne fera qu'abaiſſer des paralleles à ED, par les diviſions KLME, &c. leſquelles couperont l'axe incliné a*b*, en des points KLM*e*, &c. ſur leſquels on portera les Ordonnées de la baſe *ibg*, aux points correſpondans aux nombres 1, 2, 3, 4, comme l'on a fait ci-devant, & comme la Figure 149. le fait voir très ſenſiblement.

La ſeconde difference qu'il y a de cette Courbe à celle du corps Annulaire, eſt qu'elle n'eſt pas uniforme à chaque moitié, le long de ſon axe a*b*, à cauſe de l'obliquité de ſes Ordonnées ; elle eſt plus arondie vers a du côté de l'angle aigu, que vers *b* du côté de l'angle obtus, la raiſon en eſt claire ; car quoique toutes ces Ordonnées ſoient paralleles, les diſtances de leurs ſommets ne ſont pas égales ; car ſi l'on tire des lignes droites des points a & *b*, aux points *k* & P, quoique les côtez aK & p*b* ſoient égaux, de même que K*k* & P*p* ; il eſt évident par la Geometrie Elementaire que dans les triangles *pb*P, a*k*K, qui ont deux côtez égaux qui comprennent des angles differents, la baſe opoſée à l'angle obtus, ſera plus grande que celle de l'angle aigu.

Demonstration.

Si l'on ſuppoſe un plan paſſant par l'axe du corps Annulaire, Cylindrique, & ſur ce plan pluſieurs Cylindres d'inégale grandeur, mais concentriques au centre C, & dont l'axe commun ſoit perpendiculaire au même plan *i*DIC ; les ſections de leurs ſurfaces coupées par ce plan feront autant de cercles Concentriques ; & ſi l'on ſuppoſe un ſecond plan AÆB perpendiculaire au premier, & coupant le corps Annulaire & les Cylindres, il fera dans chaque Cylindre un parallelograme, dont les côtez ſeront perpendiculaires au plan *i*DIC, comme K*k*, L*l*, M*m*, &c. & chacun de ces côtez aura une partie commune à l'Ordonnée du cercle, qui ſeroit fait par la ſection C*i*, CK, ou CD, d'un troiſiéme plan coupant le corps Cylindrique, perpendiculairement à celui qui paſſe par ſon axe courbe, par le centre C, & l'origine de chaque Ordonnée K, L, M, E, &c. comme C*y*, lequel feroit pour ſection un demi cercle égal à *ibg*, que nous prenons pour baſe de ce corps ; donc tous les points *klm*Æ, &c. ſont au contour de la Courbe, *ce qu'il falloit faire.*

Digitized by Google

Nous avons dit au Livre I. de quel uſage étoit cette courbe dans les voutes ſur le Noyau & la vis St. Giles ; on en verra l'application au Trait de ces voutes au Livre IV. voilà à peu près toutes les ſections des corps, dont nous devons connoître les Courbes.

De la Spirale.

Quoique la ſpirale ne ſoit pas une ſection de ces Corps réguliers, qui ſont le principal objet de notre Stereotomie ; elle eſt cependant une ſection de ceux que la nature produit, & que l'Architecture imite en pluſieurs rencontres, tels ſont certains coquillages, & quelques cornes d'Animaux : par cette raiſon nous avons cru devoir lui donner place dans la deſcription des Courbes uſuelles, pour la conſtruction, & la décoration des Edifices.

Il n'y a pas de courbe dans la Geometrie qui puiſſe être ſujette à plus de varieté que la ſpirale ; M. Varignon dans un Memoire inſeré dans ceux de l'Academie des Sciences en a fait voir differentes generations, qui peuvent être pouſſées à l'infini, nous qui n'en voulons qu'à la pratique, nous nous contenterons d'en donner les premiers Principes.

Probleme XVII.

Tracer la Spirale la plus ſimple & la plus uniforme, qu'on appelle la Spirale d'Archimede. Plan. 12.

Du centre C, [*Fig.* 136.] & de l'intervale C A pour Rayon pris à volonté pour celui d'une revolution entiere de la ſpirale ; ayant décrit un cercle A 3, 6, 9 A, on en diviſera la circonference en autant de parties qu'on voudra avoir de points au contour de la ſpirale : on la diviſe commodement en 12. comme dans cette Figure ; parce qu'en portant ſix fois le Rayon à la circonference du cercle, on n'a plus qu'à diviſer en deux chaque ſixiéme, & tirer les diametres A 6, 9, 3, &c. on peut multiplier cette diviſion autant que l'on voudra, pour avoir la courbe plus exactement. Enſuite on diviſera le Rayon CA en autant de parties qu'on a diviſé la circonference, pour trouver par leur moyen ſur chaque differente poſition du Rayon A C, la longueur du Rayon de la courbe, laquelle partant du point A, s'approche continuellement de ſon centre C ; ou ce qui eſt encore mieux, ſi l'on veut la conſiderer autrement, partant du centre C, s'en écarte continuellement, en tournant autour de ce centre à l'infini, ſi l'on veut. *Fig.* 136.

Du centre C, & pour Rayon l'intervale C 1, partie de C A ; on décri-

ra l'arc 1 *a*, lequel coupant le Rayon C *a* 1, de la premiere diviſion de la circonference A 1, donnera le point *a* au contour de la ſpirale; enſuite du même centre, & d'un intervale plus petit d'une diviſion C 2; on décrira entre les Rayons C *a* 1, C *b* 2, l'arc 2 *b*, qui donnera le point *b* ſur le Rayon C *b* 2. On continuera de même pour trouver les autres points *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, &c. en diminuant toujours le Rayon d'une douziéme partie, juſqu'à ce qu'on ait parcouru toute la valeur du cercle A 3 *b* 9 A, & alors on aura une revolution entiere de la ſpirale, qui revient au Rayon AC, d'où elle étoit partie.

Le cercle qui enferme la premiere revolution s'appelle *Cercle circonſcript*, & celui qui répond à pluſieurs, ou qui eſt au dehors ou au dedans du point A s'appelle *Cercle de revolution*, & les arcs 1 *a*, 2 *b*, 3 *c*, *Arcs de revolution.*

Corollaire I.

Il ſuit par cette géneration que les parties du Rayon AC, ſont eſſentiellement proportionelles aux arcs de revolution, ou ce qui eſt la même choſe, à ceux du cercle circonſcript; de ſorte que ſi le Rayon AC en parcourt la 24.e ou 36.e partie, ce Rayon diminuera ou augmentera pour chaque arc de revolution d'une 24.e ou 36.e partie, &c.

Corollaire II.

Il ſuit encore que lorſqu'on veut avoir plus d'une revolution, par exemple, une & demi, ou deux & un quart; il faut diviſer le Rayon AC, que nous ſuppoſons toujours pris à volonté, en un nombre de parties convenables à ce deſſein, par exemple pour une & demi, dans la ſuppoſition de la diviſion de celle du cercle en douze; on diviſera le Rayon en dix-huit parties, & pour deux & un quart en vingt-ſept, & alors on aura plus d'un point de la ſpirale ſur chaque Rayon du cercle de revolution; on tracera enfin d'un point à un autre, une ligne courbe à la main, ou avec une Régle pliante; & l'on aura la ſpirale qu'on demande, ſi on la veut réguliere; mais parce qu'on veut quelques fois en alonger ou racourcir le contour, ſuivant les differents effets qu'on ſe propoſe; nous dirons comment on peut le varier.

Corollaire III.

Si après avoir tracé une ſpirale comme en A *cfi* C, du côté droit, on retrace la même tournée du côté gauche, comme la ponctuée A *kfl* C, qui croiſe la précedente en *f*, partant de la même origine A, & aboutiſſant au même centre C; il ſe formera un entrelas, dont le milieu à

Digitized by Google

la figure d'un cœur C *ifl* C, qui peut ſervir aux ornemens des grilles de fer contourné, & autres Ouvrages de pareille nature, qui ont été fort à la mode dans les Roſes des vitraux de l'Architecture Gotique.

Problème XVIII.

Alonger ou racourcir le contour de la Spirale, en telle Raiſon que l'on voudra.

L'on peut réſoudre ce Problême d'une infinité de manieres; car on peut faire les Rayons des arcs de revolution dans le rapport des Ordonnées de telles abſciſſes de courbe que l'on voudra choiſir, & les arcs de revolution dans le rapport de leurs Ordonnées; ce qui rend ce Problême très general. On peut auſſi, ſans varier les arcs de revolution les faire tous d'un nombre égal de Degrez, & varier ſeulement les Rayons de ces arcs en telle raiſon que l'on voudra, comme dans celle des tangentes, ou des ſecantes, ou des Puiſſances, cõmme des Racines, des Quarrez, des Cubes, &c. les Architectes ſe ſervent dans leur volute Ionique, du rapport des tangentes: j'en vais donner un exemple, où l'on peut augmenter l'inégalité des diviſions en élevant le Rayon à diviſer A C, *Fig.* 137. au deſſus du point P, où eſt l'angle Droit du ſinus total R P, par exemple en C: *Fig.* 138.

Soit donc le rayon donné A C, pour le plus grand de la ſpirale 137. dont on veut que le contour ſe reſerre plus que la ſpirale réguliere, à meſure qu'elle approche du centre C, & à laquelle on veut faire faire deux revolutions: ayant tranſporté ce rayon en a C, *Fig.* 138. & ayant pris à volonté le point R, en ſorte qu'ayant mené à ce point une ligne C R, elle faſſe avec a C, un angle obtus a *c* R, on tirera a R, & du point R pour centre & pour Rayon R C; on fera l'arc C D qui coupera D R au point D; on diviſera cet arc en vingt-quatre parties pour deux revolutions, & par chaque diviſion, & par le centre R, on tirera autant de lignes juſqu'à la rencontre de a C, qui donneront vingt-quatre diviſions inégales, diminuant vers le point C; on portera ces diviſions ſur le Rayon A C, [*Fig.* 137.] où l'on les marquera par des chiffres, pour éviter la confuſion, & on operera ſur ce Rayon de la même maniere qu'au Problême précedent; ce qui donnera une ſpirale, telle qu'on la voit à la Figure 137. *Fig.* 137, 138.

Corollaire.

Dela on tire la maniere de faire une ſpirale dans une autre, pour lui ſervir de compagne, qui forme avec elle une côte élevée, ou un creuſé en canal, comme aux volutes des Chapiteaux des colomnes de certains

Digitized by Google

ordres d'Architecture ; en ſorte qu'elles ſe reſſerrent plus ou moins au gré de l'Architecte ; quoique partant ſi l'on veut d'un même point D, elles viennent aboutir au même centre C par differents chemins, ainſi la ſpirale D*i*K *lmn*C ſe rapproche plus de ſa compagne A 3 6 9 12 C que la ſpirale DEFGHC, quoique l'une & l'autre partent du même point D, & arrivent au même centre C.

Fig. 139. Soit [*Fig.* 139.] la ligne A 12, égale à la diſtance donnée de la premiere revolution à la ſeconde, & dans cet intervale un point D à volonté pris pour la naiſſance de la ſpirale interieure, que l'on placera auſſi ſur le Rayon AC de la Fig. 137. on fera 12 S perpendiculaire & égale à 12 A, puis on tirera SD & SA : ſur s 12, on portera tous les intervales de la premiere ſpirale pris ſur les Rayons tirez du centre C : C 2, C 4, C 6, &c. par exemple 15 3 de S en 3 à la Fig. 139. 18. 6 de s en 6, ainſi du reſte ; & par les points 3, 6, 9, &c. ayant mené des paralleles à A 12 qui couperont SD aux points *efgh*, on aura les longueurs *e* 3, *f* 6, *g* 9, *h* 12 qui donneront ſur les mêmes Rayons du cercle de revolution A 6 12 18 A les points E, F, G, H, des diminutions des Rayons pour la ſpirale interieure ou compagne de la premiere A 3 6 9 12 &c. D'où il ſuit qu'en élevant ou abaiſſant le point D, on change le contour de la ſpirale : preſentement ſi aulieu de la droite SD, on avoit fait un arc de cercle ou S*c*D, S*b*D, on auroit eu une compagne de la ſpirale, qui auroit commencé & fini au même point que la précedente, mais qui n'auroit pas ſuivi la diſtance proportionnelle triangulaire.

On peut non ſeulement changer les longueurs des Rayons, mais encore le rapport des arcs de revolution ; ce qui peut fournir le moyen de faire une infinité de ſpirales, toujours differentes ; car on peut faire ce rapport égal à celui des Ordonnées d'une courbe quelconque Geometrique ou Mechanique, comme l'a imaginé M. Varignon, qui nous a ouvert le chemin à des variations infinies de ſpirales, où il s'en trouve d'un contour très agreable : je vais donner un exemple de celles qu'il appelle *Paraboliques verticocentrales*, c'eſt-à-dire, qui ont leur ſommet au centre de la ſpirale, choiſſant la plus ſimple, qui eſt celle qu'on tire du cercle ; il ſera aiſé d'en faire l'application à l'Ellipſe, aux autres ſections coniques, ou à telle courbe qu'on voudra.

Spirale, Circulaire ou Elliptique ou Parabolique, &c.

Soit *Fig.* 140. la ligne AX priſe pour l'axe d'une ſpirale, dont la courbe Generatrice eſt un quart de cercle CLR : ſoit AC, le plus grand Rayon de la ſpirale, & le point C pour ſon centre, la ligne AC ſera priſe pour l'axe de la courbe qu'on choiſit pour *Generatrice*, lorſqu'elle eſt ici un cercle,

Digitized by Google

cercle, dont elle ſera le rayon, & le point A le centre: l'axe de la ſpirale AX, ſon centre C, & la courbe Generatrice C6R étant donnez, on ſe déterminera au nombre de revolutions, qu'on veut qu'elle faſſe, & l'on prendra une ligne conſtante ST, qui ſoit contenuë dans la plus grande Ordonnée RA de la courbe Generatrice RLC, autant de fois que l'on veut de revolutions completes ou incompletes: nous la ſuppoſerons dans cet exemple contenuë deux fois & demi dans RA, pour avoir deux tours & demi de la ſpirale; enſuite il faudra toujours faire cette analogie.

Comme la ligne conſtante ST,

Est à l'Ordonnée variable de la courbe Generatrice.

Ainsi le cercle de revolution 12 9, 6, 3,

Sera à l'arc de revolution, au premier tour, ou au cercle de revolution, plus à un arc de ſeconde revolution donné.

A l'arc de revolution cherché;

Si la courbe Generatrice eſt une Ellipſe, une Parabole, ou une Hyperbole, &c. la ſpirale s'appellera *Elliptique*, *Parabolique ou Hyperbolique*, *&c.*

Pour s'épargner le calcul de cette analogie; on diviſera la ligne donnée ST en autant de parties égales qu'on voudra, pour ſervir d'échelle propre à connoître le rapport de cette conſtante avec les Ordonnées du cercle tirées par des points de l'axe AC, qui ſeront pris pour les termes des Rayons des arcs de revolution, comme C1ª, C2ª, C3ª, C4ª, &c. leſquels termes ſeront auſſi ceux des abſciſſes de cet axe AX; ſuppoſant, dans cet exemple, la ligne ST diviſée en 12. & le cercle de revolution 12, 9, 6, 3, auſſi en 12, ou ſi l'on veut en 360. degrez, dont 30. répondront à une diviſion de ST; on diviſera l'Ordonnée AR en 30. parties égales pour deux revolutions & demi, & par ces diviſions *bcde*F, &c. on menera des perpendiculaires à l'Ordonnée AR, ou ce qui eſt la même choſe des paralleles à l'axe AC, qui couperont la courbe Generatrice ALC aux points 1, 2, 3, 4, 5, 6, par leſquels on menera des perpendiculaires à l'axe AC, qu'elles couperont aux points 1ª, 2ª, 3ª, 4ª, 5ª, 6ª, enſuite par chacun de ces points, & du point C pour centre; on décrira des arcs de revolution proportionez à la partie de la conſtante ST, par exemple, pour la premiere, l'arc 1ª, 1ʳ de 30. degrez; 2ª, 2ʳ, de 60. degrez; 3ª, 3ʳ, de 90. degrez; 4ª, 4ʳ, de 120. degrez, & ainſi de ſuite: ce qui ſe fait facilement en diviſant le cercle en 12. & augmentant d'une douziéme de ſa circonference à la rencontre du Rayon, auquel elle doit ſe terminer; comme on le voit dans la Figure aux points 1ʳ, 2ʳ, 3ʳ, 4ʳ, 5ʳ, &c. par tous

Digitized by Google

ces points trouvez, on tracera une courbe à la main, ou avec une régle pliante, & l'on aura une ſpirale, telle qu'on ſe la propoſe pour le nombre des revolutions: nous donnerons même le moyen de fixer les intervales des revolutions, comme on le jugera à propos.

Nous ferons remarquer auparavant qu'on peut trouver les Rayons des arcs de revolution d'une autre maniere; on tranſportera les diviſions de la ligne ST ſur C*r*, perpendiculaire à CA, par exemple en 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, d'où tirant des paralleles à CA, qui couperont la courbe Generatrice aux points *f g b i k l m*; on aura des longueurs 6*f*, 7*g*, 8*b*, 9*i*, 11 *k*, 10 *l*, 12 *m*, qui ſeront celles des abſciſſes, qu'on doit prendre pour Rayons des arcs de la ſeconde revolution BDSV, prenant celle-ci pour exemple en partie ſeulement; ainſi *c u* ſera égal à CV, 90*s*, à CS & CD à 60*d*, &c. & ſans prendre la peine de faire des arcs de revolution; il ne s'agit que de porter ces parties ſur les Rayons qui leur conviennent, c'eſt-à-dire, les correſpondans au nombre des diviſions de la conſtante, plus ou moins une, ou pluſieurs revolutions, comme L3′ ſur CA, *l*3 ſur C11′, *k*10 ſur C10′, *i*9 ſur C9′, *b*8 ſur C8′, &c.

COROLLAIRE I.

D'où l'on tire le moyen de *fixer la premiere revolution de la ſpirale, à telle diſtance que l'on veut du centre C, ſur l'axe AC*: car ſi l'on veut, par exemple, qu'elle commence en B, on menera par ce point B la ligne BL perpendiculaire à l'axe AC, juſqu'à ce qu'elle rencontre la courbe Generatrice en L, par où menant LS parallele à l'axe AC, qui coupera l'ordonnée RA au point S, la diſtance SR ſera la longueur de la ligne conſtante qui eſt ici égale à ST, laquelle a toujours un certain rapport avec la circonference du cercle de revolution 12, 3, 6, 9; mais ce point B étant une fois déterminé, on n'eſt plus le Maître de changer les autres revolutions; elles ſe trouvent réglées par le rapport des parties de la conſtante SR trouvée avec les arcs de revolutions.

COROLLAIRE II.

L'INVERSE du Corollaire précedent eſt claire à la ſeule inſpection de la Figure; car ſi l'on veut connoître à quel point de l'axe AC ſe terminera la premiere revolution; il n'y a qu'à tirer par le point S, extremité de la conſtante ST, poſée de R en S, une ligne SL parallele à l'axe, juſqu'à ce qu'elle coupe la courbe Generatrice en L, & par ce point L, mener la perpendiculaire LB au même axe, laquelle donnera le point B que l'on cherche: ſi la ligne ST eſt contenuë pluſieurs fois dans AC, on trouvera de même tous les points de revolution ſur l'axe.

Digitized by Google

Corollaire III.

Il ſuit naturellement de cette conſtruction : 1.° Que ſi au lieu du cercle, on avoit prit un quart d'Ellipſe pour courbe Generatrice, & qu'on eut mis à la place de RA, la moitié de ſon grand ou de ſon petit axe; on auroit alongé ou reſſerré la ſpirale: 2.° Que plus la ligne ST ſera contenuë de fois dans AR, plus la ſpirale ſera arondie, & au contraire; par où l'on voit que cette conſtruction, indépendamment du changement qui provient de la courbe Generatrice, qu'on peut choiſir, donne une grande facilité de ſe contenter ſur ſon contour plus ou moins redoublé: au lieu de poſer le ſommet de la courbe Generatrice au centre de la ſpirale; on peut la mettre dans une ſituation differente; mais alors la ſpirale qui en reſultera, ne ſera plus du nombre de celles qu'on appelle *Vertico-Centrales*, dont nous parlons: je vais donner un exemple d'un autre eſpece que M. Varignon appelle *Cocentrales*.

Soit [*Fig.* 141.] la courbe HYP, une Hyperbole Equilatere, dont AC & C 24 ſont les Aſymptotes, leſquelles ſont un angle Droit en C, où je poſe le centre de la ſpirale; & par conſéquent celui du cercle de revolution DEFG, que je fais d'une ouverture de compas priſe à volonté, & dont je diviſe la circonference en tel nombre de partie que je veux avoir de points de la ſpirale à chaque revolution, par exemple en douze; enſuite ayant pris auſſi à volonté une ligne conſtante, par exemple CG, je la diviſe auſſi en douze parties égales, c'eſt-à-dire, en un même nombre que la circonference du cercle de revolution, & par chacune de ſes parties, je mene des paralleles à une des Aſymptotes AC, que je prends pour l'axe AX de la ſpirale; & parce que cette premiere parallele rencontre l'Hyperbole hors de cet axe en H; je commence auſſi ma ſpirale au point 1*r*, éloigné de l'axe AX d'une douziéme partie de la revolution A1*r* du point 2. où la ſeconde diviſion de la conſtante CG, donne le point 2. je fais un arc 2, 2*r* de deux douziémes de la revolution, qui me donne le point 2*r*, & ainſi de ſuite, comme aux ſpirales Paraboliques, Verticocentrales; mais enfin parce que l'Hyperbole HYP, ne parvient jamais à ſon Aſymptote CG, cette ſpirale ne fera que tourner autour du centre C, dont elle approchera toujours à chaque revolution, ſans pouvoir jamais y arriver.

Je ne m'arrêterai pas aux differences des poſitions des courbes Generatrices, qui croiſent l'axe de la ſpirale; je dirai ſeulement qu'alors, il ſe forme deux ſpirales, une d'un côté, l'autre de l'autre de cet axe, leſquelles ſont égales & tournées en ſens contraire, comme nous l'avons dit de la ſpirale d'Archimede [*Fig.* 136.] ſi les deux parties de la courbe Generatrice ſont égales; mais ſi elles ſont inégales, il eſt clair que la Figu-

Digitized by Google

re de Cœur qui en reſulte deviendra irréguliere; un côté étant plus ou moins enflé que l'autre; ce qui n'eſt d'aucun uſage pour les ornemens d'Architecture: c'eſt pourquoi je paſſe ſur les varietez infinies qui en peuvent réſulter; les exemples que je viens de donner, étant ſuffiſans pour exercer les Architectes & les Artiſtes qui ont des ornemens à tracer dans des agreables variations de contour de ſpirales.

J'AVERTIRAY ſeulement; 1.o que ſi la courbe Generatrice ſe ferme du côté de l'axe de la ſpirale, comme ſi l'on prenoit un demi cercle, ou une demie-Ellipſe, au lieu de leur quart; la ſpirale ne continueroit pas à tourner du même ſens, depuis la plus grande Ordonnée; mais elle ſe rebrouſſeroit & reviendroit en quelques façons ſur ſes pas, ayant ſa concavité tournée du même côté.

2.o QUE ſi l'on prend pour courbe Generatrice, une Hyperbole équilatere, cocentrique, c'eſt-à-dire, dont le centre ſoit le même que celui de la ſpirale; celle qui en ſera engendrée, n'aura ni commencement ni fin; c'eſt-à-dire, qu'elle commencera à une diſtance infinie de ſon centre, & n'arrivera jamais à ce centre; & cependant que lui donnant un commencement, elle coupera ſon axe après la premiere revolution; ce qui eſt une ſuite des proprietez des Aſymptotes, qui approchent à l'infini de l'Hyperbole, ſans pouvoir y arriver, comme nous venons de le dire.

3.o QUE ſi l'on prend pour courbe Generatrice une courbe Logarithmique, au lieu de l'Hyperbole, la ſpirale qui en ſera engendrée, aura un commencement, & n'aura point de fin, où ſi elle a une fin, elle n'aura point de commencement; ſelon que l'on mettra ſon Aſymptote ſur l'axe, ou perpendiculairement à l'axe de la ſpirale.

ON peut faire la même choſe par le moyen de l'Hyperbole, en mettant le centre de la ſpirale non au centre de l'Hyperbole; mais ſur une de ſes Aſymptotes à quelque diſtance de ce centre; ce qui fournit un moyen très commode pour tracer une infinité de volutes, qu'on peut faire venir d'un point éloigné du centre & de l'axe, & les faire finir au milieu par un *Oeil* circulaire, comme font les Architectes à la volute Ionique; parce que l'on peut ſauver plus délicatement le jarret qui ſe fait à la jonction de la ſpirale & de cet *œil*, ſi elle eſt de la nature de celles qui tournent autour de leur centre, ſans y arriver; par la même raiſon, on fait auſſi plus parfaitement la jonction de la branche droite du limon, avec *la volute ou colimaçon* qui le termine au bas des Eſcaliers les plus à la mode.

ON peut encore changer toutes ſortes de ſpirales en les élargiſſant, ou reſſerrant de telle maniere que l'on voudra, par le moyen de la réduction

Digitized by Google

des Quarreaux changez en Parallelogrames, & même en Trapezes; ſi on vouloit la reſſerrer d'un côté plus que de l'autre, ſuppoſant par exemple que ſuivant un deſſein que je me propoſe; je trouve la ſpirale ALBVC trop ouverte ſur ſon diametre 2'C8; je n'a y qu'à faire des Parallelogrames reſſerrez ſuivant cette condition, comme on voit à la Fig. 142. & tracer ſur l'original des quarrez en même nombre, ce que l'on a pas fait ici pour éviter la confuſion; parce que tous les Deſſinateurs ſçavent réduire au quarreau du petit au grand; & qu'il n'y a ici d'autre difference, que celle de la Figure des quarreaux, qui ſont quarrez dans l'Original, & oblongs dans la réduction; ce qui fait une figure diſſemblable, mais cependant encore proportionelle en un ſens. *Fig.* 142.

USAGE.

Laſpirale eſt une courbe, dont on fait uſage en Architecture en pluſieurs ſortes d'Ouvrages; premierement elle eſt très fréquente dans les ornemens de ferrurerie & de ſculpture; on l'employe pour les volutes des chapiteaux Ioniques & Compoſites en petit, & en grand dans les amortiſſemens de differentes pieces d'Architecture, particulierement pour les Conſoles & les terminaiſons des contreforts ou piliers butans qu'on éleve, pour arbouter les voutes des Nefs & des Domes des Egliſes, comme on en voit en quatre differents endroits au dehors du Val de Grace à Paris, & dans toutes les Egliſes Modernes, tant en Italie qu'ailleurs; les Architectes qui ont du goût pour tracer l'ornement, leur donnent des contours tâtonez en renflant ou reſſerrant chaque partie, ſelon qu'ils trouvent que l'œil eſt plus ou moins ſatisfait: s'ils avoient connoiſſance des ſecours de la Geometrie, je ne doute point qu'ils ne réuſſiſſent beaucoup mieux dans la grace du contour, lequel, étant intrinſéquement régulier, ſe preſente par toutes ſes parties avec une uniformité qui ne contente pas moins l'eſprit que les yeux; ce que l'on ne peut ſe flater de faire par le ſeul tâtonement.

Enfin la ſpirale eſt une courbe néceſſaire pour former la baſſe des Enroulemens qui s'élevent en Limace, comme ſont ceux que l'on fait aux extremitez des limons des Eſcaliers, que les Ouvriers appellent *Colimaçons*: la *Circulaire*, telle que nous venons de la donner à la Figure, convient mieux à l'évaſement des premieres marches, & à la jonction du limon droit que la ſpirale d'Archimede, ou la volute des Architectes, comme j'en ay fait l'experience chez un de mes amis où je l'ay employée, & celle qui eſt Hyperbolique, Cocentrale encore mieux, nous donnerons ci-après la maniere d'en tracer les joins.

Digitized by Google

Des Arcs Rampans.

EN termes d'Architecture les lignes qui ne ſont ni verticales ni horiſontales, mais inclinées à l'Horiſon, ſont appellées *Rampantes*, & les arcs dont les naiſſances ne ſont pas de niveau entr'elles, l'une étant plus baſſe que l'autre, ſont appellez *Arcs rampans*, tels ſont les *Arcs Droits* des deſcentes biaiſes, dont les naiſſances du cintre de face ſont de niveau, & les arcades pratiquées au deſſous des Rampes des Terraſſes ou des Eſcaliers.

POUR expliquer géometriquement, & plus géneralement la ſignification de ce terme à l'égard des lignes courbes; on peut dire que toutes celles dont les Ordonnées ne ſont pas perpendiculaires à un diametre Vertical; lorſqu'elles ſont paralleles à la ligne qui paſſe par les naiſſances de l'arc, ſont des courbes Rampantes & *des Arcs Rampans.*

IL eſt bon de faire remarquer ici que les Aparailleurs appellent particulierement *Courbe Rampante*, celle du limon de la *Vis à jour*; mais nous ne croyons pas devoir ici nous priver d'une expreſſion génerale pour nous conformer à un langage ſi peu reſpectable.

PROBLEME.

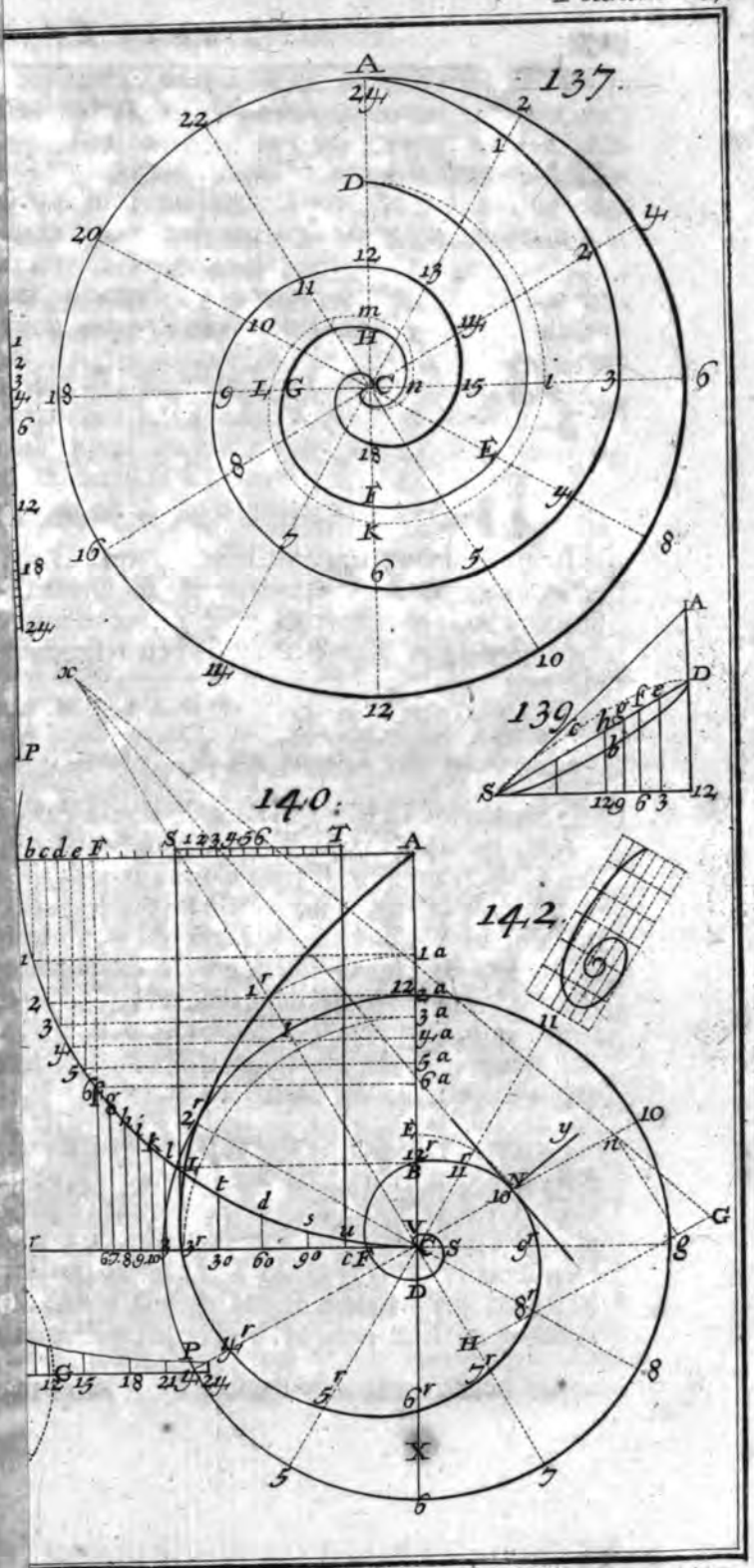
Changer en Arc Rampant un Arc de Cercle, ou d'une Courbe quelconque.

Fig. 143. SOIT donné [*Fig.* 143.] l'arc de cercle AHB qu'on ſuppoſe ici un demi cercle, quoiqu'il puiſſe être un ſegment plus ou moins grand; ſur le milieu C de la corde AB, on élevera une perpendiculaire indéfinie C*b*, à laquelle on menera deux paralleles par les extremitez A & B; enſuite on prendra ſur C*b* un point *c* à volonté pour le ſommet d'un angle C*cb*, qu'on fera égal au complement de l'inclinaiſon qu'on veut donner à la Rampe avec une ligne de niveau *b*N, & l'on tirera la ligne *ab*, qui ſera terminée par les paralleles indéfinies A*a*, B*b*, dont les interſections en *a* & *b* donneront les points des naiſſances, haute & baſſe de l'arc Rampant qu'on ſe propoſe de faire.

ENSUITE ayant tiré à volonté pluſieurs paralleles O O, *ii*, D F à la corde AB, qui couperont CH aux points *r*, G, *e*; on portera les abſciſſes C*r*, CG, C*e* & CH en *c*R, *cg*; *c*E: & *cb*: & par les points R*g*E, on menera des paralleles à *ab*, ſur leſquelles on portera de part & d'autres les longueurs *r*O, G*i*, *e*D du demi cercle qui donneront les points *o*, I, *f*, *b*, *d*, &c. par leſquels on tracera à la main, ou avec une Régle pliante le contour de l'arc rampant *abb*, qu'on demande.

ON peut faire la même choſe d'une autre maniere, en menant à volon-

Digitized by Google



UNIV. of MICH.
Digitized by Google

Digitized by Google

té [*Fig.* 144.] autant de paralleles que l'on voudra à la ligne C*b*, prolongées indéfiniment, & portant ſur chacune des ces paralleles, comme *o*R, *o*D, les longueurs O*r* & O*d* compriſes dans le ſegment de cercle donné; en OR & OD, au deſſus de la ligne inclinée *ab*, & l'on aura autant de points que l'on voudra *a*R*b*D*b* de l'arc Rampant demandé, qui eſt comme l'on voit une portion d'Ellipſe. *Fig.* 144.

Second exemple pour toute autre courbe que le cercle.

Soit [*Fig.* 145.] une ſpirale DBHL*c* que l'on veut faire ramper en tout ou en partie; ayant pris pour axe la verticale AB, qui paſſe par le centre de la ſpirale, à laquelle les Architectes ont donné le nom de *Cathete*; on lui menera à volonté autant de perpendiculaires qu'on voudra avoir de points de la ſpirale rampante, comme AD, EH, FN, GI, &c. que l'on prolongera juſqu'à ce qu'elles rencontrent une autre ligne *a b*, parallele à AB & diſtante à volonté, qu'elles couperont aux points a*hlkb*: enſuite on fera l'angle *bki* égal au complement de l'inclinaiſon que l'on veut donner à la Rampe, pour déterminer la poſition d'une des Ordonnées *ki*, à laquelle on menera des paralleles indéfinies par les points trouvez *ahlk*, comme *ad*, *he*, *ln*, *co*, *kg*, ſur leſquelles on portera les longueurs des Ordonnées à l'axe AB, comme AD en a*d*, HE en *he*, LF en *lf*, &c. ſuivant leur ordre; & l'on aura les points *defgbinhmlc*, par leſquels on tracera à la main une ſpirale, qui eſt celle qu'on demande. *Fig.* 145.

Troiſiéme exemple pour les Figures mêlées de differentes courbes, par exemple [*Fig.* 146.] un contour de Baluſtre droit, qu'on veut rendre rampant pour porter un appui de rampe d'Eſcalier. *Fig.* 146.

Ayant mené des perpendiculaires à l'axe AB, c'eſt-à-dire, à la ligne du milieu du Baluſtre droit, juſqu'à la rencontre d'une parallele CD, poſée à diſtance priſe à volonté, on menera par tous les points de rencontre autant de lignes inclinées à CD, ſuivant la pente de la Rampe donnée, ou déterminée par la ſituation des lieux, qui couperont une troiſiéme parallele *ab* priſe pour l'axe du Baluſtre rampant, à diſtance priſe à volonté, en des points correſpondans aux diviſions du Baluſtre droit, qui ſeront les milieux des diſtances des côtez du Baluſtre rampant, comme on vient de le dire pour la ſpirale dans l'exemple précedent; ce que la Fig. 146. expoſe ſenſiblement à la vûë.

USAGE.

Ce Problême, & particulierement les deux derniers exemples, ſont la baſſe de la pratique de tous les ornemens de bois, de pierre ou de fer, que l'on met aux appuys des rampes des Eſcaliers; car ayant commencé

Digitized by Google

par tracer régulierement les Baluſtres, Guillochis & Enroulemens de Rinceaux & autres deſſeins, tels qu'on les veut dans une ſituation horiſontale; on en ralonge les parties inferieures, & on racourcit les ſuperieures dans une ſi juſte proportion, que l'œil n'eſt point choqué de ce changement; & bien loin de cauſer de la difformité dans les contours des ornemens, il ſemble au contraire qu'il y ſurvient une varieté agreable à la vûë.

Il peut auſſi ſervir pour les cintres des Arcades & voutes Rampantes, lorſqu'on n'a aucune ſujetion de hauteur ou de direction de piedroit, parce qu'alors, il n'y a qu'à changer l'arc circulaire en Rampant; mais à cauſe des differences qui peuvent y ſurvenir, nous devons y pourvoir par un Problême général.

Des Courbes qui conviennent à ces ſortes de Voutes & d'Arcades qu'on appelle Arcs Rampans.

NOus avons parlé au Problême précedent de la tranſmutation des courbes, dont les Ordonnées ſont horiſontales en courbes inclinées à l'horiſon; il s'agit à preſent de trouver le moyen de faire paſſer une courbe par certains points donnez, qui ſont ceux des Impoſtes & des Clefs des arcs Rampans, avec cette circonſtance qu'elle ſoit touchée par les lignes droites qui paſſent par ces points, leſquelles doivent auſſi être données de poſition ou de direction.

Les lignes qui doivent toucher les arcs Rampans, ſont premierement les deux *piedroits* ou *jambages* qui portent l'arcade; leſquelles peuvent avoir trois ſituations differentes, 1.° ou verticale, lorſqu'ils ſont *à plomb*, en termes de l'Art, 2.° ou inclinées en *ſurplomb*, 3.° ou inclinées en *talud*.

Secondement, une ligne réelle ou imaginaire qui termine la hauteur de l'arc Rampant, laquelle peut auſſi être horiſontal, ou inclinée à l'horiſon.

La ſituation la plus ordinaire des piedroits eſt la verticale; cependant quelques fois pour plus de ſolidité, on leur donne du talud, & quelques fois auſſi pour mieux buter & appuyer une voute ou un mur, on les fait en ſurplomb, ce cas eſt plus rare dans la pratique que le précedent; car on ne fait plus guere d'arcs boutans, comme dans l'Architecture Gotique; les Modernes tâchent de cacher la néceſſité de ces eſpeces de contreforts par des moyens plus agreables à la vûë, comme ſont des Groupes de colomnes, ou des Conſoles renverſées.

La

Digitized by Google

La ſituation la plus naturelle à la termination de la hauteur d'un arc rampant ſemble être une ligne horiſontale; en effet il peut toujours l'être par une telle ligne, qui devroit être appellée la ligne de *Sommité*; cependant on appelle ainſi toute ligne donnée qui traverſe les piedroits prolongez, & qui doit toucher la courbe de l'arc rampant.

Outre ces trois lignes eſſentielles aux arcs rampans qu'elles doivent toucher; on en conſidere une quatriéme, qui joint leurs points d'attouchement aux piedroits qu'elle coupe, leſquels ne ſont pas de niveau par la nature de cette eſpece d'arc; on l'appelle *la ligne de Rampe.*

Les differences de poſition de ces quatre lignes, ſçavoir des deux piedroits, de la ligne de ſommité, & de la ligne de rampe, font toute la difficulté & la varieté des cas, où il faut chercher les Courbes convenables.

Il eſt évident à tous ceux qui ſçavent un peu de Geometrie, qu'on peut trouver une infinité de courbes qui peuvent toucher les trois premieres lignes droites dans tous les cas, ou du moins dans pluſieurs de ceux qu'on peut propoſer; mais on ſe borne en Architecture à celles des ſections coniques, qui ſont les plus connuës, pour éviter les difficultés que les autres entrainent avec elles, ou dans leur conſtruction, ou dans la maniere de leur mener des tangentes, en certaines circonſtances marquées.

Pour moy je trouve qu'à cette difficulté près les ſpirales de M. de Varignon donnent un contour de ceintre autant & plus agreable à la vûë que celui des ſections coniques, qu'on peut employer pour un arc Rampant: je pourrois parler auſſi de la ſpirale d'Archimede; mais on ne peut autant la varier, comme celles-là; or cette difficulté n'eſt pas petite, ſi l'on vouloit operer geometriquement; on peut même dire qu'elle eſt inſurmontable; car Archimede a démontré que la ſous-tangente de ſa ſpirale étoit égale à la circonference du cercle de revolution; d'où il ſuit que ſi l'on pouvoit lui tirer une tangente, on auroit trouvé la Quadrature du cercle: cependant ſuppoſant la rectification de la circonference du cercle, qu'on connoît ſuffiſamment pour ne pas trouver d'erreur dans la pratique; on peut mener des tangentes à cette ſpirale, comme nous le dirons ci-après.

On demandera, s'il eſt de néceſſité indiſpenſable que la courbe du ceintre de l'arc rampant touche les deux piedroits, & pourquoi.

A cela je réponds, ce que j'ay déja dit ailleurs, que puiſque l'arc doit être une continuation du piedroit; il doit ſe faire une tranſition inſen-

Digitized by Google

ſible de la ligne droite du piedroit à la courbe de l'arc rampant; or l'alliance de la ligne courbe avec la droite, ne peut ſe faire qu'au point de l'attouchement, où l'angle qu'elles ſont enſemble eſt infiniment grand; par conſéquent imperceptible à la vûë; puiſqu'il differe infiniment peu de la ligne droite, l'œil ne peut être trompé que par cet artifice; toute autre jonction ailleurs qu'au point d'attouchement devient difforme, & choque la vûë: l'Architecte de la Chapelle de Verſailles n'a pas ſenti ce défaut, lorſqu'il a fait des arcs rampans ſous les arcs boutans au deſſus des bas côtez; car leur jonction au grand mur eſt un bon pli bien marqué, c'eſt un arc coupé & appliqué contre ce mur ſans art & ſans naiſſance naturelle ſur un piedroit, ou ſur un Doſſeret.

Le plus grand ſujet de variation des arcs Rampans vient de la ligne de ſommité, qu'il eſt au choix de l'Architecte d'approcher ou d'éloigner des Impoſtes de l'arc, & de lui donner telle direction & inclinaiſon qu'il juge à propos, ſuivant le deſſein qu'il ſe propoſe; & l'égard qu'il a à la ſituation des Lieux, comme lorſque l'arc Rampant doit ſoûtenir un Palier, ou ſe terminer ſous un Plinthe de niveau, la ligne de ſommité devient horiſontale; quelquesfois il convient de donner à cette ligne une direction parallele à celle de la ligne de Rampe, comme lorſque l'arc Rampant ſoûtient une ſeconde Rampe égale & parallele à la premiere, quelquesfois plus ou moins inclinée; ſi cette ſeconde Rampe ou un Plinthe ou Corniche au deſſus eſt inclinée plus ou moins: dans ces deux derniers cas, le point d'attouchement de la ligne appellée de ſommité, n'eſt pas au ſommet de la Courbe; je veux dire à l'endroit le plus élevé, comme les Figures 148. & 150. le font voir: puiſque ce point eſt variable, il s'agit de le trouver, lorſqu'on a déterminé la diſtance & l'inclinaiſon de la ligne de ſommité.

Probleme XX.

La Direction des Piedroits, la ligne de Rampe, & celle de Sommité d'un Arc Rampant étant donnez, décrire la Section Conique, qui doit lui ſervir de Cintre.

Ou en termes Geometriques.

Trois lignes inclinées entr'elles, qui doivent toucher une Section Conique, dont les Points d'attouchement des deux Extrémes ſont donnez, trouver celui de la moyenne, & les lignes néceſſaires pour décrire cette Courbe.

Fig. 147. 148. 150. 151.

Soient les piedroits AR, BP [*Fig.* 147. 148. 150. 151.] la ligne de Rampe RP, la ligne de ſommité SO: Premierement, ſi les piedroits AR, BP ſont paralleles entr'eux, auſſi bien que les lignes de Rampe RP, &

Fig. 131. 132.

Digitized by Google

de ſommité SO; * il eſt clair que le point d'attouchement de cette der- *Fig.* 147.
niere eſt donné au milieu de SO au point T; parce qu'en ce cas la ſection qui ſatisfait au Problême eſt une Ellipſe, comme nous l'avons dit ci-devant, & que la ligne T*t* qui paſſera par le milieu de RP, ſera un diametre conjugué à la ligne de Rampe, où ſera le centre C; parce que BP & SO étant des tangentes, les lignes qui leur ſont paralleles, & qui paſſant par le centre C ſont des diametres conjuguez; cela ne ſouffre point de difficulté.

Dans tous les autres cas où les lignes de Rampe & de ſommité ne *Fig.* 148. ſont pas paralleles; quoique les piedroits ſoient paralleles entr'eux, ou 150. 134. ne le ſoient pas; on trouvera le point T, où la courbe doit toucher la 151. ligne de ſommité, comme il ſuit.

Ayant prolongé les lignes RP & SO données juſqu'à ce qu'elles concourent en Y par le point S, on menera une parallele DE à OR, ſi les piedroits ne ſont pas paralleles, comme aux Figures 150. & 151. laquelle ne ſera qu'un piedroit prolongé, s'ils ſont, comme à la Figure 148. paralles, elle coupera RY en D, enſuite ayant porté DS en SE, ou Figure 148. PS en SE; on tirera ER qui coupera SO au point T, où ſera celui d'attouchement que l'on cherche.

Ce point étant trouvé: 1.° il ſera facile de décrire la ſection conique qui doit toucher les trois lignes AO, OS; SB aux points RTP par le Problême XIV.

2.° On pourra auſſi la décrire par le Problême XIII. parce qu'on a *Fig.* 150. cinq points donnez; ſi elle eſt une Ellipſe ou une Hyperbole, dont le centre ſoit dans l'étenduë du plan où on veut la décrire; car menant des paralleles à SO par les points donnez à la circonference P & R qui couperont le diametre T*t* en V & *u*: ſi on fait V*p* = PV, *ur* = *u*R, *q*C = C*u*, & qu'on mene par *q* une parallele à SO, ſur laquelle on prenne *qn*, *q*N = *u*R, *ur* & C*t* = CT, on aura déja huit points de l'Ellipſe.

3.° Supposant que le centre ſe trouve loin hors de l'étenduë de la ſurface, ſur laquelle on veut la décrire; on pourra en trouver autant de points que l'on voudra par le Problême XV. car on a deux tangentes, & la poſition d'un, & même de deux diametres S*m* & OM, qui paſſent par les points S & *m* & O & M, ſuppoſant PT & TR diviſez en deux également en *m* & M.

4.° On peut par ce moyen trouver les diametres conjuguez; car puiſque T*t* eſt donné, en faiſant C*t* = CT, que ſon conjugué doit paſſer

Digitized by Google

par le point C trouvé, comme au Problême XV. & parallelement à SO, il ne s'agit plus que de trouver ſa longueur de part & d'autre du point C; ce que l'on peut faire par le Problême IV. puiſqu'on a une, & même deux Ordonnées au diametre *t*T, ſçavoir R*u* & P*u*, ou par un autre methode que voici.

AYANT mené par le centre C une ligne FG parallele à SO; on menera auſſi RK parallele à T*t*; enſuite on cherchera une moyenne proportionelle entre CK & CG, laquelle donnera C*z* pour moitié du diametre conjugué à T*t* (par l'Art. 46.) qui dit que les lignes menées du centre à la tangente, & coupées par une Ordonnée, ſont diviſées en raiſon continuellement proportionelles CK: C*z*:: C*z*: CG.

Art. 46.

DEMONSTRATION.

Nous avons dit dans nos Préliminaires ſur les ſections coniques Art. 48. que les tangentes à une ſection conique qui ſe rencontrent, & qui ſont terminées par d'autres lignes tirées par deux points d'attouchement, ſe coupent en raiſon Harmonique; ce que nous avons dit être démontré dans les Traitez de ces ſections: or la tangente OY eſt coupée par la ligne RP prolongée, qui paſſe par deux points d'attouchement R & P, & par les tangentes RO & PS, qui paſſent par ces mêmes points R & P; donc on a trois points d'une diviſion Harmonique, ſçavoir O, S & Y, il reſte à prouver que le quatriéme T eſt bien trouvé.

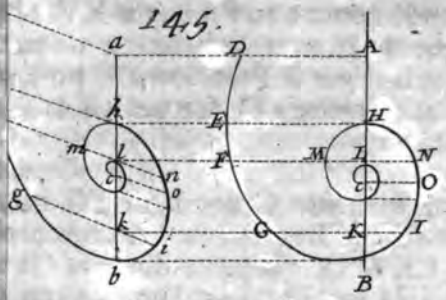
A cauſe des triangles ſemblables YOR, YSD, on aura YO: OS:: YS: SD = SE, & à cauſe des triangles ſemblables ORT, SET, on aura OR: SE:: OT: ST; donc par raiſon d'égalité YO: OS:: OT, ST, *ce qu'il falloit démontrer.*

REMARQUE.

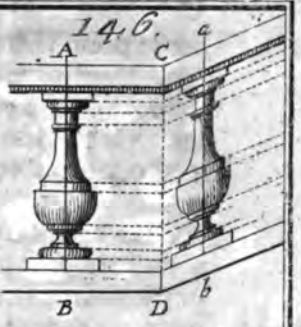
CETTE propoſition renferme quinze Problêmes que M. BLONDEL a donné pour trouver les Courbes des ſections coniques, qui peuvent toucher toutes ſortes de piedroits & de lignes de ſommité en quelque poſition qu'ils puiſſent être pour former un arc Rampant; ainſi elle abrege beaucoup cette matiere.

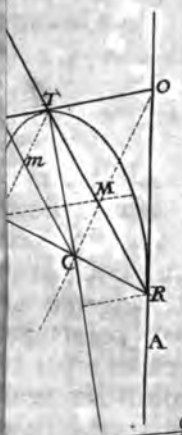
Digitized by Google

145.

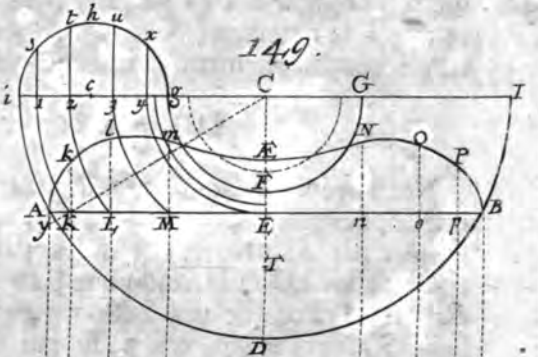


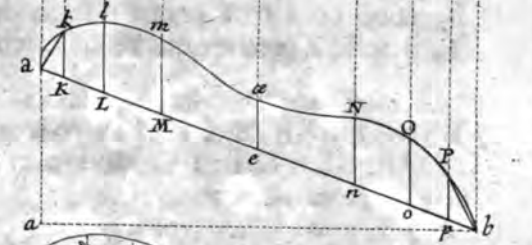
146.





149.





152.

UNIV. OF MICH.
Digitized by Google

Digitized by Google

CHAPITRE IV.

De l'imitation des Courbes Régulieres par des compositions d'Arcs de Cercles.

Lorsqu'on aime la régularité, on ne ſe ſert point de ces Courbes qui n'ont que de la reſſemblance avec les régulieres, dont elles ne ſont que des copies imparfaites, formées par la compoſition de pluſieurs arcs de cercles de differents Rayons; l'original eſt ſans contredit préferable à la copie; cependant l'ignorance des proprietez des Courbes, même les plus communes, comme ſont les ſections coniques & les ſpirales, jointe à une plus grande facilité apparente de tracer des arcs de cercles, & peut être encore celle d'en tirer les joins de tête pour les traits des voutes, ont fait chercher pluſieurs moyens de les imiter par un aſſemblage de portions de cercles; & comme l'Ellipſe eſt une des plus uſuelles, les Deſſinateurs & les Architectes ſe ſont efforcés pendant long-temps, mais inutilement, de l'imiter parfaitement ſans jarrets par 3, 4, ou 5. portions de cercles, les axes étant donnez: pour s'en convaincre, il n'y a qu'à jetter les yeux ſur deux des planches du Livre de Bosse, touchant la maniere de deſſiner l'Architecture, où il a raſſemblé ce qu'on avoit fait de mieux juſqu'alors: cette découverte étoit reſervée à un Geometre, tel que M. Pitot de l'Academie Royale des Sciences, qui a trouvé la poſition de trois centres, & la longueur de deux Rayons, avec leſquels on peut l'imiter auſſi parfaitement qu'il eſt poſſible, comme nous le dirons ci-après.

Il paroît auſſi par les planches du Livre du P. Deran, particulierement par celle du Chapitre XIX. que cet Auteur qui s'étoit exercé à tant de Traits, n'entendoit pas celui de l'imitation de l'Ellipſe; car la difference de la juſte poſition des centres de ſes arcs Rampans eſt trop conſiderable, & les jarrets trop ſenſibles, pour qu'on en doive rejetter la faute ſur le Graveur. Cependant ces Traits ſont regardez en Architecture comme des choſes remarquables: une perſonne verſée dans cet Art me citoit pour une des raretez du nouveau Pont de Compiegne un arc ſurbaiſſé, qui avoit cinq centres; à quoi je répondis en ſouriant qu'il auroit été plus beau & meilleur, ſi au lieu de cinq centres, il n'avoit eû que deux Foyers.

Régle Generale.

Tout l'art d'imiter les Courbes par differents arcs de cercles, conſiſte à poſer les deux centres des arcs qui ſe joignent ſur une même ligne

Digitized by Google

droite, qui paſſe au point de leur jonction, afin que la perpendiculaire qu'on lui tireroit à ce point fût tangente commune, de l'une & de l'autre arc au même point; la raiſon eſt, 1.° que l'angle de l'arc avec la tangente étant infiniment petit de part & d'autre du point d'attouchement, le Rayon eſt preſque auſſi exactement perpendiculaire ſur cet arc, qu'il l'eſt ſur la tangente, à une difference près qui eſt infiniment petite: 2.° Que l'angle compoſé de ces deux preſque droits ſera infiniment grand, par conſéquent ſes côtez ſeront dirigez en une ligne ſi peu differente de la ligne droite, que l'œil ne peut en appercevoir le pli; tels ſeroient tous ceux d'un Polygone d'une infinité de côtez infiniment petits inſcrits dans le cercle.

Cependant l'œil Geometrique qui eſt un Juge ſevere, apperçoit fort bien le changement ſubit de la convexité & de la concavité, particulierement ſi les Rayons des deux arcs qui ſe joignent, ſont conſiderablement differents en longueur, comme il eſt ſouvent néceſſaire qu'ils le ſoient pour former une demi-Ellipſe de trois arcs; alors les gens les moins connoiſſeurs ſentent bien cette irrégularité, ſans en ſçavoir la raiſon; c'eſt pourquoi je ne conſeille à perſonne d'avoir recours à cet artifice de l'ignorance; quoique je donne ici les meilleures régles pour en cacher les défauts, je ne le fais que pour contenter ceux qui aiment à s'épargner de la peine, au préjudice d'une plus grande perfection d'ouvrage, ou lorſque la choſe n'eſt pas aſſez de conſéquence pour meriter plus de ſoin, ou pour en faciliter l'exécution aux Ouvriers qui ne ſont pas capables d'une operation plus parfaite.

Probleme XXI.

Deux Axes étant donnez, imiter une Ellipſe par un aſſemblage de quatre Arcs de Cercles.

Ou ce qui eſt le même, imiter une demi-Ellipſe par trois arcs de 60. Degrez chacun.

Pl. 14. *Fig.* 153. Soit le grand axe AB [*Fig.* 153.] & la moitié du petit axe CD: on portera premierement la longueur CD de cette moitié ſur le grand axe en By, pour avoir la difference des deux demi-axes Cy, qu'on diviſera en deux également en F, puis on portera CF en Cz: ſur zy, comme diametre, on fera le demi cercle Z Ey, qui coupera CD en E, on portera la longueur ZE en ZS, & la diſtance CS d'un côté à l'autre, CS en Cs: les points s & S ſeront les centres des petits arcs des extrêmitez de l'Ovale, & les lignes AS & sB leurs Rayons; enfin des points s & S, comme centres, & de l'intervale sS, on fera le triangle équilateral S Ts, dont le ſommet T ſera le troiſiéme centre que l'on cherche; & les côtez

Digitized by Google

de ce triangle prolongez, détermineront la jonction des grands & petits arcs en *i* en I, sur lesquels on prendra T*s* + *s*B pour Rayon du grand arc; ainsi les trois arcs seront de soixante Degrez chacun, & auront des Rayons communs; *ce qu'il falloit faire.*

Demonstration.

Soit AC = *a*, CD = *b* & l'inconnuë C*s* = *x*, par la Construction CY = $a - b$ & CZ = $\frac{1}{2}a - b$; ainsi CE = $\sqrt{a-b \times \frac{1}{2}a - b}$ & ZE = $\sqrt{\frac{1}{2}a - b^2 + \frac{1}{4}a - b^2}$, mais CS (*x*) = CZ $\frac{1}{2}a - b$ + ZS ou ZE $\sqrt{\frac{1}{2}a - b^2 + \frac{1}{4}a - b^2}$ donc $x = \frac{1}{2}a - b + \sqrt{\frac{1}{2}a - b^2 + \frac{1}{4}a - b^2}$ *ce qu'il falloit démontrer.*

Probleme XXII.

Imiter par deux Arcs de Cercles les portions d'Ellipses faites sur deux Diametres, qui ne sont pas des Axes conjuguez, dont l'un est terminé par deux Tangentes à ses extrêmitez, & dont le Conjugue est déterminé par une troisiéme Tangente donnée de position.

On ne peut imiter avec une composition de deux arcs de cercle rassemblez, toutes sortes d'Ellipses faites sur des diametres conjuguez, qui ne sont pas des axes, & qui doivent toucher une ligne donnée de situation & de distance; mais on peut faire en sorte que l'Ovale touchera la parallele de la troisiéme tangente donnée.

Pour connoître si le Problême peut être résolu par des arcs de cercle.

Soient [*Fig.* 154.] PD & RG deux tangentes aux points B & A, & D*g* une troisiéme ligne qui doit toucher l'Ovale proposée à faire; on portera la longueur DB sur la ligne D*g* en D*b*, & la longueur *g*A en *g a*, si ces deux points *a* & *b* ne tombent pas au même point, le Problême ne peut pas être résolu; parce qu'il est démontré dans la Geometrie Elementaire, que si d'un point *d* ou G pris hors du cercle, on lui mene deux tangentes *d*B, *d*T, ou GA, GT, elles sont égales entre elles; supposant donc la ligne D*g* donnée, il faut pour résoudre ce Problême faire D*b* = DB, & *g a* = *g*A, tirer A*a* & B*b*, le point T de leur intersection sera celui d'attouchement de la tangente *d*G, auquel on tirera la perpendiculaire indéfinie TC, & par les deux autres points d'attouchement A & B donnez, faisant B*c* perpendiculaire sur *d*P, & AC perpendiculaire sur RG; les points C & *c*, où ces lignes couperont TC, seront les centres des arcs de cercles qui doivent répresenter l'Ellipse proposée à faire, dans le cas où elle peut en approcher le plus. Si la ligne D*g* donnée de position est au dessous

Fig. 154.

D'Eucl. l. 3. pr. 37.

Digitized by Google

du point T, comme EF, il faut faire $Eb = EB$, & $Fi = FA$, tirer Bb & Ai, leſquelles étant prolongées, ſe couperont au point T, qui eſt celui de l'attouchement que l'on cherche, par lequel ayant tiré une parallele dG à la donnée Dg ou EF; on reconnoîtra que la ſomme des lignes Bd & AG ſera égale à celles des parties dT & GT.

DEMONSTRATION.

A cauſe des paralleles Dg & dG ou EF, $DB : Db :: dB : dT$ & $gA : ga :: GA : GT$, mais $gA = ga$ (par la conſtruction) & $DB = Db$, donc $dT = dB$, & $GA = GT$; donc le point T eſt celui de l'attouchement de la ligne DG, *ce qu'il falloit trouver.*

COROLLAIRE I.

D'ou ſe tire la maniere de *faire toutes ſortes d'arcs Rampans, avec des portions de Cercle dans quelque poſition que ſoient les Piedroits, entr'eux, paralleles, en ſurplomb ou en Talud, & en quelque ſituation que ſoit la ligne de ſommité dG:* en voici des exemples pour les piedroits paralleles entr'eux qui ſont les plus ordinaires.

PREMIER cas où la ligne de ſommité dG eſt horiſontale, & les piedroits à plomb. Soit *Fig.* 155. la ligne de Rampe donnée AB, ſa hauteur ſur l'Horiſon BO étant portée ſur Ob d'alignement à la ligne horiſontale AO, on diviſera Ab en deux également en m, d'où l'on élevera la perpendiculaire mT: puis du centre m, & pour Rayon Am, on décrira l'arc de cercle AT juſqu'à la rencontre de mT; enſuite ayant pris ſur mT, la longueur $mc = OB$, le point c ſera le centre du ſecond arc BT, qui rencontrera le premier au point d'attouchement T, ce qu'il falloit faire pour en rendre la jonction imperceptible.

Fig. 155.

Second cas où la ligne de Rampe AB eſt parallele à celle de ſommité dG.

AYANT diviſé l'horiſontale AO en deux [*Fig.* 156.] également en m, & élevé en ce point la verticale mT, qui coupera la ligne de ſommité dG au point T, il faut faire $Ad = dT$, comme nous l'avons dit au commencement de cette propoſition; puis au point T faire TC perpendiculaire à dG, ou ce qui eſt la même choſe à la parallele AB; le point C où cette perpendiculaire coupera l'horiſontal AO, ſera le centre du grand arc de cercle AT: puis menant Be parallele à AO, elle coupera TC au point c, où ſera le centre du ſecond arc TB, qui ſe joindra au grand au point d'attouchement en T, comme il eſt néceſſaire.

Fig. 156.

Troiſiéme

Digitized by Google

Troiſiéme cas où la ligne de ſommité D*g* [*Fig.* 157.] n'eſt pas parallele à la ligne de Rampe AB. *Fig.* 157.

Ayant trouvé le point T, comme on l'a dit au commencement de ce Problême; on tirera TC perpendiculaire à D*g*, & B*c* parallele à A*o*, on aura, comme au cas précedent, les points C & *c* pour les centres des deux arcs qui doivent former le Rampant ATB.

Demonstration.

On voit que dans le fond tous ces cas ne different en rien pour la conſtruction: Car, 1.° [*Fig.* 155.] puiſque AO & *d*G ſont paralleles entr'elles, de même que CT & A*d*; il eſt évident que A*d* = *d*T, & puiſque C*b* = CA = CT, & O*b* = OB, BG ſera égal à CO = TG, donc les deux tangentes de chacun de ces arcs AT, TB ſont égales, par conſéquent elles conviennent au cercle, & les centres C & *c* étant ſur une même ligne, la même tangente *d*G eſt commune aux deux arcs de differents cercles.

Les deux cas ſuivants ſont démontrez par le Principe general qui établit la poſition des centres, & les mêmes conditions des tangentes, dont nous venons de parler.

Corollaire.

Dela on tire la maniere de tracer *l'Ovale pointuë*; s'il eſt permis d'uſer ici de ce mot, pour exprimer l'inégalité de ſon contour aux extrêmitez de ſon grand axe; laquelle à cauſe de ſa conformité avec le contour d'un œuf appellé en latin *Ovum*, eſt nommée en Architecture un *Ove*: comme c'eſt un ornement, dont on fait grand uſage dans les Corniches, & qu'on en trouve de faux Traits dans les Livres; je vais tâcher de les corriger. Albert Duret dans ſa Géometrie en donne deux faux, l'un qu'il tire du Cône, dont le contour fait un jarret à chaque extremité du grand axe, comme il ſeroit facile de le démontrer, ſi la choſe en valoit la peine; l'autre Trait qui a été ſuivi par quelques Auteurs, eſt une compoſition d'arcs de cercles, où il a fait encore une erreur groſſiere, joignant les ſecond & troiſiéme arcs au deſſus du point I en S au dehors des Rayons communs DI: 3I. *Fig.* 158.

Soit donné le petit diametre AB pour la plus grande largeur de l'Ove; on le diviſera en quatre parties, & ayant prolongé ce diametre de part & d'autre, de trois de ſes parties faiſant DA & B2 égales à *m*B: puis du point C, milieu de AB pour centre, on décrira un cercle AHBE, dont

Digitized by Google

on diviſera les quarts de circonference AE, BE en deux également aux points 3. & 4. par leſquels on menera les lignes DI, 2*i*, qu'on fera égales à DB ou 2A, en décrivant deux arcs BI, A*i* des points D & 2 pour centres; leſquels arcs étant continuez, ſe couperont au point *x* par où, & par le centre C, on tirera la ligne H*x*: enſuite des points 3. & 4. pour centres, & de l'intervale 3I pour Rayon, on décrira deux arcs qui ſe couperont en *y* ſur la ligne H*x*: on diviſera l'intervale E*y* en deux également en *c*, par où on tirera les lignes 3G, 4*g*, qui rencontreront ces arcs en G & *g*; enfin du point C pour centre, & *c*G ou *cg* pour Rayon, on décrira l'arc G*g*, qui achevera l'ovale en Ove.

Il eſt aiſé de voir qu'on peut alonger ou racourcir cet Ove, en remontant ou rabaiſſant les centres 3. & 4. & le dernier *c*.

Les Architectes placent ordinairement cet Ove dans une Niche, dont *Boſſe* régle ainſi le contour, il fait HL perpendiculaire & égale au diametre HE; il la diviſe en deux également en O, & la moitié OL en quatre parties égales: il diviſe enſuite le grand axe HF en trois également, & ce tiers en cinq, il porte une de ces cinquiémes de F en *p*, & de l'intervale S*p* tiers de FH, il décrit un arc F*z*, il ne dit pas de combien de degrez; ce qui ſeroit cependant néceſſaire pour avoir les intervales des Rayons *q*K, *z*N, qui ſont les cordes & les rayons de ces arcs.

Toute cette conſtruction n'eſt qu'une fantaiſie & un goût de deſſein arbitraire imité apparemment des reſtes des Corniches antiques, où l'on voit ces Niches formées de differentes façons, en côtes relevées & diviſées entr'elles par des ornemens de feüilles, & quelquesfois de Dards; ce qui n'eſt pas de notre ſujet.

Nous avons donné ci-devant la maniere de décrire des demi-Ovales, par le moyen de trois arcs de cercle de 60. degrez chacun, ſupoſant les axes donnez; il nous reſte à montrer comment on peut les faire de tant d'arcs de cercles que l'on voudra, ſoit régulierement en ovale, ou irrégulierement en portion d'Ove; ce qui eſt néceſſaire pour tracer differentes ſortes de *Cavets*, ou moulures creuſes, & les contours de certains amortiſſemens qu'on appelle *Piedouches*.

Fig. 159. Soient par exemple [*Fig.* 159.] donnez pluſieurs points A, 1, 2, 3, B, rangez d'une façon convenable au contour creux qu'on ſe propoſe; on prendra l'intervale A1 pour côté d'un triangle équilateral A1D, & du point D pour centre, on décrira l'arc A1: enſuite ayant tiré la corde 1, 2, & l'ayant diviſée en deux également en *m*, on y élevera une perpendiculaire *me*, qui coupera 1, 2, prolongée en *e*, où ſera le centre du

Digitized by Google

ſecond arc de cercle 1, 2, on tirera de même la corde 2, 3, & ſur ſon milieu M, on élevera la perpendiculaire MC, qui coupera 2*e* prolongée au point C, où ſera le centre du troiſiéme arc 2, 3, ainſi de ſuite, on aura le dernier centre *f*.

La raiſon de cette pratique eſt claire par la ſeule conſtruction, où l'on reconnoît l'application de la Régle génerale, en ce qu'il y a deux centres ſur la ligne droite, où ſe fait la jonction des arcs qui doivent ſe toucher, c'eſt-à-dire, avoir une tangente commune, comme TN, qui touche également les arcs 2, 1 & 2, 3, *ce qu'il faut faire pour éviter tous jarrets.*

Corollaire.

Il ſuit de cet exemple, que quoique nous ayons compoſé des arcs Rampans de deux ſeuls arcs de cercles d'un nombre de degrez égaux ou inégaux; on peut encore mieux les former de tel nombre d'arcs que l'on voudra; car ſi l'on conçoit la Figure 159. changée de ſituation, & qu'on prenne les points A & *p* pour des Impoſtes, il eſt viſible que la Courbe A 1 2 3 *p* peut ſervir pour un ceintre d'arc Rampant: mais alors elle ſera moins une imitation de l'Ellipſe, que de la ſpirale à laquelle le Problême ſuivant ſervira d'introduction.

Probleme XXIII.

La difference d'hauteur des Impoſtes A & H, & l'intervale horiſontal DA des Piedroits d'un arc Rampant étant donnez, tracer un Cintre compoſé d'autant d'arcs de Cercles que l'on voudra inégaux en Rayons, mais égaux en nombre de Degrez, ou ſi l'on veut d'une partie *de plus avec certaines circonſtances.* Fig. ſur 160.

Soit [à la Figure au deſſus du chiffre 160.] le cintre ABH qu'on ſe propoſe de faire, par exemple de cinq arcs de cercles; ſur la hauteur donnée DH comme diametre, on décrira un demi cercle HID, qu'on diviſera en cinq parties égales, c'eſt-à-dire, en cinq arcs, dont on tirera les cordes, auſquelles on menera des paralleles tangentes au cercle, pour lui circonſcrire la moitié d'un décagone: enſuite ayant prolongé la ligne AD vers *n*, on portera ſucceſſivement les cinq côtez de D en *n*.

On diviſera *n*A en deux également en X, par où on menera X*x* parallele & égale à DH, ſur laquelle comme diametre, ayant décrit un demi cercle, on lui circonſcrira le même Polygone; mais tourné differemment en commençant par porter une moitié de côté en X 1, & *x* 5, ſur les paralleles DA & H 5, on fera C 3 égale à O 2, diſtance du centre O, à un angle du Polygone, & des points 3 & 1, 3 & 5 pour centres & pour

Digitized by Google

Rayon le côté du Polygone, on fera des interſections d'arcs qui donneront les points 2 & 4, pour tirer par les points 2, 3, 4, 5 les côtez qu'on prolongera indéfiniment vers B, E, F, G; enfin des points 1, 2, 3, 4, 5 pour centres & pour rayons 1 A, 2 B, 3 E, 4 F, 5 G; on décrira des arcs A B, B E, E P, F G, G H qui formeront enſemble ſans aucun jarret le cintre qu'on demande: ſi le nombre des côtez du Polygone n'eſt pas complet, qu'il y ait une moitié de plus, il y aura auſſi un arc de cercle moindre que les autres; ce qui arrivera toujours, lorſque les côtez feront enſemble la moitié d'un nombre impair, comme du triangle Equilateral, du Pentagone, de l'Eptagone, &c.

Il n'eſt pas néceſſaire de rendre raiſon de cette conſtruction pour le concour des arcs de cercles, qui ſe rencontrent au point commun d'attouchement; il ſuffit de dire pourquoi, on a porté les côtez du Polygone circonſcrit ſur la ligne A D prolongée; c'eſt pour avoir l'axe X*x*, & le centre C du Polygone generateur qui doit être au milieu d'une ligne compoſée de la donnée D A & de l'ajoutée D *n*; parce que chaque Rayon des arcs de ſuite diminuë de la longueur d'un côté du Polygone 1 2, 2 3, 3 4, &c. par conſéquent tous enſemble diminuent de la quantité D *n*, au dedans d'un demi cercle, qui auroit X A ou X *n* pour Rayon, & ſeroit partie du cercle de revolution de la ſpirale, dont cet arc Rampant eſt une moitié. On voit par-là la raiſon de la conſtruction de la Figure 155. où nous avons porté la hauteur O B en O *b* ſur A O prolongée; parce que nous étant propoſé de faire un ceintre de deux arcs de 90. degrez chacun, qui ſont la moitié du cercle, le Polygone generateur en doit être le quarré, dont la hauteur O B eſt un côté qui doit être diminué ſur la longueur du Rayon du ſecond arc: ce que l'on verra plus clairement au Problême ſuivant, qui n'eſt qu'une eſpece de Corollaire de celui-ci.

J'Ay dit qu'il falloit que l'arc Rampant fit une demi-revolution, parce que j'ay ſuppoſé les piedroits à plomb paralleles entr'eux; mais s'ils étoient en talud, il faudroit qu'il en fit plus, & en ſurplomb moins, par la raiſon que nous avons ſouvent repeté, que les piedroits doivent être tangens aux arcs à leurs naiſſances.

PROBLEME XXIV.

Imiter la Spirale par des portions d'Arcs de Cercle.

Suivant le Principe géneral que tous les arcs inégaux doivent ſe joindre à un point commun d'attouchement, pour qu'on n'en aperçoive pas la jonction; il ne s'agit pour imiter la ſpirale, que d'avoir toujours deux centres de ſuite ſur un même Rayon, il faudroit encore que ces Rayons

Digitized by Google

diminuaſſent toujours dans une certaine proportion qui pourroit beaucoup varier, & que les angles qu'ils font entr'eux fuſſent égaux ou variables, auſſi dans une certaine proportion, comme nous l'avons dit des ſpirales; ce que l'on peut bien concevoir après ce que nous avons dit de cette courbe, & l'exécuter ſuivant l'intention qu'on a de faire plus ou moins de revolution, en imitant la ſpirale réguliere : mais comme il ne s'agit pas dans cette imitation d'une ſi grande préciſion, qui ne peut convenir à une compoſition d'arcs de cercles; il nous ſuffit de donner la maniere génerale de faire ce qu'on appelle en Architecture *Volute*.

Ayant pris un point C pour centre de la ſpirale ou volute; [*Fig.* 160.] on prendra ce point pour le milieu du côté d'un Polygone quelconque : nous donnons ici pour exemple l'Exagone *Fig.* 160. & 161. & on le ſera de telle grandeur que l'on voudra, à l'égard du plus grand Rayon que l'on veut donner à la volute, & de l'intervale que l'on veut occuper par les Rayons oppoſez, dont on peut compter la diminution par le nombre des changemens des centres de chaque arc, & la longueur des côtez du Polygone ajoûtez enſemble. Les Architectes, qui, pour terminer les revolutions vers le centre, y font un cercle qu'ils appellent *l'Oeil* de la volute, ſe réglent par la grandeur de cet œil, auquel ils aſſignent un certain nombre de parties du Module, c'eſt-à-dire, d'une diviſion faite ſur le diametre de la colomne, ſuivant leurs ſiſtémes arbitraires. *Fig.* 160.

Pour nous qui ne propoſons qu'une maniere génerale, dont on peut facilement deduire les particulieres; nous dirons ſeulement qu'ayant fait un Polygone quelconque, *Fig.* 161. & ayant pris le milieu d'un de ſes côtez pour centre de la ſpirale; on tirera de ce point C à tous les angles du Polygone des Diagonales C 4, C 5, C 3, C 2, & enſuite s'étant fixé un nombre de revolutions, on y inſcrira autant de Polygones ſemblables au premier, qui auront toujours un de leurs côtez commun avec le premier *b* C 1, & les côtez de ces Polygones ſeront encore en telle raiſon que l'on voudra, ſelon le deſſein propoſé que la volute ſe reſſerre plus ou moins vite. *Fig.* 161. & 162.

Cette diſpoſition étant faite, on prolongera tous les côtez de ces Polygones d'une part ſeulement, & à volonté, autant à peu près qu'il convient à la longueur des Rayons, ſuivant le premier A C qui a été donné comme on voit dans la Figure 160. 1 2 *a*, 2 3 *b*, 3 4 *c*, 4 5 *d*, 5 G *e*, G 1 *f*, & 1 2 *a*, qui acheve la revolution. Enſuite du centre 2, & pour Rayon 2 *a*, on fera l'arc *a b* terminé en *b* par le Rayon 2 *b b* 1; du centre 3 & de l'intervale 3 *b* pour Rayon, on décrira l'arc *b c*; du centre 4, & pour Rayon 4 *c*, on décrira l'arc *c d*, & ainſi de ſuite en changeant de centre à chaque *Fig.* 160.

Digitized by Google

arc, posant la pointe du compas sur un des angles du Polygone, & arrêtant l'autre au Rayon fait du côté de ce Poligone prolongé.

Apres la premiere revolution, on continuera de même pour la seconde sur le Polygone inscrit immédiatement dans le premier, & au bout de cette seconde revolution, on continuera sur les angles du troisiéme Polygone, suivant l'ordre des chiffres de la Figure 161.

Fig. Ou il faut remarquer que la seconde revolution, commençant par deux centres 6, 7 qui sont sur un Rayon commun, ne doit point faire de jarret avec la premiere; mais elle fait une sorte d'irégularité, en ce que la distance du centre 6 au centre 7, n'est pas égale à celle du centre 5 au centre 6, comme elle l'a été depuis le point 1, jusqu'au point 5, & comme elle le doit être ensuite aux intervales 8, 9, 10, 11, & 12; la même chose arrive à la troisiéme revolution; cependant les Architectes qui donnent la Geometrie à bon marché, disent comme Daviler que la *volute de Goldman*, qui est faite sur ce principe, est *Geometrique*, quoiqu'elle ne soit qu'un cas de notre methode, dont la seule difference est que son Polygone central est un quarré, comme on voit en la Figure 162. mais en fait de volute Ionique, on n'a pas besoin d'y regarder de si près; car les Architectes n'en veulent qu'à une décoration de goût, & non pas à une grande précision.

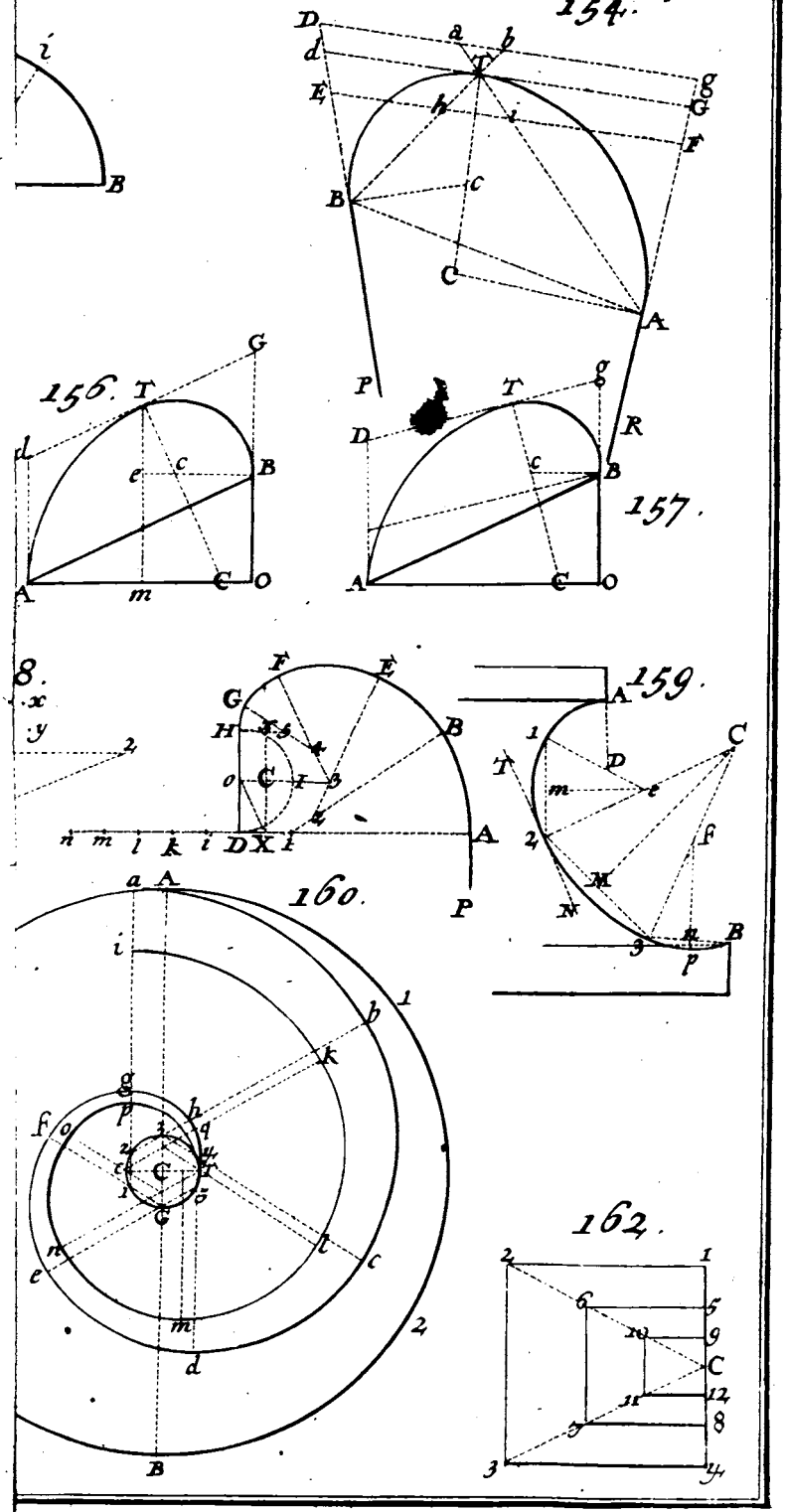
Corollaire I.

Il suit que si l'on veut *agrandir la volute* en dehors, on peut en agrandissant les Rayons, continuer les arcs de suite, en changeant de centres sur les mêmes angles des Polygones, ou sur d'autres circonscrits sur le même côté 6C1.

Corollaire II.

Secondement que si l'on veut *faire un double trait* qui vienne aussi en se resserrant avec le premier; ayant déterminé la largeur *ai* sur le Rayon *ca*, on cherchera le côté d'un Polygone semblable au premier, qui soit en même raison que *ci*, *ca*, par cette analogie *ca* : *ci* :: *c*1 : *cx* appellant *x* le point qui sera à l'angle du second Polygone sur le Rayon sous 2*b*; la petitesse de la Figure ne nous a pas permis d'exprimer ces differences, de peur d'y jetter de la confusion: nous ne disons point comment cela se fait par les lignes; car nous supposons que nous parlons à des Lecteurs qui sçavent trouver une quatriéme proportionelle à trois lignes données, comme il est enseigné chez Euclide *liv. 6. prop.* 12.

Digitized by Google



UNIV. OF MICH.
Digitized by Google

Digitized by Google

REMARQUE.

On voit par la Figure 162. que la volute de Goldman que Daviler donne comme la plus convenable au Chapiteau Ionique, n'eſt qu'un cas de notre maniere génerale d'imiter la ſpirale par des arcs de cercles, en prenant pour le Polygone central le quarré, au lieu des autres Polygones qui ont plus de côtez, d'où réſulteroient cependant des volutes plus parfaites.

CHAPITRE IV.

De la diviſion des Sections Coniques par des Lignes droites perpendiculaires à leurs Arcs.

ON ſçait que la perpendiculaire à un arc n'eſt autre choſe que celle qui fait des angles Droits, avec la tangente de cet arc au point d'attouchement; ainſi il faut conſiderer chaque point de diviſion, comme celui d'un attouchement, y ſuppoſant une tangente réelle ou poſſible, à laquelle il faut tirer une perpendiculaire par le point d'attouchement donné, ou par un autre point pris hors de la Courbe; ce qui s'exécute differemment pour chacune des ſections Coniques.

I.°

Pour le Cercle.

Probleme XXVI.

Par un Point donné, tirer une Perpendiculaire à un arc de Cercle, dont on ne connoît pas le Centre.

Il peut y avoir trois cas dans ce Problême: 1.° où le point donné eſt dans l'arc; 2.° ou hors de l'arc; 3.° ou à l'extremité de l'arc.

Pl. 15.

Si le point donné eſt à la circonference en D [*Fig.* 163.] on prendra de part & d'autre deux longueurs égales D*e*, D*f*; & des points *e* & *f* comme centres, & d'une ouverture de compas priſe à volonté pour Rayon, on fera une interſection d'arcs en *g*, par où & par le point D, on tirera la ligne *g*D, qui eſt celle qu'on cherche. *Fig.* 163.

Secondement ſi le point donné eſt hors de l'arc DGB, comme en *d*: du point *d* pour centre & pour Rayon un intervale pris à volonté; on tracera l'arc *b i*, qui coupera le donné AGB aux points *h* & *i*, deſquels comme centres, & de la même ouverture de compas, ou de telle autre

Digitized by Google

qu'on voudra pour Rayon, pourvû qu'elle ſoit plus grande que la moitié de la diſtance des centres *b* & *i*, on fera une interſection d'arcs en *b*; ſi par les points *b* & *d*, on tire une ligne *b d*, la partie *d*G ſera celle que l'on cherche.

3.° Si le point donné eſt ſur l'extremité de l'arc donné AGB en B, & qu'on ne puiſſe pas le prolonger au delà de ce point; 1.° par la maniere ordinaire, ayant porté à volonté deux longueurs égales BK, KL pour faire avec d'autres ouvertures pour Rayons, à volonté l'interſection en P, du même Rayon BP, & du point K pour centre, on fera un arc en R, & de KP pour Rayon, & du centre B, on fera une interſection en R, la ligne RB ſera la demandée; autrement on portera trois longueurs égales priſes à volonté ſur cet arc comme en K, L, *m*, & par le premier cas ayant fait KP & LN perpendiculaires ſur l'arc AGB, & égales entr'elles; on tirera les lignes LP, KN qui ſe couperont au point O; enſuite ayant tiré BP, & fait B*q* = KO, par le point *q*, on menera KR = KN, ou BP; enfin par les points R & B, on tirera AB qui ſera la ligne que l'on cherche.

DEMONSTRATION.

Par les Elemens de Géometrie, il eſt évident que ſi l'on tire les cordes *ef* & *hi*, la perpendiculaire ſur le milieu eſt auſſi perpendiculaire aux arcs, dont elles ſont ſous-tendantes; or les deux operations ont été faites, comme ſi les cordes avoient été tirée de *e* en *f*, & de *h* en *i*, & qu'on voulut leur tirer des perpendiculaires, & les diviſer en deux; donc les lignes D*g* & *d*G ſont perpendiculaires à l'arc AGB; de ſorte que ſi l'on prolongeoit ces lignes, elles ſe rencontreroient au centre du cercle en C.

La raiſon de la conſtruction du troiſiéme cas n'eſt pas moins claire, car les triangles LKP, KBR ont été faits égaux; mais le côté KP eſt perpendiculaire à l'arc LKB (par la conſtruction;) donc BR le ſera auſſi au même arc; *ce qu'il falloit faire.*

USAGE.

Ce Problême ſert à tracer les joins de tête de tous les ceintres circulaires des voutes, afin que les Arêtes des angles des Vouſſoirs qui les compoſent, ſoient d'égale reſiſtance; c'eſt ce que les Ouvriers appellent le *Trait quarré ſur la ligne courbe*, & *au bout de la ligne courbe*, lorſqu'il s'agit de faire le joint à une extremité, comme en BR.

Les Ouvriers ont coûtume de faire la même operation ſur les arcs qui ne ſont point circulaires, comme les ſurbaiſſez ou ſurhauſſez qui ſont des portions

portions d'Ellipſes ou d'autres courbes; cependant elle ne convient qu'au cercle, & eſt défectueuſe dans les autres courbes; l'erreur à la verité n'en eſt pas bien ſenſible, lorſque l'on ne ſe ſert que d'une petite longueur des Rayons d'interſection, & qu'on prend une fort petite corde, ou portion d'arc dans les grandes voutes, mais dans les petites; & lorſqu'on prend un grand arc de l'Ellipſe ailleurs qu'aux environs de ſes axes, elle peut être fort ſenſible: en un mot elle eſt contraire à la régularité, à la ſimetrie, & peut nuire à la ſolidité, comme nous l'avons expoſé.

Lemme.

La Perpendiculaire ſur le milieu de la Corde d'un arc de Section Conique autre que le Cercle, & qui n'eſt pas un des Axes, eſt oblique à cet arc.

Soit [*Fig.* 164.] l'arc ADPB portion d'une Ellipſe, d'une Parabole ou d'une Hyperbole, & le point D ou P, qui ne ſoit pas à l'extrêmité d'un des axes de la Courbe: ſi ayant fait $bP = Pe$, des points b & e comme centres, on fait des interſections d'arcs en g & h avec des Rayons égaux, de longeur priſe à volonté, je dis que la ligne menée par ces deux points g & h, qui eſt perpendiculaire à la corde be, ne la ſera point à ſon arc bPe. *Fig.* 164.

Demonstration.

Une ligne n'eſt perpendiculaire à un arc, que lorſqu'elle l'eſt à ſa tangente au point P où elle le rencontre; mais ſi Pt perpendiculaire à Ph eſt une tangente, la corde be qui lui eſt parallele, & coupée en deux également en m par la ligne Ph ſera une Ordonnée, & cette ligne Ph ſera un diametre; or il n'y a de diametres perpendiculaires aux Ordonnées que les axes, donc le point P eſt ſur un axe; ce qui eſt contre la ſuppoſition.

Secondement. il eſt démontré qu'on ne peut mener qu'une tangente par un point P; cependant il eſt clair que par cette conſtruction, on pourroit en mener pluſieurs; car ſi au lieu des points b & e équidiſtans de P, & centres des interſections g & h, on en prend deux autres auſſi équidiſtans de Pe, comme B & r, la corde rB ne ſera plus parallele à be, & par conſéquent la perpendiculaire $\varkappa Py$ ne ſe confondera point avec le premiere gh, mais elle la croiſera, & cependant encore au même point P, $rP = BP$, comme bP étoit égal à PE par la conſtruction, la raiſon en eſt fort ſenſible; car les arcs de l'Ellipſe n'étant pas d'une courbure égale comme ceux du cercle, les cordes égales ne ſouſtendent pas des arcs égaux, celle qui eſt plus près du grand axe, répond à un plus grand arc, que celle qui eſt près du petit axe, où la courbe ſe redreſſe & approche plus de ſa corde, donc par la methode des Ouvriers, on trouve pluſieurs

Digitized by Google

joins de tête differemment inclinez à l'arc, & cependant il n'y en a qu'un seul de bon, qui est la perpendiculaire à la tangente au point de division du joint, donc leur methode est mauvaise; *ce qu'il falloit démontrer.*

On auroit fait peu d'attention à la pratique des Ouvriers, si elle n'avoit été enseigné par les Auteurs qui ont écrit de la coupe des Pierres, lesquels ont dû en sentir l'irrégularité en ce qu'elle ne fait pas des angles égaux de part & d'autre du joint des Voussoirs; de sorte que l'arête de l'un est aiguë, & l'autre obtuse, ce que nous avons cru devoir faire remarquer, avant que d'établir la vraye maniere de tirer les joins sur les arcs de toute autre section conique que le cercle.

PROBEME XXVII.

Par un Point donné à la circonference d'une Section Conique, tirer une perpendiculaire à son Arc.

Il faut premierement connoître les Foyers de la section soit Ellipse, Parabole ou Hyperbole; & s'ils ne sont pas donnez, il faut les chercher par les Problémes II. X. & XI.

Fig. 164. 165. 167. Par les Foyers F & *f* des trois Figures 164. 165. 167. on tirera au point donné D les lignes droites F D & *f* D, qu'on prolongera en M & L, *Fig.* 164. & seulement en L, *Fig.* 165. parce que la Parabole n'ayant qu'un Foyer, on tirera par le point D la ligne D M parallele à l'axe O F H, & pour l'Hyperbole, *Fig.* 167. il ne sera nécessaire de prolonger que F D en L, parce que la ligne *f* D du Foyer opposé, donnera l'angle *f* D L, dont on a besoin.

Du point D comme centre, & d'un intervale pris à volonté, on fera un arc L X M qu'on divisera en deux également en X, par où & par le point donné D, on tirera X D, qui sera la ligne qu'on cherche.

DEMONSTRATION.

Soit tirée par le point D, *t* D T perpendiculaire à D X: il est démontré dans tous les traitez * des sections coniques, que les lignes droites menées des deux Foyers à un même point de la courbe, par lequel passe une tangente, font des angles égaux avec cette tangente *t* T; mais ces angles *f* D T & F D *t*, *Fig.* 164. sont égaux à leurs opposez au sommet *t* D L, T D M; si on leur ajoûte à chacun la moitié de l'angle L D M, les angles *t* D X & T D X, seront égaux entr'eux, donc ils seront droits; or [par la construction] cet angle L D M est divisé en deux également, donc la ligne X D qui le divise, sera perpendiculaire à la tangente *t* T, & par conséquent à l'arc, *ce qu'il falloit démontrer.*

* *Apollonius l.* 3. *pr.* 48. & pour la Par. *l.* 1. *p.* 33.

Digitized by Google

La même démonſtration eſt claire dans la Figure 167. avec cette difference qu'il n'eſt pas néceſſaire de prolonger *f*D, mais ſeulement F D en L, parce que l'angle *f*D T eſt au dehors de l'Hyperbole, & qu'il n'y a que ſon égal T D F, dont un côté eſt dedans.

A l'égard de la Figure 165. pour la Parabole qui n'a qu'un ſeul Foyer F que l'on puiſſe déterminer; on peut ſuivant le ſiſtéme de la Géometrie de l'infini la conſiderer comme un Ellipſe infiniment alongée; alors ſon ſecond Foyer étant infiniment loin, la ligne N D M qui en ſeroit tirée au point D, ſeroit parallele à l'axe O T: il en reſulte en effet la même égalité des angles N D *t*, F D T, comme il eſt prouvé par d'autres moyens; ainſi la même conſtruction pour tirer une perpendiculaire à l'arc d'une ſection conique, ou plûtôt à la tangente au point d'attouchement, eſt la même pour toutes; exceptez pour le cercle où les deux Foyers ſont reünis à ſon centre.

AUTREMENT.

On peut démontrer cette propoſition ſi l'on veut admettre l'axiome que M. de Roberval établit pour l'invention des tangentes que *la direction du mouvement d'un point qui décrit une ligne courbe, eſt la touchante de la ligne courbe en chaque poſition de ce point là*: or la direction des lignes tirées à un point de l'Hyperbole de chacun des Foyers tend à l'éloigner également, donc la ligne qui diviſe également l'angle de ces lignes eſt la touchante, & dans l'Ellipſe l'une de ces lignes tend autant à s'éloigner, que l'autre à s'approcher du Foyer, donc la ligne qui diviſe leur angle eſt la tangente.

USAGE.

On auroit pû intituler ce Problême pour en exprimer l'application à la pratique, *maniere de tracer les joins de tête des ceintres faits d'arcs de ſections coniques*, & on en auroit indiqué tout d'un coup l'uſage pour la coupe des Pierres; mais comme nous n'avons pas encore expliqué ce que c'eſt que *joint*, il convenoit d'énoncer la propoſition en termes géneraux.

Je dirai en paſſant, que ce Problême eſt fondé ſur une verité qui a fourni de merveilleuſes inventions dans la Catoptrique pour refléchir la lumiere; parce que *l'angle d'incidence eſt égal à l'angle de reflexion*; c'eſt de-là que j'en avois tiré la pratique que je donne pour les joins, avant que j'euſſe ſçû que M. Blondel l'avoit déja fait dans ſes Problêmes d'Architecture, mais il n'a pas pourvû au cas ſuivant.

Digitized by Google

PROBLEME XXVII.

Par un Point donné hors de la circonference d'une Section Conique, lui mener une Perpendiculaire.

CE Problême n'eſt pas ſi ſimple que le précedent, & ſe reſout differemment pour la Parabole & pour les deux autres ſections coniques, l'Ellipſe & l'Hyperbole; c'eſt un Problême *de Minimis.*

1.° *Pour la Parabole* [*Fig.* 165.]

Fig. 165. SOIT le point donné P hors de la Parabole, on en abaiſſera une perpendiculaire PH ſur l'axe OS prolongé vers T, s'il le faut; on fera HK égale à la moitié du parametre, c'eſt-à-dire, à 2FS; on diviſera enſuite l'intervale KS en deux également au point *m*, où l'on fera *m*C perpendiculaire à l'axe OS, & égale au quart de HP: ſi du point C pour centre, & pour Rayon l'intervale CS; on décrit un arc de cercle, il coupera la Parabole ASB au point *x*, qui eſt celui que l'on cherche, par lequel & par le point donné P, tirant une ligne P*x*, elle ſera perpendiculaire à la Courbe, ou plûtôt à la tangente T*t* au point *x*.

Nous ne pouvons pas donner la démonſtration de cette conſtruction dans toute ſon étenduë; parce qu'elle ſuppoſe des propoſitions qu'il ſeroit trop long de rapeller ici & de démontrer; nous indiquerons ſeulement ſur quoi elle eſt fondée: du point *x* ayant mené la tangente *x*T juſqu'à l'axe OS prolongé; ce qui eſt facile à faire en portant la diſtance de l'Ordonnée K*x* au ſommet de l'axe S, au-delà du ſommet de S en T: on trouve par les proprietez de la Parabole & du cercle qu'elle coupe, que les triangles PE*x*, & *x*KT ſont ſemblables, & leurs angles K*x*T & P*x*E égaux, auſquels ajoûtant l'angle commun T*x*E, on reconnoitra que l'angle T*x*P eſt droit, *ce qu'il falloit faire.*

2.° *Pour l'Ellipſe.*

Fig. 166. SOIT [*Fig.* 166.] l'Ellipſe ADB, & le point P donné hors de la circonference, par lequel il faut tirer une perpendiculaire à l'arc AD à un point inconnu *x*, qu'il faut trouver ſur cet arc, lequel point ſoit celui d'attouchement d'une ligne *t*T, à laquelle P*x* ſoit perpendiculaire.

ON commencera par chercher le parametre de l'axe AB, comme nous l'avons dit au Problême II, où en portant le demi axe CD en C*d* ſur AB, on tirera AD, & par le point *d*, on lui menera une parallele *de*, qui donnera ſur CD le point *e*, par lequel on tirera AF, qui ſera coupée en F par une parallele BF meneé à CD par l'extrêmité B du diametre AB; la ligne BF ſera le parametre, lequel ſera porté de B en *f*, & de *f* en K

Digitized by Google

parallelement à DC prolongée, par le point K, on tirera l'indéfinie AG: enſuite on prendra la diſtance CH du centre C à la perpendiculaire PH abaiſſée ſur le diametre AB du point P donné, & on la portera de A en *g* ſur AB, on portera H*g* d'A en N ſur l'axe BA prolongé en N, par où on menera MNS parallele à DC; par le point N, on menera NL parallele à PC tirée du point donné P au centre de l'Ellipſe C, & terminée à la rencontre de PH prolongée en L, ce point L donnera la diſtance LH d'une ligne MQ, qu'il faut mener parallelement à l'axe AB, les deux lignes MS & MQ ſeront les Aſymptotes d'un arc d'Hyperbole P*x*y qui coupera l'arc AD au point *x*, que l'on cherche pour tirer la ligne demandée P*x*.

On peut encore trouver la diſtance de la ligne MQ, en portant PH ſur AC qui tombe ici en *g*, & tirer *g*G juſqu'à la rencontre menée par le point G parallelement au diametre AB de AG, la ligne MQ ſera l'Aſymptote.

Les Aſymptotes étant données, il eſt aiſé de trouver autant de points que l'on voudra de l'Hyperbole, qui doit donner le point *x* par ſon interſection avec l'Ellipſe AD (par le Problême XII.) il n'y a qu'à tirer à volonté par le point P une ligne quelconque qui coupe les Aſymptotes, par exemple, SPR en S & en R, ſi l'on porte PS en R*y*, le point *y* ſera un de ceux de l'Hyperbole, par lequel on tirera d'autres lignes à volonté, comme Y*y*V, qui donneront par la même conſtruction d'autres points de cette Courbe vers *x* & Z, en portant la diſtance *y*Y en V, *r* en deça & au delà de *x*, & par les points P*x*Z*r*, on tracera l'Hyperbole P*xryq* qui coupera l'Ellipſe AD au point *x*, par où & par le point P donné, ſi l'on tire la droite P*x* qui eſt une corde de l'Hyperbole, cette ligne ſera celle que l'on cherche, laquelle ſera perpendiculaire à l'Ellipſe, ou plûtôt à ſa tangente *t*T au point *x*.

3.° *Pour l'Hyperbole.*

Soit [*Fig.* 167.] l'axe donné RS, le centre C, la moitié du ſecond axe CV, par le moyen duquel on trouvera CK moitié du parametre, comme on l'a dit au Problême XII. ou en faiſant VK perpendiculaire ſur VR: par le point K, on fera K*r* perpendiculaire à RS, & égale à CR, & on tirera la ligne R*r*: enſuite par le point donné P, ayant mené PE parallale à K*r*, on portera CE en R*e*, & on tirera *eh* parallele à K*r*; on portera auſſi la diſtance *eh* de C en H, par où on menera HG parallele à K*r*, & par H la ligne HI parallele à CP, laquelle coupera PE au point I, par lequel on menera GIN parallele à RS; les deux lignes G*g*, GN, ſont les Aſymptotes d'une ſeconde Hyperbole, laquelle paſſant par le point donné P, doit auſſi paſſer par le point *x* que l'on *Fig.* 167.

Digitized by Google

cherche; la ligne droite menée de P par x ſatisfera à la propoſition, en ce quelle ſera perpendiculaire à l'arc de l'Hyperbole SB, ou plûtôt à ſa tangente tT, au point x, *ce qu'il falloit faire.*

Introduction à la Démonſtration.

La démonſtration de ce Problême dépend d'une autre propoſition; qui eſt que ſi l'on prend ſur un axe d'Ellipſe ou d'Hyperbole un point plus éloigné d'une de ſes extremitez que la longueur de ſon demi parametre, & que la diſtance du centre de cette Ellipſe ou Hyperbole à une Ordonnée au même axe, ſoit en même raiſon avec la diſtance de cette Ordonnée au point donné hors de la Courbe, que l'axe à ſon parametre; la ligne menée de ce point à celui de la courbe, où ſe termine l'Ordonnée eſt la plus petite de toutes celles qu'on y peut mener. Cela ſuppoſé, comme il eſt démontré au Livre VII. *prop.* 6. de ſections coniques de M. de la Hire, ſoit prolongé Px en p, où cette ligne rencontre l'axe AB, & tirée dx parallele à PH, il ne s'agit que de démontrer que l'axe eſt au parametre, comme Cd eſt a dp [*Fig.* 166.]

Par le point x ſoit mené dxX parallele à PH, qui coupera PC en X, & par le point p, ou Px prolongée, rencontre l'axe AB, ſoit menée pz auſſi parallele à PH: pour diminuer le nombre des ſignes, ſoit nommé l'axe AB (a) le parametre BF (b); par la conſtruction $a:b::$ PL, LH:: CN: NH; donc (par la 5.e du 6.e d'Eucl.) les triangles NHL, PHC ſont ſemblables, leſquels ſont encore ſemblables aux triangles Cpz, CdX, à cauſe des paralleles dX & pz; donc Cd: Cp:: dX: pz; & Cp: Cd:: pz: dX en diviſant Cd: Cd — Cp = dp:: dX: dX — pz = qX, & en compoſant Cd + dp = Cd + zq: zq:: dX + qX: qX:: CH + HN: HN:: $a:b$; donc Cd: pd:: $a:b$, donc px [par la propoſition citée ci-deſſus] eſt un *minimum*, par conſéquent auſſi Px, qui eſt par la même raiſon perpendiculaire à la tangente Tt, pP étant une ligne droite; *ce qu'il falloit démontrer pour l'Ellipſe.*

Nous omettons la démonſtration pour l'Hyperbole, elle eſt fondée ſur le même principe, & ſera facile à déduire de la précedente, en faiſant attention aux Aſymptotes, & à leurs proprietez; il faut ſeulement ajoûter, ou l'on retranche pour l'Ellipſe. Le peu d'uſage que nous avons à faire de cette Courbe, n'éxige pas que l'on s'y arrête plus long temps.

USAGE.

Ce Problême de mener une perpendiculaire à une courbe par un point donné au dehors, ne tombe guéres dans la pratique de l'Architecture pour la coupe des Pierres; parce qu'on fait ordinairement les diviſions de joins

Digitized by Google

par des points pris ſur les arcs des ceintres, comme il a été enſeigné au Probléme précedent; cependant comme il peut arriver dans une décoration de vouſſoirs à Croſſettes, ou pour tirer quelques Rayons ſur une Ellipſe, qu'on auroit beſoin de ce Problême; nous avons crû devoir le joindre au précedent pour la perfection de la Doctrine, dans laquelle on ne doit pas négliger ce qui n'eſt pas d'un fréquent uſage, parce que les Livres ſont plus utiles pour les cas extraordinaires, que pour ce qui ſe pratique tous les jours, dont on peut s'inſtruire facilement; d'ailleurs c'eſt un contentement à l'eſprit de ſçavoir ce qu'on auroit à faire, ſi le cas arrivoit.

Je dois avertir d'une petite difficulté qui peut ſe preſenter, & embaraſſer un Lecteur peu verſé dans ces matieres; c'eſt que la perpendiculaire tirée par le point donné P hors de l'Ellipſe ſur l'axe A B, peut tomber hors de cette Ellipſe ſur la prolongation de l'axe; alors l'Hyperbole ne peut rencontrer l'Ellipſe. Pour remedier, au lieu d'abaiſſer la perpendiculaire ſur un axe, il faut abaiſſer ſur ſon conjugue, & faire la même operation.

De la diviſion des Spirales par des Perpendiculaires à leurs Arcs.

Probleme XXIX.

Par un Point donné au contour de la Spirale, tirer une perpendiculaire à ſon Arc.

Premierement il eſt évident que lorſque les ſpirales ne ſont qu'une imitation des vrayes Courbes méchaniques par une compoſition d'arcs de cercles, comme ſont les *Volutes* des Architectes; il n'y a pas plus de difficulté à mener des perpendiculaires à leurs arcs par des points donnez, qu'au cercle; puiſque chacun d'eux a ſon centre different, auquel cette perpendiculaire prolongée doit aboutir.

Secondement s'il s'agit de la ſpirale d'Archimede, ou des autres de Varignon, on ne peut donner la ſolution de ce Problême, qu'en ſupoſant la rectification de la circonference du cercle de revolution; car Archimede a démontré que la ſouſtangente de ſa ſpirale à la fin de la premiere revolution étoit égale à la circonference du cercle circonſcrit; & comme nous ne pouvons faire la diviſion propoſée, que par une perpendiculaire à la tangente de la Courbe au point donné; ce Problême eſt un de ceux dont la ſolution Géometrique ſera auſſi long-temps à trouver que la Quadrature du cercle.

Cependant ſupoſant le rapport du diametre du cercle à ſa circonferen-

re, comme 7. à 22. ou 100. à 314. ce qui eſt ſuffiſant pour la pratique des arcs; il ſera aiſé de trouver les tangentes à la ſpirale d'ARCHIMEDE en tel point que l'on voudra marquer à ſon contour.

Soit [*Fig.* 168.] la ſpirale ADBPC, qui fait deux revolutions completes, la premiere de C en B, la ſeconde de B en A: ſi le point donné pour mener une perpendiculaire à cette Courbe eſt en B, à la fin de la premiere revolution; ayant tiré BC au centre C, on lui fera une perpendiculaire BG égale à la circonference du cercle qui auroit BC pour Rayon, ou à la moitié, comme dans cette Figure, à laquelle menant GT parallele & égale à BC ou à ſa moitié, ſi l'on n'a pris que la moitié de la circonference; du point T on tirera TB, qui ſera la tangente, à laquelle ſi l'on tire par le point B donné, la perpendiculaire BX, cette ligne ſera celle qu'on demande.

Si le point donné eſt en A, à la fin de la ſeconde revolution; on fera de même une perpendiculaire ſur CA, que l'on fera égale à la circonference du cercle qui a CA pour Rayon, ou à ſon tiers comme dans cette Figure, ſur laquelle faiſant *tg* parallele & égale au premier Rayon BC, ou à ſon tiers, la ligne *t*A ſera la tangente au point A, & la perpendiculaire A*x*, celle qu'on demande.

Nous prenons ici des parties aliquotes ſemblables, pour que la Figure n'occupe pas trop de place; ce qui ne change rien à la poſition des tangentes, parce qu'on ſçait que les triangles ſemblables, ont les angles oppoſez aux côtez homologues égaux.

Si le point donné eſt en P dans l'intervale de la premiere revolution, ayant tiré, comme ci-devant, PC & ſa perpendiculaire PH, on portera ſur PH la longueur de la circonference du cercle P*bi*, qui a CP pour Rayon, & faiſant HI parallele à PC & égale à BC Rayon de la revolution complete, où menera IPT, qui ſera tangente au point P, & la perpendiculaire P*x*, celle qu'on cherche.

Si le point donné étoit en *q*, entre la premiere & la ſeconde revolutio BE*q*A, on en agiroit encore de même, ne portant pour la perpendiculaire à la ſouſtangente que le premier Rayon BC.

La démonſtration de cette conſtruction qui eſt de M. PERSONIER de Roberval eſt fondée ſur un principe des mouvemens compoſez qu'on peut voir dans la premiere collection des Memoires de l'Accademie des ſciences, & ſur les 19. & 20.^{e} prop. des ſpirales d'ARCHIMEDE.

Ou pour abreger, il faut multiplier l'arc de revolution (*x*) par ſon Rayon

Digitized by Google

Rayon (y), & le diviſer par le Rayon (a) du cercle de premiere revolution, ſuivant la formule de M. Varignon $\frac{xy}{a}$ pour trouver les ſouſtangentes de cette ſpirale.

Presentement il faut voir comment on doit tirer les ſouſtangentes des autres ſpirales d'un degré plus élevé que celle d'Archimede, comme ſont les Paraboliques, Verticocentrales & les Hyperboliques Cocentrales, dont nous avons donné la conſtruction ci-devant.

Appellant (m) le degré de cette courbe M^r. Varignon trouve pour expreſſion génerale des ſouſtangentes de ces premieres $\frac{mxy}{a}$, c'eſt-à-dire, qu'il faut rectifier l'arc de revolution EN (*fig.* 140. Planche 12.) compris depuis l'axe AX, juſqu'au point donné N, le multiplier par ſon Rayon CN, & par le degré (m) de la courbe Generatrice qui eſt ici 2. puis diviſer ce produit par le Rayon de la premiere revolution complete, & l'on aura la longueur Cx de la ſouſtangente Cx; ainſi ayant tiré du centre C la droite CN au point donné N, on lui menera par le point C la perpendiculaire Cx égale à la longueur trouvée par le quotient de cette diviſion, qui ſera priſe ſur la même échelle qui aura ſervi à meſurer le contour de l'arc de revolution pour le rectifier, & les deux Rayons de l'arc de revolution incomplete, & de la revolution complete. Plan. 12. Fig. 140.

Ou bien ſi l'on veut trouver la longueur de la ſouſtangente ſans calcul, on le peut de la maniere qui ſuit, avec la régle & le compas.

On portera ſur le Rayon CN prolongé le double de ſa longueur en Cn; & ſur CH perpendiculaire à ce Rayon, la longueur CH égale à l'arc de revolution rectifié, puis ayant fait Hg parallele & égale à Cn, on portera ſur la même Hg prolongée la longueur CD du Rayon de la premiere revolution complete, de g en G, laquelle revolution ſe compte depuis le centre C; enfin par les points G & n, on tirera la ligne Gnx qui rencontrera HC prolongée en x; la ligne menée du point x par le point donné N, ſera la tangente que l'on cherche.

La raiſon de cette operation eſt facile à concevoir, ſupoſant que l'expreſſion Algebrique $\frac{mxy}{a}$ pour les ſpirales Paraboliques Verticocentrales a été démontrée par M. Varignon, comme elle l'eſt en effet dans les Memoires de l'Academie des Sciences; car il eſt clair que je conſtruis cette équation qui eſt dans ce cas $\frac{2xy}{a}$, c'eſt pourquoi je porte le double du Rayon CN$=y$ en Cn pour avoir un Parrallelograme C$g=2xy$; enſuite pour le diviſer par a, c'eſt-à-dire, par le Rayon de la premiere revolu-

tion complete qui eſt CD, parce que la ſpirale fait deux revolutions & demi de C en A, je porte CD (a) de g en G, pour tirer Gnx qui ſeroit la Diagonale d'un rectangle fait de HG par Hx, ſuivant laquelle les complemens ſont égaux (par la 43.^{e} du I. Livre d'EUCLIDE,) ainſi le rectangle Hn qui eſt un de ces complemens, ſera égal à celui qu'on peut ſuppoſer de l'autre côté de cette Diagonale, lequel ayant pour un de ſes côtez $gG = CD = a$, aura par conſéquent l'autre égal à Cx qu'on cherche; puiſqu'en diviſant un rectangle par une de ſes Racines, le quotient donne l'autre.

ON ſera peut-être ſurpris que j'applique à l'exemple que je donne d'une ſpirale Circulaire, l'expreſſion des ſouſtangentes, des Paraboliques Verticocentrales: il ne faut pas prendre ici le nom de Parabole dans la ſignification ſeule de celle d'APOLLONIUS, mais auſſi pour les autres de differents degrez, qui ſont tous deſignez par la lettre m, ainſi il faut remarquer que le quart de cercle dans cette ſituation eſt une eſpece de demi-Parabole; en effet ſuivant la Géometrie de l'infini, cette courbe n'eſt qu'un demi cercle infiniment alongé; puiſque dans le cercle, les quarrez des Ordonnées ſont entr'eux comme les rectangles des Abſciſſes, & dans la Parabole, dont le diametre ou plûtôt l'axe eſt infini, les abſciſſes ne different que d'une longueur finie, elles ſont cenſées égales, meſurées depuis le point de rencontre de l'Ordonnée à la partie qui s'alonge infiniment; d'où il ſuit que les quarrez des Ordonnées de la Parabole ſont comme leurs abſciſſes, donc l'expreſſion des ſouſtangentes convient au quart de cercle Verticocentral; puiſqu'elle convient de plus à d'autres Courbes, dont les abſciſſes ſont entr'elles, comme les puiſſances quelconques de leurs Ordonnées, ainſi que le démontre M. VARIGNON.

ON a pû remarquer que j'ai pris le nombre *deux* pour la valeur de m, parce que la Parabole & le cercle ſont du ſecond degré, ſur quoi on pourroit me demander quelle eſt la Courbe parabolique du premier degré, puiſque celle-ci eſt du ſecond; à quoi je répondrai que c'eſt le triangle, s'il eſt permis de le mettre au rang des Sections coniques & des Courbes; car on peut lui trouver des abſciſſes & des ordonnées, comme je l'ay dit au I. Livre page 16. & ſous cette conſideration, on peut le regarder comme la Generatrice de la ſpirale d'ARCHIMEDE, dont les arcs de revolution ſont entr'eux comme leurs Rayons; c'eſt pourquoi l'expreſſion m s'évanoüit, de ſorte que celle des ſouſtangentes ſe réduit à $\frac{xy}{a}$ qui eſt plus ſimple que la précedente, dont nous avons donné la conſtruction $\frac{2xy}{a}$, où nous avons doublé la longueur de CN, qu'il ne faut pas doubler à la ſpirale d'ARCHIMEDE.

Digitized by Google

La même conſtruction que nous avons donné pour trouver les ſous-tangentes des Spirales paraboliques, Vertico-centrales, ſert pour trouver celles des Hyperboliques Cocentrales, dont nous avons donné un exemple à la Figure 141. avec cette difference que l'expreſſion Algebrique devenant negative, il faut operer en ſens contraire, c'eſt-à-dire, prendre les ſouſtangentes du côté oppoſé.

REMARQUE.

Il arrive aſſez ordinairement que les ſouſtangentes deviennent ſi longues, qu'elles ne peuvent être contenuës dans la ſurface, ſur laquelle on trace l'Epure, c'eſt-à-dire, le deſſein de grandeur naturelle à l'ouvrage qu'on ſe propoſe; pour remedier à cet inconvenient, il faut ne prendre que le tiers ou le quart, ou toute autre partie des longueurs données, & mettre la ſouſtangente ſur le Rayon perpendiculairement, & à une diſtance proportionelle du centre C.

USAGE.

Le principal uſage du Problême qui enſeigne la maniere de mener des tangentes aux ſpirales eſt, comme nous l'avons dit, pour la coupe des joins des Volutes, Conſoles, Colimaçons & autres ouvrages en ſpirale, qu'on peut faire de pierre de pluſieurs pieces; mais il faut remarquer que le liſtel de la Volute étant compoſé de deux ſpirales differentes, l'une qui forme l'arête exterieure, l'autre l'interieure, la perpendiculaire à la tangente de l'une des deux, ne l'eſt pas à l'autre; de ſorte que ſi le joint eſt en bonne coupe ſur une arête, il ſera en fauſſe coupe ſur l'autre; mais comme ce mal eſt ſans remede, à moins que de faire le joint courbe; il convient pour la plus grande régularité de tracer entre les ſpirales de ces deux arêtes une moyenne par les diviſions de la moitié de la largeur du liſtel, ou de celle du Limon, s'il s'agit du Colimaçon, & mener les perpendiculaires aux tangentes ſur les points de diviſion pris ſur cette ſpirale moyenne; ainſi la fauſſe coupe ſe diviſera partie ſur l'arête exterieure, partie ſur l'arête interieure.

Le ſecond uſage de ce Problême eſt pour faire un *Oeil* circulaire au milieu de la ſpirale qui puiſſe ſe racorder avec elle ſans aucun jarret à la jonction de ces deux Courbes; car ayant déterminé ſur la ſpirale un point, où l'on veut qu'elle ſe joigne à *l'œil* circulaire, il faut mener par ce point une tangente & une perpendiculaire à cette tangente par le même point, ſur laquelle on prendra le Rayon du cercle qui doit former *l'œil*, & par ce moyen les deux courbes ſe joindront par une tranſition inſenſible ſans aucun jarret.

Digitized by Google

D'ou il ſuit que le centre de *l'œil* ne tombera pas ſur le centre de la ſpirale, parce qu'il n'y a que le cercle dont la perpendiculaire à la tangente paſſe par le centre; cette proprieté ne lui étant pas commune avec la ſpirale.

CETTE perfection de jonction des deux Courbes ſe trouve obſervée dans la Volute de GOLDMAN, qui n'eſt pas pour cela une ſpirale Géometrique, quoiqu'en diſe DAVILER, mais une compoſition d'arcs de cercles, dont la ſuite des Rayons n'eſt pas en raiſon exactement uniforme, comme je le dirai en ſon lieu; ainſi la cathete d'une volute en ſpirale Geometrique ou Mechanique paſſant par le centre de *l'œil*, ne doit pas paſſer par celui de la ſpirale, ou ſi l'on veut qu'elle paſſe par le centre de la ſpirale, elle ne paſſera pas par celui de *l'œil*; c'eſt à l'Architecte à choiſir l'un des deux, l'éloignement de ces deux centres peut être plus ou moins grand, ſuivant la grandeur ou la petiteſſe de *l'œil* de la volute, & la diſtance du point d'attouchement de la ſpirale (où ſe fait la jonction) de ſon centre, ſi le Rayon de l'œil eſt plus petit que cette diſtance, ſon centre tombera au dedans, s'il eſt plus grand, au dehors.

Des diviſions de quelqu'autres Courbes uſuelles par des Perpendiculaires à leurs Arcs.

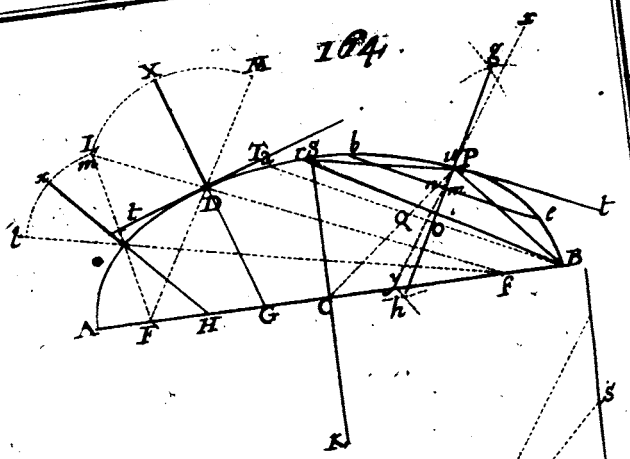
OUTRE les Courbes des ſections coniques & les ſpirales; il s'en trouve encore d'autres à diviſer par des perpendiculaires à leurs arcs, dans quelques *Traits* de la coupe des Pierres; mais ſi rarement qu'il n'eſt pas fort néceſſaire de s'arrêter à en chercher les tangentes.

LA premiere eſt celle d'une eſpece de Cicloide, qui eſt la courbe développente de la circonference de la face de la *Trompe érigée ſur une ligne droite*, ſuivant le Trait du P. DERAN; ſur laquelle il faut tirer les joins de tête, ce qu'il fait en operant ſur cette Courbe, comme ſur un arc de cercle, en prenant de part & d'autre des ouvertures de compas égales, & faiſant des deux diſtances, comme centres des arcs de cercle qui ſe coupent, & donnent à peu près cette perpendiculaire, & ſuffiſamment pour qu'on n'en puiſſe appercevoir l'irregularité, ſi l'on prend de petites diſtances du point donné à diviſer; nous donnerons un autre trait de la même Trompe, où l'on n'a pas beſoin de cette operation.

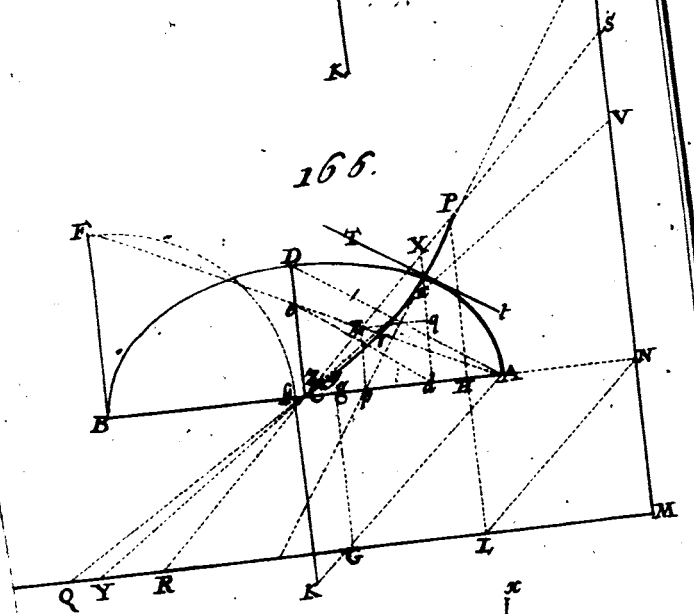
La ſeconde eſt cette Courbe du quatriéme ordre, dont nous avons parlé, qui eſt la ſection d'un Anneau, ou d'une Helice: dans celle-ci on n'a pas beſoin de faire des joins de tête réguliers, parce qu'elle n'eſt pas

Digitized by Google

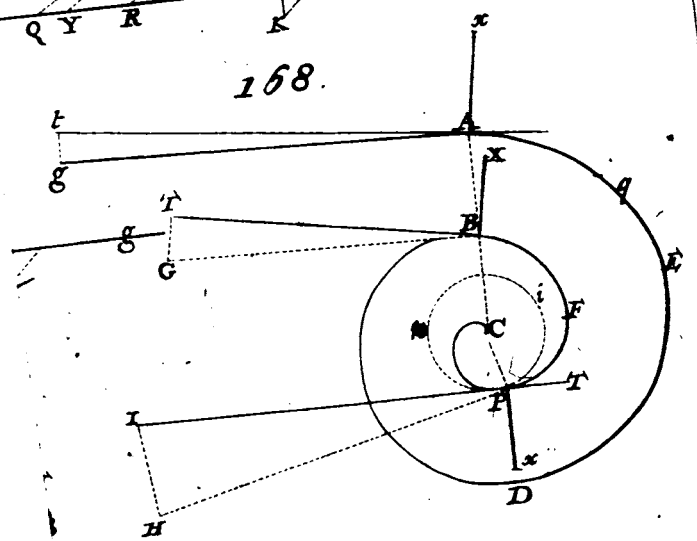
164.



166.



168.



UNIV. OF MICH.

Digitized by Google

Digitized by Google

employée pour une face aparente, & quand elle le ſeroit, l'inclinaiſon des joins ſe trouveroit déterminée par celle de l'arc droit de la voute qui n'eſt qu'un demi cercle ou une demi-Ellipſe.

La troiſiéme ſeroit la chainette qu'on pourroit employer pour mettre l'équilibre entre les Vouſſoirs égaux; mais outre qu'au lieu de cette Courbe, on pourroit ſe ſervir de la Parabole, qui en eſt très peu differente; c'eſt que l'une & l'autre ne conviennent guére aux ceintres, ſi l'on a quelque égard à l'agrément de leur contour, & à celui de leur naiſſance à l'impoſte, lorſque les piedroits ſont à plomb: cependant les Curieux pourront ſe ſatisfaire ſur la maniere de trouver des tangentes à la chainette, en cherchant cette ſolution dans les Actes de Leipſic de l'année 1691. *page* 275. ils y trouveront celle qui a été donnée par le célebre M. Bernoulli Profeſſeur des Mathematiques à Baſle, un des plus grands Hommes de notre tems: ſi par un hazard extraordinaire il ſe preſentoit d'autres Courbes à diviſer, on pourra s'en tirer en operant, comme ſur un arc de cercle, & corrigeant à la vûë ce qui pourroit paroître défectueux.

SECONDE PARTIE

Du Second Livre.

CHAPITRE V.

De la deſcription des Sections des Corps qui ne doivent, ou ne peuvent être décrites que ſur des Surfaces Concaves ou Convexes.

LES Sections dont nous avons parlé dans la premiere Partie de ce Livre ont été conſiderées, comme devant être décrites ſur des ſurfaces planes, quoiqu'elles ſoient originaires des ſurfaces courbes: il s'agit à preſent de les tracer ſur les ſurfaces qui leur ſont naturelles, de même que celles qui ne peuvent être décrites ſur des plans, auſquels elles ne peuvent s'adapter. Cependant, parce que les points des contours de ces dernieres ne peuvent ſe trouver que par le ſecours des lignes droites qu'on ne peut chercher ſur des ſurfaces courbes, en ce qu'elles ne ſont pas à la ſurface du ſolide, mais au dedans, comme ſont les Rayons, les Ordonnées & les abſciſſes; il a fallu avoir recours à une repreſentation imparfaite & défigurée faite ſur une ſurface plane par des paralleles abaiſſées ſur cette ſurface de pluſieurs points de la Courbe: ce qu'on a appellé *la projection*, du mot latin *projicere*, qui veut dire jetter, comme ſi tenant un corps en l'air, on jettoit ou laiſſoit tomber de chacun de ſes points une goûte d'ancre ſur un plancher, la ſuite de ces goûtes liées par une ligne continuë, donneroit une Figure qui ſeroit la projection de ce corps.

De la Projection.

LE mot de Projection a pluſieurs ſignifications, il peut s'appliquer à l'action de jetter, mais nous la reſſerons ici à la deſcription d'un corps formée ſur un plan par des perpendiculaires à ce plan, ou ſi l'on veut l'étendre encore d'avantage, par des paralleles menées des angles de ce

Digitized by Google

corps ou de plusieurs points de son contour sur ce plan en quelque situation qu'il soit à son égard.

Il suffit cependant à l'usage que nous en devons faire, de considerer les lignes Verticales & les Horisontales; parce que c'est à ces deux genres de situations constantes, & que l'on peut toujours déterminer, qu'on doit rapporter les lignes inclinées à l'Horison: selon cette restriction nous pouvons dire, pour nous accommoder aux termes de l'Art, que la projection d'un corps est la trace de plusieurs *a-plombs* abaissez de leurs angles ou de leurs contours pour en faire *le plan* ou Ichnographie, ou de plusieurs lignes de niveau tirées de même de ses angles, ou de son contour sur une surface *a-plomb*, pour en faire les *Profils* ou les *Elevations*.

COROLLAIRE GENERAL.

D'où il suit que la Projection faite sur un Plan Vertical ou Horisontal, raccourcit la representation de toutes les Lignes & Surfaces qui ne sont pas paralleles au Plan sur lequel on la fait.

Pla. 16.

Car soit [*Fig.* 169.] la ligne AB, dont on fait la projection sur le plan *gb*: il est évident que si cette ligne étoit dans la situation aB parallele à ce plan, les perpendiculaires aD, BF abaissées de ses extremitez seroient aussi paralleles & égales, & par conséquent que la representation DF seroit égale à aB; mais que si l'on transporte le point a en A sans mouvoir le point B, on racourcira la representation de cette ligne de la distance qu'il y aura de la perpendiculaire aD, à AE qui est égale au sinus verse aS de l'angle aBA de l'inclinaison de la ligne AB abaissée à son extremité A au dessous de la ligne Horisontale aB, si la projection se fait par des Verticales; donc la representation EF sera plus petite que la ligne AB. *Fig.* 169.

On peut démontrer cette verité d'une maniere plus simple en menant AC parallele à EF, parce qu'alors on reconnoîtra que la projection d'une ligne qui n'est pas parallele au plan de description, est toûjours égale au côté d'un triangle rectangle, dont la ligne objective est l'hypotenuse; d'où nous tirons la proposition suivante, qui est fondamentale pour tracer les desseins qu'on appelle les *Epures* pour la coupe des Pierres.

THEOREME.

Les Projections des Lignes courbes qui sont dans un Plan perpendiculaire à un ou plusieurs autres Plans de description, sont des Lignes droites, dont les divisions faites par des paralleles menées par plusieurs Points de ces Courbes, sont toûjours en même proportion avec les Abscisses co-ordonnées.

Premierement il est clair que la projection d'une ligne courbe qui est *Fig.* 170.

Digitized by Google

dans un plan perpendiculaire à celui de deſcription eſt une ligne droite; car puiſque toutes les lignes menées des points de la Courbe ſur le plan de deſcription, ſont dans le même plan; on ne doit plus conſiderer que la ſection des deux plans, laquelle ſuivant la Geometrie Elementaire eſt néceſſairement une ligne droite : ainſi la projection de l'Ellipſe ABDE [*Fig.* 170.] eſt la ligne *ad* dans le plan *gh*, & la ligne *be* dans le plan *gk*, l'une *ad* eſt Horiſontale ſur le plan Horiſontal, & l'autre *be* Verticale ſur le plan Vertical; & les points c^1, & C^2 de ces deux lignes ſont la repreſentation de trois points raſſemblez en un, ſçavoir, *c* qui repreſente les points B, C, E & C^2 les points A, C, D, de ſorte que *ca* & *cd* ſont les repreſentations d'un quart ou d'une moitié d'Ellipſe; ce qui eſt viſible, & à quoi il faut s'accoûtumer pour concevoir tout ce que nous dirons dans la ſuite ſur des Figures, où nous n'exprimeront ſouvent les lignes courbes, que par des droites.

QUANT à la ſeconde partie de ce Théoreme touchant le rapport des diviſions faites par des paralleles menées de pluſieurs points des Courbes; nous n'étendrons la démonſtration qu'aux ſections Coniques, qui ſont preſque les ſeules dont nous avons à faire, particulierement du cercle & de l'Ellipſe.

Fig. 171. SOIT une ligne *k*L ou *be* [*Fig.* 171.] coupée par des paralleles *at*, Q*s*, P*r*, le rectangle de *a*T×T*d*: *k*T×TL :: Q*c*×*cq*: *kc*×*cl*, il en eſt de même des rectangles faits par les parties de la ligne *be* coupées par les Paralleles *at*, Q*s*, P*r*; donc les points T*cz*, ſections de lignes tirées des points *a*QP ſur la ligne *k*L donnent des diviſions ſur cette ligne qui ſont en même raport entr'elles, que celles que les mêmes points *a*QP donnent ſur la ligne *be*, quoique differemment ſitué à l'égard de l'arc *a*P de l'Ellipſe, au dedans de la Courbe.

IL ne ſera pas difficile de faire voir que le même raport ſubſiſtera à l'égard des lignes qui ſont hors de la Courbe, par exemple de *g*H, car ſi l'on mene par le point *g* une ligne *gf* parallele à *be*, il eſt évident que les diviſions *rs* & *st* ſont égales à *zn* & *nm*, mais à cauſe de paralleles *at*, Q*s*, P*r*, les triangles *g*tM, *g*sN, *g*rO ſont ſemblables; donc *rs*=*zn*: *st*=*nm* :: ON: NM:: *zc*: *c*T, donc la projection des points PQ*a*, ou *pqd*, faite par des lignes paralleles entr'elles, donne toûjours des diviſions qui ſont en même raport entr'elles, ſur les plans differemment ſituez à leur égard, ſoit au dedans, ſoit au dehors de la Courbe, & quelque angle que les lignes de projection faſſent avec ces plans; *ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE

Corollaire I.

D'ou il ſuit que la projection faite ſur des plans perpendiculaires aux paralleles de projection, n'eſt pas une repreſentation plus réguliere des objets, que celle qui eſt faite par des lignes obliques, & que cette maniere de repreſenter les corps eſt Géometrique; puiſqu'elle conſerve toûjours un certain rapport des parties des Courbes projettées.

Corollaire II.

De-la il ſuit que ſi l'on fait la projection d'un cercle par des lignes paralleles, perpendiculaires ou obliques au plan de deſcription; les diviſions correſpondantes des deux côtez de la ligne de projection qui paſſe par ſon centre, ſeront égales entr'elles, à cauſe de l'uniformité de cette Courbe: il en ſera de même à l'égard de l'Ellipſe, lorſque la projection ſe fera par des lignes perpendiculaires au plan de deſcription.

Ce que nous diſons du cercle & de l'Ellipſe eſt encore vrai à l'égard de la Parabole & de l'Hyperbole, lorſque les lignes de projection ſont paralleles à leurs axes.

On peut étendre ce Théoreme à d'autres courbes qu'aux Sections coniques, comme aux ſpirales, & aux Ovales faites par la ſection des corps Annulaires, dont nous avons parlé: en un mot la projection conſerve toûjours une certaine régularité de rapport, qui eſt le ſeul moyen d'adapter à une ligne droite quelques proprietez d'une ligne courbe, & d'appliquer ſur un plan les ſurfaces concaves ou convexes, ſans confuſion de leurs parties, quoiqu'elle transforme quelquefois une courbe en une autre.

Theoreme.

La Projection d'un Cercle qui n'eſt pas parallele à ſon plan de deſcription eſt une Ellipſe, & au contraire celle de l'Ellipſe peut être un Cercle; & celle des Ellipſes, Paraboles ou Hyperboles, eſt une Courbe d'une même eſpece plus ou moins alongée.

Soit [*Fig.* 172.] le quart de cercle AEFC dans le plan AEHC, ſur lequel on fait la projection de ce même quart de cercle ſuppoſé élevé ſur ce plan en D, de l'intervale de l'arc DE, meſure de ſon angle d'inclinaiſon DAE, le Rayon AC demeurant immobile ſur le plan. Des points D & G pris à volonté à la circonference du quart de cercle, ayant abaiſſé ſur le même plan les perpendiculaires D*d*, G*g* qu'il faut ſuppoſer telles, quoiqu'elles ne le ſoient pas dans la Figure, à cauſe de la perſpective; ſi par les points *d* & *g* on tire les droites A*d*E, B*g*F perpendiculaires *Fig.* 172.

Digitized by Google

au Rayon AC, on aura deux triangles ſemblables A*d*D, B*g*G rectangles en *d* & *g*, par la conſtruction, & dont les angles en A & B ſont égaux, puiſqu'ils ſont celui de l'inclinaiſon des deux plans des quarts de cercle DAC & EAC, donc A*d*: AD:: B*g*: BG; mais AD = AE & BG = BF; donc AE: A*d*:: BF: B*g*, c'eſt-à-dire, que les Ordonnées de la courbe ſont entr'elles comme celles du cercle; ce qui n'appartient qu'à l'Ellipſe,* *& qu'il falloit démontrer.*

* L. I. art. 41.

On auroit pû démontrer la même choſe tout d'un coup en conſiderant le cercle à la ſurface d'un Cylindre ſcalene, dont la ſection perpendiculaire à l'axe eſt une Ellipſe; car les lignes de projection étant multipliées à l'infini, & paſſant à la circonference d'un cercle formeroient la ſurface d'un Cylindre.

Par ce moyen on démontre tout d'un coup la ſeconde partie de ce Théoreme, qui dit que la projection d'une Ellipſe eſt ſouvent un cercle, & ordinairement une Ellipſe plus ou moins alongée; car l'Ellipſe conſiderée à la ſurface du Cylindre Droit ſe reduit à un cercle à ſa baſe, & ſi le Cylindre eſt coupé plus ou moins obliquement, ſoit qu'il ſoit droit ou ſcalene, la ſection eſt un Ellipſe plus alongée ou plus racourcie.

La même démonſtration ſert pour la troiſiéme partie, qui dit que la projection des Paraboles & Hyperboles ſont des courbes de même eſpece, comme il a été dit au Théoreme III. qui ne different de celle qu'on veut repreſenter par la projection, qu'en ce qu'elles ſont plus ou moins alongées ou racourcies, ſuivant le plus ou moins d'obliquité de la ſection; car les lignes de projection multipliées à l'infini forment un corps cylindrique qui a pour baſe une Parabole ou une Hyperbole, c'eſt l'inverſe du Théoreme III.

Corollaire.

D'ou il ſuit que plus les lignes de projection ſont les angles aigus, avec le plan de la Figure qu'on veut projecter, plus la Figure ſe reſſerre; de ſorte que ſi ces lignes ſont un angle infiniment aigu, elles tombent dans le plan de la Figure, & la reduiſent à une ligne droite, comme nous l'avons dit ci-devant.

Usage.

L'application de cette propoſition ſe preſente tous les jours à la pratique de la coupe des Pierres & des autres ouvrages d'Architecture; car la projection, c'eſt-à-dire, en termes de l'art le *Plan* d'une porte, ſoit en plein ceintre, ſoit ſurhauſſée, ſoit ſurbaiſſée, dans un mur en Talud,

Digitized by Google

comme ſont ordinairement ceux des revêtemens des Fortifications, eſt une Ellipſe fort reſſerrée, ſuivant le plus ou le moins d'inclinaiſon du Talud, & celui d'un joint de lit d'une Niche ſpherique en Coquille eſt de même une Ellipſe qui ſe reſſerre vers la Clef, où elle devient une ligne droite, & s'ouvre vers les Impoſtes, où elle devient un arc de cercle.

Ces deux propoſitions ſont encore néceſſaires pour l'intelligence des Figures ſuivantes, & des Traits en géneral, où l'on repreſente ſouvent les cercles & les Ellipſes par des lignes droites, qui en ſont la projection, ou par des Ellipſes extrêmement reſſerrées.

De la deſcription du Cercle ſur les Surfaces concaves ou convexes de la Sphère, du Cône & du Cylindre.

Probleme XXX.

Par deux ou trois Points donnez ſur la ſurface d'une Sphère, décrire un Cercle.

On doit conſiderer la ſurface de la ſphère comme compoſée de deux Figures, l'une concave, l'autre convexe; cette difference n'eſt pas un objet pour la Théorie, où l'on n'a pas égard à l'impénetrabilité des corps; mais bien pour la pratique qui ne peut operer ſur l'une comme ſur l'autre.

Premierement s'il s'agit de décrire un cercle Majeur dans la ſurface concave; il ſuffit qu'on ait deux points donnez, pourvû qu'on connoiſſe le diametre de la ſphère, & qu'ils ne ſoient pas diametralement oppoſez; car il eſt clair par la géneration de la ſphère (*Art.* 1.) que le diametre d'un cercle devient l'axe de la ſphère, lorſqu'on le fait mouvoir autour de ce diametre; par conſéquent qu'il eſt commun à tous les cercles qui paſſent par l'axe de la ſphère.

Si les deux points donnez ſont moins éloignez que de 180. degrez, on ne peut y faire paſſer qu'un cercle Majeur, mais une infinité de cercles Mineurs de differentes grandeurs; d'où il réſulte que, pour ceux-ci, ce n'eſt pas aſſez de deux points donnez, il en faut trois, pour en déterminer la poſition & la grandeur; parce qu'il en faut chercher le diametre comme il ſuit.

Soient les trois points donnez ABE [*Fig.* 173.] dans la ſurface concave de la ſphère; on en meſurera les diſtances pour en faire à part, ſur *Fig.* 173.

une muraille ou autre ſurface plane un triangle ABE, puis par les points B & E, on tirera aux lignes AE, AB des perpendiculaires B*d*, E*d* qui ſe rencontreront au point *d*, ſi par ce point *d* & l'oppoſé A, on tire une ligne A*d*, elle ſera le diametre qu'on cherche.

COROLLAIRE.

DE cette méthode on tire celle de trouver le diametre d'une ſphère; car ſi avec un cordeau de longueur arbitraire, & d'un point P pris à volonté pour Pole, on décrit un cercle ſur la ſurface concave, en ayant trouvé le diametre par la pratique précedente, on fera un triangle Iſoſcele de la longueur du diametre AE pour baſe, & des deux longueurs du cordeau AP, EP pour côtez; leſquels on fera aux points A & E, deux perpendiculaires qui ſe rencontreront au point D: la ligne PD ſera le diametre de la ſphère qu'on cherche; cela ſuppoſé pour décrire un cercle Majeur par les deux points donnez A & B, [*Fig.* 173.] il faut tracer à part ſur une ſurface plane un quart de cercle, [*Fig.* 174.] ou ce qui eſt la même choſe un triangle Rectangle Iſoſcele, dont les jambes a*c*, *pc* ſoient égales au Rayon de la ſphère, l'Hypotenuſe *ap* ſera la corde d'un arc de 90. degrez qui ſervira à trouver le Pole du cercle propoſé.

Fig. 175.

Fig. 174.

Fig. 173. DES points A & B comme centres, & la corde *ap* pour Rayon, on fera une interſection de deux arcs de cercles qui ſe couperont en P, où ſera le Pole, duquel on décrira le cercle Majeur EABF, qui eſt répreſenté ici en Perſpective, c'eſt-à-dire, qu'on y fixera le cordeau, une perche ou un ſimbleau, pour tracer le cercle dans la ſurface concave de la ſphère à peu près comme on ſe ſert du centre ſur une ſurface plane.

J'AY dit dans la ſurface concave, parce qu'il eſt viſible qu'on ne peut pas operer de même ſur la Convexe, ſur laquelle au lieu de ſe ſervir de la corde *a*P pour Rayon des interſections qui donnent le Pole; il faut ſe ſervir de l'arc *a*L*p*; c'eſt pourquoi il faut un inſtrument pour y ſuppléer, ou un compas à pointes courbées, ſi la ſphère eſt petite comme ſont dans l'Artillerie les Boulets & les Bombes; mais ſi la ſphère eſt grande comme une voute, au lieu d'un cordeau, il faut ſe ſervir d'un aſſemblage de trois pieces de bois *p*H, H*g*, *ga* aſſemblées à angle droit, dont la grande H*g* ſoit égale à la corde *pa*, & les deux autres à la fleche *f*L; & pour les entretenir en cet état, il faut les lier par des liens ou écharpes IK, *ik*, qui les empêchent de s'ouvrir ou de ſe fermer.

POUR trouver le Pole d'un cercle mineur, dont on a trois points donnez [*Fig.* 175.] on décrira ſur une ſurface plane par le moyen du triangle ABE le cercle AE*d*, puis ayant diviſé l'arc BE en deux également en *m*, on tirera le diametre *md* perpendiculairement à BE, ſur le milieu

Fig. 175.

e, duquel on menera la perpendiculaire X*cx*, puis du point *m* ou *t*, pour centre, & de l'intervale du demi diametre de la ſphère pour Rayon, on décrira des arcs de cercle qui couperont la perpendiculaire X*x*, aux points *x* & X, où ſeront les Poles du cercle mineur ABE*d* que l'on cherche; ainſi les diſtances X*m*, ou *x t* ſeront les Rayons des interſections des arcs de cercle qu'on fera des points B & E, comme centres pour avoir le point d'un des Poles, comme nous l'avons dit ſur la Figure 173.

* au point C, qui repreſente centre de la ſphère, duquel et avec le même rayon on décrira des arcs, qui couperont la ligne X*x*.

Ou bien méchaniquement & avec une exactitude ſuffiſante pour la pratique, on enfilera trois cordeaux égaux dans un Anneau *Fig.* 173. en S pour la ſurface convexe, & en P pour la concave, qui ſeront d'une longueur proportionnée à peu près à celle qu'on juge à vûë d'œil, & un peu plus longue; on les noüra enſemble par un bout. & on attachera les autres aux points donnez, puis faiſant couler l'Anneau, en raprochant de la ſurface de la ſphère les trois cordeaux également tendus, on parviendra exactement au Pole, où on attachera un des cordeaux pour tracer le cercle demandé ſur la ſurface de la ſphère. Cette méthode a cela de commode qu'elle peut ſervir ſur la ſurface convexe, en éloignant l'Anneau au deſſus du Pole autant qu'on le voudra, pour éviter le frottement du cordeau qui ſert de ſimbleau, lequel doit être tangent à la ſphère, pour n'être point plié ſur la ſurface convexe, où ce pli, ou plûtôt cette courbure cauſeroit des ondulations par le frottement.

Mais ſi on avoit un cercle Majeur à décrire comme les ſocles ou les côtez d'une couverture de Dome, tels qu'on en voit à celui des Invalides; on ne pourroit aſſez élever le point S pour éviter le frottement, c'eſt pourquoi il faut ſe ſervir du niveau ou du plomb; ſi les Cherches doivent être de niveau comme les ſocles, ou à plomb comme les côtes, ou ſi de tels ornemens étoient inclinez, comme des entrelas de cercles, il faudroit avoir, au Pole, une perche perpendiculaire à la ſurface convexe par la pratique dont nous parlons, qui ſerviroit à aligner le cordeau, afin qu'en le courbant, il ne ſe detournât point de ſa direction; parce que pour peu qu'il ſe courbe à droite ou à gauche, il ſe racourcira & donnera de faux points du cercle propoſé.

Demonstration.

Premierement il eſt clair qu'ayant trouvé la corde de 90. degrez de la circonference de la ſphère, & l'ayant appliquée aux deux points donnez, la rencontre de deux de ces cordes égales eſt le Pole qui eſt toûjours éloigné de 90. degrez d'un grand cercle, par la 16.e propoſition des Sphériques de Theodose. *Fig.* 174.

Secondement pour trouver le diametre d'un cercle, dont on a trois points donnez, nous avons élevé des perpendiculaires ſur A B & A E pour avoir

Digitized by Google

la position de ce diametre ; parce que (par la 31.e Prop. d'Euct. l. 3.) l'angle droit est toûjours dans le demi cercle, & puisque les lignes B *d* & E *d* sont bien posées, leur rencontre se terminera au point de la circonference du cercle diametralement opposé au point A : la même construction est encore plus intelligible dans le Corollaire pour trouver le diametre de la sphère.

Troisiémement il est démontré dans la 13.e proposition des Sphériques de THEODOSE, que si dans la sphère un cercle en coupe un autre en deux également & perpendiculairement, les Poles de celui qui est coupé, sont dans la circonference de celui qui le coupe, & à distances égales ; or il est visible que le cercle Mineur A B E *d* est coupé en deux également par son diametre *m t*, lequel est la corde d'un cercle Majeur, dont le diametre X *x* est élevé perpendiculairement sur cette corde ; par conséquent les points X & *x* sont les Poles du cercle A B E *d*, & les lignes X *m*, X *t*, *x m* & *x t*, les distances sont de ces Poles au cercle ; car quoique les deux cercles Majeur & Mineur soient dans cette Figure sur un même plan, il faut les concevoir à angle droit l'un à l'autre ; de sorte que supposant le Mineur dans le plan du papier, le Majeur seroit élevé en l'air perpendiculairement en tournant sur la corde *m t*, qui doit être immobile.

U S A G E.

CE Problême est nécessaire aux Peintres, aux Sculpteurs en Stuc ou en Platre, & aux Marbriers qui ont des ornemens Circulaires à tracer dans la surface concave d'une voute Sphèrique, ou sur la surface convexe, comme par exemple des Socles, des côtes d'arcs doubleaux, des bordures de bas relief, ou des ouvertures feintes, ou des entrelas Circulaires.

A l'égard des ouvertures vrayes ou feintes faites après coup dans une voute Sphèrique ; je dirai en passant que VIVIANI *a trouvé le moyen de percer une voute Hemisphérique en quatre endroits pour des Fenêtres, en sorte que le reste de la voute soit géometriquement quarrable.*

QUOIQUE cette proposition n'ait aucun rapport à notre sujet qui n'a pour but que la division des surfaces & non pas leur étenduë ; je crois qu'on ne sera pas fâché de cette petite digression : la construction de ce Problême consiste à diviser la base de l'Hémisphère par deux diametres à angles droits, sur lesquels ont fait quatre petits demi-cercles pour bases de quatre moitiez de Cylindres droits, qui percent l'Hémisphère ; le restant des quatre ouvertures qu'ils font, est quarrable, c'est-à-dire, qu'on en peut trouver la surface géometriquement ; on a vû par nos Principes au Théoreme VII. que la Courbe que font chacun de ces demi-Cylindres étoit une Ellipsimbre ; il ne s'agiroit plus que de quarrer l'espace enfermé

Digitized by Google

dans ces Ellipſimbres pour avoir la ſurface totale de l'Hémiſphère. Mais quoique la Géometrie ne ſoit pas parvenuë à ce degré de perfection, elle nous fournit pour la pratique des moyens ſuffiſamment exacts.

Probleme XXXI.

Par un Point donné ſur la Surface d'un Cylindre, tracer un Cercle.

Si le Cylindre eſt droit, & que la baſe ſoit donnée, il n'y a point de difficulté; il n'y a qu'à ſuivre le contour de la baſe à diſtance égale priſe toûjours parallelement à l'axe, ſoit avec une Régle ou un cordeau ou en petit, avec cet inſtrument de Menuſier qu'on appelle *Truſquin*; mais ſi l'on n'a pas la baſe, ou parce qu'elle eſt oblique ou rompuë, ou embarraſſée par quelque corps qui la couvre, comme ſi l'on vouloit tracer un ornement circulaire, tel qu'une baſe ou une aſtragale à un Pilier Gotique en place; il faut commencer par mener pluſieurs paralleles à l'axe, & tracer le cercle, s'il eſt queſtion d'un Cylindre Scalene, comme une Ellipſe ſur un Cylindre droit, ainſi que nous le dirons ci-après; nous parlerons ſeulement ici du Cylindre droit.

Premiere maniere de tracer des paralleles à l'axe du Cylindre, *la Baſe étant donnée.*

Soit une baſe droite ou oblique ABDE ayant aplani cette baſe, on y menera deux lignes *g*G, *f*F paralleles entr'elles, qu'on diviſera en deux également en M & *m*, par où ſi l'on tire la ligne BE, ſon milieu C ſera l'extremité de l'axe du Cylindre: on en fera autant ſur la baſe oppoſée pour trouver l'autre extremité du même axe; enſuite ayant poſé une Régle HI à volonté ſur cette baſe, pourvû qu'elle paſſe par le pied C de l'axe, on tracera la ligne AD: poſant auſſi une autre Régle KL ſur la baſe oppoſée, on la fera tourner ſur l'extremité de l'axe, juſqu'à ce que regardant l'une par l'autre, leur direction ſoit parallele; en ſorte que celle du côté où l'on regarde couvre ſi bien l'autre, que les deux lignes ſuperieures ou inferieures de ces Régles ſe confondent en une, ce qu'une perſonne ſeule peut faire en arrêtant une des Régles dans ſa poſition, & tenant l'autre pour la tourner, comme il convient; pour faire en ſorte que le Rayon viſuel raſe les deux Régles, de maniere qu'elles ne paroiſſent point ſe croiſer, ce qu'on appelle *bornoyer*; parce que l'on ferme ordinairement un œil, & que nous avons exprimé par des lignes qui partent d'un œil *a* à la Figure 177. en cette ſituation ſi on trace des diametres ſur les baſes, la ligne menée à la ſurface du Cylindre par l'extremité de ces diametres ainſi correſpondans, eſt une parallele à l'axe du Cylindre. *Fig.* 177.

Lorsque les baſes ſont embarraſſées comme à un Pilier en place, qui

eſt engagé par le haut & par le bas, on eſt obligé d'avoir recours à des manieres méchaniques pour tracer des paralleles à l'axe.

La premiere & la plus ſimple, eſt celle de ſe ſervir du plomb pour les Cylindres poſez bien verticalement comme des Piliers ronds, & s'ils ſont inclinez, c'eſt d'appliquer de *Champ* une Régle fort large OP, & dont les côtez oppoſez ſont bien paralleles, le long du Pilier, & la tourner de maniere qu'en regardant par deſſus cette Régle, elle ne croiſe point la ligne tangente du Pilier; en ſorte que les Rayons viſuels *a*O, *a*P raſent l'un & l'autre, la ſurface du Pilier; la ligne tracée ſur la même ſurface cylindrique au long du côté de la Régle qui appuye ſur le Cylindre, eſt une parallele à l'axe.

Fig. 176. La ſeconde maniere qui eſt encore méchanique, eſt de tracer avec un compas d'un point C pour centre, & d'une ouverture priſe à volonté une ligne courbe *d*E*e*, ſur la ſurface du Cylindre, comme l'on décrit un cercle ſur une ſurface plane; enſuite d'une ouverture de compas un peu plus grande que la premiere, mais moindre que la longueur de l'arc de Cylindre, dont elle eſt la corde developé, c'eſt-à-dire rectifié, on décrira ſur du Carton un demi cercle, ou ſeulement un ſecteur de cercle qui en approche, dont on poſera le centre en C, & l'ayant appliqué & plié ſur la ſurface du Cylindre, on y en tracera le contour qui coupera celui de la Courbe précedente en deux points X & *x*, par leſquels ſi l'on tire une ligne droite, on aura la parallele à l'axe qu'on cherche; à laquelle il ſera facile d'en tirer d'autres par des points donnez, s'il le faut. On peut faire la même choſe avec un cordeau, mais moins exactement; cela ſuppoſé comme une preparation néceſſaire pour tracer les cercles & les Ellipſes à la ſurface du Cylindre.

Fig. 176. Si le Cylindre eſt Droit, il ne s'agit que de faire des ſections perpendiculaires aux lignes paralleles à l'axe: ainſi on prendra à volonté les points *x* & X pour centres, & de tel intervale qu'on voudra pour Rayon, on fera des interſections d'arc en H & en K, & plus loin en *b* & en *k*, ou plus près en *l* & *i*, & l'on appliquera ſur ces points *k*K, *li*, H*b* une Régle pliante, avec laquelle on tracera le cercle autour du Cylindre, s'il eſt droit; car s'il eſt ſcalene, la ſection perpendiculaire à l'axe ſera une Ellipſe, auquel cas, pour décrire un cercle par le point donné, il faut mener par ce point un contour parallele à la baſe, ou faiſant une angle ſous contraire.

Pour tracer des lignes paralleles à l'axe dans la ſurface concave d'une
Fig. 180. portion de Cylindre, comme dans une voute [*Fig.* 180.] au lieu de prendre deux paralleles des deux côtez du centre, on les prendra toutes deux du même côté, comme *a*f, *b*e; on les diviſera chacune par le milieu en M & *m*,

Digitized by Google

M & *m*, & on menera par ces milieux la ligne *d*C qui ſera un diametre; mais parce que le Cylindre n'eſt pas complet, ce diametre ne ſera terminé que d'un côté en *d*, & ne l'étant pas au delà de C, on ne pourra en avoir le milieu C, qu'en répetant la même operation par deux autres lignes *ih*, *kg* qui donneront un ſecond diametre E*c* qui coupera le premier en C, centre de la baſe, où paſſera l'axe du Cylindre. On en fera autant à la baſe oppoſée, & l'on aura l'autre extremité de cet axe, auquel il ne ſera pas difficile de mener des paralleles, en tendant un cordeau d'un bout de l'axe à l'autre, & bornoyant par cette ligne deux points dans la ſurface concave; de ſorte que cet axe ſoit dans le même plan, & que le cordeau les couvre à l'œil qui doit être un peu éloigné du cordeau, du côté oppoſé aux points que l'on veut marquer ſur la ſurface concave, pour y tracer une parallele à l'axe du Cylindre.

Demonstration.

La premiere maniere de tracer une parallele à l'axe du Cylindre eſt fondée ſur ce que les Ordonnées à un diametre ſont coupées en deux également par ce diametre; lequel étant auſſi diviſé en deux également, donne le centre de la baſe du Cylindre, ſoit qu'elle ſoit Circulaire ou Elliptique; or quelle qu'elle ſoit, l'axe paſſe par ſon centre, & les deux Régles HI, KL que l'on dirige par le Rayon viſuel dans le même plan paſſant par l'axe, donnent auſſi les côtez du Parallelograme par l'axe, dont les côtez oppoſez ſont paralleles; donc D*d* eſt une ligne parallele à l'axe, *ce qu'il falloit faire.* *Fig.* 177.

La ſeconde maniere de tracer une parallele à l'axe du Cylindre par le moyen d'une Régle d'une certaine largeur, quoique méchanique, eſt exacte dans ſon principe; car puiſqu'elle eſt dirigée par les Rayons viſuels dans un plan tangent au Cylindre, ce plan ne le touchera que ſuivant une ligne parallele à l'axe, & le plan de la Régle étant de largeur égale d'un bout à l'autre, fera un Parallelograme, dont un côté ſera ſur le plan tangent, & l'autre ſur le Cylindre, toûjours également éloigné de la ligne d'attouchement; donc il lui ſera parallele, & par conſéquent à l'axe.

La troiſiéme maniere, quoique méchanique eſt auſſi exacte dans ſon principe; on trace ſur le Cylindre deux Courbes à double courbure *d*E*e*, *m*MB de differente nature, qui ne peuvent ſe rencontrer qu'en quatre points, ſçavoir deux de chaque côté en X*x* d'une ſection par l'axe AFG, celle de ces courbes qui eſt tracée avec le compas, a tous ſes diametres paſſans par le centre C, courbes de courbures inégales, à la reſerve de *de* qui eſt droit, & de contour inégalement long, qui ont cependant des *Fig.* 176.

Digitized by Google

ſouſtendantes toûjours égales, leſquelles ſont les lignes droites, qu'on imagine paſſer par les deux points du compas; & au contraire celle qui eſt tracée avec un cercle plié, a tous ſes diametres de contour également long, & toutes les ſouſtendantes inégales. Chacune de ces courbes a un diametre droit qui leur eſt commun ſur le côté AB, & un circulaire qui lui eſt perpendiculaire, ſçavoir CE dans la premiere, & CM pour la ſeconde; tous les autres ſont Elliptiques, dont la courbure ſe redreſſe à meſure qu'ils approchent de AB; de ſorte qu'étant tous inégaux de chaque côté, ils ne peuvent aboutir au même point, que lorſqu'ils approchent également de ce diametre droit, qui eſt le côté du Cylindre, comme en X & *x*, donc la ligne X*x* eſt parallele au côté, & par conſéquent à l'axe, *ce qu'il falloit faire.*

QUANT à la maniere de tracer le cercle ſur la ſurface du Cylindre, il eſt clair que l'on ſuppoſe que le Cylindre ſoit droit; parce que les points K*i*, *g*H étant chacun également éloignez des points *x*X, ſont dans un même plan perpendiculaire au côté *x*X du Cylindre, par conſéquent à ſon axe, auquel ce côté eſt eſſentiellement parallele.

D'ou il réſulte une ſection parallele à la baſe, c'eſt-à-dire, un cercle.

MAIS auſſi il eſt clair que ſi le Cylindre étoit ſcalene, cette ſection perpendiculaire au côté ſeroit une Ellipſe qui ne ſeroit point parallele à la baſe; ainſi pour décrire un cercle à la ſurface d'un Cylindre ſcalene, il faut en avoir la baſe, tirer des paralleles à l'axe ſur la ſurface, c'eſt-à-dire pluſieurs côtez, & porter ſur chacun de ces côtez la même diſtance du point donné au contour de la baſe, pour avoir autant de points que l'on a de côtez: mais alors on ne peut plus ſe ſervir de la Régle pliante poſée de plat pour tracer le cercle, parce que la direction de ſon pli ſe tourne perpendiculairement au côté du Cylindre, au lieu que celle du contour du cercle le coupe obliquement d'un angle égal à celui que l'axe fait avec le plan de la baſe: mais on peut s'en ſervir en la poſant de *Cant*, c'eſt-à-dire, ſur ſon épaiſſeur appliquée ſur ces points trouvez; parce que l'Ellipſe eſt une courbe plane, & qu'une Régle d'une largeur beaucoup plus grande que ſon épaiſſeur étant pliée, ſe dirige facilement ſur un plan; il n'en ſeroit pas de même s'il s'agiſſoit d'une courbe à double courbure, il faudroit alors que l'épaiſſeur fût égale à la largeur, afin qu'elle ne fit pas plus de reſiſtance à ſe plier d'un côté que de l'autre.

ENFIN la derniere operation pour tirer des paralleles à l'axe dans une ſurface concave de portion de Cylindre, eſt la même que la premiere redoublée; parce que le centre de la ſection étant dans chaque diametre, il ſera dans le point de concours des deux, où ils ſe croiſent.

Digitized by Google

USAGE.

Ce Problême eſt un des fondamentaux de la conſtruction des voutes Cylindriques, parce qu'il ſert à trouver l'Arc-droit des Berceaux circulaires ou Elliptiques, ou pour le ceintre entier, ou pour une petite portion, telle qu'eſt un Vouſſoir, pour y poſer la *Cerche*, c'eſt-à-dire, le modele de la Courbe, lequel doit être preſenté perpendiculairement à une ligne parallele à l'axe; car pour peu que cette ligne lui fût inclinée, le modele de la Courbe circulaire ou Elliptique marqueroit une concavité ou une convexité; laquelle étant continuée, ſuivant la direction d'une ligne qui croiſeroit la direction de l'axe, donneroit une ſurface differente de celle qu'on ſe propoſe, comme on peut l'appercevoir par la difference de la ſection du plan qui paſſeroit par cette Courbe.

Ce Problême peut encore ſervir à tracer ſur une doele de Berceau des ornemens de Peinture ou de Stuc, comme des Arcs-doubleaux.

La maniere de faire des paralleles à l'axe, peut être employée au même uſage, par exemple à diriger une corniche dans un Berceau Rampant, dont la régularité de l'impoſte ſeroit douteuſe; ce qu'on a ſouvent lieu d'examiner à cauſe du peu d'exactitude des Ouvriers dans les voutes, même les plus ſimples.

Enfin ce Problême eſt néceſſaire pour la conſtruction de ceux qui ſuivent.

Probleme XXXII.

Par un Point donné à la Surface d'un Cône, faire paſſer un Cercle.

Premier cas, Lorſque le Cône eſt droit, & que le ſommet eſt donné; il ne s'agit que de fixer un cordeau ou une Régle au ſommet, & de ce point comme Pole décrire un cercle, en tournant ſur la ſurface concave ou convexe, cela eſt très ſimple.

2.° Mais ſi le ſommet n'eſt pas donné comme dans un Cône tronqué, il faut tirer ſur la ſurface du Cône deux lignes droites, c'eſt-à-dire, deux côtez, leſquels étant prolongez, ſe rencontreront au ſommet du Cône.

Pour tirer ces côtez, il ſuffit d'appliquer une Régle bien droite ſur la ſurface du Cône, en ſorte qu'elle ne laiſſe point de jour entr'elle & cette ſurface: ſi cependant le Cône tronqué étoit d'une grande circonference, on pourroit s'y tromper; parce que la ſurface étant d'une convexité peu ſenſible vers la baſe ſur-tout, on pourroit biaiſer la Régle ſans s'en appercevoir; c'eſt pourquoi ſi l'on veut operer exactement, il faut tirer des paralleles ſur les plans des baſes oppoſées, que nous ſuppoſons premierement paralleles entr'elles, & faire pour cette eſpece de

Cône tronqué la même operation que nous avons faite à la Figure 177. pour trouver le côté du Cylindre; alors on ſera ſûr que la rencontre des côtez du Cône trouvez par ce moyen, en donnera exactement le ſommet, ſi l'on veut s'en ſervir, mais on peut s'en paſſer; car ayant trouvé deux côtez du triangle par l'axe du Cône qui diviſe les deux baſes en deux parties égales; on ſubdiviſera chacune de ces parties en un même nombre de parties égales, & l'on tirera des lignes droites des unes aux autres, à la baſe ſuperieure & inferieure, comme l'on voit à la Figure 186. & la diſtance du point donné à la ſurface du Cône priſe de l'une des baſes, & portée ſur chacune de ces lignes ou côtez du Cône donnera des points, par leſquels on menera à la main une ligne courbe, qui ſera le cercle demandé.

Il faut remarquer ici qu'on ne peut pas ſe ſervir pour le tracer d'une Régle pliante poſée de plat, parce que la ſurface de la largeur s'appliquant perpendiculairement au côté du Cône, la direction de ſon pli donneroit une Courbe qui s'écarteroit des points marquez, pouvant être une Ellipſe, une Parabole ou une Hyperbole, ſuivant l'ouverture de l'angle du ſommet du triangle par l'axe; ce qui eſt clair, mais on peut s'en ſervir en la poſant de *cant* ou de champ; on ſe ſert encore de la Régle d'une autre maniere, on bornoye par ſon côté deux ou trois points, ſuivant leſquels on la tient appuyée d'un côté, & en l'air par l'autre, puis fermant un œil, on ſuit avec le crayon l'alignement de cette Régle, ſans changer l'œil de place.

Si les baſes oppoſées du Cône tronqué ne ſont pas paralleles, il eſt clair que l'une étant circulaire, l'autre ſera Elliptique, & que c'eſt de la circulaire qu'il faut prendre les meſures de la diſtance du point donné.

Mais ſuppoſant que la baſe circulaire eſt ſeule plane, & que la partie tronquée n'eſt pas aplanie, on peut encore tracer les côtez ſur la ſurface du Cône en prenant des points à ſon contour équidiſtans d'un 3.e, au milieu des deux, & de ces points comme centres, faire des interſections d'arcs, comme ſi on elevoit une perpendiculaire ſur une ſurface plane, & ſur les côtez ainſi trouvez, tracer le cercle par le point demandé, comme nous venons de le dire.

Troiſiéme cas, Lorſque le Cône eſt ſcalene, quand même ſon ſommet ſeroit donné, on ne peut plus s'en ſervir comme d'un Pole pour tracer le cercle par le point donné, ni de la diſtance du point donné à la ſurface meſurée ſur un côté juſqu'à la circonference de la baſe; parce que le contour du cercle parallele à la baſe, eſt inégalement diſtant de celui de la baſe, quoique les plans de l'un & de l'autre ſoient ſuppoſez paralleles, & par conſéquent équidiſtans.

Digitized by Google

Il faut alors [*Fig.* 179.] abaiſſer une perpendiculaire SP du ſommet S du Cône ſcalene donné ASB ſur le plan de ſa baſe AB prolongé ; ce qui eſt une operation familiere à ceux qui ſçavent bien faire des Cadrans pour trouver le pied du ſtile, & qui eſt un Problême du XI. Livre d'Euclide, Prop. XI. Ceux qui ne ſont pas Geometres, le font par le moyen d'un Equerre qu'ils poſent d'un côté ſur le plan, & appuyent l'autre au ſommet S, & en la tournant ſur le côté SP marquent le point P, par lequel ſi l'on tire une ligne par le centre C, on aura le triangle rectangle APS, & par conſéquent l'obliquangle ABS, qui eſt la plus oblique de toutes les ſections par l'axe du Cône, c'eſt-à-dire, qui en marque le plus long côté AS, & le plus petit BS. *Fig.* 179.

Ayant décrit ce triangle ſur une ſurface plane, & le demi cercle A2B moitié de la baſe du Cône, on le diviſera en autant de parties qu'on voudra avoir de points du cercle demandé, comme ici en quatre, aux points 1, 2, 3, d'où l'on tirera des perpendiculaires ſur le diametre AB, qui le couperont aux points ECG, deſquels on tirera des lignes au ſommet S ; puis par le point donné D ou *d*, s'il eſt dans ce triangle ASB, on tirera une ligne D*d* parallele à AB, & s'il n'y eſt pas, nous verrons par la ſuite de l'operation ce qu'il faut faire pour tirer cette parallele.

Du point E pour centre & pour Rayon ES, on fera un arc S*h* qui coupera AB prolongée en *h*, d'où l'on tirera au point 1. la ligne 1*h* qui ſera le côté du Cône paſſant par le point 1. on trouvera de même les côtez 2K, & 3L qui aboutiront en *hkl*, à differens points donnez ſur AB prolongée par la tranſpoſition des lignes CS & GS.

Ensuite du point E pour centre & pour Rayon E*e*, où ES coupe D*d*, on fera un arc *ef*, qui donnera ſur AB le point *f* ; la ligne *fx* menée parallelement à E1. donnera ſur le côté 1*h* le point *x* que l'on cherche, qui eſt un de ceux de la circonference du cercle demandé, pris ſur le côté 1*h*, dont la projection eſt ES dans le triangle par l'axe ASB ; le Rayon C*m* donnera un point auprès de G, d'où tirant G*y* parallele à C2, on aura le point *y*, ainſi des autres.

Si le point donné D n'eſt pas ſur les côtez du triangle par l'axe ASB, mais qu'il ſoit par exemple en *g* ; ayant tiré par le ſommet du Cône le côté S*g*, il coupera la baſe au point 3. d'où ayant trouvé le côté 3*l*, on portera ſur ce côté la diſtance donnée 3*z* égale à 3*g* pris ſur la ſurface du Cône ; puis de *z* tirant *zb* perpendiculaire ſur AB prolongé, la diſtance G*b* donnera ſur GS le point *g* par où doit paſſer la parallele D*d*, pour trouver les points de la circonference du cercle demandé, comme nous venons de le dire.

Digitized by Google

Il n'eſt pas néceſſaire de parler ici du cercle de la ſection ſous-contraire, parce qu'il eſt aiſé d'y ſupléer, en faiſant attention qu'au lieu d'operer ſur la ligne D*d* parallele à la ligne AB, il faut tracer une autre ligne NB, ou ſur une de ſes paralleles qui faſſe avec SA un angle égal à l'angle SBA.

DEMONSTRATION.

Il eſt clair par la nature du Cône que l'on ne peut trouver de lignes droite à la ſurface, que celles qui ſont menées du ſommet à la circonference de ſa baſe, que toutes ces lignes ſont égales dans le Cône Droit, & inégales dans le Scalene; que lorſqu'elles ſont égales, qui en a une, les a toutes; mais que lorſqu'elles ſont inégales, on ne peut les trouver par la projection ſur le triangle par l'axe ASB, comme on a trouvé ci-devant les côtez du Cylindre ſur le Parallelograme par l'axe, parce que les lignes ES, CS, GS, ſont les côtez d'un triangle rectangle, dont le côté du Cône qui leur répond, eſt l'hypotenuſe : or il eſt clair qu'en tranſportant, par exemple, ES en E*b*, le côté E1 reſtant immobile à angle droit ſur AB, la ligne 1*b* repreſente exactement le côté du Cône, & 1x la diſtance de la baſe à une ſection parallele faite par un plan perpendiculaire au triangle par l'axe ASB, & parallele à la baſe.

Que les angles SE1, SC2, SG3 ſoient droits, c'eſt une ſuite de la conſtruction; parce que le plan du triangle par l'axe ASB paſſe par la ligne SP qui a été faite perpendiculaire au plan de la baſe AB; c'eſt-à-dire, du demi cercle A2B; par conſéquent toutes les lignes E1, C2, G3 perpendiculaires à la commune ſection AP de ces deux plans ſont perpendiculaires à toutes celles qui ſont tirées dans le plan ASP, comme SE, SC, SG, &c.

Nous avons ſuppoſé dans ce Problême que le Cône étoit Droit, ou incliné ſur une baſe circulaire; mais ſi l'on n'avoit qu'une baſe Elliptique, & qu'on voulût tracer un cercle ſur le Cône, il faudroit chercher l'angle de l'inclinaiſon d'un plan coupant celui de la baſe, dont la ſection fût un cercle, pour avoir le Profil du triangle par l'axe du Cône Elliptique. Comme cette propoſition n'a été donnée par aucun des Auteurs des Traitez des Sections coniques que je connoiſſe, & que j'y ai trouvé de grandes difficultez; j'ai eu recours au Celebre M. Bernoulli un des premiers Mathematiciens de notre Siecle, qui a bien voulu m'en donner la ſolu-
» tion; il eſt convenu que ce Problême étoit du nombre de ceux qui,
» quand on ne s'y prend pas bien, engagent dans un calcul penible, &
» conduiſent à des équations de quatre dimentions, & que la ſolution
» étoit une choſe nouvelle.

Ce grand Homme qui a le bonheur d'avoir un Fils qui marche à grand

Digitized by Google

pas ſur ſes traces dans les hautes Sciences, comme il a paru depuis peu par la piece de ſa façon, qui a remporté le prix de l'Academie des Sciences de Paris, lui ayant parlé de ma Queſtion; le digne Fils la réſolu d'une autre maniere, dont il a bien voulu me faire part. On la verra à la ſuite de celle de M. ſon Pere, que je mets ici mot à mot, perſuadé que ce qui vient des grands Hommes doit être conſervé ſans alteration; dans cette idée j'aurois copié en entier la Lettre qu'il m'a fait l'honneur de m'écrire, s'il n'y avoit répandu des expreſſions ſi obligantes ſur mon Ouvrage, que je ne pourrois les répeter ſans pecher contre la modeſtie: il n'en falloit pas moins pour me faire ſuprimer les marques de ſa politeſſe, & celles de la bienveüillance, dont il m'honore, à laquelle je ſuis extrêmement ſenſible.

PROBLEME XXXIII.

Etant donné un Cône ASB, Droit ſur une Baſe Elliptique ADB, dont AB eſt le petit Axe, dont le Plan doit être conçû perpendiculaire au Plan du triangle Iſoſcele ASB; on demande la poſition d'un Plan incliné ſur l'Ellipſe, dont la ſection dans le Cône ſoit un Cercle. Figur. † près de 182

1.° J'APELLERAI le *grand côté* du Cône Elliptique la droite SD, (ou S*d*) tirée du ſommet S à l'extremité D du grand demi axe de l'Ellipſe, dont le plan doit être conſideré comme perpendiculaire au plan du triangle Iſoſcele ASB.

DEFINITIONS.

2.° *Le petit côté* du Cône ſera SA tirée du ſommet S à l'extremité A du petit axe de l'Ellipſe.

Soient nommées

LA hauteur ou l'axe du Cône SC	$= a$
LE petit demi axe de l'Ellipſe CA ou CB	$= b$
LE grand demi axe de l'Ellipſe CD	$= c$

LE grand côté du Cône SD $= \sqrt{cc + aa} = n$, la difference du quarré de CD, & du quarré de CA, c'eſt-à-dire, $cc - bb = hh$, & partant $\sqrt{cc - bb} = h$, pour faire une ligne droite égale à h on a $\sqrt{cc - bb}$, il n'y a qu'à décrire un demi cercle ſur CD, & y inſcrire la corde Ca égale à CA, tirant enſuite l'autre corde Da, on aura Da $= \sqrt{cc - bb} = h$: ou bien dans l'angle droit ACD, tirez une hypotenuſe AF égale à CD, on aura CF $= \sqrt{cc - bb} = h$: notez que le point F ſera un des Foyers de l'Ellipſe.

Solution, le plan de l'Ellipſe ADB étant perpendiculaire au plan du triangle ASB, je cherche la poſition d'une ligne droite yY dans le trian-

gle Isoscele ASB, laquelle passe par le centre C de l'Ellipse, & sur laquelle si on dresse un plan aussi perpendiculaire au plan ASB, je veux que ce plan dressé fasse dans le Cône par sa section un cercle, dont le diametre sera yY, & CD une Ordonnée commune à l'Ellipse & au cercle; parce que le plan de l'Ellipse & le plan du cercle se coupent dans la droite CD: il faudra donc par la proprieté du cercle que CD soit la moyenne proportionelle entre les deux segmens du diametre Cy & CY, & partant que le rectangle $Cy \times CY$ de ces deux segmens soit égal au quarré de l'Ordonnée CD, & c'est ce qu'il faut exécuter.

Ayant prolongé Yy jusqu'à SE perpendiculaire à SC, soit $SE = x$: on aura à cause des triangles semblables $Sy E$, & $Ay C$, $SE : AC :: Ey : yC$, & componendo $SE + AC : AC :: Ey + yC$ ou $EC : yC$, c'est-à-dire, $x + b : b :: \sqrt{xx + aa} : yC = \frac{b\sqrt{xx+aa}}{x+b}$. Pareillement à cause des triangles semblables SYE, BYC, on aura $SE : BC :: EY : CY$, & dividendo $SE - BC : BC :: EY - CY$ ou $EC : CY$, c'est-à-dire, $x - b : b :: \sqrt{xx+aa} : CY = \frac{b\sqrt{xx+aa}}{x-b}$; or le rectangle $yC \times CY$ devant être égal au quarré de CD, j'aurai d'abord cette égalité $\frac{b\sqrt{xx+aa}}{x+b} \times \frac{b\sqrt{xx+aa}}{x-b}$ ou $\frac{bb\,xx + bb\,aa}{xx - bb} = cc$, d'où on trouve par la réduction $xx = \frac{bb\,cc + bb\,aa}{cc - bb} = \frac{bb\,mm}{bb}$ par conséquent $x = \frac{b\,m}{b}$; *ce qu'il falloit trouver.*

Construction Geometrique.

Faites cette analogie *comme b ou* $\sqrt{CD^2 - AC^2}$ *ou CF est à b ou AC, ainsi m ou SD est à une quatriéme*; je dis que si vous prenez SE égale à cette quatriéme, & que vous tiriez par le centre C la droite EY, la partie yY interceptée entre les deux petits côtez SA & SB prolongée, sera la position & la grandeur du diametre cherché; sur lequel si on dresse un plan perpendiculaire au triangle ASB, la section de ce plan fera dans le Cône un cercle, dont aussi tous les autres plans paralleles à celui-ci feront par leurs sections tout autant d'autres cercles.

Scolie.

Que si vous aimez mieux trouver trigonometriquement l'angle de l'inclinaison de la section, sçavoir l'angle ACy qui est égal à l'angle E, vous n'avez qu'à faire cette analogie, comme ES est à SC, ainsi le sinus total est à la tangente de l'angle cherché ACy.

Corol-

Digitized by Google

COROLLAIRE.

ON en trouve maintenant tout ce que l'on veut, par exemple, Cx, ou la distance du centre de l'Ellipse au centre du cercle; car $yY = yC + CY = \frac{b\sqrt{xx+aa}}{x+b} + \frac{b\sqrt{xx+aa}}{x-b} =$ [en substituant la valeur de x] $\frac{cn}{m+b} + \frac{cn}{m-b} = \frac{2mcn}{mm-bb} =$ [en substituant la valeur de $mm - bb$ qui est $= aa + bb = nn$] $\frac{2mcn}{nn} = \frac{2mc}{n}$, donc la moitié $\frac{mc}{n} = Yx$ ou yx, & en retranchant Cy, où $\frac{cn}{m+b}$ il reste $Cx = \frac{mc}{n} - \frac{cn}{m+b} = \frac{mmc - nnc + bmc}{mn - bn} =$ [en substituant pour $mm - nn$ sa valeur $cc - bb$ ou hh] $\frac{hbc + bmc}{mn+bn} = \frac{hc}{n}$: ainsi Cx sera la quatriéme proportionelle de n, b & c, c'est-à-dire, de SA $\sqrt{CD^2 - AC^2}$ & CD, ou de SA, CF & CD.

CE que vous trouvez, (c'est toûjours M. BERNOULLI qui parle en réponse) que *le quarré de la moitié du diametre* yY *qu'on cherche, est égal au quarré de la moitié du grand axe* CD, *de la base plus au quarré de* Cx; n'est autre chose qu'une application d'une proposition du II. Livre d'EUCLIDE, qui est qu'une ligne droite comme yY étant coupée également en x, & inégalement en C, le quarré de la moitié yx est égal au rectangle des segmens inégaux $yC \times CY$ plus au quarré de l'interceptée Cx; car comme j'ai remarqué ci-dessus le rectangle $yC \times CY$ doit être égal au quarré de CD; donc on aura aussi Yx^2 ou $yx^2 = CD^2 + cx^2$, comme vous avez trouvé; ceci est encore confirmé par ce que je viens de démontrer en dernier lieu, où j'ai trouvé $Yx = \frac{mc}{n}$, $Cx = \frac{hc}{n}$ & $CD = c$; il faut donc faire voir qu'effectivement $\frac{mmcc}{nn}$ sera $= cc + \frac{bbcc}{nn} = \frac{nncc + bbcc}{nn}$; or il est clair que $mm - nn$ étant égal $cc - bb = hh$, on aura $nn + hh = mm$ donc $\frac{nncc + bbcc}{nn}$ devient $= \frac{mmcc}{nn}$; ainsi on a $Yx^2 = \frac{mmcc}{nn}$ & aussi $CD^2 + Cx^2 = \frac{mmcc}{nn}$ par conséquent $Yx^2 = CD^2 + Cx^2$.

Vous dites, Monsieur, que vous ne connoissez pas CX, parce que l'angle ASX vous est inconnu: voilà CX trouvé, puisqu'il est égal $\frac{hc}{n}$ indépendamment de l'angle ASX, si pourtant par curiosité on veut trouver cet angle, je m'y prendrai en telle maniere.

DANS le triangle ACy, on a trouvé l'angle ACy, l'angle CAy est donné.

Digitized by Google

le côté AC eſt auſſi donné: de ces trois choſes données, on trouve CyA, & le côté Ay, donc dans le triangle xyS, on aura l'angle xyS, & les deux côtez xy & yS, ce qui ſert à trouver l'angle xyS que l'on cherche.

QUANT au côté Ay on le trouve immediatement par la premiere ſi-le militu de des deux triangles SyE, CyA en faiſant comme SE + AC eſt à AC, ainſi Sy + yA ou SA eſt à Ay, c'eſt-à-dire, $x + b : b :: n \frac{nb}{x+b} =$ Ay, & mettant pour x ſa valeur $\frac{bm}{b}$ on aura $\frac{nb}{x+b}$ ou Ay $= \frac{bn}{m+b}$ faiſant donc comme $m + b$ ou SD + Cd eſt à b ou Cd, ainſi n ou SA eſt à une quatriéme: cette quatriéme ſera celle à laquelle il faut prendre Ay égale, & tirant enſuite par le centre de l'Ellipſe C la droite yCY, cette droite ſera encore le diametre du cercle cherché; ce que j'ai voulu remarquer par occaſion.

EN ſuppoſant au lieu d'un Cône droit, un Cône ſcalene ou oblique ſur une baſe Elliptique; on reſoudra le Problême par la même méthode, & avec la même facilité.

Autre Solution du même Problême par M. Jean BERNOULLI le Fils.

SUPPOSE' que le point y ſoit le point cherché dans la ligne AS, par lequel le plan dont eſt queſtion doit paſſer.

AYANT tiré de ce point la ligne yH perpendiculaire à la baſe AB du triangle ASB, & la ligne yK parallele à la même baſe qui joigne les deux côtez SA & SB de ce triangle, je nommerai

SA = SB (le petit côté du Cône) = d
SD [le grand côté du Cône = e
CD] le demi grand axe de l'Ellipſe = a
AC = CB le demi petit axe = b
FC [la diſtance du Foyer F au centre C de l'Ellipſe] = f
Ay] la diſtance de l'extremité A du petit axe au point cherché y = x

Ces Dénominations étant faites j'aurai SC [l'axe du Cône] = $\sqrt{dd-bb}$ & SA [d] : SC ($\sqrt{dd-bb}$) :: Ay (x) : IC, ainſi IC = yH = $x\sqrt{\frac{dd-bb}{dd}}$ pareillement SA [d] : AC [b] :: Sy [$d-x$] : yI on aura yI = IK = HC = $\frac{bd-bx}{d}$; or $\overline{yC}^2 = \overline{yH}^2 + \overline{HC}^2$, donc yC $\sqrt{\frac{xx-2bbx+bb}{dd}}$. Pour trouver CY, je fais cette analogie yK = 2yI : CB :: yY : Cy, & *dividendo* yK − CB $\left(\frac{bd-2bx}{d}\right)$: CB [b] :: yY − CY = yC $\left(\sqrt{\frac{xx-2bbx+bb}{dd}}\right)$: CY, on trouvera CY = $\frac{d\sqrt{\frac{xx-2bbx+bb}{dd}}}{d-2a}$

Maintenant puiſque le cercle cherché & la baſe du Cône ſe coupent dans la ligne CD, celle-ci ſera une corde du cercle; la ligne yY en ſera une auſſi, & même elle en ſera un diametre ayant pour appliquée le demi grand axe CD, par conſéquent le rectangle des ſegmens de ce diametre où yC × CY ſera égal à $\overline{CD}^2$, c'eſt-à-dire $\frac{4xx - 2bbx + bbd}{d - 2x} = aa$, & en retranchant bb de part & d'autre $\frac{4xx - 2bbx}{d - 2x} = aa - bb =$ [par la proprieté de l'Ellipſe] $\overline{CF}^2 = ff$, donc $xx = -\frac{2ffx}{d} + ff$ & $x = -\frac{ff}{d} + \frac{f}{d}\sqrt{ff + dd}$ ou [en ſubſtituant pour $\sqrt{ff + dd}$ ſa valeur e] $x = \frac{fe - ff}{d}$

faiſant donc comme d ou SA eſt à f ou FC, ainſi $e - f$, ou SD — FC, eſt à une quatriéme, cette quatriéme ſera la cherchée.

Les Corollaires qu'on pourroit tirer de cette ſolution, ſont les mêmes que ceux de la précedente.

Pour réduire ces deux ſolutions à la pratique de la Régle & du compas, qui eſt la plus commode pour les Artiſtes, on operera ainſi à la premiere.

Du centre C & CD moitié du grand axe pour Rayon, on fera l'arc Dd qui rencontrera BA prolongé en d: ſi l'on tire dS, cette ligne repreſentera le grand côté du Cône.

Par le Foyer F & le point A, extremité du petit axe ayant tiré l'indéfinie FAe, on portera ſur cette ligne la longueur du grand côté du Cône Sd, de F en e par où on menera eg parallele à AB, qui coupera CS en g: par le ſommet S on menera la ligne SE parallele & égale à eg; & enfin par les points E & C on tirera EY qui coupera les côtez SA & SB prolongé en y & Y, la partie yY ſera le diametre du cercle que l'on cherche; laquelle étant diviſée en deux également en x, le point x en ſera le centre.

Si de ce même point x par S on tire xS, cette ligne ſera l'axe du Cône.

Pour la ſeconde ſolution ayant tiré une ligne Ae faiſant un angle quelconque avec AS, on portera la longueur CF, diſtance du centre au Foyer de l'ellipſe, de A en o ſur Ae, & de d en n ſur dS, puis faiſant SV égal à Sn ſur oS, on tirera par les points V & C ligne VY, qui coupera AS en y, où eſt le point cherché; ainſi la ligne yY ſera le diametre du cercle demandé, qu'on tracera ſur la ſurface du Cône El-

Digitized by Google

liptique ; de la même maniere que l'Ellipſe ſur le Cône droit circulaire, dont nous parlerons après celle de décrire l'Ellipſe ſur le Cylindre.

USAGE.

Cette propoſition ſert pour les *Traits* des voutes coniques appellées Trompes, tant droites que biaiſes, c'eſt-à-dire, dont les baſes [qui ſont leurs faces] ſont perpendiculaires ou obliques à leurs axes ; parce que les joins de Doele & les faces des Trompillons ſont toûjours des cercles ou portions de cercles paralleles à cette baſe : d'ailleurs quand même les faces ne ſeroient pas planes, comme ſont celles des Trompes ſur le coin qui ſont angulaires, les convexes & concaves des Tours rondes & creuſes, & les Ondées comme celle d'Anet ; il faut toûjours pour la facilité de l'execution ſuppoſer une baſe circulaire du Cône droit ou oblique, de laquelle comme d'un terme, on porte les alongemens au dehors, ou les reculemens en dedans des parties excedentes ou défaillantes des concavitez ou des convexitez des faces.

De la deſcription de l'Ellipſe ſur les Surfaces concaves ou convexes du Cylindre & du Cône.

PROBLEME XXXIV.

Le grand Axe d'une Ellipſe avec un point à la Surface du Cylindre, dont la diſtance à un des Axes eſt connuë ; y tracer l'Ellipſe.

ON peut trouver les points néceſſaires pour décrire une Ellipſe ſur la ſurface du Cylindre de deux manieres, ou ſur des cercles paralleles à la baſe, ou ſur des lignes droites paralleles à l'axe ; comme la premiere eſt la plus longue, & plus compoſée dans l'operation, parce qu'outre pluſieurs cercles qu'il faut décrire ſur des ſurfaces courbes, il faut encore au moins une parallele à l'axe du Cylindre, nous lui preferons la ſeconde.

Fig. 176. *Fig.* 178. Si le point donné eſt à une des extremitez du grand axe, par exemple en L, on fera ſur une ſurface plane à part [*Fig.* 178.] un angle *l g a* égal à celui de l'axe du Cylindre ſur la baſe, droit, ſi le Cylindre eſt droit & aigu ou obtus, s'il eſt ſcalene, ſur un des côtez de cet angle comme *a g*, on portera le diametre du Cylindre, puis du point *g* comme centre, & de la longueur de l'axe de l'Ellipſe pour Rayon, on tracera un arc de cercle qui coupera le côté *a l* en *l*, la ligne *g l* ſera la poſition de l'axe de l'Ellipſe dans le Parallelograme par l'axe du Cylindre ;

Digitized by Google

puis on décrira ſur *ag* comme diametre le demi cercle *anopg* qu'on diviſera en autant de parties égales qu'on voudra avoir de points de l'Ellipſe comme ici en quatre aux points *nop*, par leſquels on menera des perpendiculaires ſur *ag* qu'on prolongera juſqu'au diametre *gl*; les lignes compriſes entre les diametres *ag* & *gl*, ſeront les diſtances du contour du cercle de la baſe à l'Ellipſe demandée; on tranſportera ſur le contour de la baſe du Cylindre *Fig.* 176. les diviſions *a*, *n*, *o*, *p*, *g* de la Figure 178. & par ces points on tirera des paralleles à l'axe, ſur leſquelles on portera les diſtances QR, CS, *qu* de la Figure 178. & l'on aura ſur la ſurface du Cylindre les points LNOPG, par leſquels on tracera à la main l'Ellipſe demandée.

Si le point donné eſt ailleurs qu'aux extremitez du grand axe, la même conſtruction ſubſiſtera, mais elle demande une preparation pour la poſition du cercle qui doit repreſenter la baſe du Cylindre: on décrira ſur le grand axe *gl* de l'Ellipſe une demi-Ellipſe, ou ſeulement le quart d'Ellipſe où le point donné P ſe trouve, dont on connoît, par la ſuppoſition, l'arc P*g*; puis ayant mené ſur la ſurface du Cylindre par ce point une ligne $r\overset{\frown}{P^1}$ parallele à l'axe, on y portera la diſtance *qu* iſſuë de l'Ordonnée P*u*, & par le point $\overset{\frown}{P^1}$ on tracera un cercle ſur la ſurface du Cylindre, qui repreſentera celui ne la baſe, & on continuera comme au cas précedent.

Demonstration.

Le grand axe de l'Ellipſe doit toûjours être dans le plan du Parrallelograme par l'axe du Cylindre, parce qu'il partage l'Ellipſe en deux parties égales, comme ce Parallelograme partage le Cylindre; or le triangle *lag* repreſente une partie du plan de ce Parallelograme, & le plan de l'Ellipſe eſt auſſi perpendiculaire à celui de la ſection par l'axe du Cylindre, donc les diſtances des points du contour de la baſe à ceux de l'Ellipſe priſe ſur des paralleles à l'axe, ſont égales à celles des points coreſpondans des diametres de l'un & de l'autre, comme ſont *uq*, *c*S, QR, puiſqu'on peut ſuppoſer à chaque point *p*, *o*, *n* une ſection perpendiculaire au plan *gal*, ſuivant les lignes *pq*, O*c*, RQ qui ſeront auſſi des Parallelogrames, où les Ordonnées de l'Ellipſe *u*P & SO, RN ſeront des côtez paralleles, parce que les deux plans de la baſe & de l'Ellipſe ſont perpendiculaires au troiſiéme *gal*, par conſéquent (par la 9.e du XI. Liv. d'Eucl.) les lignes *pq* & *u*P ſeront égales entr'elles, de même que les diſtances *qu* & P*p*, non dans cette Figure 178. mais à la ſurface du Cylindre *Fig.* 176. ainſi des autres *c*S & *o*O, QPL & *ln*N, quoiqu'elles ne le ſoient pas dans la Figure, où ces deux plans ne peuvent

Digitized by Google

être repreſentez dans leur vraie ſituation l'un à l'égard de l'autre, parce qu'ils doivent être en l'air perpendiculairement au plan *g a l*; donc l'operation eſt exacte.

USAGE.

Ce Problême eſt d'un très fréquent uſage dans la coupe des Pierres; car la plus grande partie des voutes ſont des Berceaux ſouvent biais par tête, ou parce qu'ils ne ſont pas Horiſontaux, comme les deſcentes, ou parce que le mur de face eſt en Talud, ou parce que leur direction eſt oblique à ce mur par la contrainte des lieux; dans tous ces cas, on ſuppoſe une ſection perpendiculaire au Berceau que l'on appelle *l'arc Droit*, d'où on avance ſur des paralleles à l'axe du Berceau les diſtances qui excedent l'arc Droit pour former une face Elliptique; ce que l'on verra pluſieurs fois au IV. Livre.

PROBLEME XXXV.

Un Point étant donné à la ſurface du Cône, qui ſoit à l'extremité du grand Axe de l'Ellipſe donné, où d'une Ordonnée connuë, tracer l'Ellipſe ſur la ſurface courbe du Cône.

Lorsqu'on a le grand axe d'une Ellipſe, on a toûjours ſa poſition dans le Cylindre, en quelques points qu'on place ſes deux extremitez, elle ſera toûjours égale; il n'en eſt pas de même dans le Cône, ſi le point de poſition n'eſt pas déterminé, l'Ellipſe que l'on peut trouver avec un grand axe donné peut varier, en ce que ſon petit axe peut être plus ou moins grand, & ſelon qu'il ſera incliné à la baſe, l'Ellipſe ſera plus ou moins differente du cercle de cette baſe; de ſorte qu'à moins qu'on n'ait le point de poſition de l'extremité du grand axe, il faut encore connoître le petit, ou une Ordonnée, auquel cas on trouvera la ſituation du grand axe de l'Ellipſe dans le triangle par l'axe du Cône.

Fig. 181. On commencera [*Fig.* 181.] par chercher le parametre de l'axe donné EL & de l'Ordonnée connuë, comme nous l'avons dit au Problême * *Pa.* 160. XIV. * ce qui eſt facile; on inſcrira enſuite le triangle par l'axe du Cône *b* S *a* dans un cercle S *a b*, puis on cherchera une quatriéme proportionelle à l'axe donné, à ſon parametre & au côté S *a*, qui donnera ſur S *a*, la longueur *a* P; par le point P on menera P D parallele à *b a*, qui coupera le cercle au point D, par où & par le point S on tirera l'indéfinie S D F, ſur laquelle portant la longueur de l'axe donné de S en K F; on menera par le point K la ligne K L parallele à S *b*, & par le point L la ligne L E parallele à S K; cette ligne E L ſera l'axe donné dans la poſition, où il doit être pour que l'Ellipſe ſoit telle qu'on la demande

Digitized by Google

à la ſurface du Cône, dont bSa eſt la ſection du triangle par l'axe, auquel le plan coupant le Cône doit être perpendiculaire, cette preparation étant faite.

Soit [*Fig.* 183.] le triangle par l'axe du Cône BSA, l'axe de l'Ellipſe EL & l'axe du Cône SC, du point C milieu de la baſe BA on décrira le demi cercle BMA, & des points E & L extremitez de l'axe de l'Ellipſe ayant abaiſſé des lignes Ee, Ll perpendiculaires à BA, ou paralleles à l'axe SC; on diviſera l'intervale el en deux également en c, & on décrira de ce point comme centre, & pour Rayon ce le demi cercle $crstl$, qui ſera la projection de la moitié de l'Ellipſe propoſée. *Fig.* 183.

On prendra enſuite ſur le côté BE autant de parties égales que l'on voudra avoir de points à la circonference de l'Ellipſe, par leſquelles on menera des paralleles à BA, comme 4f, 3i, 2d, 1b, oL juſqu'à la rencontre de l'axe EL, & par les points fi, db on abaiſſera des perpendiculaires à la baſe BA prolongées juſqu'au cercle esl, comme bu, dt, is, fr qui couperont ſa circonference aux points r, s, t, u, par leſquels & par le centre C on tirera les lignes Cr4^b, Cs 3^b, Ct 2^b, Cu 1^b, qui donneront ſur la baſe du Cône les points 4^b, 3^b, 2^b, 1^b, par leſquels & par le ſommet S on tirera des lignes droites ſur la ſurface qu'on n'a pas marqué dans la Figure 183. mais bien dans la Figure 185. qui auroit dû être de grandeur égale à l'autre, ſi la place l'avoit permis; ces lignes ſerviront à trouver les points de la circonference de l'Ellipſe, en portant les diviſions correſpondantes à leur origine, par exemple B4 ſur 4S en 4r, B3 ſur 3S en 3s, B2 ſur 2S en 2t, B1 ſur 1S en 1u, & l'on aura ainſi des points à la ſurface du Cône, par leſquels menant une ligne courbe à la main, on aura l'Ellipſe propoſée.

Demonstration.

Premierement pour la poſition de l'axe EL, il faut démontrer qu'il doit être à ſon parametre comme aS, aP.

Si l'on ſuppoſe un plan qui coupe le Cône parallelement à la baſe; comme en mn, le cercle qu'il fera par cette ſection aura une Ordonnée GI commune avec l'Ellipſe EIL, à l'interſection des deux plans du cercle & de l'Ellipſe; donc $\overline{GI}^2 = nG \times Gm$ & $LG \times GE$: $\overline{GI}^2$:: EL eſt à ſon parametre; or à cauſe des paralleles LE & SF, qui ſont les triangles ſemblables LGn; SFa, on aura LG: Gn:: SF: Fa, & EG: Gm:: SF: Fb, donc $\overline{SF}^2$: $Fa \times Fb$:: EL à ſon parametre; or à cauſe du cercle $SDab$, $FD \times DS = Fa \times Fb$, donc l'axe EL eſt à ſon parametre:: $\overline{SF}^2$: FD×FS:: aS: SP, *ce qu'il falloit démontrer.* *Fig.* 181.

Digitized by Google

SECONDEMENT pour rendre raiſon de la maniere dont on a trouvé les points à la circonference de l'Ellipſe.

Fig. 183. IL eſt clair par ce que nous avons dit de la projection au Theoreme que celle de l'Ellipſe E L eſt un cercle, ou ſa moitié un demi cercle *e s l*, & que ſi l'on ſuppoſe des plans perpendiculaires à celui du triangle par l'axe B S A, & paralleles à cet axe S C du Cône, leurs interſections avec le plan de l'Ellipſe ſe fera ſuivant les Ordonnées qui ſont égales dans l'Ellipſe, & dans le cercle qui eſt ſa projection, puiſqu'elles ſont communes aux deux ſections, dont les points *r*, *s*, *t*, *u* ſont dans leur poſition Horiſontale, à l'égard du point C qui repreſente l'axe.

IL ne reſte plus qu'à déterminer leur hauteur au deſſus de la baſe B A du Cône, laquelle doit être trouvée ſur des lignes à la ſurface qui paſſent par les points *r*, *s*, *t*, *u*, & par le ſommet S, leſquelles ſont repreſentées par la projection C *r* 4', C *s* 3', C *t* 2', C *u* 1', & parce qu'on ne peut pas avoir ces hauteurs verticalement, mais ſur la ſurface inclinée du cône; il faut concevoir pluſieurs plans paralleles à la baſe, & paſſants par les points *f o i d b*, dont les ſections ſeront des cercles qui couperont les lignes tirées par les points de la baſe 4', M 3', 2', 1', en des points qui ſeront à la circonference de l'Ellipſe, puiſqu'ils coupent tous l'Ellipſe en deux points, & que les lignes 4' S, 3' S, 2' S, 1' S, la coupent auſſi aux points des Ordonnées marquées, donc chaque interſection des cercles & des lignes coreſpondantes, qui tirent, de même que les cercles, leurs origines des points *f o i d b*, ſera un des points de l'Ellipſe, *ce qu'il falloit trouver.*

SI le Cône eſt Droit, les diviſions E 4, 3 4, 4 2 ſont égales ſur tous les côtez tirez de la baſe du cône à ſon ſommet S; ainſi l'on peut ſans tracer les cercles porter ces intervales ſur chaque côté du cône tiré des points coreſpondans 4' M 3', 2', 1', de la baſe au ſommet; puiſque les cercles paralleles les coupent tous en parties égales.

SI le Cône eſt ſcalene les diviſions ne ſeront plus égales, mais ſeulement proportionelles, & alors on ne peut ſe diſpenſer de tracer les cercles pour avoir les points de leur interſection avec les differens côtez plus ou moins inclinez, ſuivant l'obliquité du cône.

U S A G E.

CE Problême eſt une introduction à la conſtruction des Trompes coniques en talud, ou en ſurplomb, ou biaiſes, dont les faces ſont Elliptiques.

PROBLEME

PROBLEME XXXVI.

Un Point étant donné à la ſurface d'un Cône pour ſommet d'une Parabole, décrire cette Courbe ſur la Surface concave ou convexe.

SOIT [*Fig.* 184.] le triangle ASB, la ſection du Cône donné, par ſon axe SC, & par le point donné P tracé ſur une ſurface plane; on menera par ce point P une ligne P*a* parallele au côté SB, qui coupera la baſe du triangle en *a*. Du point C, milieu de cette baſe pour centre & pour Rayon CA, on décrira un demi cercle B*y*A qui repreſentera la moitié de la baſe du Cône; enſuite ayant diviſé la ligne P*a* qui repreſente l'axe de la Parabole demandée, en autant de partie ségales ou inégales qu'on voudra avoir de points à ſa circonference, comme auſſi aux points *q*, *r*, *s*, on menera par ces points des paralleles à AB, qui couperont l'axe du Cône SC aux points *o*, 1, 2, *s*, & le côté SA aux points P *t u* V, deſquels on abaiſſera ſur BA des perpendiculaires qui la couperont aux points P T *u* V; & des points *q r s*, d'autres perpendiculaires ou paralleles à l'axe prolongées au deſſous de BA. Enfin du point C comme centre & pour Rayons les longueurs CT, C*u*, CV, on décrira des arcs de cercles concentriques TQ, *u*R, CV qui couperont les paralleles à l'axe SCS aux points Q, R, S, la ligne courbe menée par ces points PQRSa dans le demi cercle de la baſe du Cône B*y*A ſera la projection de la Parabole demandée, par le moyen de laquelle on la tracera ſur la ſurface concave ou convexe du Cône, comme on va le dire. *Fig.* 184.

SOIT [*Fig.* 182.] le Cône *b*S*a* égal à celui de la Figure 184. ce qu'on n'a pû obſerver dans cette Planche faute de place, mais que l'on peut ſuppoſer; on menera du ſommet S, par le point P donné à la ſurface, une ligne droite SA, ſur laquelle ayant porté les diſtances S*t*, S*u*, S v, SA de la Figure 184. aux points 1, 2, 3, 4, on tracera par chacun de ces points un cercle par le Problême XXXII. ſur lequel on portera de part & d'autre de la ligne SA l'arc de la projection qui eſt correſpondant à cette diviſion, par exemple, l'arc TQ qui eſt le premier au deſſous du ſommet P de 1 en Q, l'arc *u*R de 2 en R, & enfin l'arc VS de la Fig. 184. en 3 S de la Fig. 182. & par les points PQRS*x*, ainſi trouvez d'un côté, & les équidiſtans de l'autre côté de la droite SA, on tracera à la main ou avec une Régle pliante, mince & large poſée de cant la Parabole demandée, j'ai dit avec une Régle mince & large, parce que cette courbe, quoique décrite ſur une ſurface convexe ou concave eſt plane dans ſon contours. *Fig.* 182.

Digitized by Google

DEMONSTRATION.

LA raiſon de cette conſtruction eſt facile à trouver pour peu qu'on faſſe attention à la Figure 184. car premierement on coupe le Cône en pluſieurs tranches paralleles à la baſe, qui ſont autant de ſections circulaires de Rayons inégaux, qui ſont tranſportez ſur celui de la baſe C A par les perpendiculaires P*p*, *t* T, *uu*, V V; de ſorte que le centre C qui repreſente en un ſeul point de projection tout l'axe S C, repreſente auſſi tous les centres de ces ſections répandus ſur cet axe *o* 1 *e*, 2 *e s* & toutes les paralleles à l'axe *q* 1 Q, *r* 2 R, *s* C S, *a a* repreſentent des ſections verticales des plans, qui coupent ces cercles perpendiculairement au triangle par l'axe B S A, & par les points d'interſection, où les diametres des cercles coupent l'axe de la Parabole; par conſéquent ils donnent les cordes de ces arcs circulaires par l'interſection des deux plans perpendiculaires entr'eux, & du troiſiéme P*a* qui forme la Parabole par ſa ſection dans le Cône, où ſe terminent les arcs des ſections circulaires.

LES longueurs des cordes des demi-arcs T Q, *u* R, V S, A *a* étant ainſi trouvées, il eſt clair qu'elles ont été bien tranſportées ſur le cône à la Figure 182. & dans leurs juſtes places; & par conſéquent que les points à la circonference de la Parabole ont été trouvez ſur la ſurface concave ou convexe du Cône, *ce qu'il failloit faire.*

IL eſt auſſi clair par ce que nous avons dit ci-devant de la projection des ſections coniques, & par le Theoreme III. du I. Livre, que la courbe P Q R *a* tracée dans le plan de la baſe B *y* A, eſt encore une Parabole, quoique differente de celle de la ſection propoſée P *a*.

Nous avons dit au Problême X. à quoi ſert la deſcription de la Parabole.

PROBLEME XXXVII.

Le premier axe d'une Hyperbole, & un Point qui ſoit une de ſes extremitez étant donné à la ſurface du Cône, tracer cette courbe ſur la Surface concave ou convexe.

Fig. 184. SOIT [*Fig.* 184.] le triangle B S A la ſection par l'axe du Cône, & par le point donné H on prolongera indéfiniment le côté A S vers K, puis du point H pour centre & pour Rayon la longueur du premier axe donné H K, on fera un arc qui coupera A S prolongé en K, ſi de ce point K par H on mene une ligne droite K Y, on aura la poſition de l'axe de l'Hyperbole dans le Cône; laquelle étant donné il n'y a qu'à faire ſa projection de la même maniere qu'on a fait celle de la Parabole, ce que

Digitized by Google

la Figure fait ſuffiſamment voir, ſans qu'il ſoit néceſſaire d'en répeter la conſtruction: on obſervera ſeulement, 1.° qu'elle eſt beaucoup abregée, lorſque l'axe KH eſt parallele à l'axe du Cône SC; parce que la projection *hy* eſt une ligne droite, qui termine tout d'un coup tous les arcs 1E, 2D, 3I. 2.° Que ſi l'axe HY panche vers S, la projection du contour aura ſa concavité tournée vers B, & au contraire ſi cet axe panche en dehors.

Nous avons dit au Problême XII. à quoi ſert la deſcription de l'Hyperbole.

Corollaire General ſur la Projection des Sections Coniques.

Il ſuit de la méthode dont nous venons de faire uſage pour décrire les ſections coniques ſur le Cône, qu'on peut auſſi très commodément l'employer pour *décrire ſur un plan toute ſorte de Section conique, le triangle par l'axe du Cône, & un axe de la ſection étant donné dans ce triangle.*

Car ſi au lieu de prendre les arcs de la projection des tranches paralleles, qui donnent des cercles concentriques, terminez par la projection du plan qui forme la ſection; on prend les cordes de ces arcs rangées ſucceſſivement ſur un axe à angle droit, ce ſeront autant d'Ordonnées, par l'extremité deſquelles on fera paſſer la courbe que l'on cherche.

Premier Exemple pour l'Ellipſe.

Soit le triangle par l'axe du Cône BSA [*Fig.* 183.] dans lequel l'axe EL de l'Ellipſe eſt donné; ayant diviſé cet axe en autant de points que l'on voudra *bdif*, on abaiſſera par ces points & par les extremitez EL des perpendiculaires à la baſe BA, au delà de laquelle on les prolongera en *rstu*; enſuite ſur *el* comme diametre, ſi l'on fait un demi cercle *erstul*, il coupera toutes ces paralleles aux points *rstu*, qui déterminent la longueur des Ordonnées qui conviennent à l'Ellipſe aux points *bdif*; ainſi ayant elevé des perpendiculaires à cet axe ſur ces diviſions, on portera les longueurs des Ordonnées au cercle qui eſt la projection de l'Ellipſe ſur ces perpendiculaires, ſçavoir R*r* ſur *fg*, D*s* ſur *ih*, F*t* ſur *di*, G*u* ſur *b*K, & l'on aura les points E*ghikl*, par leſquels on tracera la demi-Ellipſe à la main, ou avec une Régle pliante. *Fig.* 183.

Digitized by Google

Second Exemple pour la Parabole.

Fig. 184. Soit le triangle par l'axe du Cône BSA [*Fig.* 184.] & l'axe de la Parabole P*a* donné dans ce triangle; ayant diviſé cet axe par pluſieurs plans paralleles à la baſe BA, & paſſans par les points pris à volonté *q r s*, on fera la projection des cercles qu'ils font dans le Cône, & la projection de la Parabole aRQP, comme nous l'avons dit ci-devant, par les paralleles *a a*, *s*S, R*r*, Q*q*, P*p*, on fera des perpendiculaires ſur P*a* aux points *q r s*, ou pour éviter la confuſion des lignes ſur une parallele P^2A, & l'on portera ſur ces perpendiculaires les ſinus des arcs QT, R*u*, SV, ſçavoir *a*a, S3, R2, Q1, leſquels ſeront rangez ſucceſſivement aux points correſpondans de l'axe de la Parabole, comme 1Q en *q*Q^2, 3R en *r*R^2, 3S en *s*S^2, & C*a* en Aa^2, & l'on aura les points Q^2, R^2, S^2, a^2, par leſquels on tracera la Parabole à la main ou avec une Régle pliante.

Troiſiéme Exemple pour l'Hyperbole.

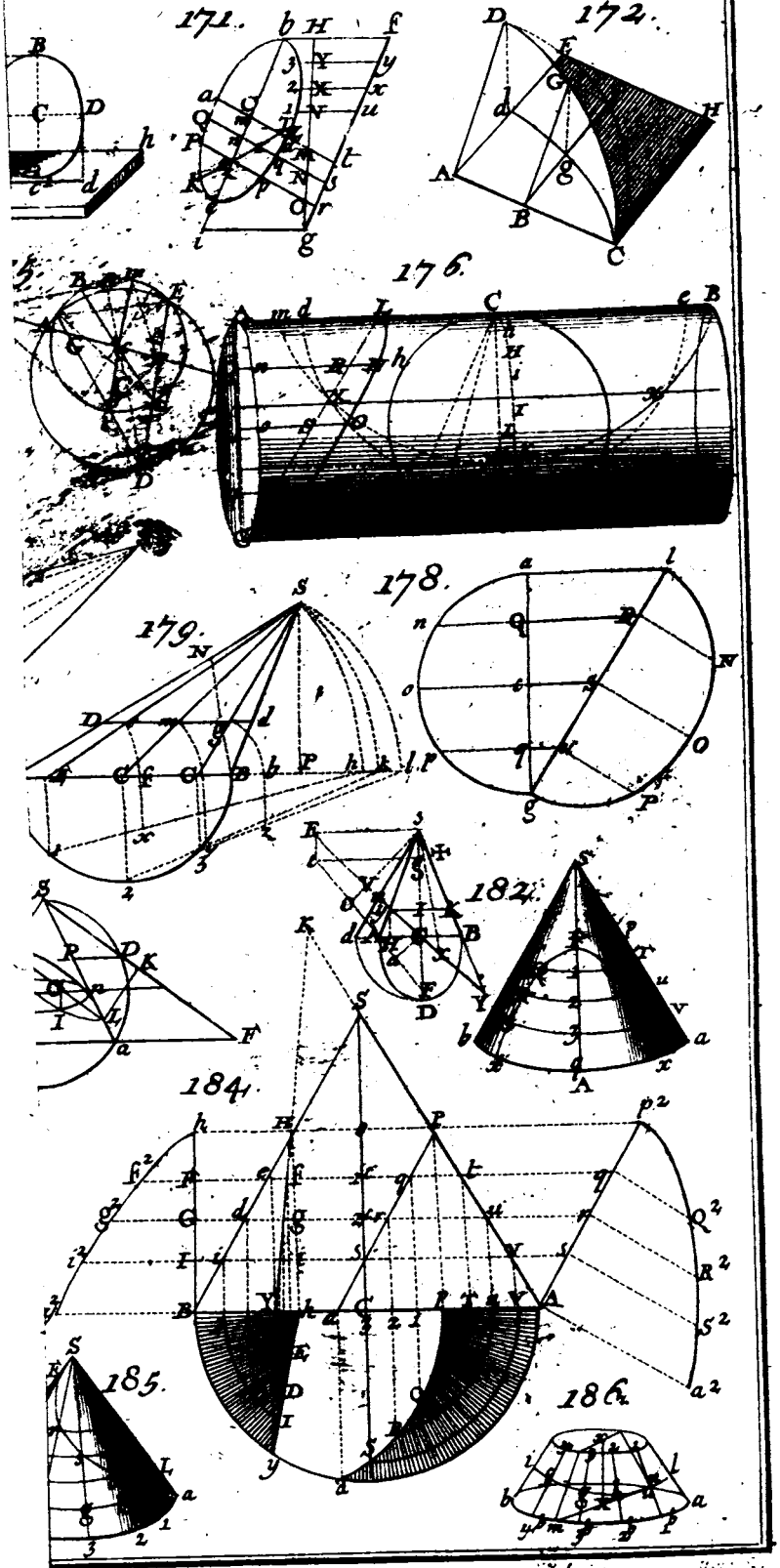
Soit *Fig.* 184. le triangle par l'axe du Cône BSA, & l'axe de l'Hyperbole donné HY, dans ce triangle; ayant diviſé cet axe en autant de parties qu'on voudra par des plans qui coupent le Cône parallelement à ſa baſe, en *f g i*, & ayant fait la projection des arcs de cercle qui paſſent par les points *e d i*, par le moyen des paralleles à l'axe SC; on tirera autant de perpendiculaires à l'axe HY donné ou à quelque autre égal, & également diviſé comme *b*B, ſur leſquelles on portera les ſinus de demi-arcs de la projection, 1E, 2D, 3I, B*y* correſpondans à chaque diviſion; c'eſt-à-dire, les perpendiculaires ſur B*b* tirées des points FGIB qu'on tranſportera en F, f^2, G, g^2, I, i^2, B, y^2, & par les points *b*, f^2, g^2, i^2, ^2y, on tracera à la main une courbe qui ſera l'Hyperbole que l'on cherche.

La démonſtration de ces pratiques eſt la même que celle que nous avons donnée de la deſcription de ces courbes, ſur des ſurfaces concaves ou convexes; en effet il n'y a rien de changé, excepté qu'au lieu de prendre les arcs de la projection pour les porter de part & d'autre d'un côté du Cône, ſur des cercles paralleles à la baſe, ici l'on prend les demi-cordes de ces mêmes arcs ſur des lignes paralleles à cette baſe ſur un plan.

Remarque ſur cet Uſage.

On peut toûjours ſe ſervir de la méthode de la projection dans l'Architecture pour la coupe des Pierres; parce que les Cônes ſont or-

Digitized by Google



UNIV. OF MICH.
Digitized by Google

Digitized by Google

dinairement donnez, de même que les axes des ſections dans ces Cônes, & parce qu'on eſt toûjours obligé de faire des *Plans* & des Profils, on a auſſi la projection des diviſions de ces Cônes par les tranches qui ſont ordinairement les rangs des Pierres; il ne s'agit que d'y reconnoître les cordes qui ſont les Ordonnées & abſciſſes, leſquelles ſont toûjours égales ſur le côté du Cône, & ſur l'axe de la Parabole, & dans les autres ſections où elles ſont inégales ſur le côté du Cône, & ſur l'axe, elles ſont toûjours en même raiſon avec celles de l'axe, parce que l'un & l'autre ſont diviſez par des paralleles à la baſe du Cône; comme cette pratique de projection eſt d'une très grande importance pour former ce deſſein, que les Architectes appellent *l'Epure*, nous l'expliquerons plus au long au Livre ſuivant.

Si l'on a bien compris la maniere de tracer les ſections coniques par ce moyen, il ne ſera pas difficile de concevoir qu'il eſt applicable à toutes les autres Courbes, qui peuvent ſe former ſur des corps Réguliers, & même Irréguliers, comme on va l'expliquer ci-après.

Digitized by Google

TROISIE'ME PARTIE

Du Second Livre.

CHAPITRE VII.

Des Sections qui ne peuvent être décrites que ſur des Surfaces courbes, & par le moyen de la Projection ſur des Surfaces planes.

PROBLEME GENERAL.

Trouver tant de Points que l'on voudra du contour des Courbes faites à la Surface des Sphères, Cônes & Cylindres qui ſe pénetrent mutuellement.

LORSQU'IL s'agit de décrire des courbes qui ſont dans une ſurface plane, on trouve les points de leur contour par le rapport des Ordonnées aux abſciſſes de leurs axes, ou de leurs Co-ordonnées; mais pour celles qui ne ſont pas dans un plan, ce rapport ne ſuffit pas, parce que leurs axes ou diametres, n'étant pas des lignes droites, les abſciſſes ne ſont pas droites; ce ſont des courbes auſquelles il faut mener d'autres Ordonnées à une ligne droite, qui eſt comme leur ſouſtendante, pour en trouver la courbure par differentes diſtances de la corde à l'arc; de ſorte que le rapport de deux lignes connuës ne peut ſuffire, puiſque de quelque façon qu'un plan coupe la Sphère, le Cône ou le Cylindre, il ne produira qu'une ſection conique ou un Parallelograme; & ſi l'on ſuppoſe un ſecond plan perpendiculaire ou incliné à ce premier, leur commune ſection ſera bien une droite, dans laquelle il doit ſe trouver un point de la ſection ſolide; mais cette ligne n'en détermine pas la poſition, il faut avoir recours à un troiſiéme plan qui coupe les deux premiers dans certaines circonſtances, pour déterminer ce point ſur la ligne où l'on ſçait qu'il doit être; tels ſont les points du contour de ces courbes à double courbure, que j'appelle ici des ſections *ſolides*, parce qu'elles proviennent de la ſection d'un ſolide coupé ou pénetré par un autre ſolide, & non pas par un plan, comme les ſections coniques.

DANS le nombre des trois plans qu'il faut ſuppoſer pour trouver les

Digitized by Google

points de ces courbes, il y en a toûjours un donné, qui fait une ſection conique, dont l'axe eſt la ſouſtendante de la courbe à double courbure, que nous pouvons appeller *Imbriquée*, parce qu'elle eſt faite en contour de tuile creuſe, ou qui eſt tangent à un des ſommets de cette courbe, pour les diſtinguer des autres courbes à double courbure, qui ont plus d'une inflexion.

Le ſecond plan doit être parallele au premier, pour y trouver les Ordonnées à l'axe courbe de la ſection ſolide, & les comparer à celles de la ſection conique, qui leur correſpondent.

Enfin le troiſiéme plan doit couper les deux précedens par les Ordonnées de la ſection conique & de la ſolide *Imbriquée*, pour en trouver les diſtances, ou par des perpendiculaires, ou par des lignes inclinées d'une inclinaiſon connuë.

Si l'on entend bien ce principe, on verra que tous les Problémes propoſez à réſoudre, n'en ſont qu'une application, ſuivant la difference des cas.

On reconnoîtra auſſi que cette méthode toute ſimple qu'elle eſt, eſt très Geometrique, & la clef de tous les Traits des Enfourchemens des voutes, qui ſont preſque toute la difficulté de l'Art de la coupe des Pierres.

Il ne s'agit donc, 1.° que de couper les ſolides qui ſe pénetrent par des plans paralleles entr'eux, comme par tranches, qui ſont toûjours des ſections ſemblables dans chaque corps, mais differentes de l'un à l'autre.

Secondement, de reconnoître dans chacune de ſes tranches la partie commune aux deux corps; car ſi l'on trace ſur un plan les deux ſections differentes, dans leur diſtance reſpective, on verra qu'elles ſe coupent en deux points de leur contour, qui ſont communs aux deux ſurfaces de ces corps.

Troiſiémement, de ſuivre, je vieux dire lier par des traits les points communs aux deux ſurfaces, paſſant de l'un à l'autre ſur les ſurfaces courbes mêmes, pour avoir la courbe naturelle, ou ſur une ſurface plane, pour en avoir l'imitation produite par la projection, comme nous l'avons expliqué ci-devant.

Or puiſque ſuivant la Geometrie de l'infini, on peut conſiderer les ſolides comme compoſez d'une infinité de tranches paralleles infiniment minces, dans leſquelles les Ordonnées & les abſciſſes des ſections planes,

Digitized by Google

augmentent ou diminuent dans un rapport connu; on peut déterminer une infinité de points au contours des Courbes à double courbure, qui ne ſont pas applicables ſur une ſurface plane, ou les aplatir, pour ainſi dire, en les réduiſant par la projection à des courbes planes, ſans y faire d'autre changement, que d'en ſuprimer la troiſiéme dimention; ce qui eſt néceſſaire pour y parvenir par gradation, comme l'on fera dans tous les Problêmes ſuivans.

On peut rendre la méthode de trouver pluſieurs points des courbes à double courbure plus ou moins aiſée, ſuivant la ſituation que l'on donne aux plans qui coupent les corps en tranches paralleles; lorſque les axes des Cônes & des Cylindres qui ſe pénetrent, ſont paralleles entr'eux, la ſituation la plus commode des tranches, eſt d'être perpendiculaires à ces axes, perce qu'alors les points communs ne ſont que les interſections de differens cercles: ſi les axes de ces corps ſe coupent à angle Droit, la ſituation des tranches doit être parallele à l'un des deux pour avoir un cercle, & un Parallelograme ou une Hyperbole & un cercle, ou obliquement pour avoir deux Ellipſes qui ſe coupent; tout cela deviendra plus ſenſible par les exemples des Problêmes ſuivans.

Du Cicloïmbre.

PROBLEME XXXVIII.

Tracer un Cicloïmbre ſur deux Cylindres inégaux, qui ſe pénetrent à angle Droit.

PLA. 17. *Fig.* 187. SOIT [*Fig.* 187.] le Cylindre O L a *b* pénetré par un plus petit T *t*, *u* V, c'eſt-à-dire, d'un plus petit diametre, dont l'axe *x* X tombe perpendiculairement ſur celui du grand C *c*: il faut tracer la courbe qui ſe fait à l'interſection des deux ſurfaces ſur l'un ou l'autre de ces deux Cylindres. Pour y parvenir, il faut commencer par faire la préparation ſuivante.

AYANT fait à part ſur un plan un quart de cercle C A B, dont le Rayon C A ſoit égal à celui du gros Cylindre; ſur le Rayon C B prolongé, & du point B pour centre, on décrira un autre quart de cercle D E B, dont le Rayon D B ſera égal à celui du petit Cylindre, & parallele à A C: on diviſera l'arc D E en autant de parties égales qu'on voudra, par exemple, en 4 aux points 1, 2, 3, par leſquels on menera hors du quart de cercle D E, des paralleles à A C, & d'autres paralleles à C E comme 1 *i*, 2 *b*, 3 *g*, D *d*, juſqu'à la rencontre de l'arc A *d* B en *d*, *g*, *b*, *i*, par où on menera d'autres paralleles à A C indéfinies. Sur D B prolongée, on prendra *b b* pour une partie du côté du gros Cylindre, & plus grande que le diametre du petit, on la diviſera en deux également au point *m*, duquel on portera

portera de part & d'autre les distances DI, DH, DG, DF en *mt*, *m* 1, *m* 2, *m* 3, & par tous ces points *m*, 3, 2, 1, *t*, on tirera des perpendiculaires à *o b*, sur chacune desquelles on portera successivement & dans l'ordre des divisions correspondantes de part & d'autre du point *m*, les divisions du Rayon CB, ou leurs égales, qui sont les distances de la tangente DB à l'arc A*d*B, sçavoir D*d* en *m*F, 6*g* en 3*q*, 5*h* en 2*r*, 4*i* en 1*s*, & de même de l'autre côté de *m* tirant vers le point *u*, & l'on aura la projection d'une moitié de la courbe solide, qui se fait par l'intersection des surfaces des deux cylindres, laquelle projection n'est pas absolument nécessaire, mais très utile pour se conduire dans la description de la courbe sur les surfaces convexes ou concaves des cylindres, comme on le verra au IV. Livre.

Cette préparation étant faite, si l'on veut décrire le Cicloïmbre, 1.° *sur le grand Cylindre.*

Ayant tracé une parallele à son axe, comme *o b*, on portera les distances *m* 3, *m* 2, *m* 1, *mt* d'un côté d'un point *m* pris à volonté, & autant de l'autre vers *u*, & par les points *m*, 3, 2, 1, *t*, &c. on tracera autant de cercles paralleles entr'eux, & perpendiculaires au côté *o b*, sur lesquels on portera, suivant l'ordre des divisions correspondantes de l'arc A B de part & d'autre du point *m*, les arcs de cercle, B*d* sur le cercle representé ici par la ligne droite *m*F, B*g* sur l'arc 3*q*, B*b* sur 2*r* & B*i* sur 1*s*; ce que l'on voit plus distinctement dans la Figure 188. où ces arcs sont dessinez en perspective avec des lettres semblables à celles de la Figure 187. sur l'arc A*d*B representé par l'arc aKB, B*g* par *b*G, B*h* par *b*H & B*i* par l'arc *b*I; ce qui donnera sur les arcs de cercles paralleles, tracez sur le gros cylindre, les points K, G, H, I, *t*, par lesquels on tracera à la main une courbe qui sera le cicloïmbre proposé; on en fera de même pour les autres quarts de cette courbe qui sont tous égaux entr'eux, & au quart qui en paroît dans la Figure 188.

Ou il faut remarquer que la courbe *t*F*u*, qu'on a tracée dans la Figure 187. est celle de l'axe courbe du Cicloïmbre, representé dans la Figure 188. par la ligne courbe *t*Y, qui passe par le milieu des cordes de tous les arcs retranchez du gros cylindre.

Secondement, si l'on veut tracer le cicloïmbre *sur le petit Cylindre*, on décrira sur la surface un cercle, dont la projection [*Fig.* 187.] est la ligne droite *tmu*, & ayant divisé sa circonference en parties égales à celles de l'arc DE, du quart de cercle DEB; on menera par les points de cette division autant de paralleles à son axe, lesquelles seront perpendiculaires au cercle, si le cylindre est Droit, comme nous le supposons, & sur chacune de ces paralleles representées [*Fig.* 188.] par les lignes *k*K, *g*G,

*b*H, 1*i*, T*t*, on portera les longueurs D*d*, 6*g*, 5*b*, 4*i*, de la Figure 187. ſuivant leur ordre, & depuis le cercle tracé *tmu*, qui eſt leur terme commun, leſquelles longueurs raportées quatre fois de ſuite, donneront les points par où paſſe le Cicloïmbre ſur le petit cylindre, par leſquels on tracera la courbe à la main, *ce qu'il falloit faire.*

DEMONSTRATION.

LA raiſon de cette operation ſe déduit facilement de notre Problême general; car ſi l'on ſuppoſe le grand cylindre coupé par pluſieurs tranches paralleles entr'elles, & perpendiculaires à ſon axe, ces tranches ſeront toutes renfermées entre deux cercles; mais le même plan qui coupe chaque tranche du grand, étant auſſi ſuppoſé couper le petit cylindre parallelement à ſon axe, fera des tranches compriſes entre deux Parallelogrames inégaux, dont l'un ſera plus large que l'autre; de ſorte qu'on a une ſuite de cercles égaux coupez par des Parallelogrames inégaux, dont les rapports des côtez ſont exprimez par les lignes tangentes BD, B6, B5, B4, par leſquelles les autres côtez qui traverſent ceux-ci à angle Droit, ſont exprimez par les lignes D*d*, 6*g*, 5*b*, 4*i*, dont les plus éloignez du point B, qui eſt ſur l'axe du petit cylindre, ſont coupez plus loin de la tangente DB par l'arc A*d*B, ſuivant l'ordre des ſinus verſes des arcs B*d*, B*g*, B*b*, B*i*, comme nous l'avons dit au Theoreme XVIII. *ce qu'il falloit faire.*

USAGE.

CE Problême eſt la baſe de la pratique des Traits de la coupe des Pierres, où il s'agit de trouver les arêtes des enfourchemens des Berceaux inégaux qui ſe croiſent à angle Droit, dont nous avons fait un petit détail à l'application du Theoreme cité.

ON peut même y comprendre ceux qui ſe croiſent obliquement, dont la difference du Trait n'eſt qu'une modification de cette pratique, comme on le va voir au Problême ſuivant.

PROBLEME XXXIX.

Tracer une Ellipſimbre formée par la ſection d'une Sphère pénetrée par un Cylindre, dont l'Axe ne paſſe pas par le centre de la Sphère.

Fig. 189. SOIT [*Fig.* 189.] une ſphère ou une portion de ſphère ARB*t*, dont le centre eſt C, pénetrée par un cylindre DEFG, qui entre dans la ſphère de tout ſon contour; on la diviſera ſuivant le Problême general par tranches paralleles entr'elles, & perpendiculaires à l'axe du cylindre, par des lignes droites 1*r*, 2*s*, 3*t*, qui repreſenteront les plans coupans

Digitized by Google

ces deux corps, lesquels feront toûjours pour-sections deux cercles, dont on aura les Rayons sur ces lignes; si on les considere comme les intersections d'un plan passant par l'axe du cylindre, & de ces plans qui lui sont perpendiculaires; on prendra donc le Rayon du cylindre D X, & des points *f*, *e*, *d*, intersections de l'axe X*x* du cylindre, & des perpendiculaires à cet axe 1*f*, 2*e*, 3*d* prises à volonté, & en aussi grands nombres que l'on voudra avoir de points pour centres, on décrira des arcs ou des demi-cercles 1, 4, *o*; 2, 5, *p*; 3, 6, *q*, & des points X, *b*, *g*, *i* pour centres pris au milieu des cordes de la sphère R*r*, S*s*, T*t*, on décrira d'autres demi-cercles, qui couperont les précedens aux points 4, 5, 6, par lesquels on abaissera des perpendiculaires sur les lignes 1*r*, 2*s*, 3*t*, qui les couperont aux points *n*, *m*, *l*, lesquels donneront la projection des points de la Courbe à double courbure, que j'appelle Ellipsimbre, par lesquels on tracera la ligne A, *l*, *m*, *n*, B, qui sera son axe courbe.

Cette préparation étant faite, 1.° si l'on veut tracer l'Ellipsimbre sur le cylindre; après avoir tracé une parallele à son axe, par exemple A D, on portera sur cette ligne les intervales des divisions qui ont été prises à volonté A 3, A 2, A 1, par lesquelles on tracera autant de cercles paralleles entr'eux, & perpendiculaires à l'axe du cylindre; que nous supposons Droit; ensuite on portera de part & d'autre de la ligne A D tracée à la surface du cylindre, les arcs des cercles déterminez par l'intersection de ceux de la sphère; sçavoir l'arc 1, 4 sur le premier cercle, l'arc 2, 5 sur le second, & 3, 6 sur le troisiéme, & par les points A, 6, 5, 4, B, on tracera à la main une moitié de l'Ellipsimbre, & l'autre de l'autre côté également, ce que la Figure 189. ne peut exprimer, parce que les demi-cercles 1, 4, *o*; 2, 5, *p*; 3, 6, *q* doivent être relevez par l'imagination en l'air, perpendiculairement au plan de la section par l'axe du cylindre, & qu'ils ne representent encore qu'une moitié de la courbe, l'autre étant de l'autre côté de la ligne A D sur le cylindre.

Secondement, si l'on veut tracer l'Ellipsimbre sur la surface de la sphère; au lieu de la ligne A D que nous avons prise pour milieu des arcs, dont la Figure nous donne les moitiez, on tracera sur la sphère un cercle majeur * passant par les points A & B, sur lequel on portera les intervales des divisions faites par les paralleles 1*r*, 2*s*, 3*t* qui sont les arcs A T, A S, A R, A B, par lesquels on décrira autant de cercles paralleles entr'eux, & perpendiculaires au majeur, & l'on portera de part & d'autre de ce cercle majeur les arcs des cercles mineurs déterminez par l'intersection des demi-cercles du cylindre, qui sont dans les plans correspondans, ainsi l'on portera sur le premier l'arc R 4, sur le second l'arc S 5, sur le troisiéme l'arc T 6, & l'on aura sur la surface de la sphère les points A, 6, 5, 4, B, par lesquels

* Prob. XXX.

on tracera à la main une courbe qui ſera l'Ellipſimbre propoſée: on en ſera autant de l'autre côté de l'arc ARB, ſur la ſurface de la ſphère, pour l'autre moitié de l'Ellipſimbre.

On peut encore tracer cette courbe ſur le cylindre & ſur la ſphère d'une autre maniere.

Premierement, ſur le cylindre on peut tracer une Ellipſe par les points A & B [par le Probl. XXXVI.] & ayant pris ſur cette Ellipſe les arcs correſpondans aux parties de l'axe Az, AY, de la projection on fera paſſer par les points z & Y des paralleles à l'axe du cylindre, ſur leſquelles on portera les longueurs Z*l*, Y*m* de la projection, leſquelles donneront les points *l*, *m* & *n* qui ſeront à la circonference de l'Ellipſimbre, mais cette maniere eſt plus longue. On traceroit de même ſur la ſphère un cercle majeur AB, d'où, comme terme, on porteroit les arcs correſpondans aux longueurs *l*Z, *m*Y, pour avoir les points *l*, *m* & *n*; mais cette maniere qui ſeroit plus longue, ſeroit moins correcte dans l'exécution: on ne la propoſe ici que comme une idée des differens moyens qu'on peut employer pour parvenir à la même fin.

Demonstration.

La raiſon de la premiere conſtruction eſt toûjours fondée ſur le Theoreme general de la diviſion des corps en tranches paralleles, par le moyen deſquelles on a pluſieurs interſections des cercles inégaux de la ſphère & du cylindre, dans leſquelles ſont les points de la rencontre des deux ſurfaces, & par conſéquent de l'Ellipſimbre, car quoique l'on ait tracé ces differens cercles ſur le plan de la Figure, qui eſt celui qui paſſe par l'axe du cylindre, il faut les redreſſer par l'imagination perpendiculairement à ce plan; ce qui ne change rien à leur diſtance rélative au plan tangent ſuppoſé ſur la ligne AD du cylindre, puiſque les lignes 4*n*, 5*m*, 6*l* lui ſont paralleles, comme elles le ſont auſſi à l'axe de la ſphère CP: & puiſque la courbe doit toûjours avoir des points communs aux deux ſurfaces, il ſuit qu'elle paſſera par les interſections des courbes formées par le plan qui coupe les deux corps, *ce qu'il falloit trouver.*

On parviendra auſſi à la même deſcription, ſi au lieu de faire les tranches perpendiculaires à l'axe du cylindre, on les lui fait paralleles, alors les points de la courbe ſe trouveront à l'intention de cercles de la ſphère, & des Parallelogrames du cylindre, c'eſt toûjours le même principe differemment appliqué.

Si le cylindre n'étoit pas Droit, mais ſcalene, il arriveroit du changement pour les Figures des ſections, car ſuppoſant les tranches perpendiculaires à ſon axe, elles ſeroient circulaires dans la ſphère, & Elliptiques

Digitized by Google

dans le Cylindre, & elles n'y ſeroient circulaires, que lorſque les tranches ſeroient obliques à l'axe, & paralleles à la baſe, ou bien faiſant une ſection ſous-contraire; ce qu'il eſt aiſé de ſe repreſenter & de concevoir ſans le ſecours d'une Figure: cependant pour aider l'imagination, on peut s'exercer ſur une boule & un cylindre en relief coupé, c'eſt-à-dire, taillé avec de la craye, ou autre matiere tendre.

L'usage de ce Problême eſt indiqué au Theoreme X. pour les enfourchemens des Lunettes pratiquées dans une Voute ſphérique.

Probleme XL.

Les diametres des deux Cylindres inégaux qui ſe pénetrent, & l'inclinaiſon de leurs Axes qui ſe rencontrent étant donnez, tracer l'Ellipſimbre formée par la rencontre de leurs Surfaces.

La conſtruction de ce Problême eſt ſi ſemblable à celle du penultiéme, que la ſeule inſpection de la Figure 190. en fera voir la difference, qui ne conſiſte que dans la préparation, ou au lieu de deux quarts de cercles, il faut faire deux quarts d'Ellipſes, au lieu de les placer à angle droit ſur le côté du grand cylindre, il faut donner à leurs axes l'inclinaiſon qu'ils doivent avoir ſur ce côté.

Soit cependant pour une plus ample explication [*Fig.* 190.] la moitié du grand cylindre QB pénetré par un plus petit T*m*, dont l'axe X*x* fait avec l'axe *c*C du grand, l'angle X*xc*; on prendra la ligne BC pour moitié du grand axe d'une Ellipſe, & le Rayon *e*C du demi diametre du grand cylindre pour moitié du petit axe, on décrira ſur un plan à part le quart d'Ellipſe NDE, dont le centre ſera C; enſuite ayant prolongé la moitié du grand axe CN juſqu'en M, en ſorte que NM ſoit égale à *h m*, priſe pour moitié du grand axe d'un autre quart d'Ellipſe; on prendra pour moitié du petit axe la ligne NH égale au demi diametre de la baſe TV du petit Cylindre, & l'on décrira le quart d'Ellipſe H2 1 M; enſuite ayant tiré par H la ligne DL parallele à CM, on diviſera le quart d'Ellipſe HM en autant de parties égales qu'on voudra; par exemple, ici en trois, aux points 2. & 1. par leſquelles on menera 1G, 2F, paralleles à CM, & ML, 1K, 2I, paralleles à HN: cette préparation étant faite, on diviſera la circonference du petit cylindre T*m* en quatre, & le quart en autant de parties égales que celui de l'Ellipſe HM, par exemple, ici en douze, puiſque le quart HM eſt diviſé en trois: 1.° Si l'on veut avoir la projection de cette diviſion ſur la ligne A*m*, on fera *hi* = HI, *hk* = HK, & *h m* = HL, ou NM: enſuite on menera par ces points *h*, *i*, *k*, des paralleles à l'axe X*x* du petit cylindre, prolongées au delà des points *h*, *i*, *k*, ſur leſquelles on portera les diſtances de la tangente *Fig.* 190.

Digitized by Google

HN au quart d'Ellipſe EDN, ſçavoir, HD en *hd*, PF en *pf*, & *if*; OG en *og*, & K*g*, & par les points A, *g*, *f*, *d*, *f*, *g*, *m*, on tracera la Courbe qui repreſente l'axe courbé de l'Ellipſimbre, ou la projection de ſon contour.

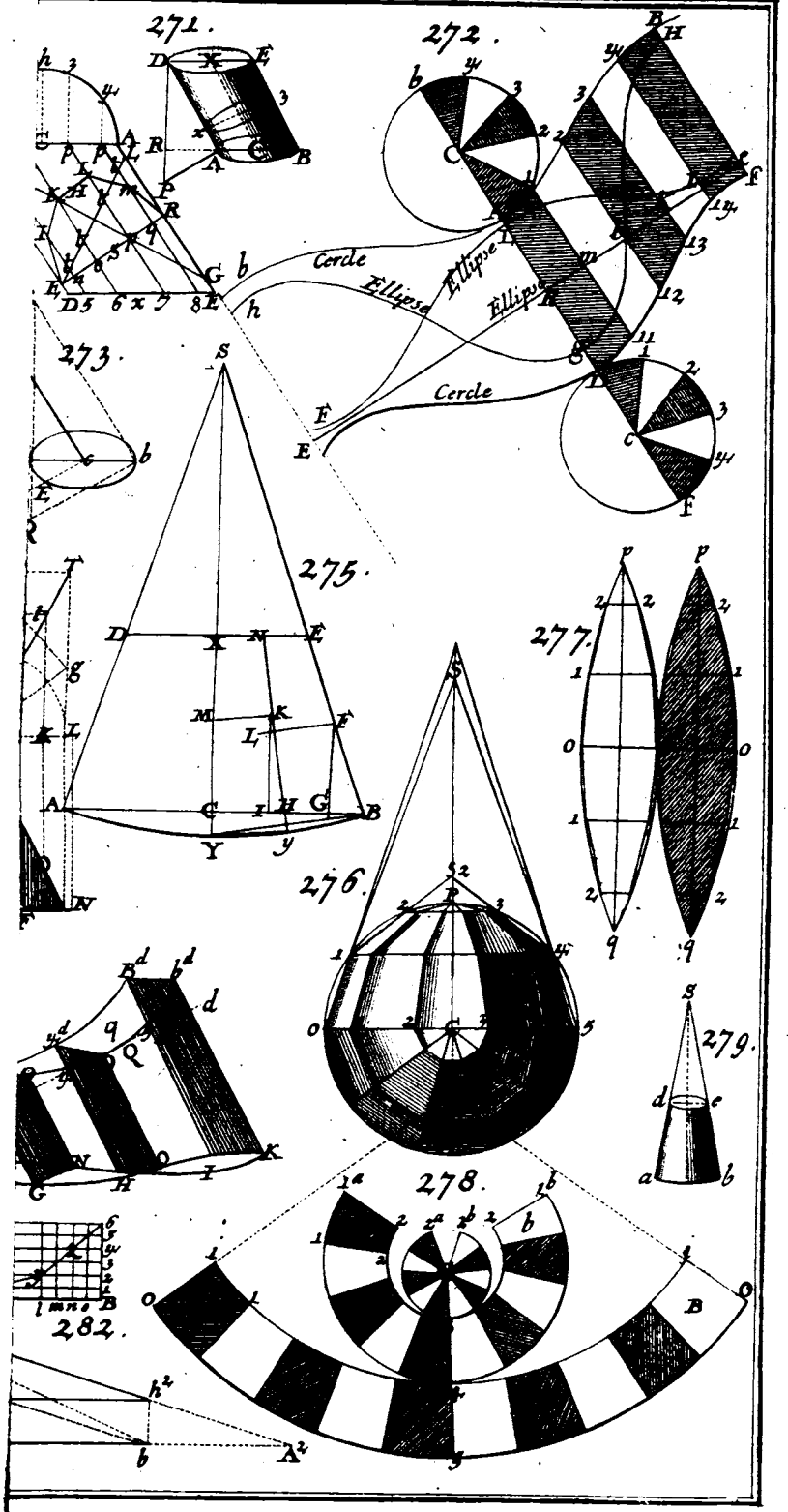
2.° PRESENTEMENT ſi l'on veut tracer l'Ellipſimbre ſur le petit cylindre *t* & *m*, on tracera une Ellipſe ſur la ſurface, dont la circonference coupera les paralleles R*g*, S*f*, L*d*, &c. aux points *o*, *p*, *b*, *i*, K, de chacun deſquels comme d'un terme, on portera les diſtances H*d* en *hd*, *p*F en *if* & *pf*, OG en *og* & en K*g*, & ainſi de même de l'autre côté du cylindre, & par les points trouvez ſur les paralleles à l'axe du cylindre, on tracera à la main la courbe qui ſera l'Ellipſimbre propoſée.

3.° SI l'on veut tracer cette courbe ſur le grand cylindre QB, ayant tracé une ligne AB parallele à ſon axe C*c*, on prendra à volonté un point *b* pour celui du milieu, de la ſection duquel on portera de part & d'autre les diſtances HI, HK, HL, pour avoir ſur cette ligne A*m* les points *o*, *p*, *b*, *i*, K, par leſquels on tracera par le Problême XXXVI. autant d'Ellipſes paralleles entr'elles, ſuivant l'inclinaiſon donnée A*bd*; enſuite on portera de part & d'autre de la ligne A*m* ſur chacune de ces Ellipſes, les arcs correſpondans du quart d'Ellipſe EDN, ſçavoir, ND ſur *bd*, NF ſur *pf* & *if*, NG ſur *og* & K*g*, & par les points *g*, *f*, *d*, *f*, *g*, qui terminent les arcs des Ellipſes tracées ſur le cylindre, on fera paſſer une ligne courbe de chaque côté de la ligne A*m*, qui ſera l'Ellipſimbre propoſée.

DEMONSTRATION.

LA raiſon de cette conſtruction eſt toûjours déduite du même Problême general que les précedentes. On coupe les deux corps par tranches paralleles qui ſont dans le petit Cylindre des Parallelogrames, parce que les plans coupans, ſont paralleles à ſon axe, & dans le grand cylindre les ſections des mêmes plans ſont des Ellipſes; or parce que toutes ces Ellipſes ſont égales, elles ſont repreſentées par le quart d'Ellipſe EDN, qui a été fait dans la préparation; & parce que tous les Parallelogrames ſont inégaux, on a exprimé la moitié de leurs côtez par les lignes HI, HK, HL qui ſont les diſtances des points 1, 2, H, par leſquels paſſent es plans qui coupent le petit cylindre; car ſi l'on releve par la penſée le quart d'Ellipſe H2 1M à angle aigu ſur le plan de l'Ellipſe EDN, en ſorte que les demi-axes CN & NM faſſent un angle égal à l'angle *x*, *b*, *m*, c'eſt-à-dire, dans la Figure, que NM ſoit poſée ſur NA; il eſt clair que la projection de la ligne HN ſe réduira à un point N, placé au milieu du petit cylindre, comme eſt le point *b*, la projection du point 2. ſe fera ſur NA à une diſtance égale à HI qui eſt, par la con-

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

ſtruction, *hi* pour un côté, & *hp* pour l'autre, & tout le quart d'Ellipſe M 1 2 H ſera dans un plan tangent au grand Cylindre QB, ſuivant la ligne *hm*, partie de ſon côté A*m*, & les intervales des diviſions H, 2, 1, M à l'Ellipſe qui eſt la ſection du même plan dans le Cylindre, ſeront exprimez par les lignes H D, *p* F, *o* G, qui ſont perpendiculaires à la tangente H N, & paralleles à l'axe N C, leſquelles diſtances ſont entr'elles comme les ſinus verſes, ou les fleches du double des arcs D N, F N, G N, leſquelles ſont encore entr'elles comme les ſinus verſes des arcs de cercle correſpondans à la baſe du Cylindre, comme nous l'avons démontré ailleurs; ce que nous avons repreſenté à la Figure 191. qui eſt la vûë de la précedente par le bout du gros Cylindre, comme il ſera facile de reconnoître par les mêmes Lettres placées aux points correſpondans, mais doubles, parce qu'elle fait voir les deux côtez, & par conſéquent les Parallelogrames des ſections du petit Cylindre; mais par la conſtruction les longueurs de ces fleches, ou ce qui eſt la même choſe, des longueurs qui leur ſont égales, ont été portées de *h* en *d*, de *i* en *f*, &c. donc la courbe *tdm* eſt l'axe courbe de l'Ellipſimbre, & marque ſa profondeur dans le Cylindre QB, & parce que l'on a porté les intervales des arcs de l'Ellipſe D E, qui eſt égale à toutes les autres ſections, paralleles ſur chacune des ſections correſpondantes; on aura la rencontre des Parallelogrames du petit Cylindre avec les Ellipſes du grand, où ſont les points communs à leurs deux ſurfaces; donc ils ſont à la circonference de l'Ellipſimbre, & cette Courbe paſſera par tous ceux qui ont été ainſi déterminez, *ce qu'il falloit faire.*

L'usage de ce Problême a été indiqué au Theoreme XIX. il ſert pour les enfourchemens des Berceaux, ou parties de Berceaux ſurhauſſez ou ſurbaiſſez, ou qui ſont biais, c'eſt-à-dire, inclinez entr'eux, ſuppoſant que leurs axes ſe rencontrent.

Probleme XLI.

Les Diametres de deux Cylindres qui ſe pénetrent de toute leur circonference ſans que leurs Axes ſe rencontrent, & l'inclinaiſon de leurs côtez entr'eux, étant donnée, tracer l'Ellipſimbre formée par la rencontre de leurs Surfaces.

La Figure 192. eſt faite pour mettre ſous les yeux la difference de ce Problême avec le précedent, qui ne conſiſte qu'en ce que les axes des Cylindres ne ſe rencontrent pas, & la Figure 193. pour la conſtruction. *Fig.* 192. 193.

On peut diſtinguer deux cas dans cette propoſition; le premier, lorſque le petit Cylindre tombe perpendiculairement ſur le côté du grand, c'eſt-à-dire, ſur des lignes paralleles à ſon axe; le ſecond, lorſque les lignes paralleles à l'axe du petit Cylindre, tombent obliquement ſur cel-

Digitized by Google

les qui ſont auſſi paralleles à l'axe du grand Cylindre. Si leurs côtez ſont perpendiculaires entr'eux, on fera pour la préparation des quarts de cercles ou demi-cercles égaux à leurs baſes, comme on a fait au Problême XXXVIII. pour le Cicloïmbre, & ſi leurs côtez ſont obliques, on fera pour la préparation des demi-Ellipſes & quarts d'Ellipſes, comme à la Figure 193.

Soit E a *b* D un quart d'Ellipſe de la ſection oblique d'un plan coupant le Cylindre D E G F, parallelement à l'axe du petit Cylindre qui pénetrent le grand, comme on voit à la Figure 192. ſoit auſſi K H *b* la moitié de l'Ellipſe faite dans le petit Cylindre par la ſection d'un plan tangent au grand; on diviſera à volonté ſa circonference aux points 1, 2, 3, 4, & par ces diviſions on menera des paralleles à l'axe H *x*, qui coupe le quart d'Ellipſe du grand Cylindre en *m* & *x*, plus ou moins loin du centre C, par où paſſe l'axe du grand Cylindre: ſuppoſant que la poſition du petit dans le grand Cylindre eſt donnée en a *b* G F, ces lignes 1 O, 2 N, *m* M, 3 *n*, 4 *o*, étant prolongées vers le quart d'Ellipſe E *a b* D, le rencontreront aux points 1, 2, *m*, 3, 4; on menera auſſi par le point H la ligne H *d*, parallele au diametre K *b*, de même que 3 *e* & 4 *f*, qui rencontrent le côté du Cylindre G *b* prolongé en *d* aux points *e* & *f*, cette préparation étant faite.

Fig. 194. Pour décrire l'Ellipſimbre ſur la ſurface du grand Cylindre D E G F, on commencera par tirer une ligne *d d* parallele à ſon axe par le Problême XXXI. ſur laquelle ayant pris le point M pour le milieu de la ſection, on prendra de part & d'autre de ce point, ſur la ligne *d d*, les diſtances *b f* de la Figure 193. de la préparation que l'on portera en M *f*, *b e* que l'on portera en M *e*, & *b d* que l'on portera en M *d*, auſſi de part & d'autre du point M: enſuite on fera paſſer par tous ces points des Ellipſes qu'on tracera ſur la ſurface du grand Cylindre, ſuivant l'angle de l'inclinaiſon du côté du petit Cylindre ſur le grand, par exemple, I K L [*Fig.* 192.] ou des cercles, ſi le petit Cylindre tombe à angle Droit ſur les côtez du grand.

Sur chacun de ces cercles ou Ellipſes, on portera de part & d'autre de la ligne *d d*, les arcs de cercles ou d'Ellipſe déterminez par les paralleles à l'axe du petit Cylindre, qui paſſent par les diviſions de la ſection Elliptique, ſçavoir *m* a de la Fig. de la préparation ſur M A, & *m b* ſur M B, l'arc *m* 1 en *f* 1 d'un côté & de l'autre du milieu M, & l'arc *m* 4 ſur *f* 4 auſſi de part & d'autre; enfin l'arc *m* 2 ſur *e* 2, & *m* 3 ſur *e* 3, & par les points *d*, 3, 4, B, 4, 3, *d*, 2, 1, A, 1, 2, on fera paſſer une courbe qui ſera l'Ellipſimbre propoſée ſur la ſurface du gros Cylindre.

Pour tracer cette courbe ſur le petit Cylindre, on fera la même choſe qu'au

Digitized by Google

qu'au Problême précedent; ce qu'il eſt inutile de répeter, la ſeule difficulté qu'il y aura, c'eſt qu'ici les deux côtez de la Courbe n'étant pas égaux, le quart du petit Cylindre ne ſuffit pas pour donner les points des quatre parts, comme aux Figures 187. & 190. il faut avoir toutes les diſtances d'une moitié de la courbe à la tangente K*b*: ainſi ayant décrit une Ellipſe autour du petit Cylindre, telle que la feroit la ſection d'un plan tangent au grand, on la diviſera en deux depuis le point d'attouchement repreſenté dans la préparation par le point *b*, & ayant diviſé ſa demi-circonference en parties égales à celles de la demi-Ellipſe *b*HK, ſçavoir *b*4, 43, 3H, &c. on menera par chacune de ſes diviſions des paralleles à l'axe du petit Cylindre, ſur leſquelles on portera ſucceſſivement d'un côté & d'autre les diſtances de la tangente K*b* à l'arc de l'Ellipſe *ab*; ſçavoir, *o*4, *n*3, M*m*, *n*2, *o*1, Ka, leſquelles donneront des points par leſquels on tracera l'Ellipſimbre propoſée.

Si l'on vouloit avoir la projection de cette courbe ſur un plan, au lieu des arcs que l'on a tracé dans la Figure 194. en maniere de perſpective ſur le grand Cylindre, il faudroit en prendre les cordes ou demi-cordes & la conſtruction, à cela près, ſeroit toûjours la même.

Demonstration.

Cette conſtruction émane du même principe que les précedentes. On ſuppoſe les deux Cylindres coupez en tranches par des plans paralleles entr'eux, & à l'axe du petit Cylindre, dans lequel ils font pour ſection des Parallelogrames, dont les intervales ſont marquez par ceux des lignes 4*f*, 3*e*, H*d* qui dépendent de la diviſion qu'on a voulu faire du contour du petit Cylindre, pris ſur un cercle, s'il eſt perpendiculaire au côté du grand, ou ſur une Ellipſe, s'il eſt oblique, comme dans le cas preſent, parce qu'on ſuppoſe ce petit Cylindre coupé par un plan tangent au grand, afin d'avoir un terme d'où l'on puiſſe compter de combien chaque ligne parallele à l'axe s'avance au deſſous de ce plan, pour atteindre à la ſurface du grand Cylindre; c'eſt-à-dire, à la Courbe que ce plan fait dans ce grand Cylindre; or cette courbe eſt un cercle, lorſque le petit Cylindre eſt perpendiculaire au côté du grand, & une Ellipſe, lorſqu'il lui eſt oblique, & parce que tous les plans des tranches ſont paralleles, toutes les Ellipſes qu'ils font ſont auſſi égales entr'elles, de ſorte que dans la préparation, on fait ſervir une Ellipſe pour toutes, ainſi l'Ellipſe E*a b* repreſente celle qui eſt faite par le plan paſſant par les points 2 3 *e*, par 1 4*f* & K*b*; or dans chaque interſection des Parallelogrames du petit Cylindre & des Ellipſes du grand, il n'y a que deux points communs, ſçavoir, a*b* pour celle du milieu, 1, 4, pour l'interſection de la tranche ſuivante, & 2, 3, pour la troiſiéme, leſquelles étant eſpacées

de part & d'autre de la ligne AB, donnent les points du contour de l'Ellipſimbre, *qu'il falloit trouver.*

L'USAGE de ce Problême a été indiqué au Theoreme XX.

PROBLEME XLII.

La poſition d'un Cylindre dans un Cône qu'il pénetre, étant donnée, décrire l'Ellipſimbre formée par la rencontre de leurs Surfaces.

Fig. 195. CE Problême comprend pluſieurs cas qui peuvent tous ſe réſoudre de la même maniere; car 1.° ou les axes du Cylindre & du Cône ſont paralleles entr'eux, 2.° ou ils ſe coupent, 3.° ou perpendiculairement ou obliquement, 4.° ou ils ne ſont pas paralleles, & ne ſe coupent pas, 5.° & alors l'axe du Cylindre eſt perpendiculaire au plan paſſant par l'axe du Cône, 6.° ou il lui eſt incliné, 7.° ou il n'entre pas totalement dans ce plan, lorſqu'il lui eſt perpendiculaire, 8.° ou il n'y entre pas auſſi, lorſqu'il lui eſt incliné.

Tous ces differens cas ſe peuvent réſoudre par la même pratique qui a été expliquée au Problême general, en coupant le Cône & le Cylindre en pluſieurs tranches par des plans paralleles entr'eux, dont la ſituation à l'égard des axes du Cône & du Cylindre eſt arbitraire: il y a cependant en cela du choix pour la commodité de l'exécution; car il convient de les ſituer de maniere qu'ils donnent toûjours les ſections les plus ſimples, nous les avons mis dans la Figure 195. perpendiculairement à l'axe du Cône, pour avoir l'interſection de deux cercles, l'un dans le Cône, l'autre dans le Cylindre, lorſque les axes SC & Xx ſont paralleles entr'eux; ſi l'on avoit diſpoſé les tranches parallelement aux axes, on auroit eu pour interſection celle d'un Parallelograme, & d'une Hyperbole qui eſt moins facile à tracer que le cercle.

SI les axes ſont inclinez entr'eux comme SC & Q*q*, le plan *y*G coupant les deux corps, donnera dans le Cône un cercle, & dans le Cylindre une Ellipſe, dont *y*K ſera la moitié du grand axe, & le diametre de la baſe du Cylindre le petit axe; ainſi il ne s'agit que de décrire cette Ellipſe, & la couper par un cercle qui ait pour Rayon 1*i*, & parce que toutes les Ellipſes qui ſeront faites par les ſections des autres plans paralleles à *yy* ſont égales; on peut ne décrire qu'une Ellipſe, & la couper par les cercles inégaux, qui ſeront les ſections des plans paralleles dans le Cône, en mettant leurs centres dans la diſtance où ils doivent être de celui de l'Ellipſe; par ce moyen on aura une ſuite d'arcs de cercles & d'Ellipſes, leſquels étant tranſportez ſur les ſurfaces du Cône & du Cylindre, comme nous l'avons dit aux Problêmes précedens, donneront autant de points à la circonference de l'Ellipſimbre, qu'on voudra mul-

Digitized by Google

tiplier le nombre des tranches par des sections paralleles, cela est clair après les exemples des Problémes précedens; cependant pour ne pas devenir obscur en voulant être concis, nous en feront l'application à la pratique.

Soient, pour le premier cas où les axes sont paralleles, les plans *y* G, Y *n* paralleles entr'eux, & perpendiculaires aux axes SC du Cône, & X *x* du Cylindre; du point I pour centre & pour Rayon 1 *i*, on décrira un quart de cercle 1 *di*, & du point H pour centre, & pour Rayon le demi-diametre HG du Cylindre, on décrira un autre quart de cercle qui coupera le précedent au point Z, duquel si on abaisse une perpendiculaire sur *y* G, on aura le point *s* pour projection du point Z, & un de ceux de l'axe courbe *b s a* de l'Ellipsimbre; on trouvera de même un autre point *f* de cet axe par l'intersection des deux cercles *o e m* du Cône, & N *z n* du Cylindre; cette préparation étant faite. *Fig.* 195.

Pour tracer l'Ellipsimbre sur le Cône, ayant tiré du sommet S une ligne à sa base, qu'on prendra pour le milieu de l'Ellipsimbre, on placera sur cette ligne les points *b a* de ses deux extremitez dans leur distance du sommet S, & ensuite les points *i* & *m*, par lesquels on fera passer deux cercles, sur lesquels on portera de part & d'autre de la ligne droite les arcs *i* Z & *m z*, qui donneront les points *z* & Z, par lesquels on fera passer à la main la courbe qui sera l'Ellipsimbre demandée; on n'a pas fait de Figure pour cette transposition des arcs trouvez, parce qu'elle est à peu près la même qu'à la Figure 182. ou 185. de la Planche 16.

Pour le second cas où l'axe du Cylindre tombe obliquement sur celui du Cône, on agira de même qu'au précedent, excepté que sur le Cylindre AVTB, où il se fait des Ellipses par la section oblique des plans *y* G, Y *n*, on tracera des Ellipses égales qui auront pour grand axe la ligne *y y* ou YY, & pour petit axe le demi diametre de la base VT du Cylindre; ainsi le point P, qui est à la rencontre des deux surfaces se trouvera par l'intersection du cercle du Cône, dont 1 I sera le Rayon, & de l'Ellipse *y* P *y*; de même que le point O par l'intersection du cercle du Cône qui a pour Rayon 2 L, & de l'Ellipse YOY.

Si des points O & P, on abaisse les perpendiculaires O *o* & P *p* sur les lignes *y* G, Y *n*, on aura les points *p* & *o*, qui feront la projection des rencontres des surfaces O & P, & sur l'axe courbe de l'Ellipsimbre, qui sera courbe B *p o* A; cette préparation étant faite.

Si l'on veut tracer l'Ellipsimbre sur le Cône, on tirera par son sommet une ligne droite, sur laquelle ayant placé les points B & A sommets de la courbe, on y marquera aussi les points I & L, par où on fera passer

Digitized by Google

des cercles, ſur leſquels on prendra de part & d'autre de la droite du milieu les arcs IP, LO, & l'on aura les points P & O, par leſquels & par le point A & B on tracera à la main l'Ellipſimbre demandée, comme au cas précedent.

POUR tracer la même courbe ſur le Cylindre, on commencera par tracer IN parallele à ſon axe, ſur laquelle on portera les points *b* & *a* pour les extremitez de la courbe, & les points *g* & N dans leur diſtance à ces points; on fera paſſer par les points *g*, N & *a* des cercles paralleles à ſa baſe pour le premier cas, & des Ellipſes pour le ſecond cas, & l'on portera ſur ces cercles les arcs *gz*, NZ pour le premier, & *y*P & YO pour le ſecond, pour les points a ou A on prendra la demi-circonference pour avoir les points *bz*, Za d'un côté de la parallele à l'axe, & autant de l'autre, ou B*p*OA d'un côté, & de même de l'autre de la ligne qui paſſe par le ſommet du Cône & le milieu de la ſection; par ces points ainſi trouvez on tracera l'Ellipſimbre demandée.

MAIS ſi le Cylindre étoit perpendiculaire au plan du triangle par l'axe du Cône, on ne pourroit plus faire uſage de la même conſtruction, parce qne les plans coupans le Cône perpendiculairement à ſon axe, couperoient le Cylindre parallelement à ſon axe, & y feroient pour ſection des Parallelogrames, dont les côtez ne détermineroient point la rencontre des deux ſurfaces, alors il faut avoir recours aux tangentes des ſections du Cône.

Fig. 196. SOIT donc [*Fig.* 196.] le Cylindre DO*p d* qui eſt perpendiculaire à l'axe SC du Cône, lequel eſt coupé par un plan paſſant par l'axe X*m* du Cylindre, & SC du Cône; on coupera l'un & l'autre de ces corps par des lignes H*n*, F*m*, IN qui donneront ſur l'axe S*c* les points *n*, *m*, N, deſquels comme centres & pour Rayons *ng*, *m*M, N*k*, on décrira des arcs de cercle *gy*, M*z*, K*x*, auſquels on tirera les tangentes *gb*, M*f*, *ki* égales aux Ordonnées de la baſe du Cylindre GH, XF, KI, & par les points *b*, *f*, *i*, on menera des paralleles à l'axe du Cylindre, juſqu'à la rencontre des arcs comme *by*, *fz*, *ix*, leſquelles ſerviront à tracer la courbe, comme nous le dirons ci-après.

AYANT tracé ſur le Cylindre une Ellipſe par les points donnez E & L
Fig. 199. par le Problême XXXIV. comme *e*, *b*, *f*, *il*, *Fig.* 199. on menera par les points *b f i* donnez à la circonference de cette Ellipſe des paralleles à ſon axe G*y*, F*z*, I*x*, ſur leſquelles on portera les longueurs trouvées *by*, *fz*, *ix*, qui donneront ſur ces paralleles les points *y*, *z* & *x*, par leſquels & par les points *e* & *l* on tracera à la main une courbe, qui ſera celle qu'on demande.

SI l'on veut tracer la même Ellipſimbre ſur le Cône, dont le triangle

Digitized by Google

SBA de la Figure 196. eſt la ſection par l'axe, on operera comme aux cas précedens; ainſi ſuppoſant celui de la Figure 197. qui eſt plus petit faute de place dans la Planche, égal à celui de la Figure 196. on commencera par tirer du ſommet S à la baſe une ligne droite quelconque SB, ſur laquelle on portera les diſtances SE, S*g*, SM, S*k*, SL de la Figure 196. & ayant tracé ſur la ſurface de ce Cône des cercles paſſans par les points *g*, *m*, *k*, on prendra de part & d'autre de ces points, les arcs *gy*, M*z*, *kx*, de la Figure 196. qu'on portera de part & d'autre de la ligne SB, & l'on aura des points *eyzxlxzye*, par leſquels on tracera à la main la courbe propoſée, ſuppoſant comme je viens de le dire, un rapport entre les Figures 196. & 197. qu'on n'a pû obſerver faute de place; mais comme il ne s'agit ici que d'une explication, on peut ſuppoſer égales desFigures inégales. *Fig.* 197.

Lorsque le Cylindre qui pénetre le Cône eſt perpendiculaire à ſon triangle par l'axe, & que les axes ne ſe rencontrent pas, les tangentes aux arcs de cercle des ſections faites par les plans coupans les Cônes par tranches paralleles, ne ſont pas égales de part & d'autre des côtez du Cylindre prolongez comme dans le cas précedent; c'eſt pourquoi il faut diſpoſer la Figure comme à celle de 200. *Fig.* 200.

Ayant placé le centre C de la baſe du Cylindre, par lequel paſſe l'axe qui tombe perpendiculairement au triangle BSA par l'axe du Cône; on décrira de ce centre un cercle *or*DRO que l'on coupera auſſi bien que le Cône par des plans paralleles entr'eux, & à l'axe du Cylindre & perpendiculaires à celui du Cône, leſquels plans ſont repreſentez par les lignes 1, 4, 2, 5, 3, 6, qui coupent le cercle de la baſe du Cylindre aux points *o r*, *d*D, OR, par leſquels on tirera à ces lignes des perpendiculaires indéfinies *o*T, RG, *d*E, DF; enſuite ayant décrit des demi-cercles 1 *h* 4, 2F5, 3G6, on leur menera des tangentes L*h*, EF, TG paralleles à leurs diametres 14, 25, 36, leſquelles détermineront les longueurs des côtez du Cylindre hors du Cône, pour les paralleles à l'axe qui paſſent par les points *o d* O, *r*DR; ainſi le côté du Cylindre qui paſſe par le point *d* ſort du Cône de la longueur *y*E, celui qui paſſe par le point O ſort du Cône de l'intervale *x*T, & ainſi des autres; & parce que les points G & F ſont très près du point d'attouchement des tangentes, ils ſortent très peu du Cône.

Présentement pour tracer cette courbe ſur le Cylindre, on operera de même qu'à la Figure 199. excepté qu'en celle-là nous avons ſuppoſé les diſtances de l'Ellipſe qui coupe le Cylindre égales, de part & d'autre de ſon axe, & qu'ici elles ſont inégales.

Pour tracer la même courbe ſur le Cône, on ſuivra auſſi la même mé-

Digitized by Google

thode qu'à la Figure 197. excepté que l'on ne portera pas les mesures des arcs paralleles sur les deux côtez de la ligne SB, mais tous d'un côté.

Ou bien on tracera sur le Cône une Hyperbole HY tangente au cercle de la base du Cylindre, pour servir de terme, d'où on mesurera les arcs qui coupent les côtez du Cylindre; car les points de la courbe seront toûjours dans l'intersection des cercles des tranches du Cône paralleles à la base, & des côtez du Cylindre paralleles à son axe.

La même operation sert pour les cas où le Cylindre n'entre dans le Cône que d'une partie de la circonferance, comme on le voit dans la même Figure 200. au cercle D*g* 6. *Fig.* 200.

Secondement, si au lieu de faire les tranches paralleles par des plans perpendiculaires à l'axe du Cône, on veut les faire paralleles à l'axe du Cylindre, la solution du Problême sera également Geometrique, mais un peu plus difficile; parce qu'au lieu de cercles dans le Cône, on aura pour section des Ellipses, des Paraboles ou des Hyperboles, suivant l'inclinaison de l'axe du Cylindre à celui du Cône; mais aussi on n'aura dans le Cylindre que des Parallelogrames.

Afin qu'on puisse choisir la maniere qui convient le mieux, nous allons donner un exemple de la courbe formée par la pénetration d'un Cylindre à l'axe du Cône.

Soit [*Fig.* 201.] le triangle par l'axe du Cône *b* S *a*, l'axe de ce Cône SC, celui du cylindre X *c* qui le rencontre, ou qui ne le rencontre pas, supposons premierement qu'il le rencontre; la section plane de ce Cylindre par un plan perpendiculaire à celui qui passe par son axe, & suivant la rencontre avec l'axe SC, sera une Ellipse, dont EL sera le grand axe, & le petit axe sera le diametre DF de la base du cylindre. Soit la moitié de cette Ellipse E *d* L que l'on traversera par autant de lignes droites paralleles que l'on voudra avoir de doubles points de la courbe comme 4: 1, 5, 2, 6, 3, qui couperont l'axe aux points *o*, *c*, O, par lesquels on menera des paralleles à l'axe du Cylindre jusqu'à la rencontre du côté S *b* du Cône, comme O *g*, *c* I, *o* H; chacune de ces lignes sera une partie de l'axe de la courbe qui sera faite dans le Cône par la section d'un plan parallele à l'axe du Cylindre, & les points *g*, I, H en seront les sommets; dans l'exemple present ces courbes seront des Ellipses, parce que les lignes *g* O, IC, H *o* prolongées, rencontreront en dedans les deux côtez du Cône S *b* & S *a* prolongez, mais si le Cylindre avoit été incliné suivant la ligne E *e* parallele à S A, ces courbes seroient des Paraboles. Quelles que puissent être ces sections, elles seront toûjours semblables entr'elles, quoique inégales; on a donc l'axe & le sommet de ces sections, & l'on a *Fig.* 201.

Digitized by Google

auſſi deux points à leur contour que donne une double Ordonnée 4, 1, 5, 2, 6, 3, car à cauſe de l'uniformité du Cône on peut concevoir le côté SO du Cône en l'air ſur le côté SC dans un plan perpendiculaire au plan SC*a*, comme on le voit repreſenté en perſpective dans la Figure 198. mais parce qu'on ne peut pas faire cette préparation ſur le ſolide, on décrira ces courbes ſur le plan du triangle *b*S*a*, en portant les longueurs des axes O*g*, c I, *o*H ſur l'axe SC en O G, *c*C & *o*K, & par les points 4 G I, 5 C 2, 6 K 3, on décrira les Ellipſes ou les Paraboles, ou Hyperboles que les plans des tranches font dans le Cône, & par les points R*dr* des Ordonnées de la demi-Ellipſe E*d*L, on menera des paralleles à l'axe SC juſqu'à la rencontre des courbes 4 G*i*, 5 C 2, 6 K 3, aux points *p*, *q*, *v*.

Cette préparation étant faite, on pourra tracer l'Ellipſimbre ſur le Cône, en traçant une ligne SB [*Fig.* 198.] de ſon ſommet S à la baſe pour ſervir de milieu à la courbe, ſur laquelle ayant porté les longueurs S*e*, S*g*, SI, SH, S*l* de la Figure 201. & ſur les côtez S*b*, S*a* de la Figure 198. des longueurs égales à S4, S1, S5, S2, S6, S3: on tracera ſur la ſurface du Cône les Ellipſes, Paraboles ou Hyperboles qui doivent paſſer par ces trois points, ſur leſquelles on portera de part & d'autre de la ligne SB, les arcs K*u*, C*q*, G*p*, leſquels donneront les points par leſquels & les deux ſommets *e* & L, on tracera à la main l'Ellipſimbre demandée. *Fig.* 198.

Pour tracer la même courbe ſur le Cylindre, il faut ajoûter à la préparation des tangentes à ces arcs, comme KT pour avoir la diſtance de ces tangentes aux arcs des courbes formées par les plans des tranches ſur les côtez du Cône, & alors on s'en ſervira pour décrire l'Ellipſimbre ſur le Cylindre, comme on a fait à la Figure 197. il faut encore remarquer ici que les Figures 201. 198. n'ont pas été faites d'une grandeur rélative, quoiqu'on les ſuppoſe telles, faute de place dans la Planche.

Si l'axe du Cylindre ne rencontroit pas celui du Cône, comme à la Figure 200. mais que l'Ellipſe faite par le plan du triangle par l'axe coupant le Cylindre fut à côté, il faut en prolonger les Ordonnées juſqu'à l'axe & chercher les ſommets des ſections, & tranſporter la ligne du milieu à côté de celle qui paſſe par les ſommets des ſections coniques de la quantité dont elle doit être éloignée du plan paſſant par l'axe de l'Ellipſe, qui fera dans le Cône une Hyperbole, prenant cet intervale ſur l'arc de la ſection conique qui coupe cette Hyperbole; ce qui n'eſt pas difficile à concevoir par les exemples que nous avons donnez pour trouver les points des Ellipſimbres ſur les arcs des ſections coniques formées par les tranches paralleles à l'axe du Cylindre: de ſorte que la préparation peut ſer-

Digitized by Google

vir à tracer les sections solides, où le Cylindre n'entre pas dans le Cône de toute sa circonference.

DEMONSTRATION.

LE même principe qui a servi de base aux démonstrations des Problémes précedens, s'applique si naturellement à celui-ci qu'il ne demande qu'une médiocre attention.

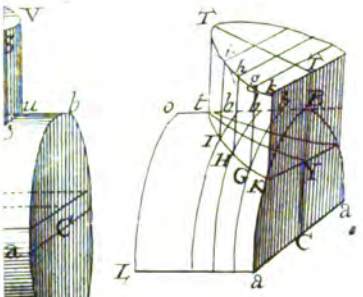
PREMIEREMENT pour la Figure 196. il faut se representer que les lignes *gh*, M*f*, *ki* qui sont dans le plan du triangle BSA lui doivent être perpendiculaires, de même que les lignes GH, XF, KI qui sont les Ordonnées au diametre D*d* de la base du Cylindre, & les correspondantes que l'on a fait égales, doivent aussi être censées paralleles, & dans le même plan que les arcs de cercle *gy*, M*z*, *kx*; de sorte que si l'on imagine des lignes paralleles à l'axe X*m* du Cylindre passant par les points *hfi* qui sont à la surface, ces lignes qui en feront des côtez, rencontreront les arcs en certains points, comme *y*, *z*, *x*, qui feront ceux de l'immersion du côté du Cylindre dans le Cône, par conséquent communs aux deux surfaces, & à la circonference de la courbe formée par leur intersection, donc les arcs *gy*, M*z*, *kx* sont la mesure de la distance des points de l'Ellipsimbre à son axe droit EL, sur la surface du Cône.

MAIS parce qu'on ne peut pas prendre les mêmes mesures dans le cylindre, lorsqu'on veut tracer la même courbe à la surface, on a recours à la supposition d'un plan tangent au Cône, & perpendiculaire à celui qui passe par l'axe du cylindre, & le côté EL du Cône, lequel plan tangent fait dans le cylindre une Ellipse, parce qu'il le coupe obliquement suivant la ligne EL, qui est inclinée à l'axe X*m*: or cette Ellipse est toute hors du Cône, & les lignes *gh*, M*f*, K*i* sont des Ordonnées à son axe EL, puisqu'elles lui sont supposées perpendiculaires, & qu'elles ont été faites égales à celle du cercle de la base du cylindre; donc la distance des extremitez de ces Ordonnées aux arcs de cercle du Cône, prises sur des paralleles à l'axe du cylindre, donne exactement les points d'immersion des côtez passant par les points *hfi* de la circonference de l'Ellipse plane, tangente au Cône; donc ces distances ont dû être portées, comme il a été dit à la Figure 199. pour avoir les points de l'Ellipsimbre *qu'il falloit décrire.*

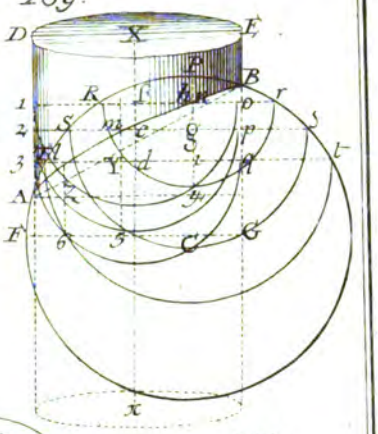
CE que nous pouvons ajouter touchant les pratiques indiquées par les Figures 200. & 201. ne sera qu'une plus ample explication de la premiere: il faut toûjours se representer que par le moyen des plans paralleles coupant la base du cylindre & le Cône en même tems, on s'est donné des points à la surface du cylindre, comme *o*, *r*, D, &c. *Figure* 200. &

Digitized by Google

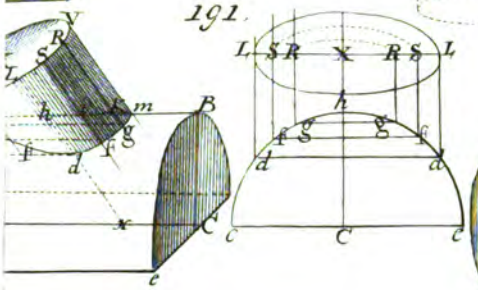
188.



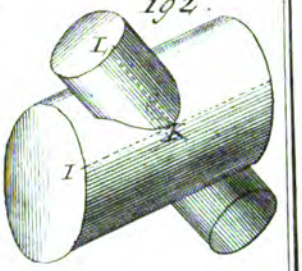
189.



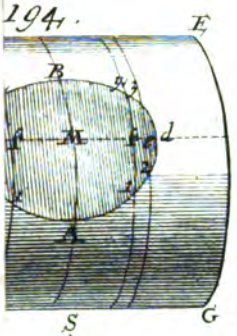
191.



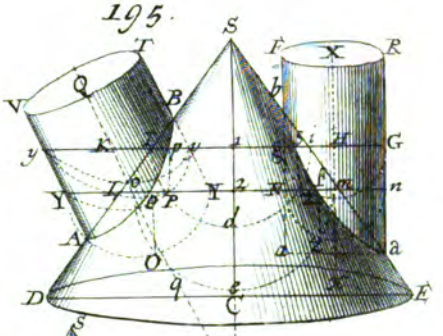
192.



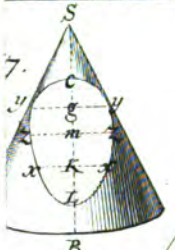
194.



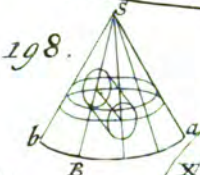
195.



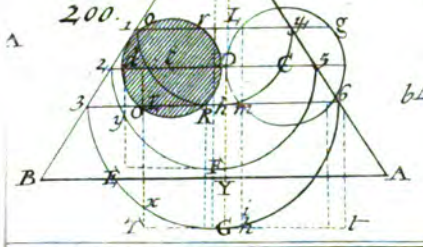
197.



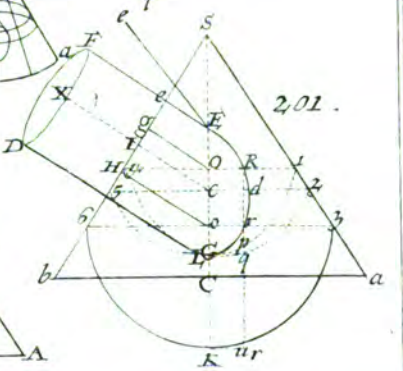
198.



200.



201.



Digitized by Google

Digitized by Google

200. & R*dr* Figure 201. par leſquels on doit faire paſſer des paralleles à l'axe du cylindre pour avoir des côtez marquez à la ſurface; & parce que ces côtez dans la ſuppoſition de la Figure 200. ſont perpendiculaires au plan du triangle par l'axe, ils n'y ſont exprimez ſuivant les Régles de la projection que par un point; il faut donc les coucher ſur le même plan de ce triangle, auſſi bien que les arcs des ſections circulaires du cône, qui n'y ſont exprimées ſuivant les mêmes Régles de la projection 1: 4, 2: 5, 3: 6, & par ce moyen on trouve les interſections de ces arcs avec les côtez du cylindre, leſquelles donnent des points communs aux deux ſurfaces; c'eſt-à-dire, des points de la Courbe que l'on doit tracer; & par conſéquent on eſt obligé de ſuppoſer des plans tangens au cône, comme nous venons de le dire, il faut tirer des tangentes à chacun des arcs des ſections du cône, leſquelles ſeront toutes dans le même plan qui eſt ſuppoſé couper le cylindre & faire une Ellipſe.

La derniere pratique a été ſuffiſamment expliquée par la conſtruction, & par ce qui a été dit ci-devant.

L'uſage de ce Problême a été indiqué au Theoreme XXVI. il ſe préſente aſſez ſouvent dans les Fortifications où les murs ſont preſque toûjours en Talud, & où il y a des arondiſſemens, qui ſont par conſéquent des portions de cônes tronquez, dont les ſommets ſont quelquefois en bas, comme aux arondiſſemens des Contreſcarpes, & des flancs concaves, & quelquefois en haut, comme aux Tours en Talud, & arondiſſemens des Orillons; dans l'Architecture civile, il eſt plus rare.

Des Ellipſimbres compoſées.

Probleme XLIII.

Tracer une Ellipſimbre compoſée, formée par la pénetration d'une Sphère & d'un Cylindre, dont la circonference n'entre qu'en partie dans la Sphère.

Ce Problême ſe réſoudra comme tous les précedens par notre méthode generale, en traçant des perpendiculaires à l'axe du cylindre [*Fig.* 202.] qui traverſent auſſi la ſphère, par leſquelles on ſuppoſe autant de plans paralleles entr'eux, & perpendiculaires au plan paſſant par l'axe du cylindre, & le centre de la ſphère, dont les ſections ſeront des cercles dans l'un & l'autre de ces corps. Pla. 18. *Fig.* 202.

Soit donc la ſphère A B *k b* A pénetrée par le cylindre D E G F, dont l'axe eſt X X. par lequel, & par le centre C de la ſphère, ces deux corps ſont coupez par un même plan: on menera par le centre C un diametre P C *p*

parallele à cet axe, & ayant tiré à ces deux lignes autant de perpendiculaires qu'on voudra $a1$, $b2$, $d3$, $e4$, &c. des points $abde$, &c. pour centres & pour Rayons ab, bi, dk, &c. on décrira autant d'arcs de cercles (les quarts ſuffiſent) & des points o, p, q, r, &c. pris ſur l'axe du cylindre pour centres, & pour Rayons les demi-diametres de la baſe $o1$, $p2$; on tracera autant d'autres arcs de cercle juſqu'à la rencontre des précedens faits dans la ſphère ſur les mêmes diametres prolongez. Les points de leurs interſections x & x ſeront communs aux deux ſurfaces, & ſi de ces points on abaiſſe des perpendiculaires aux mêmes diametres, on aura leur projection ſur le plan paſſant par l'axe du cylindre & le centre de la ſphère, ſur lequel ils donneront autant de points de l'axe courbe de la ſection $Pyyyp$.

Cette préparation étant faite, on s'en ſervira pour tracer l'Ellipſimbre compoſée, comme on a fait pour les Ellipſimbres ſimples, en traçant autant de cercles ſur la ſphère & ſur le cylindre, commençant à compter la meſure des arcs bx, ix, Kx, depuis un cercle majeur, dans lequel ſeront les deux Poles P & p de tous ces arcs; & ſur le cylindre par tracer un côté EG ou DF, d'où l'on meſurera à droite & à gauche les arcs $1x$, $2x$, $3x$, $4x$, ou leur ſupplement, comme il conviendra le mieux, parce qu'il eſt toûjours plus commode de prendre & de porter les meſures des arcs qui ſont au deſſous de 90. degrez, que ceux qui ſont plus grands, à cauſe de la rondeur du cylindre.

La démonſtration de ce Problême eſt trop ſemblable à celle des précedens pour s'y arrêter; chaque arc de cercle qu'on a fait ici, dans le plan du Papier, qui eſt celui qui paſſe par l'axe du cylindre, & le centre de la ſphère, peut être relevé à angle Droit ſur ce plan ſur les lignes qui en ſont les diametres ou les Rayons, ſans qu'il arrive aucun changement à leur interſection x, & à leur projection y, qui eſt dans le même plan, & dans celui de l'arc.

L'usage de ce Problême a auſſi été indiqué au Theoreme XL. il eſt inutile d'en répeter l'explication.

Probleme XLIV.

Tracer une Ellipſimbre compoſée, formée par la pénetration de deux Cylindres, dont la circonference de l'un n'entre qu'en partie dans l'autre.

Il y a deux cas dans ce Problême, qui n'en changent point la conſtruction; car les cylindres ſe coupent à angles Droits, ou obliquement, de quelque façon qu'ils ſe croiſent, il faut toujours ſuppoſer qu'ils ſont coupez par des plans tangens à chacun des cylindres qui les coupent ré-

Digitized by Google

ciproquement, & perpendiculairement aux plans paſſans par chacun de leurs axes; de ſorte que ſi les cylindres ſe croiſent à angle Droit, les ſections de ces plans tangens à un des cylindres ſeront dans l'autre des cercles, & s'ils ſe traverſent obliquement, les ſections faites par les mêmes plans ſeront des Ellipſes dans l'un & l'autre cylindre; cela ſuppoſé, nous choiſiſſons à la Figure 203. le cas où ils ſont perpendiculaires pour plus grande facilité. *Fig.* 203

Soit le cylindre YLNI vû par la baſe repreſenté par le cercle AE*a*B, lequel eſt pénetré par un autre cylindre *d*A*a*D, qui n'entre pas dans le premier de toute la circonference; en ſorte qu'il reſte une partie FB de ſon diametre au dehors, laquelle répond au double de l'arc D*g* de la baſe D*ga*, étenduë ici par ſuppoſition ſur le plan du Parallelograme DA paſſant par ſon axe *ll*.

Ayant tiré un diametre A*a* ſur la baſe du premier cylindre BAE*a*, lequel eſt ici confondu avec le côté du ſecond, quoiqu'il puiſſe paſſer entre C & B, ou entre C & E; on tirera ſur une des extremitez de ce diametre la perpendiculaire *d*A, ou *a*D qui repreſentera le plan tangent au grand cylindre, & le diametre de la baſe du petit, ſur lequel on tracera le demi cercle D*ma* qui repreſentera la moitié de cette baſe, laquelle doit cependant être à angle Droit ſur le plan du Parallelograme *d*A*a*D, mais dont le changement de ſituation n'en fait aucun aux interſections des lignes qu'on en doit tirer.

On diviſera enſuite l'une des deux baſes des cylindres, en parties égales ou inégales; nous diviſerons, par exemple ici, l'arc du demi cercle *a*BA, ou ſeulement le quart du cercle BA en parties égales, ou inégales B*r*, *rq*, *qp*, *pn*, *n*A, & par ces points *npqr*, on tirera des paralleles à l'axe *ll* du cylindre DA prolongées juſqu'à l'arc de la baſe *dm*A, ou D*ma*, qu'elles rencontreront aux points *g*K*mo*.

Cette préparation étant faite, ſi l'on veut tracer l'Ellipſimbre ſur le grand cylindre YN, on commencera par faire à ſa ſurface un cercle parallele à ſa baſe, n'importe où, ſi les cylindres ſe coupent à angle Droit; ou une Ellipſe, ſuivant l'obliquité de la direction des côtez du ſecond cylindre qui le pénetre. On tranſportera ſur ce cercle les diviſions B*r*, B*q*, B*p*, B*n*, en *b*R, *b*Q, *b*P, *b*N de part & d'autre du point *b*, qui a été pris à volonté à la ſurface du cylindre, ſi la ſection eſt un cercle, ou un point correſpondant au point B, s'il eſt une Ellipſe; & par les points *b*RQPN*a* on menera autant de paralleles à l'axe du grand cylindre; puis ayant tracé un cercle pour le milieu de la ſection, ſi on ne l'a pas fait du premier coup, on portera ſur ces paralleles à l'axe toutes les Ordonnées de la baſe du petit cylindre de part & d'autre du cercle pris pour

Digitized by Google

le milieu, comme ici $a\,a$ ſuivant l'ordre de leur poſition à l'égard du point B milieu de la diviſion; ainſi on portera l'Ordonnée cf provenant du point B en cf ſur le gros cylindre de part & d'autre du point c, gb quatre fois en gb, ſur les deux paralleles Rb, Rb; on continuera de même en portant iK deux fois ſur chaque parallele QK de part & d'autre des points i & i, & ainſi de ſuite; & l'on aura les points o, m, K, b, f, b, K, &c. par leſquels on tracera à la main l'Ellipſimbre demandée.

Si l'on veut tracer la même courbe ſur le cylindre D A; on tracera un cercle à la ſurface par un point pris à volonté, ou une Ellipſe, ſi les deux cylindres ſe coupent obliquement, on diviſera la circonference de ce cercle en parties égales à celles de la baſe dmA, au haut de la Figure, en portant de ſuite les arcs df, fb, bK, Km, mo, & recommençant à l'autre demi cercle; & par tous ces points de diviſions ayant tracé autant de paralleles à l'axe du cylindre, on portera de part & d'autre du cercle pris pour le milieu les longueurs des demi-cordes $1r$, $2q$, $3p$, $4n$, qui donneront des points r, q, p, n, par leſquels on tracera la courbe qui eſt l'Ellipſimbre demandée, laquelle ſera égale à la précedente, quoique ſur un cylindre different.

Demonstration.

Pour démontrer ce Problême, il ſuffit de repreſenter les differens effets des ſections des plans qui coupent les deux cylindres par tranches, ſuivant notre principe general; car ſi l'on imagine les deux cylindres coupez par des plans paralleles entr'eux, & à un des deux axes, il eſt évident qu'ils feront des Parallelogrames dans celui où les tranches ſont paralleles à ſon axe, & des cercles dans l'autre, ſi les cylindres ſe pénetrent à angle Droit, ou des Ellipſes égales s'ils ſe coupent obliquement; mais comme l'on peut ſuppoſer les ſections des plans ſucceſſivement paralleles aux deux axes, on aura des Parallelogrames & des cercles dans chaque cylindre qui donneront par differends moyens les mêmes points de la courbe, ce que nous avons fait dans cette conſtruction pour abreger; car nous pouvions également diviſer le ſecond cylindre D A en cercles paralleles à dA, & prendre ſur chacun, à commencer du côté dD, les arcs correſpondans à chacun de ces cercles, raſſemblez ſur la baſe dmA, c'eſt-à-dire, qu'au cercle du milieu paſſant par F & B, on auroit porté deux fois l'arc df, enſuite aux deux Collateraux deux fois l'arc db, & ainſi de ſuite; mais comme l'uſage des lignes droites eſt plus commode & plus exact dans l'exécution, que celui des courbes tracées ſur des ſurfaces courbes, on a choiſi les unes preferablement aux autres, puiſque l'une & l'autre maniere doit également donner les points du contour de l'Ellipſimbre, *qu'il falloit trouver.*

Digitized by Google

U S A G E.

Nous avons fait remarquer au Theoreme XXI. que l'uſage de cette courbe étoit aſſez fréquent dans les ceintres des Voutes, parce que la plûpart ſont cylindriques, & que ſouvent une Voute n'eſt percée que par une portion de cylindre, comme il arrive aux abajours & aux deſcentes de Cave.

Des Ellipſoïdimbres.

Probleme XLV.

Tracer une Ellipſoïdimbre formée par la pénetration de la Sphère & du Cône, dont l'axe ne paſſe pas par le centre de la Sphère.

La ſolution de ce Problême étant toûjours la même, c'eſt-à-dire, fondée ſur le même principe; il ne s'agit que de tracer des lignes paralleles entr'elles ſur le plan qui paſſe par l'axe du Cône, & le centre de la ſphère, & qui ſoient perpendiculaires à cet axe, leſquelles ſeront les diametres des cercles, que les plans paſſans par ces lignes perpendiculairement au triangle par l'axe du Cône, feroient dans le Cône & dans la ſphère; les interſections des cercles du Cône avec ceux de la ſphère, qui ſont ſur le même plan, donneront les points de la Courbe ſur les ſurfaces des deux corps, auſquelles ils ſeront communs, & les perpendiculaires abaiſſées des points d'interſection des arcs ſur leurs diametres communs donneront leur projection, & les points de l'axe courbe de l'Ellipſoïdimbre; la Figure 204. fait voir que c'eſt ainſi qu'on a tracé l'axe courbe A *d* B par une pratique tout-à-fait ſemblable aux précedentes, ſans qu'il ſoit néceſſaire d'y ajoûter une plus longue explication, qui ne pourroit être utile qu'à ceux qui liroient ce Problême, ſans avoir lû auparavant quelques-uns des précedens; il ſuffit de dire en leur faveur que le point *y* eſt trouvé par l'interſection des arcs de cercle *d* E *x* & *g f x*, ayant abaiſſé du point *x* la perpendiculaire *xy* ſur le diametre commun E*f* des arcs faits, l'un du centre *d* pris ſur le diametre de la ſphère I D, & l'autre du centre *g* pris ſur l'axe du Cône S *h*. *Fig.* 204.

Quand nous diſons que les plans qui forment les tranches des deux corps doivent être perpendiculaires à l'axe du Cône, on conçoit bien que ce n'eſt que pour plus de commodité dans l'exécution, comme nous en avons déja prévenu le Lecteur ci-devant, parce qu'alors toutes les ſections dans le Cône étant des cercles, ſont les Figures les plus ſimples & les plus faciles à décrire; car rien n'empêche qu'on ne faſſe les tranches paralleles à l'axe; mais alors leurs plans formeroient des Hyperboles

Digitized by Google

dans le Cône; de ſorte que les points de l'Ellipſoïdimbre ſeroient à l'interſection de differentes Hyperboles, avec differents cercles, j'entends de differentes grandeurs; car les Hyperboles ſeroient toûjours ſemblables, étant formées par des plans paralleles entr'eux. Rien n'empêcheroit, de même qu'on ne fit les tranches inclinées à l'axe du Cône, mais alors les points de la courbe pourroient être à l'interſection des cercles de la ſphère, & des trois autres ſections coniques, Ellipſes, Paraboles ou Hyperboles, ſuivant l'inclinaiſon des plans coupans à l'égard de l'axe du Cône; car le centre de la ſphère étant donné dans le triangle par l'axe du Cône, on parviendroit toûjours au même but, mais par des voyes plus embarraſſantes; ce qu'il faut éviter.

L'USAGE de ce Problême eſt indiqué au Theoreme XIV. pour les enfourchemens des Lunettes ebraſées, ou voutes en Canonieres, qui rachetent une Voute ſphérique, ou d'une Trompe conique qui rachete un Cul-de-four.

PROBLEME XLVI.

Décrire une Ellipſoïdimbre formée par la pénetration du Cône dans le Cylindre, à la rencontre de leurs Surfaces.

SOIT [*Fig.* 205.] le cercle KBA*i*, qui repreſente la baſe du cylindre, & le triangle SD*d*, celui qui eſt la ſection du Cône par ſon axe SC, lequel paſſe, ou ne paſſe pas par le centre X de la baſe du cylindre: les interſections de ce cercle avec le triangle donnent les points communs aux deux ſurfaces du Cône & du cylindre; ſçavoir, deux points dans ſon immerſion AB, & deux ſans ſon émerſion *i*K, leſquels ſont par conſéquent à l'Ellipſoïdimbre.

ON diviſera l'arc BA en autant de parties égales ou inégales que l'on voudra, par leſquelles on tirera des perpendiculaires à l'axe SC du Cône, comme *g n* 1, *e o* 2 ou *e m* 3, & des points *g* & *e* pour centres & pour Rayon la partie qui eſt compriſe dans le Cône *g* 1, *e* 2 ou *e* 3, on décrira des arcs de cercle 1R, 2*u*, 3*x*, & par les points *nom* des diviſions, on menera des paralleles à l'axe SC juſqu'à la rencontre de ces arcs, qu'elles couperont aux points R, *u*, *x*, leſquels ſeront au contour de la courbe; ſi l'on ſuppoſe ces arcs relevez en l'air perpendiculairement au triangle par l'axe ſur leurs diametres.

POUR faire uſage de cette préparation dans la deſcription de l'Ellipſoïdimbre ſur le cylindre, on tracera un cercle à ſa ſurface, pour ſervir de milieu à la Courbe, par exemple GH, ſur lequel ayant tranſporté les diviſions de l'arc BA, à commencer d'un point Q pris pour le point C de la préparation, on portera C*o* & C*p*, en Q*o* & Q*p*, C*n* en Q*n*, & C*m*

Digitized by Google

en Q*m*, & par les points *n o p m* on menera des paralleles à l'axe du cylindre, ſur leſquelles à commencer du cercle G H, on portera de part & d'autre de ce cercle les Ordonnées des arcs 1 R, 2 *u*, 3 *x*, qui ſont *n* R en *r n*, *o u* en *o u*, *m x* en *m x*, & par les points *r u x*, &c. trouvez à la ſurface du cylindre, on tracera à la main une courbe qui ſera l'Ellipſoïdimbre propoſée.

Secondement, ſi on veut tracer la même courbe ſur le cône, on tirera du ſommet S deux côtez à ſa ſurface diametralement oppoſez, comme S D S*d*; on prendra ſur chacun d'eux, les diſtances S B, S A, & S K S*i*, ſi l'on veut tracer la petite ſection, & ſur le côté S D ayant porté les intervales B 1, B 2, on tracera par les points 1. & 2. des cercles paralleles à la baſe, ſur leſquels on portera de part & d'autre de ce côté, les arcs 1 R, 2 *u*, & dans l'autre côté auſſi de part & d'autre l'arc 3 *x*, & par les points R *u x*, on tracera ſur le cône à la main, ou avec une Régle ou Baguette ronde & pliante, la courbe qui ſera l'Ellipſoïdimbre demandée.

Si l'axe du cône étoit incliné au côté du cylindre, il eſt clair qu'au lieu de cercles, il faudroit tracer des Ellipſes.

La Figure fait voir auſſi d'un coup d'œil, comment on doit faire la projection de cette courbe, en tirant par les points donnez *n o m* des paralleles à l'axe du cône, leſquelles étant traverſées par une perpendiculaire G H ſur le même plan, ſi l'on porte de part & d'autre de cette ligne ſur chaque parallele l'Ordonnée correſpondante du cercle fait par chaque tranche, on aura les points T, *r*, *u*, *x*, *t*, &c. par leſquelles menant une courbe, on aura la projection de l'Ellipſoïdimbre demandée.

La démonſtration de ce Problême eſt facile à apercevoir, ſi l'on ſe repreſente les arcs 1 R, 2 *u*, 3 *x* élevez perpendiculairement ſur leurs diametres, & ſur le plan du triangle par l'axe du cône ; car alors les Ordonnées *n* R, ou *m x* repreſentent les côtez du cylindre qui paſſent par les points R, *u*, *x*, de la ſurface du cône, où ſont leurs interſections ; & par conſéquent les points communs aux deux ſurfaces, qui ſont au contour de l'Ellipſoïdimbre ; *ce qu'il falloit trouver.*

Nous avons indiqué au Theoreme XXVI. l'uſage de cette courbe, nos *Embraſures* dans les Tours, ou dans les *Flancs concaves* ſans Talud, ou des Portes ebraſées dans les murs arondis par leurs plans ſans Talud, ſont des portions de cônes qui pénetrent des cylindres.

Digitized by Google

PROBLEME XLVII.

Décrire une Ellipſoïdimbre formée par l'interſection des Surfaces de deux Cônes, dont les Axes ſe coupent.

CETTE courbe ſe décritra par notre méthode generale, en coupant les deux cônes par des plans paralleles entr'eux, & perpendiculaires à l'axe de l'un des deux; la courbe ſera à l'interſection des cercles & des Ellipſes, dont on a les centres & les diametres ou Rayons, & les axes des Ellipſes que l'on trouvera dans le plan qui paſſera par les deux axes; la Fig. 207. Figure 207. & ce que nous avons dit tant de fois en pareilles conſtructions ſuffiſent pour mettre cette pratique ſous les yeux.

L'USAGE de ce Problême eſt principalement pour les Embraſures ou Portes ebraſées en Tour creuſe ou ronde, & en Talud, ſuppoſant quelles ſoient Droites, c'eſt-à-dire, que leur axe ou ligne de direction, ſoit perpendiculaire à la tangente du mur arondi, ou à la corde qui eſt le diametre de la Porte ou Embraſure; ſi la direction eſt rampante, ce ſont deux cônes dont les axes ſe coupent obliquement.

Des Ellipſoïdimbres compoſées.

PROBLEME XLVIII.

Tracer une Ellipſoïdimbre compoſée ſur les Surfaces du Cône & de la Sphère, qui ſe pénetrent.

LA ſolution de ce Problême n'a rien de particulier, que la maniere de trouver les axes droits des deux parties des courbes qui ſe croiſent pour n'en faire qu'une des deux; ce qui détermine leurs points d'inflexions dans le plan paſſant par l'interſection de ces deux axes, perpendiculairement à celui qui paſſe par l'axe du cône.

Fig. 206. SOIT la Figure 206. la ſection d'un cône par ſon axe, & d'une ſphère par ſon centre; ſi l'on tire du ſommet S une tangente STD au cercle de la ſphère PTH, les lignes tirées des points E & H, où la ſphère coupe le cône au point d'attouchement T, ſeront celles que l'on cherche, & le point y, projection du point x, interſection des arcs Tx de la ſphère fait du centre F, & Gx du cône du centre m, ſera celui de l'inflexion formée par la rencontre de deux portions d'Ellipſoïdimbre de la partie ſuperieure & de l'inferieure du cône; les autres points ſe trouveront à l'ordinaire par l'interſection des arcs de la ſphère, dont les centres ſont ſur ſon diametre Pp parallele à l'axe du cône, & des arcs des ſections du cône, dont les centres ſont ſur ſon axe Sm.

Application

Digitized by Google

Application des Pratiques précedentes aux Courbes quelconques formées par les interſections des Cylindres, & les Cônes.

Puisque l'on connoît que les ſections des ſphères, ſphéroïdes, cônes & cylindres faites par des plans, ſont toujours du nombre de celles qu'on appelle coniques qui ne ſortent jamais du ſecond degré, & que lorſqu'ils ſont paralleles, elles ſont toujours ſemblables: quelque puiſſe être la ſection de ces corps qui ſe pénetrent, ſoit à l'égard de leurs axes, ou de leurs côtez, on trouvera toujours ſur chaque tranche l'interſection de deux de ces courbes, qui donnera deux points de la courbe plane ou à double courbure, qui ſe forme par la rencontre des deux ſurfaces; ce qui ſuffit pour ſuppléer dans la pratique à ce qui peut manquer à notre Theorie, concernant les Paraboloïdimbres, Hyperboloïdimbres ou autres poſſibles, comme on voit aux Figures 207. & 208. *Fig.* 207. 208.

De la deſcription des Helices & Limaces.

Quoique les Helices ne ſoient pas du nombre de ces Courbes qui ſont produites par la ſection des corps, auſquelles nous nous ſommes bornez; elles ſont ſi uſuelles en Architecture, qu'on a beſoin très ſouvent de les tracer.

Le mot *d'Helice* vient du Grec *Heliſo*, c'eſt-à-dire, *circumvolvo*, je tourne autour; quelques Mathematiciens ont appliqué ce nom à la ſpirale, qui eſt une courbe plane, c'eſt-à-dire, décrite ſur un plan; mais la plûpart l'ont reſervé pour celles qui s'élevent au deſſus d'un plan en tournant autour d'un corps, comme le Lierre, les Liſerons & les *Convolvulus*, autour d'un Arbre. Pour moi qui tâche d'éviter les periphraſes, j'en reſſerre la ſignification à celles qui tournent autour d'un corps cylindrique ſans s'approcher de leur axe, pour les diſtinguer de celles qui en approchent, que j'appelle *Limaces*, en quoi je la diſtingue encore d'une autre courbe qui eſt dans un plan, que l'on appelle le *Limaçon de M. Paſcal*, laquelle eſt une eſpece de ſpirale.

Je diviſe encore les Helices en régulieres & irrégulieres, les régulieres ſont celles qui montent autour d'un corps cylindrique d'un mouvement uniforme, comme ſont les Vis, dont l'intervale de chaque révolution qu'on appelle le *Pas de la Vis* eſt toujours égal; les irrégulieres ſont celles, dont les Pas de chaque révolution, augmentent ou diminuent ſuivant une certaine proportion que l'on s'eſt fixé.

PROBLEME XLIX.

Tracer une Helice ſur un Corps Cylindrique.

Fig. 209. POUR décrire cette courbe, on tracera un cercle autour du cylindre, s'il eſt droit ſur une baſe circulaire, ou une Ellipſe s'il eſt ſcalene, mais droit ſur une baſe Elliptique, & l'on en diviſera la circonference en autant de parties égales qu'on voudra, comme Figure 209. en ſept pour la moitié qui paroît, c'eſt-à-dire, 14. pour le circuit entier; & par ces diviſions on menera autant de paralleles à l'axe du cylindre; enſuite on réglera l'intervale des révolutions à volonté, & l'on en diviſera un comme O A ou ſon égal B D en autant de parties égales qu'on a diviſé la circonference de la baſe du cylindre (dans l'exemple préſent en 14. parties,) & l'on en portera ſur chaque parallele à l'axe une de plus qu'à la précedente. Ainſi commençant à rien au point *o*, on portera une de ces diviſions ſur la parallele *ag* au point 1, ſur la ſeconde *bb* deux, au point 2, ſur la troiſiéme *ci* trois, au point 3, & ainſi de ſuite juſqu'à ce qu'on ſoit parvenu à la moitié au point 7. alors on retournera vers le point A en faiſant la même augmentation, & continuant ainſi juſqu'au ſommet du cylindre.

SI l'Helice eſt irréguliere, que les diviſions de D à B ſoient dans le rapport des tangentes ou des ſécantes, ou d'autres progreſſions; la conſtruction ſera toujours la même, & la même proportion regnera entre les Pas de la Vis, qu'on a fait regner dans l'intervale d'un ſeul.

COROLLAIRE.

D'ou il ſuit que ſi deux Helices de baſes differentes, c'eſt-à-dire, de differens diametres, ſont un même nombre de revolutions autour d'un axe commun, les intervales des Pas auront plus grande raiſon à leur baſe plus elles ſeront petites, & au contraire plus petite raiſon à l'égard des plus grandes; c'eſt-à-dire, que les Pas de la Vis, quoiqu'également diſtans, ſeront plus inclinez, & les autres plus couchez.

USAGE.

CE Problême ſert à pluſieurs Ouvrages. Premierement à tracer les grandes Vis, les Colomnes torſes, les naiſſances des Voutes tournantes & rampantes, comme la Vis St. Giles, & les joints de Doele des mêmes Vis, les limons tournans, que les Apareilleurs appellent *la Courbe rampante*, le deſſous des marches tournantes des Vis, les appuis des Fenêtres & Baluſtres dans les Tours rondes ou creuſes, &c. comme nous l'expliquerons au IV. Livre.

Digitized by Google

Des Limaces.

Les Limaces ſont, comme nous l'avons dit, des Helices qui s'approchent continuellement de leur axe. Or elles peuvent en approcher en telle raiſon qu'on voudra faire regner entre les lignes droites tirées des points de la courbe perpendiculairement à leur axe; ainſi on peut décrire cette courbe ſur tous les corps coniques, ſphériques ou conoïdes & ſphéroïdes, ellipſoïdes, paraboloïdes, ou hyperboloïdes, ou tout autre corps formé par la révolution de quelque courbe ſur ſon axe; nous donnons ici pour exemple le Cône & la ſphère, *Fig.* 210. 211. *Fig.* 210. 211.

On peut encore faire regner une certaine progreſſion entre les intervales de chaque révolution de cette courbe, ou les faire égaux ſuivant le deſſein qu'on ſe propoſe.

Probleme L.

Tracer une Limace ſur un Cône ou ſur une Sphère, ou Sphéroïde.

On diviſera la baſe du Cône [*Fig.* 210.] ou la baſe circulaire ou Elliptique d'une Hemiſphère ou Hemiſphéroïde en autant de parties égales que l'on voudra, par leſquels on tirera autant de lignes droites au ſommet du Cône, ou autant de cercles ou Ellipſes au Pole P de la ſphère ou du ſphéroïde. Enſuite on diviſera le côté du Cône en un même nombre de parties, ſi l'on ne veut qu'une révolution, ou ſi l'on en veut pluſieurs en un plus grand nombre, comme du double, triple ou quatruple, & l'on fera ces parties égales ſi l'on veut, ou diminuant ſuivant un certain rapport, par exemple pour le Cône, on peut les faire diminuer ſuivant le rapport des paralleles à la baſe d'un triangle Iſoſcele formé par deux des côtez du Cône, & par la premiere diviſion priſe à volonté, & pour l'Hemiſphère, par les arcs paralleles à la baſe d'un triangle ſphérique, comme *cd*P [*Fig.* 211.] dont la baſe *cd* ſera priſe à volonté pour le premier intervale; ce qui donnera une échelle de diviſions inégales, qu'on portera ſur chaque ligne du Cône tendant au ſommet, comme ſur *a*S (*Fig.* 210.) une diviſion, ſur *b*S deux, ſur *c*S trois, & ainſi de ſuite. *Fig.* 210. 211.

Pour la ſphère, on portera ſur les cercles tendant au Pole les meſures ſuivies de même avec leur augmentation d'une partie ſur chacune.

Digitized by Google